МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИИ
ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И.Кузьмичёв

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА-2

Практикум для студентов 1-го курса

Новосибирск 2011

УДК 512(075.8) Печатается по решению

ББК 22.143я73-4 Редакционно-издательского совета НГПУ

К 893

Н а у ч н ы й р е д а к т о р :

кандидат физико-математических наук, зав.кафедрой алгебры ИФМИЭО НГПУ

М. П. Тропин

Р е ц е н з е н т ы :

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики СО РАН

М. В. Нещадим,

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры ИФМИЭО НГПУ

Ю. В. Сосновский

К 893 **Кузьмичёв, А. И.**

Линейная алгебра–2: практикум для студентов 1-го курса / А. И. Кузьмичёв. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2011. – 155 с.

Пособие является практикумом для второй части курса линейной алгебры и входит в серию «Учебно-дидактические комплексы кафедры алгебры». В него вошли разработки практических занятий по таким темам, изучаемым во втором семестре, как «Комплексные числа», «Векторные пространства», «Линейные операторы», «Квадратичные формы». В конце каждой темы дан примерный вариант контрольной работы.

Предназначено для преподавателей и студентов математических специальностей педагогических вузов.

УДК 512(075.8)

ББК 22.143я73-4

ТЕМА 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§1. Комплексные числа, действия над ними, комплексная плоскость

Определение. *Геометрической формой записи* комплексного числа z называется его запись в виде $z=(x;y)$, где $x,y\in\mathbb{R}$. *Алгебраической формой записи* – запись $z=x+yi$, где $i^2=-1,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Действия с комплексными числами.

а) В геометрической форме:

$$(a;b)=(x;y)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a=x,\\ b=y;\end{cases}$$

$$(a;b)+(x;y)=(a+x;\,b+y);$$

$$(a;b)(x;y)=(ax-by;\ \ ay+bx);$$

$$z^{-1}=(a;b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right),\ z\neq(0;0).$$

б) В алгебраической форме:

$$a+bi=x+yi\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}a=x,\\ b=y;\end{cases}$$

$$(a+bi)+(x+yi)=(a+x)+(b+y)i;$$

$$(a+bi)(x+yi)=ax+ayi+bxi+byi^2=(ax-by)+(ay+bx)i;$$

$$z^{-1}=(a+bi)^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i,$$

$$z\neq0\ \Leftrightarrow a+bi\neq0+0i\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\neq0,\\ b\neq0,\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ a^2+b^2\neq0.$$

Примеры. 1) Выполните действия для чисел в геометрической форме:

$$\frac{(2;-1)\cdot(3;2)-(1;2)\cdot(-1;1)}{(1;-1)\cdot(3;2)}=\frac{(8;1)-(-3;-1)}{(5;-1)}=(11;2)\cdot(5;-1)^{-1}=$$

$$=(11;2)\cdot\left(\frac{5}{26};\frac{1}{26}\right)=\left(\frac{55-2}{26};\frac{11+10}{26}\right)=\left(\frac{53}{26};\frac{21}{26}\right).$$

2) Выполните действия для чисел в алгебраической форме:

$$\frac{(2-i)\cdot(-1+3i)-(1+2i)^2}{(-1+i)(3+i)}=\frac{-2+6i+i-3i^2-1-4i-4i^2}{-3-i+3i+i^2}=\frac{4+3i}{-4+2i}=$$

$$=\frac{(4+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)}=\frac{-16-8i-12i-6i^2}{16+8i-8i-4i^2}=\frac{-10-20i}{20}=-\frac{1}{2}-i\,.$$

Определение. *Сопряжённым* к комплексному числу $z=a+bi$ называется комплексное число $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$. *Действительной частью* комплексного числа $z=a+bi$ называется действительное число $\operatorname{Re}(z)=a$, *мнимой частью* – действительное число $\operatorname{Im}(z)=b$, *модулем* – неотрицательное действительное число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Пример. Для комплексного числа $z=-2+3i$ имеем

$$\overline{z}=\overline{-2+3i}=-2-3i,\quad \operatorname{Re}(z)=-2,\quad \operatorname{Im}(z)=3,$$

$$|z|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\,.$$

Теорема (о свойствах сопряжённого). *Для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z выполняются свойства:*

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;

2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

3) $\overline{\overline{z}} = z$ *;*

4) $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ *;*

5) $z = \overline{z} \iff z \in R \iff \operatorname{Im} z = b = 0$.

С каждым комплексным числом $z = a + bi$ взаимно однозначно связана точка $(a;b)$ на координатной плоскости с абсциссой $a = \operatorname{Re}(z)$ и ординатой $b = \operatorname{Im}(z)$. При таком представлении координатная плоскость называется *комплексной*. Ось абсцисс называется *действительной осью* и обозначается $\operatorname{Re}(z)$, а ось ординат – *мнимой осью* и обозначается $\operatorname{Im}(z)$. *Радиус-вектором* комплексного числа $z = a + bi$ называется вектор на комплексной плоскости с началом в начале координат и концом в точке, изображающей комплексное число z .

Пример. Изобразите на комплексной плоскости комплексные числа $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i$ и их радиус-векторы (см.рис.1).

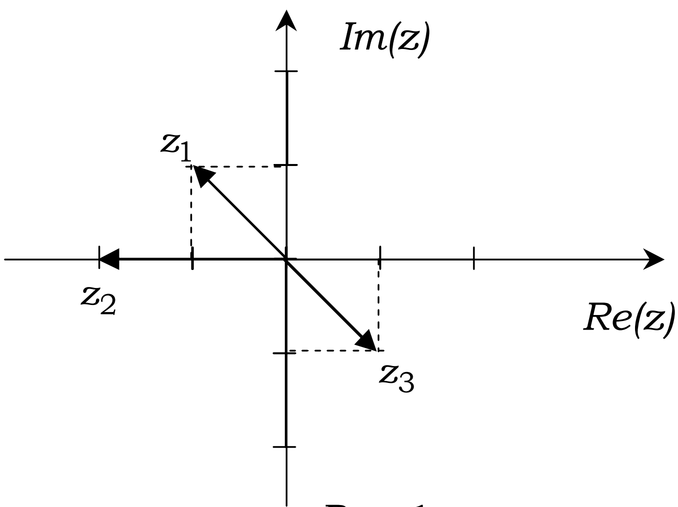

Рис.1

Теорема (свойства модуля комплексных чисел). *Если* $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *и* $a \in \mathbb{R}$ *, то выполняются следующие свойства:*

1) $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0; \end{cases}$

2) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

3) $|z| = 0 \iff z = 0$;

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

5) если $z \ne 0$, то $\left|z^{-1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$;

6) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

7) $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|$.

Замечание. Геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = x + yi$ состоит в том, что $|z_1 - z_2|$ равен *расстоянию* между точками $A_1(a; b)$ и $A_2(x; y)$ на комплексной плоскости.

Пример. Изобразите на комплексной плоскости множество всех таких комплексных чисел z, что $0 \le \mathrm{Re}\big(z(1-i) \; -1+3i\big) < 2$.

Пусть $z = x + yi$. Найдём ограничения, которые накладывает исходное условие на x и y:

$$\mathrm{Re}\big((x+yi)(1-i) \; -1+3i\big) = \mathrm{Re}\big(x - xi + yi - yi^2 - 1 + 3i\big) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((x+y-1) \; + (-x+y+3)i\Big) = x + y - 1 .$$

В результате $0 \le x + y - 1 < 2$. Изобразим на комплексной плоскости множество всех точек $M(x; y)$, удовлетворяющих этим условиям. Для этого построим прямые $x + y - 1 = 0$ и $x + y - 1 = 2$. Вторую прямую проводим пунктиром (см.рис.2). Данному условию удовлетворяют все точки, лежащие выше первой прямой и ниже второй прямой, т.е. точки заштрихованной области плоскости.

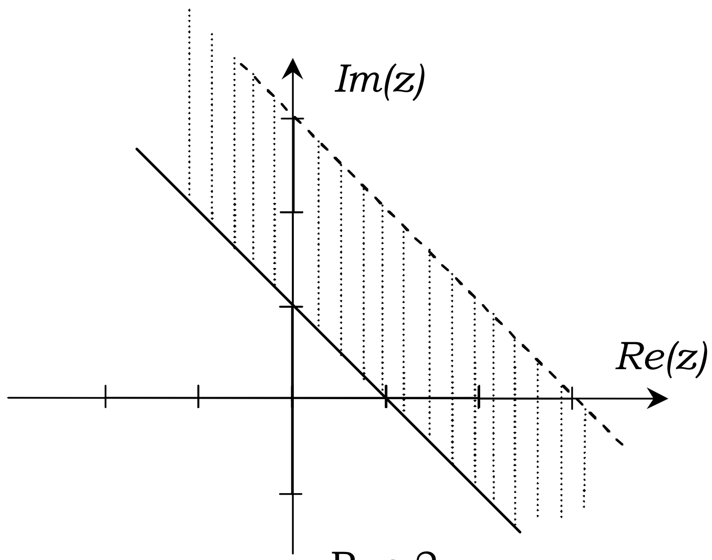

Рис.2

Пример. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, которые удовлетворяют условиям $\begin{cases} |z-2+i| \le 2, \\ |z-1-2i| > 2. \end{cases}$

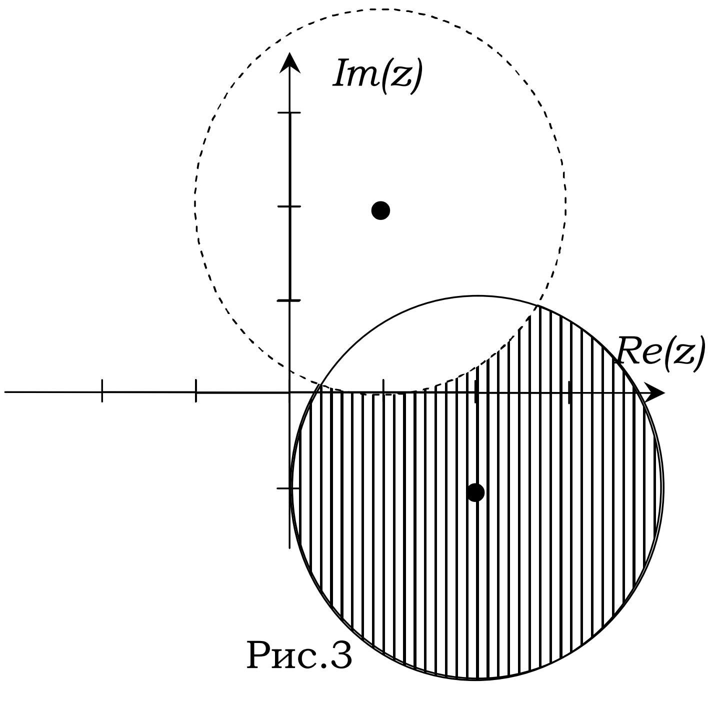

Рис.3

Как известно, условие $|z - z_0| = r$, $r > 0$, задаёт окружность радиуса r с центром в точке z_0.

Т.к. $|z - 2 + i| = |z - (2 - i)|$, $|z - 1 - 2i| = |z - (1 + 2i)|$, то первое условие задаёт множество всех точек круга радиуса 2 с центром в точке $2 - i$, включая точки окружности. Второе условие задаёт внешность круга с центром в точке $1 + 2i$ радиуса 2. Искомым множеством будет их пересечение (см.рис. 3).

Занятие 1

Теоретический материал. Поле комплексных чисел, действия с комплексными числами, их изображение. Операция взятия сопряжённого.

Задания для практических занятий

1. Дайте определение поля, подполя. Перечислите свойства полей.

2. Докажите, что квадратные матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, образуют поле относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Это поле изоморфно полю комплексных чисел $\mathbb{C}$.

3. Выполните действия с комплексными числами в геометрической форме:

а) $(1;\,2)(-1;\,1) + (2;\,1)(1;\,-1)$; б) $(2;\,1)(-1;\,3) - (2;\,3)(-1;\,2)$;

в) $\dfrac{((-1;\,2) + (2;\,3))\,(1;\,-2)}{(2;\,1)(-1;\,1)}$; г) $\dfrac{(1;3)(-2;2) - (3;-1)(-2;3)}{(1;-1)(-2;1)}$;

д) $\dfrac{(2;1)(-2;3) + (3;-2)(-3;2)}{(2;-1)(1;-2)}$; е) $\dfrac{(1;-1)(2;3) - (3;1)(1;-4)}{(3;2)(-1;1)}$.

4. Выполните действия с комплексными числами в алгебраической форме

а) $(1-i)(2+i)-(3-2i)(1-i)$; б) $\dfrac{(2-3i)^2}{i}$;

в) $(1-2i)^3$; г) $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$;

д) $\dfrac{(2-i)(3+2i)-(1+i)(-2+i)}{(1-i)(-2+i)}$;

е) $\dfrac{(1-i)^2(2-3i)+(1-2i)(2+i)^2}{(-1+i)(-1-i)}$;

ж) $\dfrac{(2+i)\big((1-i)(1+2i) \ -(2+i)(3-i)\big)-(2-i)(-1+3i)}{(1-2i)(2+i)}$.

5. Решите уравнения для чисел в геометрической форме $z=(x;y)$:

а) $z+(1;2)=(2;3)$;

б) $z+(1;2)(-2;1)=(2;3)(-1;2)$;

в) $(1;-1)z+(2;1)(3;-1)=(2;1)(1;-2)$;

г) $(2;1)z=(-1;3)$.

6. Найдите $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\bar{z}$, $z\bar{z}$, $\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}$:

а) $z=2+i$; б) $z=-2+i$;

в) $z=2-i$; г) $z=-2-i$;

д) $z=(1+i)(2-i)$.

7. Решите уравнение для чисел в алгебраической форме $z = x + yi$:

а) $2 - i + z = 3 + 2i$; б) $(1 - i)z = 3 - 2i$;

в) $2 - i + \overline{z} - 1 + 2i = i$;

г) $(1 - i)\operatorname{Re}(z) + (2 + 3i)\operatorname{Im}(z) = 1 + 2i$;

д) $i\operatorname{Im}(\overline{z}) + (2 - i)\operatorname{Re}(z) = 2 - i$; е) $z^2 = -4$;

ж) $z^2 = 3 - 4i$; з) $z^2 = i$;

и) $z^2 = 1 + i$; к) $z^2 + \overline{z} = 2$.

8. Изобразите на комплексной плоскости комплексные числа:

$z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -2 + i$; $z_3 = -2 - i$; $z_4 = 1 - 2i$;

$z_5 = -2$; $z_6 = 3i$; $z_7 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; $z_8 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. Докажите, что сложение комплексных чисел равносильно сложению их радиус-векторов по правилу параллелограмма.

Дополнительные задания

10. Выполните действия:

а) $\dfrac{(2;3)(3;2) - (1;-3)(2;2)}{(1;-1)(3;1)}$;

б) $\dfrac{(1;2)\big((2;3) - (1;1)\big) + (2;1)(3;2)}{(2;1)(-1;2)}$;

в) $\dfrac{(2 + i)(3 - 2i) - (-1 + 2i)(3 + 1)}{(1 - i)(2 + i)}$;

г) $\dfrac{(-2+i)(3-2i)+(2+i)(1-3i)}{(1+2i)i}$.

11. Вычислите:

а) i^{77}; б) i^{96};

в) i^{-13}; г) i^{-29};

д) i^n для каждого $n \in$; е) $\left(-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3$;

ж) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^n}$ и $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$ для каждого $n \in$.

12. Выясните, при каких условиях произведение двух комплексных чисел является:

а) чисто мнимым; б) действительным.

13. Выясните, при каких условиях для комплексного числа z:

а) $z = \overline{z}$; б) $z = -\overline{z}$;

в) $z = \overline{z}^{-2}$; г) $\dfrac{\overline{z}}{z} = i$;

д) $\dfrac{z}{\overline{z}} = i$.

14. Докажите, что для $z \neq 0$ нахождение z^{-1} сводится к вычислению $\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

15. Изобразите на комплексной плоскости:

а) $z = 3-2i$; б) $z = 2-3i$;

в) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; г) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

д) $\overline{z}$, $-z$, $-\overline{z}$ для комплексного числа z, расположенного во второй четверти комплексной плоскости.

16. Решите уравнения:

а) $(1-i)\overline{z}-3iz=2-i$; б) $z\overline{z}-2\overline{z}=3-i$;

в) $z\overline{z}+3(z+\overline{z})=3i$; г) $z^2+5z+9=0$;

д) $z^3-3z+2=0$; е) $z^4+4=0$;

ж) $\overline{z}=z^2$; з) $\overline{z}=z^3$;

и) $z^2-(2+i)z+(-1+7i)=0$; к) $z^2=i$;

л) $z^2=3-4i$; м) $z^2=5-12i$.

17. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i,\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(1-i)z_1-3z_2=-i,\\2z_1-(3+3i)z_2=3-i;\end{cases}$

в) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=1,\\(1-i)z_1+(2+i)z_2=4.\end{cases}$

Занятие 2

Теоретический материал. Модуль комплексного числа, свойства модуля, его геометрический смысл. Изображение комплексных чисел.

Задания для практических занятий

18. Дайте определение модуля комплексного числа. Сформулируйте свойства модуля, геометрический смысл модуля комплексного числа и модуля разности двух комплексных чисел.

19. Вычислите $|z|$, если:

а) $z = 3 - 4i$; б) $z = 3 + 4i$;

в) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$; г) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$;

д) $z = -1 + i$; е) $z = -1 - i$;

ж) $z = (2 - i)(-1 + i)$; з) $z = 12 + 5i$;

и) $z = -12 - 5i$; к) $z = 2\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

20. Докажите, что $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

21. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 верно равенство $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

22. Вычислите:

а) $\left|\frac{(1 - i)(2 + i)}{1 + i}\right|$; б) $\left|\frac{(1 - i)(2 + i) + (3 + 2i)(-1 + 2i)}{(1 + i)(1 - 2i)}\right|$;

в) $\left|z^{11}\right|$, если $|z| = 1$; г) $\left|z^{-3}\right|$, если $|z| = 2$;

д) $\left|\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right|$; е) $\left|\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right|$;

ж) $|\sin\varphi - i\cos\varphi|$; з) $\left|\frac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}\right|$;

и) $\left|\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\sin\varphi - i\cos\varphi}\right|$.

23. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, обладающих свойствами:

а) $|z| = 2$;

б) $|z| < 3$;

в) $|z| \ge 1$;

г) $|z - 2 + i| = 3$;

д) $|z + 2 + i| \le 2$;

е) $|z - 1 - 2i| > 2$;

ж) $|z - 2 + i| = |z + 1 - 3i|$;

з) $|z + 3 - i| = |z - 2 - i|$;

и) $|z + 1 - 3i| \le |z - 2 + i|$;

к) $|z - 1 - 3i| \le 2$ и $|z - 3 - i| \le 3$;

л) $|z + 1 - 3i| \le 2$ и $|z - 2 - i| > 4$;

м) $\mathrm{Re}\left((1 - i)\overline{z} - 2 + 3i\right) \le 1$ и $|z - 3 - i| \le 4$;

н) $\mathrm{Im}\left((2 + i)z \quad - 1 - 4i\right) > -2$ и $|z - 2 - i| \le 2$;

о) $|z - 2 + i| = |z + 3 - 2i|$ и $|z - 2 - 3i| \le 4$;

п) $1 \le |z - 1 + 2i| \le 3$.

24. Докажите что:

а) если $|z| < 1$, то $\left|z^2 - z + i\right| < 3$;

б) если $|z| \le 2$, то $1 \le \left|z^2 - 5\right| \le 9$.

25. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin x = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

Дополнительные задания

26. Вычислите $|z|$, если:

а) $z = -3 - 4i$; б) $z = 5 - 12i$;

в) $z = 15 - 8i$; г) $z = -8 + 15i$;

д) $z = \sin\varphi - i\cos\varphi$; е) $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$;

ж) $z = \dfrac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^4}{(\sin\varphi + i\cos\varphi)^8}$; з) $z = -3(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

и) $z = \dfrac{(2-i)(1+3i)-(3+2i)(2-3i)}{(1-i)(2+i)}$.

27. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, обладающих свойствами:

а) $|z - 3 + i| \le 3$ и $|z - 1 - 2i| \le 2$;

б) $|z - 2 - i| \le 3$ и $|z - 1 - i| \ge 4$;

в) $\operatorname{Im}\left((1+2i)\overline{z}-2+i\right)>2$ и $|z+1-3i|\leq 4$;

г) $\operatorname{Re}\left((1+i)z \quad +1-2i\right)<3$ и $|z-2-i|\geq 3$;

д) $|z-3+i|=|z+2-2i|$ и $|z+1-i|\leq|z+3+i|$;

е) $|z-1-i|+|z+3-i|=5$;

ж) $|z-1+2i|+|z-3+i|\leq 3$.

28. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}\cos x=-1,\\ \sin x=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\cos x=-\dfrac{1}{2},\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$

в) $\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$

д) $\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

29. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, для которых $|z|=1$, и докажите, что оно образует коммутативную группу относительно операции умножения комплексных чисел.

§2. Тригонометрическая форма комплексного числа и её применение

Определение. *Аргументом* ненулевого комплексного числа $z=a+bi$ называется угол между положительным направлением действительной оси OX и радиус-вектором числа z.

Аргумент числа $z = 0 = 0 + 0i$ не определён. Для всякого $z \neq 0$ аргумент существует, но определён с точностью до 2π.

Главным аргументом $arg(z)$ комплексного числа $z \neq 0$ называется тот его аргумент φ, который находится в пределах от 0 до 2π: $0 \le \varphi < 2\pi$.

Произвольный аргумент обозначается $Arg(z)$:

$$Arg(z) = \arg(z) + 2\pi k,\ k \in \quad .$$

Для нахождения аргумента ненулевого комплексного числа $z = a + bi$ требуется решить систему

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin x = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Определение. *Тригонометрической формой* комплексного числа $z = a + bi$ называется его представление в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Замечание. 1) Для любого $z \neq 0$ тригонометрическая форма существует, причём $r = |z|$, $\varphi = \arg(z) + 2\pi k$, где $k \in$.

2) Зная тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, легко изобразить его на комплексной плоскости: оно находится на пересечении окружности радиуса r с центром в начале координат и луча, выходящего из начала координат и составляющего угол φ с положительным направлением действительной оси (см.рис.4).

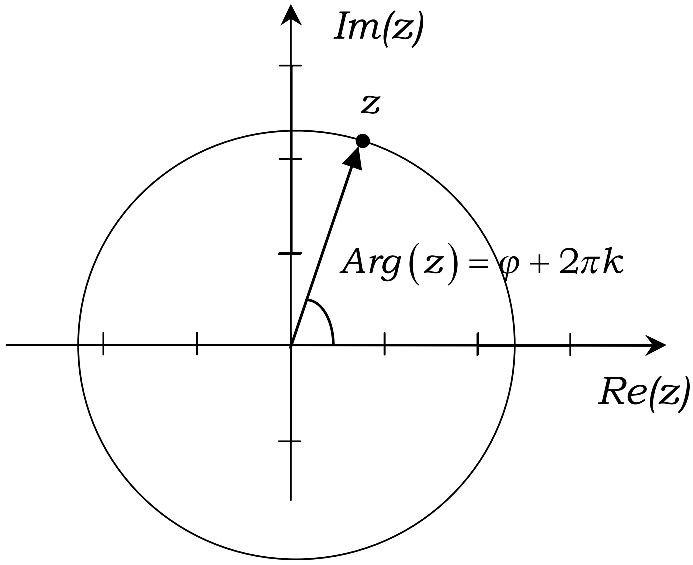

Рис.4

Теорема (о действиях с комплексными числами в тригонометрической форме). *Для любых комплексных чисел* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $u=t(\cos\psi+i\sin\psi)$, *где* $r,t,\varphi,\psi\in\mathbb{R}$ *и* $r,t>0$, *выполняются следующие свойства.*

1) $z\cdot u=(rt)\cdot\left(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)\right)$.

2) Если $z\neq 0$, *то* $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\cdot\left(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\right)$.

3) Если $z\neq 0$, *то* $\dfrac{u}{z}=\dfrac{t}{r}\cdot\left(\cos(\psi-\varphi)+i\sin(\psi-\varphi)\right)$.

4) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$ *для любого натурального числа* n.

5) $z^n=\left(r^n\right)\cdot\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)$, $n\in\mathbb{N}$ *(формула Муавра)*.

Определение. *Корнем* n*-й степени* $(n\in\mathbb{N})$ из комплексного числа z называется такое комплексное число u, что $u^n=z$.

Теорема (о корнях n-й степени из 1). *Существует ровно n различных комплексных корней n-й степени из 1, которые находятся по формулам:*

$$u_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Обозначение. $K_n = \left\{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}$ – множество всех комплексных корней n-й степени из 1.

Следствие. *Все n различных комплексных корней n-й степени из 1 можно изобразить точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, с центром в начале координат и с одной из вершин в точке $M(1; 0)$, соответствующей корню u_0.*

Определение. Корень n-й из единицы u называется *первообразным* или *примитивным,* если он не является корнем из единицы меньшей степени, т.е. $u^n = 1$ и $u^k \neq 1$ для любого $0 < k < n$.

Пример. Для $n = 6$ имеем:

$$u_0 = \cos\frac{2\pi 0}{6} + i\sin\frac{2\pi 0}{6} = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$u_1 = \cos\frac{2\pi 1}{6} + i\sin\frac{2\pi 1}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$u_2 = \cos\frac{2\pi 2}{6} + i\sin\frac{2\pi 2}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$u_3 = \cos\frac{2\pi 3}{6} + i\sin\frac{2\pi 3}{6} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$u_4 = \cos\frac{2\pi 4}{6} + i\sin\frac{2\pi 4}{6} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,,$$

$$u_5 = \cos\frac{2\pi 5}{6} + i\sin\frac{2\pi 5}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Т.к. $(u_0)^1 = 1$, $(u_1)^6 = 1$, $(u_2)^3 = 1$, $(u_3)^2 = 1$, $(u_4)^3 = 1$, $(u_5)^6 = 1$, и в любой меньшей натуральной степени эти числа не равны 1, то первообразными корнями шестой степени из 1 являются u_1 и u_5.

Теорема (о корнях n-й степени из комплексного числа). *Существует ровно n различных комплексных корней n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, которые находятся по формулам:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Следствие. *Корни n-й степени из числа $z \neq 0$ можно изобразить точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.*

Пример. Найдите и изобразите на комплексной плоскости все корни 4-й степени из комплексного числа $z = \dfrac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{1+i}$ (см.рис. 5).

Имеем

$$z = \frac{\left(\left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \sqrt{3} - i = \sqrt{3} + (-1)i\,;$$

$$a = \sqrt{3}\,,\ b = -1\,,\ |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2\,.$$

Решая систему $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{2}, \\ 0 \le \varphi < 2\pi, \end{cases}$

находим, что $\varphi = \dfrac{11\pi}{6}$ и $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. Затем применяем формулы нахождения корней:

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{24} + i\sin\frac{11\pi}{24}\right);$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i\sin\frac{23\pi}{24}\right);$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{24} + i\sin\frac{35\pi}{24}\right);$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24} + i\sin\frac{47\pi}{24}\right).$$

Разница между аргументами соседних корней составляет $\dfrac{12\pi}{24} = \dfrac{\pi}{2}$.

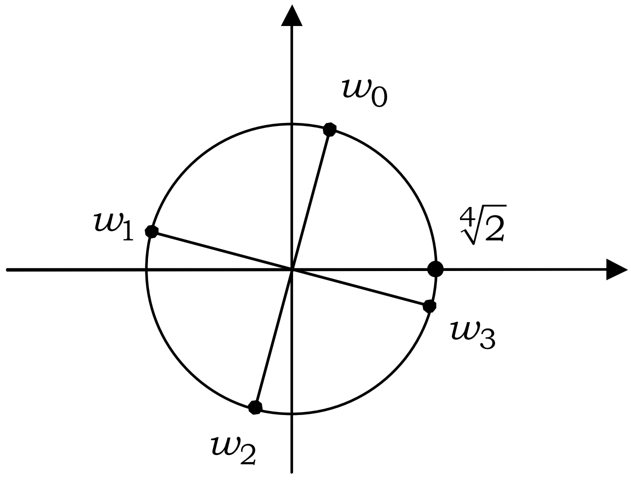

Рис.5

Пример. Выразите $\cos 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Для решения задачи вычислим $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$ двумя способами.

<u>1-й способ:</u> по формуле бинома Ньютона.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi \cdot i\sin\varphi + 6\cos^2\varphi \cdot (i\sin\varphi)^2 +$$

$$+4\cos\varphi \cdot (i\sin\varphi)^3 + (i\sin\varphi)^4 =$$

$$= \left(\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right) +$$

$$+i\left(4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi\right);$$

<u>2-й способ:</u> по формуле Муавра.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi .$$

Из равенства левых частей этих формул получаем равенство правых частей, записанных в алгебраической форме:

$$\left(\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\right) +$$

$$+i\left(4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi\right) = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi .$$

Равенство комплексных чисел означает равенство их действительных и мнимых частей:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi + \sin^4\varphi ,$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi - 4\cos\varphi \cdot \sin^3\varphi .$$

Занятие 3

Теоретический материал. Аргумент и тригонометрическая форма комплексного числа. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

Задания для практических занятий

30. Найдите тригонометрическую форму комплексных чисел z и изобразите их на комплексной плоскости по их модулю и аргументу.

а) $z = 1 - i$; б) $z = -\sqrt{3} + i$;

в) $z = -i$; г) $z = -3$;

д) $z = 2i$; е) $z = 4$;

ж) $z = 1 + \sqrt{3}i$; з) $z = \sqrt{3} - i$;

и) $z = 1 - \sqrt{3}i$; к) $z = 5 - 12i$;

л) $z = -15 + 8i$.

31. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$; б) $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$;

в) $z = \dfrac{1}{-\cos\varphi - i\sin\varphi}$; г) $1 + \cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}$;

д) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^2$;

е) $z = \left(\sin\dfrac{\pi}{6} - i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

ж) $\dfrac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

32. Для комплексного числа $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ найдите z^4, z^{-1}, z^{11}, z^{13}.

33. Для комплексных чисел $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ и $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ найдите тригонометрическую и алгебраическую формы следующих выражений:

а) $\frac{z_1}{z_2}$; б) $\frac{z_1^{10}}{z_2^{20}}$;

в) $\frac{z_1^{22}}{z_2^{40}}$; г) $\frac{z_2^{20}}{z_1^{9}}$.

34. Вычислите:

а) $\frac{(1-i)^{48}}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{25}}$; б) $\frac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{15}}{(1+i)^{27}}$;

в) $\frac{(2i)^{47}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{48}}$; г) $\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{50}}{(4i)^{26}}$.

35. Выразите $\cos 5\varphi$ и $\sin 6\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Когда $\cos n\varphi$ или $\sin n\varphi$ можно выразить только через $\cos\varphi$ или только через $\sin\varphi$?

36. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям:

а) $\arg(z)=\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}<\arg(z)\le\frac{5\pi}{6}$;

в) $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z) \le \dfrac{2\pi}{3}$;

г) $\begin{cases} |z-2-3i| \le 3, \\ \dfrac{\pi}{6} < \arg(z) \le \dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} |z+1-2i| > 2, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg(z) \le \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Дополнительные задания

37. Докажите, что если $|z| < \dfrac{1}{2}$, то $\left|(1+i)z^3 + iz\right| < \dfrac{3}{4}$.

38. Представьте в тригонометрической форме числа:

а) $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$;

б) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $z = \cos\varphi - i\sin\varphi$;

г) $z = \dfrac{1}{\left(1 - \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^2}$;

д) $z = \dfrac{4(1-2i)}{\left(-2-\sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3}-1\right)i}$.

39. Среди комплексных чисел, удовлетворяющих условию $|z - 25i| \le 15$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

40. Вычислите:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{3} - i\right)^{26}}{(1+i)^{40}}$;

б) $\left(\dfrac{1 - i\,\mathrm{tg}\varphi}{1 + i\,\mathrm{tg}\varphi}\right)^n$ $(n \in \ \ )$;

в) $\dfrac{\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{40}}{(1-i)^{72}}$;

г) $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{20}$;

д) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-10}$; е) $(\sin\varphi - i\cos\varphi)^{18}$;

ж) $\dfrac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

41. Выразите $\cos 6\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

42. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, которые удовлетворяют условиям:

а) $\begin{cases} |z-2+i| = |z+3-5i|, \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg(z) \le \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{Re}\Big((1-i)z \quad +2+3i\Big) \le 1, \\ \dfrac{2\pi}{3} < \arg(z) \le \dfrac{5\pi}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \operatorname{Im}\Big((1+i)z \quad -2+i\Big) \ge 2, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z) < \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

43. Докажите, что $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi k$, $k \in \{0; -1\}$.

44. Вычислите $z^n + \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $z + \dfrac{1}{z} = 1$.

45. Выразите через $\arg(z)$ числа $\arg(-z)$, $\arg\left(\overline{z}\right)$, $\arg(5z)$, $\arg(iz)$.

46. Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$. Найдите $|w|$ и $\arg(w)$, если $w = z^2 - z$.

47. Вычислите:

а) $\begin{vmatrix} w & w \\ -1 & w \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & w \\ 1 & 1 & w^2 \\ w^2 & w & 1 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 \\ 1 & w^2 & w \end{pmatrix}$,

если $w = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$, $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

48. Докажите, что:

а) $(1+i)^n = \sqrt{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$;

в) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$;

г) $(1+i)^{4n} = (-1)^n\, 2^{2n}$ для любого $n \in$.

49. Докажите, что:

а) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, тогда и только тогда, когда $\arg(z_1) = \arg(z_2)$;

б) $|z_1 + z_2| = \big||z_1| - |z_2|\big|$, тогда и только тогда, когда $|\arg(z_1) - \arg(z_2)| = \pi$.

50. Докажите, что если $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, то $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$, для любого натурального числа n.

51. Выведите формулы, выражающие $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

52. Выведите формулы для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$.

53. Решите квадратные уравнения в поле комплексных чисел:

а) $z^2 + 3 + 4i = 0$; б) $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$;

в) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 = 0$.

Занятие 4

Теоретический материал. Определение корня n-й степени, формулы для нахождения комплексных корней, их свойства. Изображение корней на комплексной плоскости.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

54. Для $n = 3, 4, 5, 8$ выпишите все комплексные корни из 1. Укажите для каждого из этих значений n первообразные корни. Изобразите K_n на комплексной плоскости.

55. Выясните, при каких k корень n-й степени из единицы u_k является первообразным.

56. Докажите, что множество K_n всех корней n-й степени из единицы образует коммутативную группу по умножению, являющуюся подгруппой:

а) группы всех ненулевых комплексных чисел по умножению;

б) группы всех комплексных чисел, равных по модулю единице, по умножению.

57. Составьте таблицу умножения для всех комплексных корней шестой степени из 1. Какие из них являются первообразными?

58. Найдите сумму и произведение всех комплексных корней n-й степени из единицы.

59. Найдите и изобразите на комплексной плоскости корни третьей степени из числа z, если:

а) $z=\sqrt{3}-i$; б) $z=-2+2i$;

в) $z=-i$; г) $z=-8$;

д) $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

60. Найдите и изобразите на комплексной плоскости корни четвёртой степени из комплексного числа z, если:

а) $z=-1+\sqrt{3}\,i$; б) $z=\sqrt{3}+i$;

в) $z=i$; г) $z=-16$;

д) $z=64$.

61. Найдите из уравнения комплексное число z. Вычислите и изобразите на комплексной плоскости все комплексные корни четвёртой степени из этого числа:

$$\left|\sqrt{3}+i\right|\overline{z}+\sqrt{3}\,Im(z)-i\operatorname{Re}(z+2)=\sqrt{3}-\sqrt{3}i.$$

Дополнительные задания

62. Докажите, что $z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ является первообразным корнем восьмой степени из единицы.

63. Докажите, что для любого натурального числа n комплексное число $u_1=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем n-й степени из единицы, причём $u_k = (u_1)^k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

64. Пусть n, k, m – натуральные числа, отличные от единицы, и $n = km$. Докажите, что K_n содержит все комплексные корни k-й и m-й степени из единицы и K_k, K_m являются подгруппами группы K_n по умножению.

65. Докажите, что u_k является первообразным корнем n-й степени из единицы тогда и только тогда, когда подгруппа, порождённая элементом u_k, совпадает с K_n.

66. Найдите и изобразите на комплексной плоскости все комплексные корни шестой степени из комплексного числа z, если:

а) $z = -64$;   б) $z = 8 - 8i$;

в) $z = 1 - \sqrt{3}i$;   г) $z = 8i$;

д) $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$;   е) $z = \dfrac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$.

67. Найдите из уравнения комплексное число z. Вычислите и изобразите на комплексной плоскости все комплексные корни третьей степени из этого числа:

$$|4-3i|\overline{z} - 2\mathrm{Im}(iz) + i\mathrm{Re}(z - 2i + 1) = 3 + \left(5\sqrt{3} + 2\right)i.$$

68. Найдите сумму и произведение всех комплексных корней n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$.

69. Вычислите сумму $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$, где ε – первообразный корень степени n из 1.

70. Составьте таблицу умножения для всех комплексных корней девятой степени из 1. Какие из них являются первообразными?

71. Сколько существует первообразных корней n-й степени из 1, если:

а) $n = 8$; б) $n = 10$;

в) $n = 11$; г) $n = 12$?

72. Первообразными корнями какой степени из единицы являются числа:

а) $u = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$; б) $u = \cos\frac{23\pi}{30} + i\sin\frac{23\pi}{30}$?

73. Пусть u первообразный корень шестнадцатой степени из единицы. Первообразными корнями какой степени из 1 являются числа:

а) u^2; б) u^3;

в) u^4; г) u^5;

д) u^6?

Контрольная работа №1

Примерный вариант

1. Выполните действия: $\dfrac{(1-i)^2(-2+3i)-(2-i)(1+i)^2}{(2-i)(1+2i)}$.

2. Изобразите на комплексной плоскости множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |z+2-3i| \le 4, \\ \dfrac{\pi}{3} \le \arg(z) < \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Выразите $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

4. Вычислите $\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{20}}{\left(2-2i\right)^{32}}$.

5. Найдите комплексное число z из уравнения, вычислите и изобразите на комплексной плоскости все комплексные корни 5-й степени из этого числа:

$$\left|1-i\sqrt{3}\right|z-2\operatorname{Im}\left(\overline{z}\right)+i\operatorname{Re}\left(z-1+2i\right)=-64-65i\,.$$

6. Найдите все первообразные корни 8-й степени из 1.

7. Докажите, что если $z^4=1$ и $z\notin\mathbb{R}$, то $1+z+z^2+z^3=0$.

ТЕМА 6. АБСТРАКТНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Основные определения. Базис. Координатная строка вектора в базисе

Определение. Пусть V – некоторое непустое множество, элементы которого называются *векторами.* Пусть P – некоторое поле, элементы которого называется *скалярами.* V является *векторным (линейным) пространством* над полем P, если на V заданы операция сложения векторов, задана операция умножения векторов на скаляры и выполняются следующие аксиомы.

1) $<V;+>$ – коммутативная группа, т.е. сложение коммутативно, ассоциативно, существует нейтральный элемент $\theta \in V$ и для любого $a \in V$ существует противоположный элемент $-a \in V$.

2) Для любых векторов $a, b \in V$ и скаляров $\lambda, \beta \in P$:

а) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$;

б) $(\lambda + \beta)a = \lambda a + \beta a$;

в) $\lambda(\beta a) = (\lambda\beta)a$;

г) $1 \cdot a = a$.

Пример. Множество $\mathbb{R}_{k\times m}$ всех матриц порядка $k \times m,\ k,m \in \mathbb{N}$, с действительными элементами относительно обычных операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры являются векторными пространствами над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ (это следует из теоремы о свойствах действий с матрицами), но не является векторным пространствам над полем комплексных чисел, т.к. для любых $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $A \in \mathbb{R}_{k\times m}$ имеем $\alpha A \notin \mathbb{R}_{k\times m}$.

Теорема (о простейших свойствах векторных пространств). *Для любых векторов* $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ *и скаляров* $\lambda, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ *выполняются следующие свойства.*

1) Если $a + b = a$ *, то* $b = \theta$ *.*

2) Если $a + b = \theta$ *, то* $b = -a$ *.*

3) $0 \cdot a = \theta,\ \lambda \cdot \theta = \theta$ *.*

4) $(-1)a = -a$ *.*

5) Если $\lambda a = \theta$ *, то* $\lambda = 0$ *или* $a = \theta$ *.*

6) Если $\lambda a = \lambda b$ и $\lambda \neq 0$ *, то* $a = b$ *.*

7) Если $\lambda a = \beta a$ и $a \neq \theta$ *, то* $\lambda = \beta$ *.*

8) $(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a + \ldots + \lambda_k a$ *и*

$$\lambda(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda a_k .$$

Определения. *Линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ называется вектор $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \in V$.

Последовательностью векторов векторного пространства V над полем P называется непустая упорядоченная совокупность векторов из V .

Вектор $b \in V$ *линейно выражается* через последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из V , если существуют скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ такие, что

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k .$$

Векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ и вектора $b \in V$ называется уравнение вида

$$b = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ka_k .$$

Однородным векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ называется уравнение вида

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_ka_k = \theta .$$

Во многих случаях при решении задач можно воспользоваться алгоритмами, разработанными для случая арифметических векторных пространств.

Пример. Через последовательность векторов $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ из $\mathbb{R}_{2\times 3}$ линейно выразите вектор $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для решения задачи запишем векторное уравнение, подставим в него векторы и упростим:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = B \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 & x_1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_2 \\ -x_2 & x_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_3 & x_3 \\ x_3 & 0 & -x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_1 + 0 + 2x_3 & x_1 + x_2 - x_3 & -x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 - x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + 0 & 2x_1 + 0 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из равенства двух матриц получаем систему линейных уравнений и решаем её.

$$\begin{cases} -x_1 & & +2x_3 & = & 4, \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2, \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0, \\ & -x_2 & +x_3 & = & 4, \\ x_1 & +x_2 & & = & 1, \\ 2x_1 & & -x_3 & = & 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & B \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ (1)(-1)(1)(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (2)(1)(-1)\times(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-2)(1)(-1)(2) \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right) \end{array}.$$

Получаем, что $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3,$ т.е.

$$B = 2A_1 + (-1)A_2 + 3A_3 = 2A_1 - A_2 + 3A_3.$$

Заметим, что в первоначальной матрице, соответствующей исходной системе линейных уравнений, в первом столбце стоят компоненты вектора A_1, во втором – A_2, в третьем – A_3, а за чертой – компоненты вектора B, если для вектора $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$ компоненты расположить в порядке: $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}.$ Поэтому можно было сразу из уравнения $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = B$ записать матрицу:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & B \end{array} \end{array}$$

и преобразовать её.

Определение. Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно независимой (ЛНЗ)*, если её однородное векторное уравнение имеет только нулевое решение. Последовательность называется *линейно зависимой (ЛЗ),* если однородное векторное уравнение этой последовательности имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Другими словами, если для последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ найдутся не все равные нулю скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta$, то данная последовательность линейно зависима. Если же равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta$ возможно лишь для $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то последовательность линейно независима; и наоборот.

Теорема (о свойствах линейной зависимости и линейной независимости).

1) Последовательность векторов, содержащая хотя бы один нулевой вектор θ, линейно зависима.

2) Последовательность, в которой есть два равных вектора, линейно зависима.

3) Последовательность, содержащая хотя бы два пропорциональных вектора, линейно зависима.

4) Если подпоследовательность линейно зависима, то и вся последовательность линейно зависима.

5) Если последовательность линейно независима, то и любая её подпоследовательность линейно независима.

6) Если последовательность линейно зависима, то хотя бы один её вектор линейно выражается через остальные.

7) Если хотя бы один вектор последовательности линейно выражается через остальные, то последовательность линейно зависима.

8) Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно *зависима, то вектор b линейно выражается через остальные.*

Теорема (основная лемма о линейной зависимости). *Если каждый вектор последовательности*

$$a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \qquad (*)$$

линейно выражается через последовательность векторов

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \qquad (**)$$

то последовательность $(*)$ линейно зависима.

Следствие. *Если каждый вектор последовательности (1) $a_1, a_2, \dots, a_m$ линейно выражается через последовательность (2) $b_1, b_2, \dots, b_k$ и $m > k$, то последовательность (1) линейно зависима.*

Определение. *Базисом последовательности векторов* $(*)$ $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторного пространства V над полем P называется такая её подпоследовательность $Б$, что:

1) подпоследовательность $Б$ линейно независима;

2) каждый вектор последовательности $(*)$ линейно выражается через векторы последовательности $Б$.

Теорема (о свойствах базиса последовательности векторов). *1) Конечная последовательность, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис.*

2) Количество векторов в любых двух базисах одной и той же последовательности векторов одинаково.

Рангом конечной последовательности векторов, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется количество векторов в базисе этой последовательности. *Ранг* последовательности нулевых векторов считается равным нулю.

Примеры. Найдите базис и ранг последовательности векторов и выразите линейно все векторы последовательности через найденный базис.

а) Дано векторное пространство матриц размерности 2×3 с действительными элементами и последовательность:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решаем однородное векторное уравнение

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = \theta \, .$$

Для этого сразу записываем матрицу, располагая компоненты векторов в соответствующем порядке, и преобразуем её.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \end{array} (1)(-1)(-2) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}(-1) \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} (1)(-1)\times(-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \end{array} .$$

В результате:

$$Б(A_1, A_2, A_3, A_4) = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle\ ,\ rang(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3\ ,$$

$$A_4 = -A_1 - 2A_2 + 3A_3\ .$$

В остальных случаях векторы выражаются тривиальным образом:

$$A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3\ ,$$

$$A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3\ ,$$

$$A_3 = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3\ .$$

б) Дано векторное пространство многочленов с действительными коэффициентами и последовательность:

$$f_1(x) = 6x - 1\ ,\ f_2(x) = x + 1\ ,$$

$$f_3(x) = x^2 - 3x + 2\ ,\ f_4(x) = x^2 + x - 1\ .$$

Заметим, что произвольный многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ однозначно определяется арифметическим вектором $(a_n; a_{n-1}; \ldots; a_1; a_0)$ своих коэффициентов.

Поэтому для решения однородного векторного уравнения $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 = \theta$ применяем стандартный метод.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \begin{matrix} (-1)(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{1} & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{1} & -4 & 0 \\ -7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (1/7) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 6 & \mathbf{1} & -4 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (4)(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \end{array}.$$

В результате:

$$Б(f_1, f_2, f_3, f_4) = \langle f_2, f_3, f_4 \rangle\,,\ rang(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3\,,$$

$$f_1 = 2f_2 + (-1)f_3 + 1f_4 = 2f_2 - f_3 + f_4\,.$$

Остальные элементы выражаются очевидным образом:

$$f_2 = 1f_2 + 0f_3 + 0f_4\,,$$

$$f_3 = 0f_2 + 1f_3 + 0f_4\,,$$

$$f_4 = 0f_2 + 0f_3 + 1f_4\,.$$

Определение. Если в векторном пространстве V существует конечная, линейно независимая последовательность векторов $(*)$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, через которую линейно выражается каждый вектор V, то пространство V называется *конечномерным*, последовательность $(*)$ – *базисом пространства* V, а число n – его *размерностью*.

Обозначение: $\dim_p V = n$.

Пример. Найдите базис векторного пространства $\mathbb{R}_{2\times 3}$ всех матриц размерности 2×3 с действительными элементами над полем $\mathbb{R}$.

Если $A \in \mathbb{R}_{2\times 3}$, то

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\alpha_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, последовательность векторов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

линейно независима. Для проверки этого достаточно решить векторное уравнение

$$x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 + x_4E_4 + x_5E_5 + x_6E_6 = \theta,$$

где $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевой вектор пространства $\mathbb{R}_{2\times3}$. В результате получилось, что $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ – базис пространства $\mathbb{R}_{2\times3}$ и $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_{2\times3} = 6$.

Определение. Последовательности векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{I}$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{II}$$

векторного пространства V называются *эквивалентными*, если каждый вектор последовательности (I) линейно выражается через векторы последовательности (II), и, наоборот, каждый вектор последовательности (II) линейно выражается через векторы последовательности (I).

Обозначение: $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II})$.

Замечания. 1) *Базис последовательности векторов эквивалентен всей последовательности.*

2) Если (I), (II) и (III) последовательности векторов из одного пространства, то:

а) $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{I})$;

б) если $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II})$, то $(\mathrm{II}) \sim (\mathrm{I})$;

в) если $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II})$ и $(\mathrm{II}) \sim (\mathrm{III})$, то $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{III})$.

Определение. *Элементарными преобразованиями* последовательности векторов (I) называются преобразования следующих типов:

1) удаление из последовательности нулевого вектора θ;

2) умножение любого вектора последовательности на ненулевой скаляр;

3) прибавление к некоторому вектору последовательности любого другого вектора последовательности, умноженного на произвольный скаляр.

Теорема (об элементарных преобразованиях). *Если к последовательности (I) $a_1, a_2, \ldots, a_k$ применить конечное число элементарных преобразований, то получится последовательность, эквивалентная исходной.*

Определение. Коор*динатной строкой (столбцом) вектора* $a \in V$ в базисе $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ называется такая вектор-строка (вектор-столбец)

$$[a]_Б = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n), \quad [a]_Б{}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

что $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$.

Пример. Рассмотрим векторное пространство всех многочленов степени не выше 2 над полем действительных чисел. Из рассмотренного выше примера с многочленами следует, что многочлены $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = x^2 - 3x + 2$, $f_4(x) = x^2 + x - 1$ образуют базис этого пространства, а координатная строка многочлена $f_1(x) = 6x - 1$ в этом базисе равна

$$[f_1]_Б = (2; -1; 1),$$

т.к. $f_1 = 2f_2 - f_3 + f_4$.

Теорема (о свойствах координатных строк). *Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P, $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ – его базис. Тогда для любых векторов $a, b, b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$ и скаляров $\lambda, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ выполняются свойства:*

1) $[\theta]_Б = (0; 0; \ldots; 0)$;

2) $[a + b]_Б = [a]_Б + [b]_Б$;

3) $[\lambda a]_Б = \lambda [a]_Б$;

4) $[\lambda a + \beta b]_Б = \lambda [a]_Б + \beta [b]_Б$;

5) $[\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k]_Б =$

$$= \lambda_1 [b_1]_Б + \lambda_2 [b_2]_Б + \ldots + \lambda_k [b_k]_Б.$$

Занятие 5

Теоретический материал. Векторные (линейные) пространства, линейное выражение одних векторов через другие, линейная зависимость и независимость.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

74. Выясните, какие из следующих алгебраических систем являются векторными пространствами:

а) множество всех радиус-векторов на плоскости, концы которых лежат в первой координатной четверти (со сложением по правилу параллелограмма и обычным умножением на действительные числа);

б) множество всех радиус-векторов на плоскости, концы которых лежат в первой и третьей координатных четвертях;

в) множество всех радиус-векторов, концы которых лежат на прямой $y = 2x$;

г) множество всех радиус-векторов, концы которых лежат на прямой $y = 2x + 3$;

д) множество $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ с обычными операциями сложения чисел и умножения на скаляры из $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

е) множество всех многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 4 с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на скаляры из $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

ж) множество всех многочленов степени 6 с действительными коэффициентами над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

з) множество всех непрерывных действительных функций с обычными операциями сложения функций и умножения на скаляры из $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

75. Докажите, что множество $V=\left\{a+b\sqrt{5}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ является векторным пространством с обычными операциями сложения чисел над полем $\mathbb{Q}$. Найдите какой-нибудь базис и размерность этого пространства. Будет ли V пространством над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$? Почему?

76. Является ли векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$ множество всех многочленов с рациональными коэффициентами, имеющими данный корень α?

77. Вычислите вектор $b=2a_1+a_2-3a_3$, если:

а) $a_1=(1;-1;0)$, $a_2=(2;-1;1)$, $a_3=(0;2;-1)$;

б) $a_1=(1;1;0;2)$, $a_2=(1;2;-1;1)$, $a_3=(-1;0;3;1)$;

в) $a_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

$$a_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix};$$

г) $a_1=x^2-x+1$, $a_2=2x^3-x^2+3x-1$, $a_3=-x+1$;

д) $a_1=2\cos x-1$, $a_2=-\sin x+1$, $a_3=\cos x-2\sin x+2$.

78. Представьте вектор

$$2(a_1-a_2+2a_3)-(2a_1-2a_2+a_3)+3(a_1+2a_2-a_3)$$

в виде линейной комбинации векторов a_1,a_2,a_3 и найдите полученный вектор в условиях задачи **77**.

79. В трёхмерном пространстве заданы три точки A, B, C, не совпадающие с началом координат и не лежащие в одной плоскости с началом координат O. Выразите все векторы, соответствующие диагоналям параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, через эти векторы.

80. Пусть V – векторное пространство над полем P, $a, b \in V$, $\lambda, \beta \in P$. Докажите, что

$$\lambda a + \beta b = \beta a + \lambda b \Leftrightarrow \lambda = \beta \text{ или } a = b.$$

81. Докажите, что последовательность из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы пропорциональны.

82. Выясните, является ли данная последовательность векторов ЛЗ или ЛНЗ над $\mathbb{R}$:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б) $f_1 = \sin x,\; f_2 = \cos x,\; f_3 = \sin^2 x,\; f_4 = \cos^2 x + 1,\; f_5 = 2$;

в) $f_1 = x + 1,\; f_2 = x - 1,\; f_3 = x^2 + 2x + 1,\; f_4 = x^2 - 2x + 1$;

г) $f_1 = 1 - \cos x,\; f_2 = 1 + \sin x,\; f_3 = \sin 2x,\; f_4 = \cos 2x$.

83. Выясните, является ли последовательность векторов $a_1 = 1,\; a_2 = 2\sqrt{2},\; a_3 = 3\sqrt{3}$ линейно зависимой в векторном пространстве $V = \mathbb{R}$ над полем $P = \mathbb{Q}$.

Дополнительные задания.

84. Выясните, какие из следующих алгебраических систем являются векторными пространствами:

а) множество всех радиус-векторов на плоскости, концы которых лежат во второй и четвёртой координатных четвертях;

б) множество всех радиус-векторов на плоскости, концы которых лежат в первой и четвёртой координатных четвертях;

в) множество всех радиус-векторов на плоскости, концы которых лежат во второй и третьей координатных четвертях;

г) множество всех многочленов с действительными коэффициентами степени выше 4 над $\mathbb{R}$;

д) множество всех дифференцируемых действительных функций с обычными операциями сложения и умножения на скаляры из $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;

е) множество $V = \left\{ a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q},\, i^2 = -1 \right\}$ с обычными операциями сложения чисел и умножения чисел над полями $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

ж) множество всех многочленов с рациональными коэффициентами, имеющих корнями α или $\beta \neq \alpha$, над полем $\mathbb{Q}$.

85. Докажите, что множество всех дважды дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $f'' - f = 0$, относительно обычного сложения функций и умножения на скаляры из $\mathbb{R}$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

86. Вычислите вектор $b = a_1 - 2a_2 + 3a_3$, если

а) $a_1 = (1; -1; 0; 1),\ a_2 = (2; 1; 1; 0),\ a_3 = (1; 2; 1; 2)$;

б) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $a_1 = x^2 - x - 1,\ a_2 = x^2 + x + 1,\ a_3 = x^2 + 2x - 1$.

87. Представьте вектор

$$3(a_1 + a_2 - a_3) - 2(a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + 4a_3)$$

в виде линейной комбинации векторов a_1, a_2, a_3 и найдите полученный вектор в условиях задачи **86**.

88. Пусть последовательность векторов a_1, a_2, a_3 векторного пространства V над полем P линейно независима. Будет ли линейно независимой система векторов:

а) $b_1 = a_1 - a_2 + a_3,\ b_2 = 2a_1 + a_2 - a_3,\ b_3 = -a_1 + a_2 + 2a_3$;

б) $b_1 = a_1 - a_2 - a_3,\ b_2 = a_1 + a_2 - a_3,\ b_3 = 2a_1 + a_2 + 2a_3$;

в) $b_1 = a_1 - a_2,\ b_2 = a_2 - a_3,\ b_3 = a_3 - a_1$?

89. Выясните, является ли последовательность векторов ЛЗ или ЛНЗ над $\mathbb{R}$:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

90. Пусть V – векторное пространство над числовым полем P, векторы a, b, c из V образуют ЛНЗ последовательность над P. Докажите, что последовательность векторов $a + b$, $b + c$ и $c + a$ также ЛНЗ.

Занятие 6

Теоретический материал. Базис последовательности векторов и векторного пространства. Эквивалентные последовательности векторов. Координатная строка вектора в базисе.

Задания для практических занятий

91. В каком случае последовательность ненулевых векторов имеет единственный с точностью до перестановки базис?

92. Найдите базис последовательности векторов и линейно выразите все векторы последовательности через этот базис:

а) $a_1 = (1;0;1;0)$, $a_2 = (1;1;-1;1)$, $a_3 = (2;1;0;1)$, $a_4 = (1;0;1;1)$, $a_5 = (1;-1;1;0)$;

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $f_1(x) = -x+1$, $f_2(x) = x^2+x+2$, $f_3(x) = x^2+2x-1$, $f_4(x) = 2x+3$, $f_5(x) = x+4$;

г) $a_1 = \sqrt{2}-1$, $a_2 = 1-\sqrt{3}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $a_5 = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1$, $a_6 = \sqrt{3}$ (*над* $\mathbb{Q}$);

д) $a_1 = 1-i$, $a_2 = 2i$, $a_3 = 2+i$, $a_4 = i+1$, $a_5 = \sqrt{3}-i$, $a_6 = 2-\sqrt{3}$ (*над* $\mathbb{R}$).

93. Докажите, что последовательность векторов эквивалентна своему базису.

94. Обязательно ли эквивалентные последовательности векторов имеют одинаковые базисы? ранги? количество векторов?

95. Выясните, является ли последовательности векторов эквивалентными:

а) a_1, a_2, a_3, a_4 и $b_1 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_2 = a_2 + a_3 - a_4$, $b_3 = a_3 + a_4 - a_1$, $b_4 = a_1 + a_3$;

б) $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (0;1;1)$, $a_3 = (1;1;0)$ и $b_1 = (2;3;0)$, $b_2 = (-1;0;2)$, $b_3 = (1;2;1)$.

96. Как изменится координатная строка $[b]_Б = (\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3;\lambda_4)$ вектора b, если в базисе $Б = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ поменять местами первый и третий векторы; первый и четвёртый?

97. Найдите координатную строку вектора a в базисе $Б = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, если:

а) $a = (1;2;-1)$, $a_1 = (1;1;1)$, $a_2 = (1;1;0)$, $a_3 = (1;0;0)$;

б) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

98. Найдите базис и размерность векторного пространства V над полем P, если:

а) $V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$, $P = \mathbb{R}$;

б) $V = \mathbb{C}$, $P = \mathbb{R}$;

в) $V = \left\{ (\alpha;\alpha;\beta;\gamma;\beta) \middle| \ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \right\}, P = \mathbb{R}$;

г) $V = \left\{ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a,b,c \in \mathbb{Q} \right\}$, $P = \mathbb{Q}$;

д) $V = \left\{ f(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$, $P = \mathbb{R}$.

Дополнительные задания

99. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы последовательности через найденный базис:

а) $a_1=(1;1;-1;1)$, $a_2=(0;1;-1;1)$, $a_3=(1;1;2;0)$, $a_4=(1;0;-3;1)$;

б) $f_1=x^2+x-1$, $f_2=x^2-x+1$, $f_3=x^2+3x-3$, $f_4=x-1$, $f_5=x^2-1$;

в) $A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

г) $A_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,

$$A_3=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A_4=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix};$$

д) $a_1=\cos x$, $a_2=\sin x$, $a_3=1-\sin x+\cos x$, $a_4=\cos x+1$, $a_5=\sin x-1$, $a_6=2\cos x+1$;

100. Выясните, являются ли последовательности векторов эквивалентными:

а) a_1,a_2,a_3 и $b_1=a_1-a_2+a_3$, $b_2=2a_1-a_2$, $b_3=a_1+a_2-a_3$;

б) $a_1=(1;1;-1)$, $a_2=(2;1;1)$, $a_3=(1;0;2)$ и $b_1=(0;1;-3)$, $b_2=(3;2;0)$, $b_3=(3;1;3)$.

101. Найдите координатную строку вектора a в базисе $Б$, если:

а) $a=(1;2;3)$, $Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $a_1=(1;1;1)$, $a_2=(2;3;3)$, $a_3=(0;2;1)$;

б) $a=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $Б=\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$, $a_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&3&4\end{pmatrix}$.

102. Найдите базис и размерность пространства V над полем P, если:

а) $V=\{(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)\mid \alpha_i\in\mathbb{R}$ *и* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\}, P=\mathbb{R}$;

б) $V=\{(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)\mid \alpha_i\in\mathbb{R}$ *и* $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4\}$, $P=\mathbb{R}$;

в) $V=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$, $P=\mathbb{R}$;

г) $V=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0\\\gamma&0&\delta\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}\right\}$, $P=\mathbb{R}$.

103. Докажите, что любая ЛНЗ последовательность из n векторов n-мерного векторного пространства V над полем P является базисом этого пространства.

104. Пусть вектор a_{k+1} не выражается линейно через последовательность $(*)$ $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Докажите, что если к базису последовательности $(*)$ добавить вектор a_{k+1}, то получится базис последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_k,a_{k+1}$.

105. Найдите координатную строку вектора $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$ в базисах:

а) $e_0 = 1,\ e_1 = x,\ e_2 = x^2,\ e_3 = x^3$;

б) $f_1 = 1,\ f_2 = x+1,\ f_3 = (x+1)^2,\ f_4 = (x+1)^3$.

§2. Подпространства векторного пространства

Определение. Непустое подмножество U векторного пространства V над полем P называется его *подпространством*, если U само является векторным пространством над полем P.

Теорема (критерий подпространства). *Непустое подмножество U векторного пространства V над полем P является его подпространством тогда и только тогда, когда:*

1) для любых $a, b \in U$ сумма $a + b \in U$;

2) для любого $a \in U$ и любого $\lambda \in P$ произведение $\lambda a \in U$.

Примеры.

1) *Линейная оболочка последовательности векторов.*

Для любых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ множество

$$L = L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in P \right\}$$

является подпространством пространства V.

2) *Пересечение подпространств.*

3) *Сумма подпространств.*

Для любых подпространств U_1, U_2 векторного пространства V над полем P сумма

$$U = U_1 + U_2 = \left\{ a + b \mid a \in U_1,\ b \in U_2 \right\}$$

является подпространством пространства V.

Пример. Докажите, что множество $U=\{(\alpha;\alpha;\beta)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ является подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^3$.

Для доказательства воспользуемся критерием подпространства.

1) Пусть $a,b\in U$. Тогда $a=(\alpha;\alpha;\beta)$, $b=(x;x;y)$, где $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$. Сумма $a+b=(\alpha+x;\ \alpha+x;\ \beta+y)$ принадлежит U, т.к. $\alpha+x,\ \beta+y\in\mathbb{R}$ и первые две компоненты вектора $a+b$ совпадают.

2) Если $\lambda\in\mathbb{R}$, то $\lambda a=\lambda(\alpha;\alpha;\beta)=(\lambda\alpha;\lambda\alpha;\lambda\beta)\in U$, т.к. $\lambda\alpha,\ \lambda\beta\in\mathbb{R}$ и первые две компоненты вектора λa совпадают.

Так как оба условия критерия подпространства выполняются, то U – подпространство арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^3$.

Определение. Сумма U_1+U_2 называется *прямой суммой подпространств* U_1,U_2 векторного пространства V над P, если $U_1\cap U_2=\{\theta\}$.

Прямая сумма подпространств U_1,U_2 обозначается $U_1\oplus U_2$.

Замечания. 1) Базисом линейной оболочки ненулевой последовательности векторов $(*)$ $a_1,a_2,\dots,a_n$ является любой базис последовательности $(*)$.

2) Если подпространства U_1,U_2 – конечномерные и $Б_1=\langle a_1,a_2,\dots,a_k\rangle$, $Б_2=\langle b_1,b_2,\dots,b_m\rangle$ – соответственно их базисы, то базисом суммы подпространств U_1+U_2 будет базис последовательности $a_1,a_2,\dots,a_k,\ b_1,b_2,\dots,b_m$. Если при

этом $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, т.е. сумма U_1 и U_2 прямая, то базисом $U_1 \oplus U_2$ является $Б = Б_1 \cup Б_2 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$.

Пример. Найдите базис пересечения подпространств $L = L_1 \cap L_2$, если $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и $a_1 = (3;1;1;0)$, $a_2 = (-1;1;0;0)$, $a_3 = (2;1;1;0)$, $b_1 = (0;2;5;3)$, $b_2 = (0;1;2;1)$, $b_3 = (0;-1;1;1)$.

Для нахождения базиса пересечения подпространств L_1 и L_2 решаем векторное уравнение $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3$, т.к. вектор $a \in L_1 \cap L_2$ тогда и только тогда, когда $a \in L_1$ и $a \in L_2$, причём найденные значения неизвестных и дадут базисные векторы пересечения. Переносим все слагаемые в правую часть:

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 - y_1b_1 - y_2b_2 - y_3b_3 = \theta .$$

Для решения этого уравнения нужно решить систему:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
3 & \mathbf{-1} & 2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -5 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} (1)\cdot(-1) \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \\
\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{cccccc}
-3 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -5 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ (2)(1) \end{array}
\sim$$

$$\sim
\left(\begin{array}{cccccc}
-3 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ (-1)(-3) \\ \\ \end{array}
\sim$$

$$\sim
\left(\begin{array}{cccccc}
-3 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\
-3 & 0 & -3 & 0 & \mathbf{1} & -2
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ (-1)(2) \\ \\ \\ \end{array}
\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} -3 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ -2 & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

В результате получилась система:

$$\begin{cases} -3x_1 + \boldsymbol{x_2} - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_3 + \boldsymbol{y_1} = 0, \\ 3x_1 + x_3 + \boldsymbol{y_2} = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 + \boldsymbol{y_3} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_2} = 3x_1 + 2x_3, \\ \boldsymbol{y_1} = 2x_1 + x_3, \\ \boldsymbol{y_2} = -3x_1 - x_3, \\ \boldsymbol{y_3} = -3x_1 - 2x_3. \end{cases}$$

Найдём её ФСР:

x_1	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$	$\boldsymbol{y_3}$
1	3	0	2	–3	–3
0	2	1	1	–1	–2

Получилось два решения:

$$(1;3;0;2;-3;-3) \text{ и } (0;2;1;1;-1;-2).$$

Базис $Б$ пересечения будет состоять из векторов

$$e_1 = 1a_1 + 3a_2 + 0a_3 = 2b_1 + (-3)b_2 + (-3)b_3 = (0;4;1;0),$$

$$e_2 = 0a_1 + 2a_2 + 1a_3 = 1b_1 + (-1)b_2 + (-2)b_3 = (0;3;1;0);$$

$\dim_{\mathbb{R}}(L_1 \cap L_2) = 2$.

Занятие 7

Теоретический материал. Понятие подпространства. Критерий подпространства и его применение. Примеры подпространств. Нахождение базисов и размерностей подпространств.

Задания для практических занятий

106. Является ли подпространством векторного пространства V над полем P, разность двух его подпространств $L_1 - L_2 = \{a - b \mid a \in L_1, b \in L_2\}$?

107. Образуют ли подпространство арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^4$ множество всех таких его векторов, координаты которых:

а) целые числа;

б) удовлетворяют условию

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0;$$

в) удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2;$$

г) равны между собой?

108. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}_{2\times 2}$ матриц порядка 2×2 с действительными элементами над полем $\mathbb{R}$ подпространствами являются множества:

а) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle|\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$; б) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \middle|\ a \in \mathbb{R} \right\}$;

в) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$; г) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

д) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & b \end{pmatrix} \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$; е) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Найдите базис и размерность этих подпространств.

109. Являются ли подпространством в векторном пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов с действительными коэффициентами множества всех таких многочленов $f(x) \in R[x]$, что:

а) $\deg f \leq 3$; б) $\deg f > 3$;

в) $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_0 = 0$;

г) $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_0 = 3$;

д) $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$?

110. Найдите базис и размерность следующих подпространств:

а) $L = \{(\alpha; \beta; \alpha + \beta; \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ в $\mathbb{R}^4$ над $\mathbb{R}$;

б) $L = \{(\alpha; 2\alpha; \beta; -\beta; \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ в $\mathbb{R}^5$ над $\mathbb{R}$;

в) $L = \{(\alpha; \alpha; \beta; -\beta; \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ в $\mathbb{R}^5$ над $\mathbb{R}$;

г) $L = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_5 = 0, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \right\}$ в $\mathbb{R}^5$ над $\mathbb{R}$;

д) $L = \left\{ (x_1; x_2; x_3; x_4) \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \right\}$ в $\mathbb{R}^4$ над $\mathbb{R}$;

е) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x & x & y & y \\ 0 & x & y & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ в $\mathbb{R}_{2\times 4}$ над $\mathbb{R}$;

ж) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y & z \\ z & x & 0 & y \\ y & z & x & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ в $\mathbb{R}_{3\times 4}$ над $\mathbb{R}$;

з) $L = \{ f(x) \mid \deg f \leq 4 \}$ в $\mathbb{R}[x]$ над $\mathbb{R}$;

и) $L = \left\{ a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} \mid a,b,c \in \mathbb{Q} \right\}$ в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

111. Найдите базис пересечения подпространств $L = L_1 \cap L_2$, если $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и $a_1 = (1;1;1;1)$, $a_2 = (1;-1;1;-1)$, $a_3 = (1;3;1;3)$, $b_1 = (1;2;0;2)$, $b_2 = (1;2;1;2)$, $b_3 = (3;1;3;1)$.

Дополнительные задания

112. Докажите, что если для подпространств L_1 и L_2 конечномерного векторного пространства V над полем P верно равенство $\dim_P(L_1 + L_2) = \dim_P L_2$, то $L_1 \cap L_2 = L_1$.

113. Пусть V векторное пространство над полем P. Являются ли подпространствами в пространстве V следующие множества:

а) $L = \left\{ \lambda a_0 \middle| \lambda \in P,\ a_0 - \textit{фиксированный вектор из } V \right\}$;

б) $L = \left\{ \lambda_0 a \middle| a \in V,\ \lambda_0 - \textit{фиксированный скаляр из } P \right\}$;

в) $L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in P,$

$a_i - \textit{фиксированные векторы из } V \}$;

г) $L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \mid a_i \in V,$

$\lambda_i - \textit{фиксированные скаляры из } P \}$?

114. Пусть для $a, b, c \in V$ в векторном пространстве над полем P существуют такие ненулевые скаляры $\lambda, \beta \in P$, что $a + \lambda b + \beta c = \theta$. Докажите, что $L(a;b) = L(b;c) = L(c;a)$.

115. Докажите, что для любых векторов a_1, a_2, a_3 векторного пространства V над полем P выполняется равенство $L(a_1, a_2, a_3) = L(a_1, a_2 - a_1,\ a_3 - a_2)$.

116. Докажите, что если последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ векторов некоторого векторного пространства эквивалентны, то $L(a_1, a_2, \ldots, a_k) = L(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

117. Является ли подпространством векторного пространства $\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$ множество всех многочленов, корнем которых является фиксированный скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$?

118. Выясните, являются ли подпространствами в векторном пространстве всех матриц размерности 3×2 над полем $\mathbb{R}$ множества матриц $A_{3\times 2}$ таких, что:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

119. Являются ли подпространствами в векторном пространстве $\mathbb{R}_{n\times n}$ квадратных матриц размерности $n \times n$ с действительными коэффициентами над полем $\mathbb{R}$ следующие множества:

а) $L = \left\{ A \in \mathbb{R}_{n\times n} \mid |A| = 0 \right\}$;

б) $L = \left\{ A \in \mathbb{R}_{n\times n} \mid |A| \neq 0 \right\}$;

в) $L=\left\{A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_{ij}=\alpha_{ji},\, \textit{для всех } i,j\right\}$;

г) $L=\left\{A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & .. & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & .. & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_{ij}=-\alpha_{ji},\, \textit{для всех } i,j\right\}$;

д) $L=\left\{A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & .. & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & .. & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn}=0\right\}$?

120. Образуют ли числа вида $r\big(\cos(\varphi+k\pi)\ +i\sin(\varphi+k\pi)\big)$, где $r\in\mathbb{R}^+$, $k\in\mathbb{Z}$, φ – фиксированное действительное число, подпространство в $\mathbb{C}$ над полями:

а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{C}$?

§3.Изоморфизм векторных пространств

Определение. Пусть V, U – некоторые векторные пространства над полем P. Взаимно однозначное отображение f пространства V на пространство U называется *изоморфизмом*, если для любых векторов $a,b\in V$ и любого скаляра $\lambda\in P$ выполняются условия:

1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$;

2) $f(\lambda a)=\lambda f(a)$.

Векторные пространства V и U в этом случае называются *изоморфными.*

Обозначение: $V \cong U$.

Пример. Векторное пространство $\mathbb{R}_{2\times 3}$ всех матриц размерности 2×3 с действительными элементами над полем $\mathbb{R}$ изоморфно арифметическому векторному пространству $\mathbb{R}^6$.

Действительно, для любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 3}$$

положим $f(A) = (\alpha_{11};\alpha_{12};\alpha_{13};\alpha_{21};\alpha_{22};\alpha_{23}) \in \mathbb{R}^6$. Тогда f – взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}_{2\times 3}$ на $\mathbb{R}^6$.

Кроме того, для любых матриц $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix}$ и скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \alpha_{13}+\beta_{13} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \alpha_{23}+\beta_{23} \end{pmatrix},$$

$$f(A+B) =$$

$$= (\alpha_{11}+\beta_{11};\alpha_{12}+\beta_{12};\alpha_{13}+\beta_{13};\alpha_{21}+\beta_{21};\alpha_{22}+\beta_{22};\alpha_{23}+\beta_{23});$$

$$(\alpha_{11};\alpha_{12};\alpha_{13};\alpha_{21};\alpha_{22};\alpha_{23}) + (\beta_{11};\beta_{12};\beta_{13};\beta_{21};\beta_{22};\beta_{23}) =$$

$$= f(A) + f(B).$$

Кроме того $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \lambda\alpha_{13} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \lambda\alpha_{23} \end{pmatrix}$ и, следовательно, получаем:

$$f(\lambda A) = (\lambda\alpha_{11};\lambda\alpha_{12};\lambda\alpha_{13};\lambda\alpha_{21};\lambda\alpha_{22};\lambda\alpha_{23}) =$$

$$= \lambda(\alpha_{11}; \alpha_{12}; \alpha_{13}; \alpha_{21}; \alpha_{22}; \alpha_{23}) = \lambda f(A).$$

Так как все условия из определения изоморфизма для f выполняются, то $\mathbb{R}_{2\times3} \cong \mathbb{R}^6$.

Теорема (о простейших свойствах изоморфизма). *Для любых векторных пространств V, U, W над одним и тем же полем P выполняются свойства:*

1) $V \cong V$;

2) если $V \cong U$, то $U \cong V$;

3) если $V \cong U$ и $U \cong W$, то $V \cong W$.

Пример. Как и ранее можно доказать, что $\mathbb{R}_{3\times2} \cong \mathbb{R}^6$. По теореме о простейших свойствах изоморфизма получаем: $\mathbb{R}_{3\times2} \cong \mathbb{R}_{2\times3}$.

Теорема. *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P. Тогда V изоморфно арифметическому векторному пространству P^n.*

Пример. $\mathbb{R}_{3\times2} \cong \mathbb{R}^6$, т.к. $\dim \mathbb{R}_{3\times2} = 6$, ибо в качестве базиса $\mathbb{R}_{3\times2}$ можно взять последовательность векторов

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Пусть U, V – конечномерные векторные пространства над полем P. Пространства U и V изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

Пример. Так как $\dim \mathbb{R}_{2\times3} = \dim \mathbb{R}_{3\times2} = 6$, то по выше приведённой теореме $\mathbb{R}_{2\times3} \cong \mathbb{R}_{3\times2}$.

Занятие 8

Теоретический материал. Изоморфизм векторных пространств, его свойства. Изоморфизм конечномерных векторных пространств.

Задания для практических занятий

121. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(k, m \in \mathbb{N})$ – последовательности векторов из векторных пространств V и U над полем P соответственно. При каких условиях $L(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cong L(b_1, b_2, \ldots, b_m)$?

122. Докажите, что арифметические векторные пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ не изоморфны.

123. Докажите, что $\mathbb{R}_{3\times4} \cong \mathbb{R}_{4\times3} \cong \mathbb{R}^{12}$.

124. Докажите изоморфизм векторных пространств над полем $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}[i] = \left\{ a + bi \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \text{ и } i^2 = -1 \right\},$$

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

125. Будут ли изоморфны векторные пространства над $\mathbb{Q}$:

а) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ и

$$\mathbb{Q}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\};$$

б) $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$; в) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$;

г) $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{C}$; д) $\mathbb{Q}[x]$ и $\mathbb{R}[x]$;

е) $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}$.

126. Определите, каким арифметическим векторным пространствам изоморфны пространства из задачи:

а) 108(а-е); б) 109(а,в);

в) 110(а-и); г) 107(б,г);

д) 118(а,б).

Дополнительные задания

127. Пусть L_1, L_2 – подпространства векторного пространства V над полем P, U_1, U_2 – подпространства векторного пространства U над полем P такие, что $L_1 \cong U_1$, $L_2 \cong U_2$. Докажите, что $L_1 + L_2 \cong U_1 + U_2$ и $L_1 \cap L_2 \cong U_1 \cap U_2$.

128. Докажите, что если U и V – изоморфные векторные пространства над полем P и L – подпространство пространства V, то в U найдётся подпространство, изоморфное L.

129. Докажите, что если пространства U и V над полем P изоморфны и любая последовательность из n векторов пространства V является ЛЗ, то и любая последовательность из n векторов пространства U является ЛЗ.

130. Пусть векторное пространство V над полем P изоморфно векторному пространству U над полем P, f – соответствующий изоморфизм. Докажите, что последовательность $a_1, a_2, ..., a_k$ векторов из V является ЛНЗ тогда и только тогда, когда ЛНЗ последовательность векторов $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_k)$ из U.

131. Докажите, что если последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно из векторных пространств U и V над полем P имеют одинаковые ранги, то $L(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cong L(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

132. Определите, каким арифметическим векторным пространствам изоморфны пространства решений однородных систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

Контрольная работа №2

Примерный вариант

1. Найдите базис последовательности векторов и линейно выразите все векторы последовательности через найденный базис:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите координатную строку вектора $b = (1; 2; -2)$ в базисе $Б = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^3$, если $a_1 = (1; -1; 1)$, $a_2 = (5; 5; 2)$, $a_3 = (2; 1; 1)$.

3. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима и $b_1 = a_1 - a_2 + 2a_3$, $b_2 = 2a_1 - a_2 + a_3$,

$b_3 = -a_1 + 2a_2 + a_3$. Выясните, будут ли последовательности a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 эквивалентными.

4. Найдите базис и размерность векторного подпространства, заданного системой линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите базис и размерность подпространств $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cup L_2$, если $L_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $L_2 = L(b_1, b_2, b_3)$, $a_1 = (1;1;-1;0)$, $a_2 = (2;1;1;1)$, $a_3 = (1;0;2;1)$, $b_1 = (0;-1;3;1)$, $b_2 = (1;1;1;1)$, $b_3 = (1;2;-2;0)$.

ТЕМА 7. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ УМНОЖЕНИЕМ

§1. Скалярное умножение

Определение. *Скалярным умножением* в векторном пространстве V над полем P называется правило, которое каждой упорядоченной паре a,b векторов из V ставит в соответствие скаляр из P, обозначаемый (a, b). При этом, для любых векторов a,b и c и скаляра λ должны выполняться следующие условия (аксиомы):

1) $(a, b) = (b, a)$,

2) $(a+b, c) = (a, c) + (b, c)$;

3) $\lambda(a,b) = (\lambda a,b)$.

Скаляр $(a, b) \in P$ называется *скалярным произведением векторов a и b*.

Скалярное умножение в пространстве V называется *невырожденным,* если для любого ненулевого вектора $a \in V$

$$(a, a) \neq 0.$$

Теорема (о простейших свойствах скалярного умножения). Для любых векторов $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторного пространства V над полем P, с заданным на нём скалярным умножением, и скаляров $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ из P выполняются следующие свойства.

1) $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$.

2) $(a, \theta) = 0$.

3) $\left(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k,\, b\right) =$

$$= \lambda_1\left(a_1,\, b\right) + \lambda_2\left(a_2,\, b\right) + \ldots + \lambda_k\left(a_k,\, b\right).$$

Определение. Векторы $a, b \in V$ называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*), если $(a,\, b) = 0$.

Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из V называется *ортогональной,* если её векторы попарно ортогональны:

$$\left(a_i,\, a_j\right) = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } 1 \leq i, j \leq k.$$

Ортогональная последовательность векторов, являющаяся базисом пространства V, называется *ортогональным базисом.*

Пример. Векторы $a = (1;2;-1;3)$ $b = (2;-1;3;1)$ являются ортогональными, т.к.

$$(a,b) = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 + 3\cdot 1 = 2 - 2 - 3 + 3 = 0.$$

Пример. Векторы $a_1 = (1;1;-1)$ и $a_2 = (0;1;1)$ ортогональны. Найдите вектор a_3, ортогональный векторам a_1 и a_2.

Пусть $a_3 = (x_1; x_2; x_3)$, тогда из условий $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$ получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ \qquad\;\; x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \\ (1) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} + 2x_2 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 + \boldsymbol{x_3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = -2x_2, \\ \boldsymbol{x_3} = -x_2. \end{cases}$$

Если взять $x_2 = 1$, то $x_1 = -2$, $x_3 = -1$ и в результате искомый вектор будет равен $a_3 = (-2;1;-1)$. Остальные векторы, удовлетворяющие условиям задачи, пропорциональны вектору $(-2;1;-1)$:

$$a_3 = (x_1;x_2;x_3) = (-2x_2;x_2;-x_2) = x_2(-2;1;-1).$$

Теорема (об ортогональных последовательностях векторов). *Пусть V – векторное пространство над полем P с заданным на нем невырожденным скалярным умножением. Любая ортогональная последовательность ненулевых векторов линейно независима.*

Следствие. *Если V – ненулевое n-мерное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением, то любая ортогональная последовательность n ненулевых векторов является его ортогональным базисом.*

Пример. Векторы $a_1 = (1;1;-1)$ и $a_2 = (0;1;1)$ вместе с вектором $a_3 = (-2;1;-1)$ из последнего примера образуют ортогональный базис трёхмерного арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^3$.

Теорема (процесс ортогонализации). *Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением и $(*)$ $a_1, a_2, \dots, a_k$ – ненулевая последовательность векторов из V. Существует ортогональная последовательность векторов пространства V, эквивалентная последовательности $(*)$ и являющаяся ортогональным базисом линейной оболочки $L(a_1, a_2, \dots, a_k)$.*

Алгоритм ортогонализации. Дана ненулевая последовательность (*) $a_1, a_2, ..., a_k$.

1. Находим базис $c_1, c_2, ..., c_m$ последовательности (*).

2. Полагаем $b_1 = c_1$.

3. Векторы $b_2, ..., b_m$ находим в виде $b_s = c_s + \lambda_{s1} b_1 + \lambda_{s2} b_2 + ... + \lambda_{s,s-1} b_{s-1}$, где

$$\lambda_{st} = -\frac{(c_s, b_t)}{(b_t, b_t)}.$$

Пример. Ортогонализируйте последовательность векторов

$a_1 = (1;0;1)$. $a_2 = (2;1;-1)$, $a_3 = (0;1;-1)$, $a_4 = (1;-1;2)$.

Сначала найдём базис данной последовательности:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}(-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}(1) \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (-2) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}(-1)(-2) \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисом последовательности будут

$$c_1 = a_1 = (1;0;1),\ c_2 = a_2 = (2;1;-1),\ c_3 = a_3 = (0;1;-1).$$

Положим $b_1 = c_1 = (1;0;1)$.

Вектор b_2 ищем в виде $b_2 = c_2 + \lambda_{21} b_1$, где $\lambda_{21} = -\frac{(c_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{2+0+(-1)}{1+0+1} = -\frac{1}{2}$. Тогда

$$b_2 = c_2 - \frac{1}{2} b_1 = (2;1;-1) + \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2};1;-\frac{3}{2}\right).$$

Вектор b_3 ищем в виде $b_3 = c_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$, где

$$\lambda_{31} = -\frac{(c_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{32} = -\frac{(c_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{0+1+\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}+1+\frac{9}{4}} = -\frac{5}{11}.$$

Тогда $b_3 = c_3 + \frac{1}{2} b_1 + \left(-\frac{5}{11}\right) b_2 =$

$$= (0;1;-1) + \left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{11}\left(\frac{3}{2};1;-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{2}{11};\frac{6}{11};\frac{2}{11}\right).$$

В результате получилась ортогональная последовательность b_1, b_2, b_3, эквивалентная исходной последовательности.

Проверим ортогональность этой последовательности:

$$(b_1, b_2) = \left((1;0;1), \left(\frac{3}{2};1;-\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} = 0,$$

$$(b_1, b_3) = \left((1;\ 0;\ 1), \left(-\frac{2}{11};\ \frac{6}{11};\ \frac{2}{11}\right)\right) = -\frac{2}{11} + 0 + \frac{2}{11} = 0,$$

$$(b_2, b_3) = \left(\left(\frac{3}{2};1;-\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{2}{11};\ \frac{6}{11};\ \frac{2}{11}\right)\right) = -\frac{3}{11} + \frac{6}{11} - \frac{3}{11} = 0.$$

Итак $b_1 = (1;0;1)$, $b_2 = \left(\frac{3}{2};1;-\frac{3}{2}\right)$, $b_3 = \left(-\frac{2}{11};\frac{6}{11};\frac{2}{11}\right)$.

Определение. Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением и L – его подпространство. *Ортогональным дополнением подпространства* L называется множество

$$L^{\perp} = \left\{ a \in V \,\middle|\, (a, b) = 0 \text{ для любого вектора } b \in L \right\}.$$

Теорема (о свойствах ортогонального дополнения). *Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением, L – его подпространство. Тогда выполняются следующие свойства.*

1) $L^{\perp}$ – подпространство пространства V.

2) Если L конечномерно, то $V = L \oplus L^{\perp}$.

Пример. Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки векторов $a_1 = (1;0;1;-1)$ и $a_2 = (1;1;2;1)$.

Если $L = L(a_1, a_2)$, то L – конечномерное подпространство арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^4$. Так как последовательность a_1, a_2 – ЛНЗ, то $\dim L = 2$. По теореме об ортогональном дополнении $\mathbb{R}^4 = L \oplus L^{\perp}$, причём $\dim \mathbb{R}_4 = \dim L + \dim L^{\perp} = 4 = 2 + \dim L^{\perp}$ и, следовательно, $\dim L^{\perp} = 2$.

Векторы a ортогонального дополнения находятся из условия $(a, a_1) = (a, a_2) = 0$. Если $a = (x_1; x_2; x_3; x_4)$, то эти условия превратятся в систему

$$\begin{cases} (a, a_1) = 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 0, \\ (a, a_2) = 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} \quad + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad \boldsymbol{x_2} + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = -x_3 + x_4, \\ \boldsymbol{x_2} = -x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	-1	1	0
1	-2	0	1

Возьмём $a_3 = (-1;-1;1;0)$, $a_4 = (1;-2;0;1)$. Тогда последовательность a_3, a_4 линейно независима, т.к. является ФСР однородной системы. Векторы $a_3, a_4 \in L^{\perp}$ и, значит, последовательность a_3, a_4 образует базис $L^{\perp}$.

Замечание. В предыдущей задаче можно было сначала найти вектор $a_3 \in L^{\perp}$ с условиями $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 0$, $a_3 \neq \theta$, а затем найти вектор $a_4 \in L^{\perp}$ с условиями $(a_1, a_4) = (a_2, a_4) = (a_3, a_4) = 0$, $a_4 \neq \theta$. Тогда последовательность векторов a_3, a_4 образует ортогональный базис подпространства $L^{\perp}$.

Определение. Пусть L – конечномерное подпространство пространства V, тогда $V = L \oplus L^{\perp}$. Каждый вектор $a \in V$ однозначно раскладывается в сумму вида $a = b + c$, где $b \in L, c \in L^{\perp}$. Вектор b называется *проекцией вектора a на подпространство L*, а c – его *ортогональной составляющей*.

Пример. Найдите проекцию b и ортогональную составляющую c вектора a на подпространство L, если $a = (4;-1;-3;4)$, $L = L(a_1, a_2, a_3)$, $a_1 = (1;1;1;1)$, $a_2 = (1;2;2;-1)$, $a_3 = (1;0;0;3)$.

Сначала найдём базис пространства $L = L(a_1, a_2, a_3)$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}(-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}(-1)(2) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}. \\ a_1 \; a_2 \; a_3 \end{array}$$

В результате $Б_L = \langle a_1, a_2 \rangle$.

Заметим, что $V = \mathbb{R}^4 = L \oplus L^{\perp}$ и любой вектор $a \in V$ единственным образом представим в виде $a = b + c$, где $b \in L$, $c \in L^{\perp}$, т.е. b – проекция вектора a на подпространство L, а c его ортогональная составляющая. Базис V есть последовательность, составленная из векторов базисов L и $L^{\perp}$.

Ввиду этого достаточно найти базис $L^{\perp}$ и разложить вектор a по базису V:

$$a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2,\ Б_L = \langle a_1, a_2 \rangle,\ Б_{L^{\perp}} = \langle c_1, c_2 \rangle.$$

Тогда $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, $c = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2$.

Базис $L^{\perp}$ ищем из условий $(x, a_1) = (x, a_2) = 0$, $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)(-1) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 & 0 \end{array}\right). \end{array}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} + 3x_4 = 0, \\ \boldsymbol{x_2} + x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = -3x_4, \\ \boldsymbol{x_2} = -x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

ФСР полученной однородной системы будет базисом подпространства $L^{\perp}$:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4
0	–1	1	0
–3	2	0	1

В результате $c_1 = (0;-1;1;0)$, $c_2 = (-3;2;0;1)$ и $Б_{L^{\perp}} = \langle c_1, c_2 \rangle$. После этого решаем векторное уравнение

$$a = b + c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 .$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \beta_1 & \beta_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & a \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(2) \\ \\ :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 3 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(6) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1)(-5)(2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 \end{array} \end{array}.$$

В результате

$$a = 3a_1 - 2a_2 - 2c_1 - c_2\,,$$

$$b = 3a_1 - 2a_2 = (1;-1;-1;5)\,,$$

$$c = -2c_1 - c_2 = (3;0;-2;-1)\,.$$

Пример. Найдите однородную систему, задающую пространство $L = L(a_1, a_2)$, если $a_1 = (1;1;-1;2)$, $a_2 = (0;1;1;-1)$.

Заметим, что $x \in L$ тогда и только тогда, когда $(x,b) = 0$ для любого $b \in L^{\perp}$. Поэтому достаточно найти базис $L^{\perp}$, $Б_{L^{\perp}} = \langle c_1, \ldots, c_k \rangle$, и тогда

$$x \in L \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (c_1, x) = 0, \\ \quad \ldots \\ (c_k, x) = 0. \end{cases}$$

Итак, находим базис $L^{\perp}$.

$$y = (y_1; y_2; y_3; y_4) \in L^{\perp} \;\Leftrightarrow \begin{cases} (y_1, a_1) = y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 = 0, \\ (y, a_2) = \qquad\quad y_2 + y_3 - y_4 = 0. \end{cases}$$

Находим ФСР этой однородной системы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ (1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1} + 2y_2 + \quad\quad y_4 = 0, \\ \quad\quad y_2 + \boldsymbol{y_3} - y_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y_1} = -2y_2 - y_4, \\ \boldsymbol{y_3} = -y_2 + y_4. \end{cases}$$

Это – общее решение системы.

$\boldsymbol{y_1}$	y_2	$\boldsymbol{y_3}$	y_4
–2	1	–1	0
–1	0	1	1

ФСР полученной системы будут векторы

$$c_1 = (-2;1;-1;0),\ c_2 = (-1;0;1;1;).$$

И окончательно получаем:

$$x = (x_1; x_2; x_3; x_4) \in L \Leftrightarrow \begin{cases} (x, c_1) = 0, \\ (x, c_2) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + \quad\quad x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Эта система и будет задавать подпространство L.

Занятие 9

Теоретический материал. Скалярное произведение в векторных пространствах, его свойства.

Задания для практических занятий

133. Выясните, какие правила являются скалярными произведениями в арифметическом векторном пространстве P^3 ($P = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$, $a = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$, $b = (\beta_1; \beta_2; \beta_3)$):

а) $(a,b) = \alpha_1\beta_1$;

б) $(a,b) = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 + 3\alpha_3\beta_3$;

в) $(a,b)=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2$;

г) $(a,b)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2$;

д) $(a,b)=\alpha_1\beta_1+3\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3-4\alpha_2\beta_1-4\alpha_1\beta_2$.

Какие из этих скалярных умножений являются невырожденными?

134. Докажите, что в векторном пространстве $V=\left\{a+b\sqrt{2}\;\middle|\; a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ над полем $\mathbb{Q}$ правило $(u,v)=ac+bd$, где $u=a+b\sqrt{2}$, $v=c+d\sqrt{2}$, является скалярным умножением. Является ли оно невырожденным?

135. Докажите, что скалярное умножение заданное в векторном пространстве V над полем P, удовлетворяет для любых векторов $a,b,c\in V$ свойствам:

а) $(a,b+c)=(a,b)+(a,c)$; б) $(a-b,c)=(a,c)-(b,c)$.

136. Вычислите скалярное произведение (a,b) в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным умножением, если:

а) $a=(1;-1;3)$, $b=(2;3;1)$;

б) $a=(1;1;0;-1)$, $b=(2;-1;1;1)$;

в) $a=(1;1;2;3)$, $b=(2;1;-1;1)$;

г) $a=(1;2;\ldots;n)$, $b=(1;2;\ldots;n)$.

137. Вычислите скалярное произведение $(a-b+2c,2a+b-c)$, если известно что $(a,b)=2$, $(a,c)=1$, $(b,c)=-1$, $(a,a)=(b,b)=(c,c)=1$.

138. Докажите, что правило $(f,g)=\int_{-1}^{1}(f(x)g(x))dx$ является скалярным умножением в векторном пространстве всех непрерывных действительных функций над полем $\mathbb{R}$.

139. Вычислите скалярное произведение (f,g) в векторном пространстве всех непрерывных действительных функций над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, если:

а) $f(x)=x+1$, $g(x)=x-1$;

б) $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=x-1$;

в) $f(x)=x+1$, $g(x)=x^3-3x^2+x+5$.

Дополнительные задания

140. Выясните, является ли скалярным умножением данное правило в векторном пространстве $\mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$, если:

а) $(a,b)=|a+b|$;

б) $(a,b)=ab$;

в) $(a,b)=|a\cdot b|$;

г) $(a,b)=a+b$;

д) $(a,b)=a-b$;

е) $(a,b)=a^2+b^2$;

ж) $(a,b)=a|b|$;

з) $(a,b)=3ab$.

141. Какие из следующих правил являются скалярными умножениями в векторном пространстве $V=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$, если для $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ 0 & \beta_3\end{pmatrix}$:

а) $(A,B)=\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\\ 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}$;

б) $(A,B)=\alpha_2\beta_2$;

в) $(A,B)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2$;

г) $(A,B)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$; д) $(A,B)=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3$;

е) $(A,B)=\alpha_1^2+\beta_1^2$; ж) $(A,B)=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\beta_2\beta_3$;

з) $(A,B)=\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2$; и) $(A,B)=\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2$;

к) $(A,B)=2AB$.

Какие из найденных скалярных умножений являются невырожденными?

142. Вычислите скалярное произведение (a,b), (b,c), $(a-b,c)$ и $(a,b-c)$ в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$, со стандартным скалярным умножением:

а) $a=(1;1;-1)$, $b=(2;1;3)$, $c=(3;-1;1)$;

б) $a=(1;-1;1;2)$, $b=(0;1;1;-1)$, $c=(1;2;1;-1)$;

в) $a=(1;2;\ldots;n)$, $b=(1;1;\ldots;1)$, $c=(n;n-1;\ldots;2;1)$.

143. Вычислите скалярное произведение (a,b) в векторном пространстве всех непрерывных действительных функций над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, если:

а) $f(x)=x^3$, $g(x)=x-1$;

б) $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=x+1$;

в) $f(x)=x^2+x+1$, $g(x)=x-1$.

144. Верно ли равенство $(2a+b,a-2b)=2(a,a)-2(b,b)$, где a,b – векторы из векторного пространства V над полем P с заданным на нём скалярным умножением?

Занятие 10

Теоретический материал. Ортогональные последовательности векторов. Ортогональный базис (для невырожденного скалярного умножения).

Задания для практических занятий

145. Пусть $a, b \neq \theta$ – ортогональные векторы в пространстве V. Будут ли ортогональными пары векторов:

а) $2a$ и $3b$;

б) $-a$ и $2b$;

в) $a-b$ и $a+b$;

г) $3a$ и $a+b$;

д) $2a-b$ и $3b$?

146. Ненулевой вектор a векторного пространства V над полем P ортогонален последовательности векторов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. Докажите, что $a \notin L(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

147. Каким может быть максимальное число ненулевых векторов ортогональной последовательности векторов n-мерного векторного пространства?

148. Проверьте, какие из следующих последовательностей векторов являются ортогональными:

а) $a_1 = (1;-1;0)$, $a_2 = (1;1;-2)$, $a_3 = (0;2;1)$;

б) $a_1 = (1;1)$, $a_2 = (-1;1)$, $a_3 = (1;-1)$;

в) $a_1 = (1;1;1)$, $a_2 = (2;-1;-1)$, $a_3 = (0;1;-1)$;

г) $a_1 = (1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;0)$, $a_3 = (1;-1;-2)$, $a_4 = (1;1;2)$;

д) $a_1 = \sin x$, $a_2 = \cos x$ в пространстве непрерывных функций относительно скалярного умножения $(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x) dx$;

е) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в пространстве матриц размерности 2×3 относительно скалярного умножения, заданного равенством

$$(A, B) = \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} + \alpha_{13}\beta_{13} + \alpha_{21}\beta_{21} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{23}$$

для $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{pmatrix}$.

149. Выясните, являются ли следующие последовательности векторов ортогональными базисами соответствующих арифметических пространств $\mathbb{R}^n$:

а) $a_1 = (1;1), a_2 = (1;-1)$;

б) $a_1 = (1;1;-1), a_2 = (0;1;1), a_3 = (-2;1;-1)$;

в) $a_1 = (1;0;1), a_2 = (1;1;-1), a_3 = (1;-2;-1), a_4 = (1;1;1)$;

г) $a_1 = (1;1;-1;1)$, $a_2 = (1;-1;1;1)$, $a_3 = (0;1;1;0)$, $a_4 = (-1;0;0;1)$.

150. Дополните последовательность векторов до ортогонального базиса соответствующего арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$:

а) $a_1 = (1;1;1), a_2 = (2;-1;-1)$;

б) $a_1 = (0;-1;1), a_2 = (1;1;1)$;

в) $a_1 = (1;-1;1;0), a_2 = (0;1;1;1), a_3 = (1;1;0;-1)$;

г) $a_1 = (1;1;0;1), a_2 = (1;-1;1;0)$.

151. Найдите ортогональный базис соответствующего арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащий вектор a_1:

а) $a_1=(1;-1;0)$; б) $a_1=(1;1;1)$;

в) $a_1=(1;-1;1;0)$; г) $a_1=(1;1;1;1)$.

152. Найдите ортогональный базис пространства всех решений однородной системы:

а) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+2x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-2x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2-x_3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2-2x_3+2x_4=0. \end{cases}$

Дополнительные задания

153. Пусть a,b – ненулевые ортогональные векторы пространства V над полем P. Будут ли ортогональными пары векторов:

а) a и $-2b$; б) $a-b$ и $2b$;

в) a и $a+b$;

г) $\lambda_1 a+\beta_1 b$ и $\lambda_2 a+\beta_2 b$ при ненулевых λ_i и β_j?

154. Проверьте, какие из следующих последовательностей векторов являются ортогональными:

а) $a_1=(2;1)$, $a_2=(-1;2)$, $a_3=(1;-2)$;

б) $a_1=(1;1;-1)$, $a_2=(1;1;2)$, $a_3=(-1;1;0)$;

в) $a_1=(1;1;-1;1)$, $a_2=(1;1;1;-1)$, $a_3=(-1;1;1;1)$;

г) $a_1=(1;0;1;1)$, $a_2=(1;1;0;-1)$, $a_3=(1;-1;-1;0)$, $a_4=(0;1;-1;1)$.

Какие из них являются ортогональными базисами соответствующих векторных пространств $\mathbb{R}^n$?

155. Дополните последовательность векторов до ортогонального базиса соответствующего арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$:

а) $a_1 = (1;0;-1)$, $a_2 = (1;2;1)$;

б) $a_1 = (1;1;-1;1)$, $a_2 = (1;-1;1;1)$, $a_3 = (-1;1;1;1)$;

в) $a_1 = (1;1;-1;1)$, $a_2 = (2;1;1;-2)$.

156. Найдите ортогональный базис арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащий вектор a_1 :

а) $a_1 = (1;1;-1)$;

б) $a_1 = (1;1;0;1)$;

в) $a_1 = (1;-1;1;-1)$.

157. Найдите ортогональный базис пространства всех решений однородной системы над полем $\mathbb{R}$:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

158. Пусть a_1, a_2 – ортогональные векторы векторного пространства V над полем P. Докажите, что $L(a_1, a_2) = L(a_1) \oplus L(a_2)$. Будет ли верно аналогичное утверждение для ортогональной последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$?

Занятие 11

Теоретический материал. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение.

Задания для практических занятий

159. Ортогонализуйте в пространстве $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным умножением последовательность векторов:

а) $a_1 = (1;1), a_2 = (2;-2)$; б) $a_1 = (1;-1), a_2 = (5;3)$;

в) $a_1 = (1;1;1), a_2 = (1;2;3), a_3 = (0;1;2), a_4 = (3;2;1)$;

г) $a_1 = (1;-2;1;-3)$, $a_2 = (6;-5;5;-3)$, $a_3 = (2;3;1;9)$, $a_4 = (6;2;4;12)$;

д) $a_1 = (2;1;2;-1)$, $a_2 = (2;2;1;-2)$, $a_3 = (-1;8;2;0)$, $a_4 = (-3;8;-1;0)$.

160. Ортогонализуйте последовательность векторов в векторном пространстве $\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$:

а) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 1$;

б) $f_1(x) = x^2 - x + 1$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = 1$.

161. Найдите ортогональный базис дополнения подпространства $L(a_1, a_2)$, если:

а) $a_1 = (1;1;-1), a_2 = (0;1;1)$; б) $a_1 = (1;1;1), a_2 = (1;2;-1)$;

в) $a_1 = (1;1;-1;1), a_2 = (1;-1;1;1)$;

г) $a_1 = (1;1;2;-1), a_2 = (2;1;1;1)$.

162. Пусть $\theta \neq a \in \mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным умножением. Какова размерность подпространства, ортогонального $L(a)$?

163. Пусть L, U – подпространства конечномерного векторного пространства V с невырожденным скалярным умножением. Докажите, что:

а) $(L^{\perp})^{\perp} = L$;

б) $(L+U)^{\perp} = L^{\perp} \cap U^{\perp}$;

в) $(L \cap U)^{\perp} = L^{\perp} + U^{\perp}$;

г) $V^{\perp} = \{\theta\}$;

д) $\{\theta\}^{\perp} = V$.

164. Найдите систему линейных уравнений, задающую подпространство $L = L(a_1, a_2, a_3)$ векторного пространства $\mathbb{R}^4$ над $\mathbb{R}$:

а) $a_1 = (1;1;0;1)$, $a_2 = (-1;0;1;1)$, $a_3 = (0;1;2;-1)$;

б) $a_1 = (1;2;1;3)$, $a_2 = (2;1;1;1)$, $a_3 = (3;3;2;4)$;

в) $a_1 = (1;2;1;3)$, $a_2 = (2;1;2;3)$, $a_3 = (1;-1;1;0)$;

г) $a_1 = (1;2;1;2)$, $a_2 = (2;1;2;1)$, $a_3 = (-1;1;1;1)$.

165. Найдите проекцию b и ортогональную составляющую c вектора a на подпространство L, если:

а) $a = (5;2;-2;2)$, $L = L(a_1, a_2, a_3)$, $a_1 = (2;1;1;-1)$, $a_2 = (1;1;3;0)$, $a_3 = (1;2;8;1)$;

б) $a = (7;-4;-1;2)$, L задано системой линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Дополнительные задания

166. Пусть L – ненулевое подпространство конечномерного векторного пространства V над полем P с невырожденным скалярным умножением, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ортогональный базис пространства L, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ортогональный базис векторного пространства $L^{\perp}$. Докажите, что $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – ортогональный базис векторного пространства V.

167. Ортогонализуйте последовательность векторов в $\mathbb{R}^4$:

а) $a_1 = (1; 2; 2; -1)$, $a_2 = (2; 1; 2; -2)$, $a_3 = (8; 2; -1; 0)$, $a_4 = (8; -1; -3; 0)$;

б) $a_1 = (-3; 1; 1; -2)$, $a_2 = (-3; 6; 5; -5)$, $a_3 = (9; 2; 1; 3)$, $a_4 = (12; 6; 4; 2)$;

в) $a_1 = (1; -3; -2; 1)$, $a_2 = (5; -3; 5; -6)$, $a_3 = (1; 9; 3; 2)$, $a_4 = (4; 12; 2; 6)$;

г) $a_1 = (1; 2; 1; -2)$, $a_2 = (0; -5; -4; 3)$, $a_3 = (3; 1; 9; -3)$, $a_4 = (-2; -4; -12; 4)$;

д) $a_1 = (1; 1; -1; 2)$, $a_2 = (2; 1; 1; 1)$, $a_3 = (1; 0; 2; 1)$, $a_4 = (0; 1; -3; -1)$.

168. Пусть $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ – ортогональный базис k-мерного векторного пространства V с невырожденным скалярным умножением. Пусть для некоторого вектора b из V выполняются равенства $(a_1, b) = \beta_1$, $(a_2, b) = \beta_2$, ..., $(a_k, b) = \beta_k$. Найдите координатную строку вектора b в базисе $Б$, если $(a_i, a_i) = \gamma_i$.

169. Найдите ортогональный базис ортогонального дополнения подпространства $L(a_1, a_2)$ если:

а) $a_1 = (1;1;0;1)$, $a_2 = (-1;0;1;1)$;

б) $a_1 = (1;2;1;-1)$, $a_2 = (2;1;-1;1)$;

в) $a_1 = (1;0;2;-1)$, $a_2 = (2;3;1;1)$.

170. Найдите систему линейных уравнений, задающую подпространство $L = L(a_1, a_2, a_3)$ векторного пространства $\mathbb{R}^4$:

а) $a_1 = (2;1;3;1)$, $a_2 = (1;1;2;1)$, $a_3 = (3;2;5;2)$;

б) $a_1 = (1;1;0;1)$, $a_2 = (2;3;1;1)$, $a_3 = (1;2;1;0)$;

в) $a_1 = (-1;1;1;0)$, $a_2 = (2;1;1;3)$, $a_3 = (1;2;1;-1)$.

171. Найдите проекцию и ортогональную составляющую вектора a на подпространство L, если:

а) $a = (2;1;0;-1)$, $L = L(a_1, a_2, a_3)$, $a_1 = (1;1;0;1)$, $a_2 = (2;-1;0;1)$, $a_3 = (0;1;1;-2)$;

б) $a = (2;1;-3;1)$, L задано системой линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

§2. Евклидовы векторные пространства

Определение. Векторное пространство E над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с невырожденным скалярным умножением, удовлетворяющим условию $(a, a) > 0$ для любого ненулевого вектора $a \in E$, называется *евклидовым векторным пространством.*

Пример. Арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с заданным на нем стандартным скалярным умножением является евклидовым пространством.

Обозначение: E_n.

Определение. *Нормой* вектора a евклидова векторного пространства E называется величина $\|a\| = \sqrt{(a,\, a)}$, т.е. норма – это корень квадратный из скалярного квадрата вектора.

Пример. Найдите норму векторов $a = (1;-2;2;0)$ и $\theta = (0;0;0;0)$ в пространстве E_4.

$$\|a\| = \sqrt{1\cdot 1 + (-2)(-2) + 2\cdot 2 + 0\cdot 0} = \sqrt{1+4+4+0} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\|\theta\| = \sqrt{0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0} = \sqrt{0+0+0+0} = \sqrt{0} = 0.$$

Теорема (свойства нормы в евклидовом пространстве). *Для любых векторов a, b евклидова пространства E и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства.*

1) $\|a\| \ge 0$ и $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$.

2) $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$.

3) $|(a,\, b)| \le \|a\| \cdot \|b\|$ (неравенство Коши –Бунявского).

4) $\|a+b\| \le \|a\| + \|b\|$ (неравенство треугольника).

Определение. Вектор a евклидова пространства E называется *нормированным,* если $\|a\| = 1$, т.е. если $(a,\, a) = 1$.

Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется *ортонормированной*, если она ортогональна и каждый её вектор нормирован.

Ортонормированная последовательность векторов, являющаяся базисом евклидова пространства, называется *ортонормированным базисом пространства.*

Теорема. *Ненулевое конечномерное евклидово пространство E имеет ортонормированный базис.*

Определение. Отображение f евклидова пространства E на евклидово пространство E' называется *изоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и для любых $a, b \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются равенства:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

2) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$;

3) $\big(f(a), f(b)\big) = (a, b)$.

Замечание. n-мерное евклидово пространство изоморфно евклидову пространству E_n и любые два конечномерные евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Определение. *Углом между векторами* a и b евклидова пространства называется величина φ, удовлетворяющая равенству $\cos\varphi = \dfrac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}$.

Пример. Найти угол между векторами $a = (\sqrt{3};1)$, $b = (1;0)$.

По определению

$$cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} = \frac{\sqrt{3}\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Нормируйте ортогональную последовательность векторов $a_1 = (1;1;0;-1)$, $a_2 = (1;0;1;1)$, $a_3 = (1;-1;-1;0)$.

Требуется найти ортонормированную последовательность векторов b_1, b_2, b_3, эквивалентную данной. Будем искать векторы b_i в виде $b_i = \frac{1}{\|a_i\|} a_i$. Тогда

$$(b_i, b_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Имеем

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1; 1; 0; -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1; 0; 1; 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1; -1; -1; 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0 \right).$$

Занятие 12

Теоретический материал. Евклидовы пространства. Норма вектора и её свойства. Ортонормированный базис.

Задания для практических занятий

172. Докажите, что если $\|a\| = \|b\|$, то векторы $a - b$ и $a + b$ евклидова векторного пространства ортогональны.

173. Докажите, что для векторов a, b евклидова пространства равенство $|(a, b)| = \|a\| \cdot \|b\|$ верно тогда и только тогда, когда векторы a, b линейно зависимы.

174. Докажите, что если a, b – ортогональные векторы евклидова пространства, то $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$.

175. В стандартном евклидовом пространстве E_2 даны векторы $a=(1;\sqrt{3})$, $b=(\sqrt{3};1)$, $c=(-\sqrt{3};1)$. Найдите:

а) длины векторов $a, b, c, a-b, a+b$;

б) длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах a и c как на сторонах;

в) длину третьей стороны треугольника, построенного на векторах b и c как на сторонах;

г) углы между векторами a и b, b и c, a и c;

д) углы треугольника построенного на векторах b и c, как на сторонах.

176. Найдите нормированный вектор, ортогональный к векторам

$$a_1=(1;1;1;1), a_2=(1;-1;-1;1),\ \ a_3=(1;-1;1;-1)).$$

177. Определите угол между векторами a и b, если:

а) $a=(2;1;3;2)$, $b=(1;2;-2;1)$;

б) $a=(1;2;2;3)$, $b=(3;1;5;1)$.

178. E – трёхмерное евклидово пространство с базисом $Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, причём $(a_1,a_1)=1$, $(a_2,a_2)=1$, $(a_3,a_3)=1$, $(a_1,a_2)=(a_1,a_3)=1$, $(a_2,a_3)=2$. Найдите скалярные произведения (a,a), (b,b), (a,b), длины векторов a, b, а также угол между ними, если $[a]_Б=(-1;1;1)$, $[b]_Б=(1;2;-1)$.

179. Найдите ортонормированный базис подпространства $L=L(a_1,a_2,a_3)$ евклидова пространства E_4, если:

а) $a_1=(1;0;-1;2), a_2=(1;-1;5;-1), a_3=(-1;2;7;-2)$;

б) $a_1=(1;-1;2;2), a_2=(3;-1;2;1), a_3=(-5;1;3;5)$.

Дополнительные задания

180. Докажите, что для любых векторов a, b евклидова пространства выполняется равенство

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2\left(\|a\|^2+\|b\|^2\right).$$

181. Для ненулевых векторов a и b некоторого евклидова пространства найдите вектор вида $a+\lambda b$, $\lambda\in\mathbb{R}$, имеющий наименьшую норму. Докажите, что этот вектор ортогонален вектору b.

182. Определите угол между векторами a и b, если $a=(1;1;1;2)$, $b=(3;1;-1;0)$.

183. E – трёхмерное евклидово пространство с базисом $Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, причём $(a_1,a_1)=(a_2,a_2)=(a_3,a_3)=1$, $(a_1,a_2)=(a_1,a_3)=1$, $(a_2,a_3)=2$. Найдите скалярные произведения (a,a), (b,b), (a,b), длины векторов a, b, а также угол между ними, если $[a]_Б=(-1;0;1)$, $[b]_Б=(1;-1;1)$.

184. Докажите, что при любом $\varphi\in\mathbb{R}$ векторы $a_1=(\cos\varphi;\ \sin\varphi)$, $a_2=(-\sin\varphi;\ \cos\varphi)$ образуют ортонормированный базис двумерного евклидова пространства E_2. Изобразите этот базис при $\varphi=60^0$.

185. Найдите ортонормированный базис подпространства $L=L(a_1,a_2,a_3)$ евклидова пространства E_4, если $a_1=(1;1;2;1)$, $a_2=(2;1;3;1)$, $a_3=(1;3;4;2)$.

186. Дополните до ортонормированного базиса последовательность векторов:

а) $a_1=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), a_2=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right);$

б) $a_1=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $a_2=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

187. Определите косинусы внутренних углов треугольника ABC, заданного координатами вершин: $A(1;2;1;2)$, $B(3;1;-1;0)$, $C(1;1;0;1)$.

Контрольная работа №3

Примерный вариант

1. Дополните последовательность векторов $a_1=(1;1;-1;0)$, $a_2=(1;0;1;1)$ до ортогонального базиса арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^4$.

2. Ортогонализуйте последовательность векторов $a_1=(1;1;-1)$, $a_2=(2;-1;1)$, $a_3=(1;-2;-2)$, $a_4=(-1;1;1)$.

3. Найдите однородную систему, задающую подпространство $L=L(a_1,a_2,a_3)$, если $a_1=(1;1;-1;1)$, $a_2=(2;1;1;-1)$, $a_3=(0;1;1;2)$.

4. Найдите проекцию b и ортогональную составляющую c вектора $a=(1;1;-1;1)$ на подпространство $L=L(a_1,a_2,a_3)$, если $a_1=(1;-1;1;0)$, $a_2=(0;1;-1;1)$, $a_3=(1;0;0;1)$.

5. Найдите ортогональный базис пространства всех решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3-2x_4+2x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$$

6. Найдите угол между векторами $a_1=(1;1;-1;1)$, $b=(1;-1;-1;1)$.

7. Дополните последовательность векторов $a_1 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ до ортонормированного базиса арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^4$.

ТЕМА 8. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Основные определения и простейшие свойства

Определение. Отображение φ векторного пространства V в себя называется *линейным оператором* пространства V, если выполняются свойства:

1) для любых векторов $a, b \in V$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b);$$

2) для любого вектора $a \in V$ и любого скаляра $\lambda \in P$

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a).$$

Основной пример. Пусть V – ненулевое n-мерное векторное пространство над полем P, $Б = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ – его базис, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ произвольная матрица размерности $n \times n$ с элементами из поля P. Для любого вектора $a \in V$ рассмотрим его координатный столбец $[a]_Б = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ и определим $\varphi(a)$ как вектор, удовлетворяющий равенству

$$\left[\varphi(a)\right]_Б = A\cdot\left[a\right]_Б = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Так как произвольный вектор однозначно определяется по координатам и наоборот, то это равенство определяет отображение φ из V в V:

$$\varphi(a) = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n .$$

Согласно свойствам действий с матрицами и свойствам координат, для произвольных $a, b \in V$ имеем:

$$A\cdot\left[a+b\right]_Б = A\cdot\left(\left[a\right]_Б + \left[b\right]_Б\right) = A\cdot\left[a\right]_Б + A\cdot\left[b\right]_Б ,$$

т.е. $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

$$A\cdot\left[\lambda a\right]_Б = A\cdot\left(\lambda\left[a\right]_Б\right) = \lambda\left(A\cdot\left[a\right]_Б\right),$$

т.е. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(b)$.

В результате φ – линейный оператор пространства V.

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}^3$, $P = \mathbb{R}$, $Б = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (1;2;2)$, $a_3 = (1;1;4)$,

$$a = 1a_1 + (-2)a_2 + 2a_3 = (1;0;7),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $[\varphi(a)]_Б = A\cdot[a]_Б = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Согласно определению φ :

$$\varphi(a) = 1a_1 + 14a_2 + 8a_3 =$$

$$= (1;2;3) + (14;28;28) + (8;8;32) = (23;38;63).$$

Теорема (простейшие свойства линейных операторов). *Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P. Тогда выполняются следующие свойства.*

1) $\varphi(\theta) = \theta$.

2) Для любых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ и скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k) =$$

$$= \lambda_1 \varphi(a_1) + \lambda_2 \varphi(a_2) + \ldots + \lambda_k \varphi(a_k).$$

Пример. Выясните, являются ли линейными операторами в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ правила $\varphi_1(x) = (x_1 - 2x_2; 2x_1 + x_2)$ и $\varphi_2(x) = (1; x_1)$, где $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Заметим, что φ_1 и φ_2 – отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Проверим свойства 1 и 2 из определения линейного оператора (свойства линейности).

Пусть $a = (\alpha_1; \alpha_2)$, $b = (\beta_1; \beta_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\varphi_1(a) = (\alpha_1 - 2\alpha_2;\ 2\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$\varphi_1(b) = (\beta_1 - 2\beta_2;\ 2\beta_1 + \beta_2),$$

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1;\ \alpha_2 + \beta_2) \text{ и}$$

$$\varphi_1(a + b) = ((\alpha_1 + \beta_1) - 2(\alpha_2 + \beta_2);\ 2(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)) =$$

$$= (\alpha_1 - 2\alpha_1 + \beta_1 - 2\beta_2;\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta_1 + \beta_2) =$$

$$= (\alpha_1 - 2\alpha_2;\, 2\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 - 2\beta_2;\, 2\beta_1 + \beta_2) = \varphi_1(a) + \varphi_1(b).$$

Далее $\lambda a = \lambda(\alpha_1; \alpha_2) = (\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2)$ и

$$\varphi_1(\lambda a) = (\lambda\alpha_1 - 2\lambda\alpha_2;\, 2\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2) =$$

$$= \lambda(\alpha_1 - 2\alpha_2;\, 2\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda\varphi_1(a).$$

Таким образом, характеристические свойства линейного оператора выполняются и φ_1 – линейный оператор пространства $\mathbb{R}^2$.

Во втором случае

$$\varphi_2(a + b) = (1; \alpha_2 + \beta_2) \neq (2; \alpha_2 + \beta_2) = (1; \alpha_2) + (1; \beta_2) = \varphi_2(a) + \varphi_2(b),$$

т.е. $\varphi_2(a + b) \neq \varphi_2(a) + \varphi_2(b)$ и φ_2 не является линейным оператором пространства $\mathbb{R}^2$.

Определение. Линейные операторы φ_1 и φ_2 векторного пространства V над полем P *равны,* если для любого вектора $a \in V$:

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a).$$

Определение. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P. *Ядром* оператора φ называется множество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ a \in V \,\middle|\, \varphi(a) = \theta \right\}.$$

Образом оператора φ называется множество

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{ \varphi(a) \,\middle|\, a \in V \right\}.$$

Теорема. *Если φ – линейный оператор векторного пространства V, то $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ – подпространства пространства V.*

Определение. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P, φ – линейный оператор пространства V. *Рангом оператора* φ называется число

$$\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi),$$

дефектом – число

$$\operatorname{def}(\varphi) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi).$$

Теорема. *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P и φ – линейный оператор пространства V. Тогда*

$$n = \dim V = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{rang}(\varphi) + \operatorname{def}(\varphi).$$

Пример. Найдите базис и размерность $\operatorname{Ker}\varphi$, размерность $\operatorname{Im}\varphi$, если $V = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = (4x_1 + 2x_2;\ 2x_1 + x_2)$, $x = (x_1;\ x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Так как $\operatorname{Ker}\varphi = \left\{ a \in V \,\middle|\, \varphi(a) = \theta \right\}$, то, чтобы найти векторы, принадлежащие ядру, необходимо решить уравнение:

$$\varphi(x) = \theta \iff \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right).$$

Найдем ФСР полученной системы – она и будет базисом $\operatorname{Ker}\varphi$:

$$\left\{ 2x_1 + \boldsymbol{x_2} = 0 \right. \iff \left\{ \boldsymbol{x_2} = -2x_1 \right. .$$

x_1	x_2
1	–2

$Б_{\ker\varphi} = \langle a_1 \rangle$, где $a_1 = (1;-2)$. Ввиду этого $\operatorname{def}(\varphi) = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 1$ и по теореме о размерностях

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V - \dim(Ker\varphi) = 2 - 1 = 1.$$

Теорема. *Пусть* V *–* n*-мерное векторное пространство над полем* P*,* $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ *– базис пространства* V *и* $(*)\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ *– произвольная последовательность векторов из* V*. Тогда существует единственный линейный оператор* φ *пространства* V *такой, что*

$$(1)\quad \varphi(a_1) = b_1, \varphi(a_2) = b_2, \ldots, \varphi(a_n) = b_n,$$

причём если $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$*, то* $\varphi(c) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$.

Пример. Пусть $Б = \langle a_1, a_2 \rangle$ – базис пространства $\mathbb{R}^2$, $\varphi(a_1) = (1;2)$, $\varphi(a_2) = (1;-1)$. Тогда для любого вектора $c \in \mathbb{R}^2$, $c = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, получаем

$$\varphi(c) = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) = \lambda_1(1;2) + \lambda_2(1;-1) =$$

$$= (\lambda_1; 2\lambda_1) + (\lambda_2; -\lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2;\ 2\lambda_1 - \lambda_2),$$

т.е. если $[c]_Б = (\lambda_1; \lambda_2)$, то φ отображает вектор с координатами $(\lambda_1; \lambda_2)$ в вектор с координатами $(\lambda_1 + \lambda_2; 2\lambda_1 - \lambda_2)$.

Определение. Линейный оператор φ векторного пространства V над полем P называется *невырожденным,* если $\operatorname{Ker}\varphi = \{\theta\}$.

Занятие 13

Теоретический материал. Линейные операторы, основные свойства. Ядро, образ линейного оператора. Задание оператора через образы базисных векторов.

Задания для практических занятий

188. Докажите, что всякий линейный оператор φ векторного пространства V над полем P линейно зависимую последовательность векторов из V переводит в линейно зависимую.

189. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P. Докажите, что последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из V линейно независима, если линейно независима последовательность $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_k)$.

190. Докажите, что базисом подпространства $\mathrm{Im}\,\varphi$, где φ – линейный оператор пространства V над P с базисом $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, является базис последовательности $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$.

191. Выясните, какие из следующих отображений являются линейными операторами соответствующих векторных пространств:

а) поворот плоскости на некоторый угол φ вокруг начала координат;

б) поворот плоскости на некоторый угол φ вокруг точки $M(1; -2)$;

в) параллельный перенос плоскости на ненулевой вектор;

г) гомотетия с центром в начале координат;

д) гомотетия с центром в точке $M(1;-2)$;

е) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3)\to(x_1-x_2+x_3;2x_1+x_3;x_2-2x_3)$;

ж) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3)\to(x_1^2;x_2^2;x_3^2)$;

з) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3)\to(0;x_2;x_3)$;

и) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3)\to(0;x_2+x_1;x_3+1)$;

к) $\varphi:\ (x_1;x_2;\ldots;x_n)\to(0;0;\ldots;0)$;

л) $\varphi:\ (x_1;x_2x_3)\to(x_1-x_2;x_2+x_3;x_3-x_1;x_3+2x_1-x_2)$;

м) $\varphi:\ \begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

н) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$.

192. Докажите, что дифференцирование является линейным оператором векторного пространства многочленов $\mathbb{R}[x]$ над полем $\mathbb{R}$.

193. Найдите базис $Ker\,\varphi$, $def\,(\varphi)$, $rang\,(\varphi)$, если:

а) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3;x_4)\to$

$\to(x_1+x_2-x_3;2x_1-x_2-x_3+x_4;x_2-x_3;x_1+x_2+x_3+x_4)$;

б) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3;x_4)\to$

$\to(x_1+x_2-x_3+x_4;2x_1+x_2+2x_4;x_1+x_3+x_4;x_2-2x_3)$;

в) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3;x_4)\to$

$\to(x_1+x_3+x_4;x_2+x_3+x_4;x_3+x_4;2x_1-x_2)$.

Дополнительные задания

194. Является ли φ невырожденным линейным оператором пространства V над P, если $\mathrm{Im}\,\varphi = V$?

195. Выясните, какие из следующих отображений являются линейными операторами соответствующих векторных пространств:

а) симметрия относительно какой-либо прямой, проходящей через начало координат;

б) симметрия относительно какой-либо прямой, не проходящей через начало координат;

в) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3) \to (x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + x_2 - 3x_3)$;

г) $\varphi:\ (x_1;x_2;x_3) \to (x_1;x_2;x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\varphi:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

е) $\varphi:\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$;

ж) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

з) $\varphi:\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

и) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

196. Найдите $\operatorname{Im}\varphi$, где $\varphi = D$ линейный оператор дифференцирования в пространстве всех многочленов $\mathbb{R}[x]$ с действительными коэффициентами над полем $\mathbb{R}$.

197. Найдите базис $Ker\,\varphi$, $def\,(\varphi)$, $rang\,(\varphi)$, если

а) $\varphi:(x_1;x_2;x_3;x_4)\to$

$$\to(x_1+x_2+x_4;x_1-x_3+x_4;x_2+x_3;2x_1+x_2-x_3+2x_4);$$

б) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix};$

в) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_4 & x_5 & x_6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$

§2. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ – некоторый базис V, а φ – линейный оператор пространства V. Вычислим векторы $\varphi(a_1),\varphi(a_2),\dots,\varphi(a_n)$ и выразим их через базис:

$$\begin{cases}\varphi(a_1)=\lambda_{11}a_1+\lambda_{21}a_2+\dots+\lambda_{n1}a_n,\\ \varphi(a_2)=\lambda_{12}a_1+\lambda_{22}a_2+\dots+\lambda_{n2}a_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi(a_n)=\lambda_{1n}a_1+\lambda_{2n}a_2+\dots+\lambda_{nn}a_n.\end{cases}$$

Тогда *матрицей линейного оператора* φ в базисе $Б$ называется матрица

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

k-й столбец этой матрицы является координатным столбцом вектора $\varphi(a_k)$ в базисе $Б$.

Пример. Найдите матрицу линейного оператора $\varphi(x_1;x_2;x_3)=(x_1-x_2;x_2-x_3;x_3-x_1)$ в базисе $Б=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$, если $a_1=(1;2;1;)$, $a_2=(2;5;3)$, $a_3=(2;1;-2)$.

Вычислим образы базисных векторов:

$\varphi(a_1)=(1-2;2-1;1-1)=(-1;1;0)$;

$\varphi(a_2)=(2-5;5-3;3-2)=(-3;2;1)$;

$\varphi(a_3)=(2-1;1-(-2);-2-2)=(1;3;-4)$.

Выразим линейно векторы $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\varphi(a_3)$ через базисные векторы a_1,a_2,a_3:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l}(-2)(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \varphi(a_3) \end{array} \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-2)(-1) \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 8 & -7 & -19 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & -2 & -4 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-3)(8)\cdot(-1) \end{array}\sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -23 & -51 & -49 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 9 & 20 & 19 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 & 6 \end{array}\right). \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \varphi(a_1) & \varphi(a_2) & \varphi(a_3) \end{array} \end{array}$$

Таким образом:

$$\varphi(a_1) = (-23)a_1 + 9a_2 + 2a_3\,;$$

$$\varphi(a_2) = (-51)a_1 + 20a_2 + 4a_3\,;$$

$$\varphi(a_3) = (-49)a_1 + 19a_2 + 6a_3\,;$$

$$[\varphi(a_1)]_Б = \begin{pmatrix} -23 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix},\ [\varphi(a_2)]_Б = \begin{pmatrix} -51 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix},\ [\varphi(a_3)]_Б = \begin{pmatrix} -49 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} -23 & -51 & -49 \\ 9 & 20 & 19 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Замечания. 1) В конечной матрице после черты получилась матрица $M_Б(\varphi)$.

2) Если зафиксировать базис n-мерного пространства V, то каждому линейному оператору φ однозначно сопоставляется матрица $M_Б(\varphi)$ и, наоборот, каждая квадратная матрица размерности $n \times n$ однозначно определяет линейный оператор (см. основной пример).

Теорема (о вычислении линейного оператора по его матрице). *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ – его базис и φ – линейный оператор пространства V. Для любого вектора $a \in V$ выполняется равенство*

$$\left[\varphi(a)\right]_{Б} = M_{Б}(\varphi)\cdot[a]_{Б}.$$

Если $M_{Б}(\varphi)$ – матрица линейного оператора φ, вычисленная в базисе $Б=\langle a_1, a_2,\ldots, a_n\rangle$, то базисом $\operatorname{Im}\varphi$ является любой базис последовательности векторов $\varphi(a_1),\varphi(a_2),\ldots,\varphi(a_n)$. Поэтому для нахождения базиса $\operatorname{Im}\varphi$ достаточно найти базис последовательности вектор-столбцов матрицы $M_{Б}(\varphi)$, которому и будет соответствовать базис $\operatorname{Im}\varphi$.

Для нахождения базиса $Ker\varphi$ требуется найти ФСР системы линейных уравнений, равносильной матричному уравнению $M_{Б}(\varphi)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть $\dim V = 4$, $Б=\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$, $M_{Б}(\varphi)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите базисы $\operatorname{Im}\varphi$, $Ker\varphi$.

Находим по описанному алгоритму базис последовательности векторов $[\varphi(a_1)]_{Б},[\varphi(a_2)]_{Б},\ldots,[\varphi(a_n)]_{Б}$, компоненты которых стоят в соответствующих столбцах матрицы $M_{Б}(\varphi)$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\left[\varphi(a_i)\right]_{Б},\ i=1,2,3,4}\begin{matrix} (1)(2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ (-1)(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix}}_{\left[\varphi(a_i)\right]_Б,\ i=1,2,3,4}.$$

Базис последовательности вектор-столбцов состоит из векторов $\left[\varphi(a_1)\right]_Б$, $\left[\varphi(a_3)\right]_Б$. Значит, $Б_{\operatorname{Im}\varphi} = \left\langle \varphi(a_1), \varphi(a_3) \right\rangle$, где

$$\varphi(a_1) = 1\cdot a_1 + (-1)\cdot a_2 + (-2)\cdot a_3 + 3\cdot a_4 = a_1 - a_2 - 2a_3 + 3a_4,$$

$$\varphi(a_3) = 0\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_3 + (-1)\cdot a_4 = a_2 + a_3 - a_4.$$

Затем решаем уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как основная матрица этой однородной системы совпадает с матрицей $M_Б(\varphi)$, то подходят преобразования, уже проделанные выше:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Находим ФСР:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} = -x_2 - x_4, \\ \boldsymbol{x_3} = -3x_2 - 3x_4. \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4
–1	1	–3	0
–1	0	–3	1

В результате $Б_{\mathrm{Ker}\,\varphi} = \langle c_1, c_2 \rangle$, где

$$[c_1]_Б = (-1;\, 1; -3;\, 0),\ [c_2]_Б = (-1; 0; -3; 1)$$

или

$$c_1 = (-1)a_1 + 1a_2 + (-3)a_3 + 0a_4 = -a_1 + a_2 - 3a_3\,,$$

$$c_2 = (-1)a_1 + 0a_2 + (-3)a_3 + 1a_4 = -a_1 - 3a_3 + a_4\,.$$

Определение. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $Б_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ – два его базиса и векторы второго базиса линейно выражены через первый базис:

$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + \ldots + t_{n1}a_n, \\ b_2 = t_{12}a_1 + t_{22}a_2 + \ldots + t_{n2}a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = t_{1n}a_1 + t_{2n}a_2 + \ldots + t_{nn}a_n. \end{cases}$$

Матрицей перехода от базиса $Б_1$ *к базису* $Б_2$ называется матрица

$$T_{Б_1Б_2} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = \Big([b_1]_{Б_1} \quad [b_2]_{Б_1} \quad \ldots \quad [b_n]_{Б_1} \Big).$$

Пример. Найдите матрицу перехода $T_{Б_1 Б_2}$, если $Б_1$ состоит из векторов $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (2;3;6)$, $a_3 = (3;8;10)$, а $Б_2$ – из векторов $b_1 = (1;2;3)$, $b_2 = (2;5;6)$, $b_3 = (2;3;5)$.

Линейно выразим все векторы базиса $Б_2$ через векторы $Б_1$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 3 & 6 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} a_2 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array} (-2)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) (-2)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) (2) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} a_2 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array}.$$

Таким образом:

$$b_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3 = a_1;$$

$$b_2 = 4a_1 + (-1)a_2 + 0a_3 = 4a_1 - a_2;$$

$$b_3 = 7a_1 + (-1)a_2 + (-1)a_3 = 7a_1 - a_2 - a_3.$$

Поэтому $T_{Б_1 Б_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в конечной матрице за чертой стоит в точности матрица $T_{Б_1 Б_2}$.

Теорема (свойства матрицы перехода). *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P,*

$Б_1 = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $Б_2 = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ *– его базисы,* $T_{Б_1 Б_2}$ *– матрица перехода от* $Б_1$ *к* $Б_2$. *Тогда:*

1) матрица $T_{Б_1 Б_2}$ *– обратима;*

2) для любого вектора $a \in V$ *верны равенства*

$$[a]_{Б_1} = T_{Б_1 Б_2} \cdot [a]_{Б_2} \text{ и } [a]_{Б_2} = T_{Б_1 Б_2}^{-1} \cdot [a]_{Б_1};$$

3) $T_{Б_1 Б_2}^{-1} = T_{Б_2 Б_1}$.

Теорема (о связи матриц линейного оператора в разных базисах). *Пусть* φ *– линейный оператор векторного* n*-мерного пространства* V *над полем* P, $Б_1, Б_2$ *– его базисы. Тогда*

$$M_{Б_2}(\varphi) = T_{Б_1 Б_2}^{-1} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1 Б_2}.$$

Занятие 14

Теоретический материал. Матрица линейного оператора, её свойства.

Задания для практических занятий

198. Найдите матрицу линейного оператора φ в базисе $Б$, если:

а) $\varphi : (x_1; x_2) \to (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2)$; $Б = \langle a_1, a_2 \rangle$,

$a_1 = (1; -1)$, $a_2 = (1; -2)$;

б) $\varphi : (x_1; x_2) \to (2x_1 - x_2; x_1 + 3x_2)$, $Б = \langle a_1, a_2 \rangle$,

$a_1 = (3; 7)$, $a_2 = (4; 9)$;

в) $\varphi:(x_1;x_2;x_3)\to(x_1-x_3;2x_1+x_2-x_3;x_1+x_2+2x_3)$;

$$Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle,\ a_1=(1;2;1),\ a_2=(2;5;4), a_3=(3;6;4);$$

г) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Б=\langle a_1,a_2\rangle$,

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix};$$

д) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$, $Б=\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$,

$$a_1=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}2&5\\4&6\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix},\ a_4=\begin{pmatrix}3&4\\8&10\end{pmatrix}.$$

199. Найдите матрицу линейного оператора φ, переводящего базисные векторы $a_1=(1;1)$, $a_2=(2;1)$ в векторы $b_1=(1;-1)$, $b_2=(2;1)$.

200. Найдите матрицу линейного оператора φ, переводящего базисные векторы $a_1=(1;2;1)$, $a_2=(2;5;4)$, $a_3=(3;6;4)$ в векторы $b_1=(1;1;-1)$, $b_2=(2;1;1)$, $b_3=(1;0;2)$ соответственно:

а) в единичном базисе; б) в базисе a_1,a_2,a_3;

в) в базисе $c_1=(1;1;1)$, $c_2=(1;1;0)$, $c_3=(1;0;0)$.

201. Как изменится матрица линейного оператора φ, если в базисе $Б$ поменять местами i-й и j-й векторы ($i\neq j$)?

202. Пусть $M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, где $Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$.

Найдите матрицу линейного оператора φ в базисах:

а) $Б = \langle a_2, a_3, a_1 \rangle$; б) $Б = \langle a_1 + a_2, a_2, a_3 - a_1 \rangle$;

в) $Б = \langle a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3 \rangle$.

203. Пусть $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $[a]_Б = (1;2;3)$, $[b]_Б = (-1;1;-2)$. Найдите $[\varphi(a)]_Б$, $[\varphi(b)]_Б$, $[\varphi(a+b)]_Б$, $[\varphi(3a-2b)]_Б$.

Дополнительные задания

204. Найдите матрицу линейного оператора φ в базисе $Б$, если

а) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Б = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi : (x_1; x_2) \to (x_1; x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$Б = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = (2;3)$, $a_2 = (3;4)$;

в) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Б = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$,

$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $Б = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$,

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$Б = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$, $\quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

.

205. Найдите матрицу линейного оператора φ, переводящего векторы $a_1 = (1;2)$, $a_2 = (3;1)$ в векторы $b_1 = (1;0)$, $b_2 = (1;-1)$:

а) в базисе a_1, a_2; б) в базисе b_1, b_2;

в) в базисе $c_1 = (1;1)$, $c_2 = (2;3)$.

206. Найдите матрицу линейного оператора φ, переводящего векторы $a_1 = (1;1;1)$, $a_2 = (1;0;0)$, $a_3 = (1;0;1)$ в векторы $b_1 = (0;0;1)$, $b_2 = (1;-1;0)$, $b_3 = (-1;0;0)$ соответственно:

а) в базисе a_1, a_2, a_3;

б) в базисе $c_1 = (1;2;3)$, $c_2 = (2;3;4)$; $c_3 = (3;6;10)$.

207. Найдите матрицу линейного оператора дифференцирования D в пространстве всех многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 3 над $\mathbb{R}$ в базисах:

а) 1, $x+1$, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$;

б) 1, $x-2$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$.

208. Пусть D – оператор дифференцирования в подпространстве

$$L = L(1, \sin x, \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x)$$

пространства бесконечно дифференцируемых функций. Докажите, что функции $1, \sin x, \cos x, \sin 2x,\ \cos 2x$ образуют базис L. Найдите в этом базисе матрицы линейных операторов:

а) D; б) D^2;

в) D^3; г) D^6.

209. Докажите, что линейный оператор конечномерного векторного пространства V над полем P невырожден тогда и только тогда, когда в любом базисе $Б$ определитель $|M_Б(\varphi)| \neq 0$.

210. Пусть $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Б = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Найдите матрицу линейного оператора φ в базисах:

а) $Б_1 = \langle a_3, a_1, a_2 \rangle$; б) $Б_2 = \langle a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 \rangle$.

211. Пусть $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $[a]_Б = (1;2;0)$, $[b]_Б = (2;1;-1)$, $[c]_Б = (0;1;1)$. Найдите $[\varphi(a)]_Б$, $[\varphi(b)]_Б$, $[\varphi(c)]_Б$, $[\varphi(2a-3b+c)]_Б$.

Занятие 15

Теоретический материал. Нахождение базисов $Ker\varphi$, $\mathrm{Im}\varphi$ по матрице линейного оператора φ. Матрица перехода от базиса к базису и её свойства.

Задания для практических занятий

212. Найдите базисы $\mathrm{Im}\varphi$, $Ker\varphi$, если в некотором базисе $Б$ матрица $M_Б(\varphi)$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

213. Найдите базисы $\mathrm{Im}\varphi$, $Ker\varphi$ линейного оператора φ, если:

а) $\varphi:(x_1;x_2;x_3)\to(x_1+x_2+x_3;2x_1+3x_2+x_3;x_1+2x_2)$;

б) $\varphi:(x_1;x_2;x_3)\to(x_1;x_2;x_3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $\varphi:(x_1;x_2;x_3;x_4)\to$

$\to(x_1+x_2+x_4;2x_1+x_2+x_3+3x_4;x_1+x_3+2x_4;-x_2+x_3+x_4)$;

д) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$.

214. Линейный оператор φ переводит векторы $a_1=(1;2;1)$, $a_2=(2;5;2)$, $a_3=(2;7;3)$ соответственно в векторы $b_1=(1;0;-1)$, $b_2=(2;1;1)$, $b_3=(0;1;3)$. Найдите базисы $\mathrm{Im}\,\varphi$ и $Ker\varphi$ для данного линейного оператора.

215. Найдите матрицу перехода $T_{Б_1 Б_2}$ от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$, если:

а) $Б_1=\langle a_1,a_2\rangle$, $a_1=(1;1)$, $a_2=(2;1)$, $Б_2=\langle b_1,b_2\rangle$, $b_1=(2;3)$, $b_2=(3;4)$.

б) $Б_1=\langle a_1,a_2\rangle$, $a_1=(-1;2)$, $a_2=(-3;5)$, $Б_2=\langle b_1,b_2\rangle$, $b_1=(3;2)$, $b_2=(4;3)$.

в) $Б_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $a_1=(2;1;3)$, $a_2=(1;3;2)$, $a_3=(1;-2;2)$, $Б_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, $b_1=(1;2;1)$, $b_2=(2;1;3)$, $b_3=(3;4;4)$.

г) $Б_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $a_1=(2;1;2)$, $a_2=(5;2;5)$, $a_3=(8;3;7)$, $Б_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, $b_1=(3;5;8)$, $b_2=(1;2;3)$, $b_3=(2;4;7)$.

д) $Б_1=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$, $a_1=(1;2;3)$, $a_2=(1;1;3)$, $a_3=(2;6;7)$, $Б_2=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$, $b_1=(1;9;5)$, $b_2=(2;5;6)$, $b_3=(-1;1;-2)$.

216. Как изменится матрица перехода $T_{Б_1 Б_2}$ от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$, если:

а) в базисе $Б_1$ поменять местами два вектора;

б) в базисе $Б_2$ поменять местами два вектора;

в) записать векторы базиса $Б_1$ в обратном порядке;

г) записать векторы обоих базисов в обратном порядке.

217. Линейный оператор φ в базисе $Б_1=\langle(1;-1),\ (2;-1)\rangle$ имеет матрицу $M_{Б_1}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $Б_2=\langle(2;3),\ (3;4)\rangle$.

218. Линейный оператор φ в базисе $Б_1=\langle(3;2;1),\ (3;1;1),\ (7;6;2)\rangle$ имеет матрицу $M_{Б_1}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $Б_2=\langle(1;2;-1),\ (9;5;1),\ (5;6;-2)\rangle$.

Дополнительные задания

219. Найдите базисы $\mathrm{Im}\,\varphi$, $Ker\varphi$ если в некотором базисе $Б$ матрица $M_Б(\varphi)$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

220. Для линейного оператора φ найдите базисы $\mathrm{Im}\,\varphi$, $Ker\varphi$, если:

а) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$;

в) $\varphi:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

221. Линейный оператор φ переводит векторы $a_1=(1;1;2)$, $a_2=(2;1;7)$, $a_3=(3;3;7)$ соответственно в векторы $b_1=(0;1;-1)$, $b_2=(1;0;1)$, $b_3=(3;2;1)$. Найдите базисы подпространств $\mathrm{Im}\varphi$ и $Ker\varphi$.

222. Найдите матрицу перехода $T_{Б_1Б_2}$ от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$, если:

а) $Б_1=\langle a_1, a_2\rangle$, $a_1=(1;1)$, $a_2=(1;2)$, $Б_2=\langle b_1, b_2\rangle$, $b_1=(2;1)$, $b_2=(3;2)$;

б) $Б_1=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $a_1=(3;5;8)$, $a_2=(1;2;3)$, $a_3=(2;4;7)$, $Б_2=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$, $b_1=(2;1;3)$, $b_2=(3;2;5)$, $b_3=(4;2;7)$;

в) $Б_1=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $a_1=(1;1;2)$, $a_2=(2;1;7)$, $a_3=(3;3;7)$, $Б_2=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$, $b_1=(4;5;3)$, $b_2=(2;5;2)$, $b_3=(1;2;1)$.

223. Какой будет матрица $M_{Б_2}(\varphi)$, если в некотором базисе $Б_1$:

а) $M_{Б_1}(\varphi)=E$;

б) $M_{Б_1}(\varphi)$ – диагональная матрица, $Б_2$ – произвольный базис?

224. Линейный оператор φ в базисе $Б_1 = \langle (4;3;1), (1;4;1), (3;3;1) \rangle$ имеет матрицу $M_{Б_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $Б_2 = \langle (2;1;3), (1;1;1), (2;3;3) \rangle$.

§3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Пусть V – векторное пространство над полем P. Ненулевой вектор $a \in V$ называется *собственным вектором линейного оператора* φ, если существует такой скаляр $\lambda \in P$, что $\varphi(a) = \lambda a$.

При этом λ называется *собственным значением (собственным числом) линейного оператора* φ, соответствующим собственному вектору a. Собственный вектор a называется в этом случае *принадлежащим* собственному значению λ.

Заметим, что всякий собственный вектор $a \in V$ имеет единственное собственное значение, т.к. если $\varphi(a) = \lambda a$ и $\varphi(a) = \lambda_1 a$, то $\lambda a = \lambda_1 a$ и, т.к. $a \neq \theta$, то $\lambda = \lambda_1$.

Для данного $\lambda \in P$ обозначим $V_\lambda = \{ a \in V \mid \varphi(a) = \lambda a \}$.

Теорема. *Для любого $\lambda \in P$, любого векторного пространства V над полем P и его линейного оператора φ множество V_λ является подпространством пространства V.*

Для нахождения собственных значений линейного оператора φ конечномерного векторного пространства V необходимо решить уравнение $|M_Б(\varphi) - \lambda E| = 0$, где $M_Б(\varphi)$ –

матрица линейного оператора φ в некотором базисе $Б$. Корни этого уравнения, называемого *характеристическим*, являются собственными числами линейного оператора φ.

Пример. Найдите собственные числа линейного оператора φ, имеющего в некотором базисе $Б$ матрицу

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Как указано выше, необходимо решить уравнение $|M_Б(\varphi)-\lambda E|=0$. Вычисляем его левую часть и приравниваем к нулю.

$$M_Б(\varphi)-\lambda E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\0&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^2\begin{vmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=0.$$

Корнями этого уравнения будут $\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$. Они и являются собственными числами данного линейного оператора.

Если λ – собственное число линейного оператора φ, $M_Б(\varphi)$ – его матрица, то для нахождения собственных векторов необходимо решить матричное уравнение

$$\left(M_Б(\varphi)-\lambda E\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

ФСР равносильной этому уравнению однородной системы будет базисом подпространства V_λ.

Пример. Найдите собственные векторы линейного оператора φ, имеющего в некотором базисе $Б$ матрицу

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Согласно предыдущему примеру φ имеет два собственных числа $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$. Для каждого из них находим собственные векторы.

1-й случай: $\lambda_1=1$.

$$M_Б(\varphi)-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Решаем матричное уравнение

$$\left(M_Б(\varphi)-\lambda_1 E\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1+x_3=0,\\x_1-x_3=0.\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\boldsymbol{x_1}=x_3\right..$$

$\boldsymbol{x_1}$	x_2	x_3
0	1	0
1	0	1

ФСР этой системы состоит из таких векторов c_1, c_2, что $[c_1]_Б=(0;1;0)$, $[c_2]_Б=(1;0;1)$. Эти векторы будут образовывать базис собственных векторов, причём:

$$c_1 = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3 = a_2\,,\ c_2 = 1a_1 + 0a_2 + 1a_3 = a_1 + a_3\,,$$

где $Б_1 = \langle a_1,\, a_2,\, a_3 \rangle$ – базис V.

Любой вектор вида $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ при условии, что $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_2 \neq 0$, является собственным вектором линейного оператора φ, принадлежащим собственному числу $\lambda_1 = 1$.

2-Й СЛУЧАЙ: $\lambda_2 = -1$.

$$M_Б(\varphi) - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(M_Б(\varphi) - \lambda_2 E\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = -x_3, \\ \boldsymbol{x_2} = 0. \end{cases}$$

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3
-1	0	1

ФСР состоит из одного вектора c_3 такого, что $[c_3]_Б = (-1;0;1)$, $c_3 = (-1)a_1 + 0a_2 + 1a = -a_1 + a_3$. Любой вектор вида $c = \alpha c_3$, $\alpha \neq 0$, является собственным вектором линейного оператора φ, принадлежащим собственному значению $\lambda_2 = -1$.

ТЕОРЕМА (о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих разным собственным значениям). *Если собственные векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *линейного* *оператора соответствуют попарно различным собственным значениям, то последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *– линейно независима.*

Определение. Линейный оператор φ n-мерного векторного пространства V над полем P, имеющий n попарно различных собственных значений, называется *оператором с простым спектром.* Набор всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром.*

Теорема (о свойствах операторов с простым спектром). *Пусть* φ *– линейный оператор* n*-мерного векторного пространства* V *над полем* P *с простым спектром* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *и* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– собственные векторы* φ*, принадлежащие соответственно собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*. Тогда:*

1) $Б = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ *– базис пространства* V *;*

2) $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *– диагональная матрица, по диагонали которой стоят собственные значения;*

3) для любого вектора $c \in V$, $c = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$ *выполняется равенство* $\varphi(c) = \lambda_1 x_1 a_1 + \ldots + \lambda_n x_n a_n$ *.*

Для линейных операторов φ и ψ векторного пространства V над полем P и скаляра $\lambda \in P$ определим сумму операторов $\varphi + \psi$, произведение операторов $\varphi \cdot \psi$ и произведение оператора на скаляр $\lambda\varphi$ по правилам:

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a),$$

$$(\varphi \cdot \psi)(a) = \varphi(\psi(a)),$$

$$(\lambda\varphi)(a) = \lambda \cdot \varphi(a).$$

Тогда $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi$ и $\lambda\varphi$ – линейные операторы, причём в случае конечномерных пространств

$$M_Б(\varphi + \psi) = M_Б(\varphi) + M_Б(\psi),$$

$$M_Б(\varphi \cdot \psi) = M_Б(\varphi) \cdot M_Б(\psi),$$

$$M_Б(\lambda\varphi) = \lambda \cdot M_Б(\varphi).$$

Занятие 16

Теоретический материал. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Вычисление собственных чисел и векторов в конечномерном случае. Линейные операторы с простым спектром.

Задания для практических занятий

225. Докажите, что $Ker\varphi \neq \{\theta\}$, тогда и только тогда, когда в любом базисе $Б$ выполняется равенство $|M_Б(\varphi)| = 0$.

226. Докажите, что квадратная матрица A и транспонированная к ней A^T имеют одинаковые собственные значения.

227. Докажите, что собственными значениями диагональной матрицы являются её диагональные элементы.

228. Какие собственные значения имеют:

а) нулевая квадратная матрица $\theta_{n\times n}$;

б) единичная матрица $E_{n\times n}$?

Найдите $Ker\varphi$ и $\mathrm{Im}\,\varphi$ для линейного оператора φ, имеющего в некотором базисе $Б$ такие матрицы.

229. Найдите собственные значения и собственные векторы линейных операторов, имеющих в некотором базисе $Б$ матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

230. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора φ, если φ отображает векторы стандартного базиса $e_1 = (1;0;0)$, $e_2 = (0;1;0)$, $e_3 = (0;0;1)$ соответственно в векторы:

а) $b_1 = (-5;-3;-3)$, $b_2 = (8;6;7)$, $b_3 = (-2;-2;-3)$;

б) $b_1 = (7;3;3)$, $b_2 = (-7;-3;-5)$, $b_3 = (1;1;3)$;

в) $b_1 = (-5;-3;-3)$, $b_2 = (7;5;5)$, $b_3 = (-1;-1;-1)$.

231. Найдите базис из собственных векторов линейного оператора φ и его матрицу в этом базисе, если в некотором базисе $Б$:

а) $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

232. Найдите $M_{Б_1}(\varphi + \psi)$, $M_{Б_2}(\varphi \cdot \psi)$, если $Б_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, $Б_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, $a_1 = (1;1)$, $a_2 = (2;3)$, $b_1 = (1;-1)$, $b_2 = (-1;2)$ и:

а) $M_{Б_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{Б_1}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $M_{Б_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{Б_2}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $M_{Б_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{Б_2}(\psi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $M_{Б_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{Б_1}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

233. Найдите собственные числа и собственные векторы оператора φ, если базис $Б$ состоит из векторов $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и:

а) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 - x_3 & 4x_2 - x_3 \\ 4x_2 - x_3 & -x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 55 & 9 \end{pmatrix}$.

234. Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы пространства V над P и $Ker\varphi_1 = Ker\varphi_2 = \{\theta\}$. Докажите, что $Ker(\varphi_1\varphi_2) = Ker(\varphi_2\varphi_1) = \{\theta\}$. Верно ли такое же равенство для $\varphi_1 + \varphi_2$?

Дополнительные задания

235. Докажите, что собственными значениями действительной симметрической матрицы являются действительные числа.

236. Зная собственные значения квадратной матрицы A, выразите через них собственные значения матрицы A^2.

237. Докажите, что собственные значения квадратной матрицы A отличны от 0 тогда и только тогда, когда матрица A обратима.

238. Имеет ли линейный оператор поворота на угол φ в линейном пространстве векторов на плоскости собственные значения и векторы, если:

а) $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$; б) $\varphi = \pi$;

в) $\varphi = 2\pi$?

239. Найдите собственные значения и векторы линейных операторов, имеющих в некотором базисе $Б$ матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 12 \\ -12 & -19 & 24 \\ 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}$.

240. Найдите собственные значения и векторы линейного оператора φ, если φ переводит векторы стандартного базиса $e_1 = (1;0;0;)$, $e_2 = (0;1;0)$, $e_3 = (0;0;1)$ соответственно в векторы:

а) $b_1 = (-4;-2;-2)$, $b_2 = (-1;-1;-3)$, $b_3 = (6;4;6)$;

б) $b_1=(-2;-12;9)$, $b_2=(1;-4;6)$, $b_3=(1;-6;-8)$.

241. Найдите собственные числа и векторы линейного оператора φ в базисе $a_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $a_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, если $\varphi:\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}15&55\\1&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$.

242. Как выражаются собственные значения матрицы A^{-1} через собственные значения матрицы A?

243. Найдите собственные числа и собственные векторы линейного оператора дифференцирования в пространстве всех многочленов степени не выше 3 над полем $\mathbb{R}$.

244. Найдите базис из собственных векторов линейного оператора φ и его матрицу в этом базисе, если:

а) $M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$; б) $M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\-1&3&3\end{pmatrix}$;

в) $M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

245. Пусть линейный оператор φ в базисе $Б_1=\langle(2;1),\,(3;2)\rangle$ имеет матрицу $M_{Б_1}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, линейный оператор ψ в базисе $Б_2=\langle(1;-1),\,(2;-1)\rangle$ имеет матрицу $M_{Б_2}(\psi)=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}$. Найдите матрицы $M_{Б_1}(\varphi+\psi)$ и $M_{Б_2}(\psi\cdot\varphi)$.

Контрольная работа №4

Примерный вариант

1. Найдите базисы подпространств $Ker\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$, если в некотором базисе $Б=\langle a_1,a_2,a_3,a_4\rangle$

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

2. Найдите матрицу линейного оператора φ в базисе $Б$, если:

а) $\varphi:(x_1;x_2)\to(2x_1-x_2;x_1+x_2)$, $Б=\langle(1;1),(2;3)\rangle$;

б) $\varphi:\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$,

$$Б=\left\langle\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\rangle;$$

в) φ переводит векторы $a_1=(1;1;2)$, $a_2=(1;2;2)$, $a_3=(2;3;5)$ в векторы $b_1=(1;-1;0)$, $b_2=(0;1;-1)$, $b_3=(1;0;-1)$.

3. Найдите матрицу перехода от базиса $Б_1=\langle(2;3),(3;4)\rangle$ к базису $Б_2=\langle(-1;1),(-1;2)\rangle$.

4. Найдите $M_{Б_2}(\varphi)$, если $M_{Б_1}(\varphi)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$,

$Б_1=\langle(1;1;2),(1;2;2),(2;3;5)\rangle$, $Б_2=\langle(1;2;3),(1;1;3),(1;5;4)\rangle$.

5. Найдите собственные значения и векторы линейного оператора φ, если $M_{Б}(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ в некотором базисе $Б=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$.

ТЕМА 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§1. Основные определения, свойства и задачи

Определение. *Квадратичной формой* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, слагаемые которой являются произведениями двух переменных с коэффициентами.

Предполагается, что квадратичная форма не содержит подобных членов. Коэффициент при x_i^2 обозначается при помощи α_{ii}. Если $i \neq j$, то предполагается, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Ввиду этого $\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i = 2\alpha_{ij} x_i x_j \ (i \neq j)$.

Квадратичную форму можно записать в виде суммы:

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \ .$$

Матрицей квадратичной формы f называется квадратная матрица $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{n \times n}$, составленная из коэффициентов квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ранг r матрицы A называется *рангом квадратичной формы* f.

Если $r = n$, т.е. если матрица невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*, в противном случае – *вырожденной*.

Ввиду равенств $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, матрица A оказывается *симметрической,* т.к. её элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой. Любая симметрическая матрица определяет единственную квадратичную форму, имеющую коэффициентами элементы этой матрицы.

Обозначив $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ столбец переменных квадратичной формы f, получим $X^T = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и тогда квадратичную форму f можно записать в виде

$$f = X^T \cdot A \cdot X;$$

это – *матричная форма записи квадратичной формы* f.

Пример. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3.$$

Тогда матрица этой квадратичной формы будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1; x_2; x_3) \text{ и}$$

$$X^T \cdot A \cdot X = (x_1; x_2; x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2; & -x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3; & \frac{3}{2}x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^{\,2} - x_2x_1 - x_1x_2 - x_2^{\,2} + \frac{3}{2}x_3x_2 + \frac{3}{2}x_2x_3 + 3x_3^{\,2} =$$

$$= 2x_1^{\,2} - 2x_1x_2 - x_2^{\,2} + 3x_2x_3 + 3x_3^{\,2}.$$

Теорема (об изменении матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании). *Если к квадратичной форме* $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *с матрицей* A *применить линейное преобразование переменных* $x_i == \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *с матрицей* $Q = \left(q_{ij}\right)_{n \times n}$, *то получится квадратичная форма от переменных* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *с матрицей* $Q^T AQ$.

Замечание. Если преобразование переменных является невырожденным, т.е. матрица Q, а вместе с ней и матрица Q^T, невырожденные, то по теореме о ранге произведения матриц ранги матриц A и $Q^T AQ$ равны. Таким образом, *ранг квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных преобразованиях.*

Основная задача – приведение квадратичной формы невырожденным линейным преобразованием к сумме квадратов переменных с некоторыми коэффициентами. Такой вид квадратичной формы называется *каноническим.*

Теорема. *Если квадратичная форма* $f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ *невырожденным линейным преобразованием переменных приведена к каноническому* *виду* $f = \beta_1 y_1{}^2 + \beta_2 y_2{}^2 + \ldots + \beta_n y_n{}^2$, *то количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде равно её рангу.*

Теорема (основная теорема о квадратичных формах). *Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду некоторым невырожденным линейным преобразованием переменных, причём если квадратичная форма имеет действительные коэффициенты, то и все коэффициенты соответствующего невырожденного линейного преобразования можно взять действительными.*

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду рассматриваются два случая.

1-й случай. Среди коэффициентов $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ есть коэффициенты не равные нулю.

Не теряя общности можно считать, что $\alpha_{11} \neq 0$. Тогда невырожденное линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}^{-1} y_1 - \alpha_{11}^{-1} \alpha_{12} y_2 - \ldots - \alpha_{11}^{-1} \alpha_{1n} y_n, \\ x_i = y_i, \text{ если } i = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

приводит форму f к виду $f = \alpha_{11}^{-1} y_1^2 + g$, где g квадратичная форма от переменных $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Это преобразование имеет своим определителем число $\alpha_{11}^{-1} \neq 0$ и потому является невырожденным. В полученной квадратичной форме $f = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ все коэффициенты α_{1j}, $j \neq 1$, равны нулю.

После этого переходим к следующему переменному y_k, $k = 2, 3, \ldots, n$, для которого коэффициент при y_k^2 не равен нулю.

2-й случай. Если все $\alpha_{ii}=0$, но есть $\alpha_{ij}\neq 0\,(i\neq j)$, то можно сделать вспомогательное линейное преобразование, приводящее к случаю 1.

Не теряя общности можно считать, что $\alpha_{12}\neq 0$, т.е. f содержит ненулевое слагаемое $2\alpha_{12}x_1x_2$. Если применить линейное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2, \\ x_i = z_i, \textit{если } \; i = 3,\dots,n; \end{cases}$$

то коэффициенты при z_1^2 и z_2^2 будут ненулевыми и можно перейти к случаю 1. Кроме того, данное преобразование является невырожденным.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3$.

Так как в этой форме нет квадратов неизвестных, то вначале применим невырожденное линейное преобразование $x_1=y_1-y_2$, $x_2=y_1+y_2$, $x_3=y_3$ с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f=2\left(y_1-y_2\right)\left(y_1+y_2\right)-4\left(y_1-y_2\right)y_3+6\left(y_1+y_2\right)y_3=$$

$$=2{y_1}^2-2{y_2}^2+2y_1y_3+10y_2y_3\,.$$

Коэффициент при ${y_1}^2$ отличен от нуля, поэтому можно сделать замену согласно формуле:

$$y_1 = \frac{1}{2} z_1 - \frac{1}{2} z_3, \; y_2 = z_2, \; y_3 = z_3 .$$

Это линейное преобразование имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и является невырожденным, так как $|B| = \frac{1}{2} \neq 0$.

Далее делаем замену и приводим подобные члены:

$$f = 2{y_1}^2 - 2{y_2}^2 + 2y_1 y_3 + 10 y_2 y_3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} z_1 - \frac{1}{2} z_3\right)^2 - 2{z_2}^2 + 2\left(\frac{1}{2} z_1 - \frac{1}{2} z_3\right) z_3 + 10 z_2 z_3 =$$

$$= \frac{1}{2}{z_1}^2 - 2{z_2}^2 - \frac{1}{2}{z_3}^2 + 10 z_2 z_3 .$$

Получилась форма с матрицей $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$.

В ней выделился квадрат переменного z_1. После этого подвергаем оставшуюся квадратичную форму от переменных z_2, z_3 аналогичным преобразованиям.

Положим

$$z_1 = t_1, \; z_2 = -\frac{1}{2} t_2 + \frac{5}{2} t_3, \; z_3 = t_3 .$$

Это преобразование с матрицей $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Тогда

$$f=\frac{1}{2}t_1{}^2-2\left(-\frac{1}{2}t_2+\frac{5}{2}t_3\right)^2-\frac{1}{2}t_3{}^2+10\left(-\frac{1}{2}t_2+\frac{5}{2}t_3\right)t_3=$$

$$=\frac{1}{2}t_1{}^2-\frac{1}{2}t_2{}^2+12t_3{}^2.$$

Невырожденное линейное преобразование, которое сразу переводит квадратичную форму в канонический вид, получается как произведение матриц преобразований, причём в том порядке, в котором они выполнялись:

$$ABC=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1/2 & -1 & -1/2\\ 1/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1/2 & 5/2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & -3\\ 3/2 & -1/2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Это преобразование невырожденное, т.к.

$$|A\cdot B\cdot C|=|A|\cdot|B|\cdot|C|\neq 0.$$

Применив к f линейное преобразование

$$x_1=-\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2-3t_3,\ x_2=\frac{3}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2+2t_3,\ x_3=t_3,$$

можно сразу получить f в каноническом виде.

Заметим, что квадратичную форму к каноническому виду можно привести и другими преобразованиями, также линейными и невырожденными, и получить в общем случае другой результат. Например, квадратичная форма

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$$

преобразованием

$$x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3,\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3,\ x_3 = t_3$$

приводится к каноническому виду $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$, а преобразованием $x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3$, $x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3$, $x_3 = t_2$ к виду $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$, причём оба преобразования линейные и невырожденные.

Комплексная квадратичная форма может быть всегда приведена к виду $f = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_r^2$, где r – ранг квадратичной формы f.

В случае действительных квадратичных форм имеет место следующая

Теорема (закон инерции действительных квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами, не зависит от преобразований.*

Число положительных квадратов в каноническом виде, к которому приводится квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции*. Число отрицательных квадратов – *отрицательным индексом инерции*. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции – *сигнатурой* формы f. По рангу формы и любому из трёх определённых выше чисел можно вычислить два остальных.

Теорема. *Две квадратичные формы от n переменных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

Квадратичную форму к канонической форме можно приводить выделением полных квадратов.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\varphi = x_1^2 + 3x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 .$$

Объединим все члены, содержащие переменную x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$\varphi = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 3x_2^2 + 11x_3^2 - 6x_2x_3 =$$

$$= [x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2] - (x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 11x_3^2 - 6x_2x_3 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 - 8x_2x_3 .$$

Среди оставшихся членов объединим все слагаемые, содержащие переменную x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$\varphi = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2) - 8x_3^2 + 10x_3^2 =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 2(x_2 - 2x_3)^2 + 2x_3^2 .$$

Перейдём теперь к новым переменным:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \qquad x_2 - 2x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3. \end{cases}$$

Тогда квадратичная форма примет вид $\varphi = y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$. Её матрица будет диагональной: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Если же перейти к новым переменным

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = \sqrt{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3, \\ y_3 = \qquad\qquad \sqrt{2}x_3, \end{cases}$$

то $\varphi = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ и матрица квадратичной формы будет единичной.

§2. Положительно определённые квадратичные формы

Квадратичная форма f от n переменных с действительными коэффициентами называется *положительно определённой*, если она приводится к каноническому виду, состоящему из n положительных квадратов, т.е. если ранг и положительный индекс инерции этой формы равны числу переменных. Критерием положительной определённости действительной квадратичной формы служит

Теорема (критерий положительной определённости квадратичной формы). *Квадратичная форма f от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определённой, когда при любых действительных значениях входящих в неё переменных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма принимает только положительные значения.*

Введем вспомогательные понятия, в терминах которых можно определять положительную определённость действительной квадратичной формы по её коэффициентам.

Пусть f – действительная квадратичная форма от n переменных с матрицей $A=\left(\alpha_{ij}\right)$. Миноры порядка $1,2,\ldots,n$ этой матрицы, расположенные в левом верхнем углу, т.е. миноры

$$|\alpha_{11}|,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk}\end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}\end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает с определителем матрицы A, называются *главными минорами* формы f.

Теорема (критерий Сильвестра положительной определённости действительной квадратичной формы). *Квадратичная форма f от n переменных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определённой, когда все её главные миноры строго положительны.*

Примеры. 1) Квадратичная форма

$$f=5x_1^2-8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2-4x_2x_3+x_3^2$$

положительно определена, т.к. все её главные миноры

$$|5|=5,\ \begin{vmatrix}5 & -4\\ -4 & 5\end{vmatrix}=9,\ \begin{vmatrix}5 & -4 & 2\\ -4 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=1,$$

строго положительны.

2) Квадратичная форма

$$f=x_1^2-3x_2^2+x_3^2+6x_1x_2-2x_1x_3+8x_2x_3$$

не будет положительно определённой, т.к. её второй главный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12$ отрицателен.

Занятие 17

Теоретический материал. Квадратичные формы, приведение их к каноническому виду. Положительно определённые квадратичные формы, критерий Сильвестра.

Задания для практических занятий

246. Запишите в матричном виде квадратичные формы $f(x_1, x_2, x_3)$:

а) $2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

б) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$;

в) $x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$;

д) $3x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

247. Запишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$ по её матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

248. Приведите квадратичную форму f к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием:

а) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

б) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

в) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$;

д) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

249. Выясните положительную определённость квадратичных форм по их матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

250. Выясните положительную определённость квадратичных форм:

а) $x_1^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3$;

в) $-x_1^2 + x_2^2 - 4x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$;

д) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Дополнительные задания

251. Запишите в матричном виде квадратичные формы $f(x_1, x_2, x_3)$:

а) $-2x_1^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$;

в) $2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

г) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2$;

д) $2x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$;

е) $4x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2$.

252. Запишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$ по её матрице:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

253. Приведите квадратичную форму f к каноническому виду:

а) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$;

б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

в) $x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

г) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

254. Выясните положительную определённость квадратичных форм по их матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

255. Выясните положительную определённость квадратичных форм:

а) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$;

б) $-x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$;

в) $x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2$;

д) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2$.

Контрольная работа №5

Примерный вариант

1. Запишите в матричном виде квадратичные формы:

а) $2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 4x_2x_3$;

б) $x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. Выпишите квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$ по её матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Приведите квадратичную форму f к каноническому виду:

а) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

4. Выясните положительную определённость квадратичных форм по их матрице:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Выясните положительную определённость квадратичных форм:

а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С.* Алгебра: учеб. пособие для студ.-заочников 1 курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1981.

2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.

3. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре. – М.: Наука, 1987.

4. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-1: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007.

5. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-2: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008.

6. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-1: задачник-практикум для студентов 1-го курса математического факультета. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2009.

7. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. – М.: Высшая школа, 1979.

8. *Куликов Л. Я, Москаленко Л. И., Фомин А. А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. – М.: Просвещение, 1993.

9. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.

10. *Мальцев И. А.* Линейная алгебра. – Новосибирск: Изд. Ин-та математики, 2001.

11. Методическая разработка занятий по алгебре и теории чисел: для студ. 1 курса ФМФ/ Сост. А. М. Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ,1985.

12. Методическая разработка занятий по линейной алгебре: для студ. 1 курса мат. фак. пед. ин-та/ Сост. А. М. Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ, 1988.

13. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1970.

14. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972.

15. *Шнеперман Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. – Минск, 1982.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кузьмичёв Анатолий Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–2

Практикум для студентов 1-го курса

В авторской редакции

Компьютерная вёрстка *О.И. Сафенрайдер*

Подписано в печать 31.05.2011 г. Формат бумаги 60x84/16.

Печать RISO. Уч.-изд.л. 9,75. Усл.печ.л. 9,07. Тираж 100 экз.

Заказ №

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, Вилюйская, 28