ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И.Кузьмичёв

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–1

Задачник-практикум для студентов 1-го курса математического факультета

Новосибирск 2009

УДК 512(075.8) Печатается по решению
ББК 22.143я73-4 Редакционно-издательского
К 893 совета НГПУ

Н а у ч н ы й р е д а к т о р –
кандидат физико-математических наук, зав.кафедрой
алгебры математического факультета НГПУ
М.П.Тропин

Р е ц е н з е н т ы :
кандидат физико-математических наук, старший
научный сотрудник Института математики СО РАН
М.В.Нещадим,

кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры математического факультета НГПУ
Ю.В.Сосновский

К 893 **Кузьмичёв, А.И.**

Линейная алгебра–1: задачник-практикум для студентов 1-го курса математического факультета/ А.И.Кузьмичёв. – Новосибирск: Изд. ГОУ ВПО НГПУ, 2009. – 118 с.

Пособие входит в серию «Учебно-дидактические комплексы кафедры алгебры» и содержит материалы для практических занятий по темам: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Арифметические векторные пространства и их применения» и «Общеалгебраические понятия», примеры решения типовых задач, практические задания. В конце каждой темы дан примерный вариант контрольной работы.

Предназначено для студентов 1-го курса математического факультета НГПУ.

УДК 512(075.8)

ББК 22.143я73-4

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Матрицы и действия с ними

Матрица – это прямоугольная таблица чисел с выделенными строками и столбцами, на пересечении которых стоит ровно один элемент.

Общий вид матрицы, у которой m строк и k столбцов:

$$A_{m\times k} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk} \end{pmatrix} = \left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k},$$

где α_{ij} – элемент матрицы A, стоящий в i-й строке, j-м столбце, а $m\times k$ - размерность матрицы A.

Система строк матрицы A:

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \end{pmatrix},$$

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \end{pmatrix},$$

$$\dots\dots$$

$$A_{(m)} = \begin{pmatrix} \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk} \end{pmatrix}.$$

Система столбцов матрицы A:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix},\ A^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix},\ \dots,\ A^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $m\times k = 2\times 4$, $\alpha_{11} = 2$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{13} = 3$, $\alpha_{14} = 0$, $\alpha_{21} = -1$, $\alpha_{22} = 3$, $\alpha_{23} = 1$, $\alpha_{24} = 5$,

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ A_{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы $A = A_{m\times k}$ на скаляр λ равно матрице размерности $m \times k$, каждый элемент которой равен произведению λ на соответствующий элемент матрицы A.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$.

Тогда $\lambda \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 3 & 2\cdot 1 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрицы одинаковой размерности можно складывать. *Суммой* матрицы $A = \left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k}$ и матрицы $B = \left(\beta_{ij}\right)_{m\times k}$ называется матрица $C = \left(\gamma_{ij}\right)_{m\times k}$ такая, что $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, обе размерности 2×4. Тогда

$$C_{2\times 4} = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 1+2 & 3+(-2) & 0+1 \\ (-1)+2 & 3+0 & 1+1 & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведением строки $(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_k)$ длины k справа на столбец $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ такой же длины k называется число (или матрица размерности 1×1), равное

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_k) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \dots + \alpha_k \cdot \beta_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \beta_i .$$

Пример. $(1 \quad -1 \quad 0 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 1 =$

$$= 3 - 2 + 0 + 2 = 3 .$$

Произведением матрицы A размерности $m \times k$ на матрицу B размерности $k \times r$ называется матрица C размерности $m \times r$ такая, что

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times r} = C_{m \times r} = \begin{pmatrix} A_{(1)} \cdot B^{(1)} & A_{(1)} \cdot B^{(2)} & \dots & A_{(1)} \cdot B^{(r)} \\ A_{(2)} \cdot B^{(1)} & A_{(2)} \cdot B^{(2)} & \dots & A_{(2)} \cdot B^{(r)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{(m)} \cdot B^{(1)} & A_{(m)} \cdot B^{(2)} & \dots & A_{(m)} \cdot B^{(r)} \end{pmatrix},$$

т.е. элемент матрицы C, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Замечание. Если условие на размерности матриц A и B не выполняется, то их произведение не определено. По условию количество столбцов матрицы A должно равняться количеству строк матрицы B или, что то же самое, длина строки матрицы A должна равняться высоте столбца матрицы B.

Для вычисления произведения матрицы A на матрицу B i-ю строку $A_{(i)}$ матрицы A умножаем на j-й столбец $B^{(j)}$ матрицы B $(1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le r)$ и результат записываем в i-й строке и j-м столбце матрицы $C = A \cdot B$.

Пример. Пусть

$$A_{m\times k} = A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; B_{k\times r} = B_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $k = 4$.

Тогда $C_{m\times r} = C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot(-1)+1\cdot 1+3\cdot(-1)+0\cdot 0 \\ -1\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 2+5\cdot 1 & -1\cdot 0+3\cdot 1+1\cdot 1+5\cdot 2 & -1\cdot(-1)+3\cdot 1+1\cdot(-1)+5\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 6 & 14 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонированной матрицей к матрице $A_{m\times k} = \left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k}$ называется матрица $A^{\mathrm{T}} = B_{k\times m} = \left(\beta_{ij}\right)_{k\times m}$ такая, что $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $1 \le i \le m$, $1 \le j \le k$.

Матрица A^{T} получается из матрицы A, если строки матрицы A записать с сохранением порядка следования элементов как столбцы (или если столбцы матрицы A записать с сохранением порядка следования элементов как строки).

Пример. Пусть $A = A_{2\times4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Для любых матриц A, B, C подходящих размерностей (т.е. для которых можно выполнить указанные действия) и любых скаляров α, β верны следующие равенства:

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

2) $A+B=B+A$;

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;

4) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

5) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$;

6) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$;

7) $\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$;

8) $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$;

9) $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)$;

10) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

11) $(A\cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$;

12) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$.

Матрица $\mathrm{O}_{m\times k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ называется *нулевой* матрицей размерности $m\times k$ и обладает следующими свойствами:

$$A_{m\times k}+\mathrm{O}_{m\times k}=\mathrm{O}_{m\times k}+A_{m\times k}=A_{m\times k},$$

$$A_{n\times m}\cdot \mathrm{O}_{m\times k}=\mathrm{O}_{n\times k},$$
$$\mathrm{O}_{m\times k}\cdot A_{k\times n}=\mathrm{O}_{m\times n}$$

Матрица $A_{m\times k}$ называется *квадратной матрицей размерности* n, если $m=k=n$, т.е. количество её строк и столбцов совпадают и равны n.

Квадратная матрица $E_{n\times n}=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix}$ размерности $n\times n$ такая, что

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j;\\0, & \text{если } i\neq j.\end{cases},$$

называется *единичной*. Её характеристическое свойство выражается равенством $A\cdot E=E\cdot A=A$ для произвольной квадратной матрицы A той же размерности.

Пример. Выведите формулу для A^n, где $n\in N$, и обоснуйте её методом математической индукции, если $A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$.

Заметим, что $A^1=A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}$,

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&-6\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\cdot(-3)\\0&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&-9\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\cdot(-3)\\0&1\end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&-12\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\cdot(-3)\\0&1\end{pmatrix}\text{ и т.д.}$$

Ввиду этого, делаем предположение, что $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\cdot(-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Докажем методом математической индукции, что эта формула верна.

Для $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ проверено. Пусть формула верна для $n = k$, т.е. $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\cdot(-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $1 \le k \le n$.

Докажем, что формула верна и для $n = k+1$. Действительно, $A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & k\cdot(-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 + k\cdot(-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)\cdot(-3) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании метода математической индукции делаем вывод, что формула верна для всех натуральных чисел n.

Занятие 1

Матрицы, запись матриц, последовательностей строк и столбцов. Умножение матрицы на скаляр и сложение матриц. Умножение строки на столбец, матрицы на матрицу. Свойства действий с матрицами.

Основные типы задач. Запись последовательностей строк и столбцов матрицы. Задачи на выполнение основных действий с матрицами.

Задачи и упражнения

1. Выпишите последовательности строк и столбцов матрицы, укажите в каждом случае размерности и элементы α_{12}, α_{21} и α_{22}:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Можно ли найти сумму матриц A и B, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$?

Во всех случаях, если это возможно, найдите суммы $A + B$ и $B + A$.

3. Можно ли найти произведение строки A на столбец B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \end{pmatrix}$?

Во всех случаях, если это возможно, найдите произведение $A \cdot B$.

4. Выполните действия:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -7 & -2 & 12 \end{pmatrix}$;

г) $2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задания

5. Выпишите последовательности строк и столбцов матрицы, укажите в каждом случае размерности и элементы α_{12}, α_{21} и α_{22}:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Можно ли найти сумму матриц A и B, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Во всех случаях, если это возможно, найдите суммы $A + B$ и $B + A$.

7. Можно ли найти произведение строки A на столбец B, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Во всех случаях, если это возможно, найдите произведение $A \cdot B$.

8. Выполните действия:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Занятие 2

Транспонирование матриц. Решение простейших матричных уравнений.

Основные типы задач. Вычисление транспонированой матрицы, проверка свойств транспонирования. Решение простейших матричных уравнений. Применение метода математической индукции к действиям с матрицами.

Задачи и упражнения

1. Решите уравнения:

а) $2 \cdot X + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Выведите формулу для A^n, $n \in \mathbb{N}$, и обоснуйте её методом математической индукции:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируйте матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Докажите, что для любых матриц подходящей размерности A, B и C верны равенства:

а) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A$;

б) $(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;

в) $\left(A\cdot\left(B+C\right)\right)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

5. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если верно равенство $A\cdot B = B\cdot A$. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Пусть E_{ij} – квадратная матрица порядка n, у которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0.

Вычислите произведения:

а) $E_{ij}\cdot E_{km}$, где $1 < i,\quad j,\quad k,\quad m \le n$;

б) $E_{ij}\cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

7. Пусть A – матрица из предыдущего примера и $E_{i+\lambda(k)} = E + \lambda\cdot E_{ik}$, $i \ne k$, $E_{\lambda(i)} = E + (\lambda - 1)\cdot E_{ii}$, $\lambda \ne 0$.

Вычислите $E_{i+\lambda(k)}\cdot A$ и $A\cdot E_{\lambda(i)}$.

Дополнительные задания

8. Решите уравнения:

а) $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $2\cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Выведите формулу для A^n, $n \in \mathbb{N}$, и обоснуйте её методом математической индукции.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Транспонируйте матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & -5 \\ -2 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Докажите, что для любых матриц подходящей размерности A, B и C и скаляра α верны равенства:

а) $(\alpha \cdot A)^{\mathrm{T}} = \alpha \cdot A^{\mathrm{T}}$;

б) $((A+B) \cdot C)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}} \cdot B^{\mathrm{T}}$.

12. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Для матриц из заданий 5 и 6 вычислите произведения

а) $A \cdot E_{ij}$; б) $A \cdot E_{i+\lambda(k)}$; в) $E_{\lambda(i)} \cdot A$.

§2. Перестановки и подстановки

Определение. *Перестановкой* элементов множества $M_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ называется упорядоченная n-ка из всех элементов множества M_n. Перестановки обозначаются так: $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$, где $\alpha_i \in M_n$.

Два числа i и j в перестановке образуют *инверсию*, если $i > j$, но i расположено в перестановке левее j.

Пример. Пусть $(3;\ 1;\ 6;\ 2;\ 4;\ 5)$ – перестановка множества M_6. Тогда в данной перестановке имеются следующие инверсии: $3 \leftrightarrow 1$; $3 \leftrightarrow 2$; $6 \leftrightarrow 2$; $6 \leftrightarrow 4$; $6 \leftrightarrow 5$. Итого, 5 инверсий.

Перестановка называется *чётной*, если она имеет чётное количество инверсий, и *нечётной* – в противном случае.

В примере выше перестановка нечётная.

Транспозицией перестановки называется такое преобразование, которое меняет местами ровно два её символа.

Пример. $(3;\ 1;\ 6;\ 2;\ 4;\ 5) \to (3;\ 5;\ 6;\ 2;\ 4;\ 1)$.

Каждая транспозиция меняет чётность перестановок. Количество всех перестановок множества M_n *равно* $n!$. *Количество чётных и нечётных перестановок одинаково и равно* $\dfrac{n!}{2}$.

Все $n!$ *перестановок множества* M_n *можно расположить в цепочку, где каждая следующая перестановка получается из предыдущей с помощью ровно одной транспозиции, причем цепочку можно начать с произвольной перестановки.*

Пример. Расположим все перестановки множества M_3, начиная с $(3;\ 1;\ 2)$, в соответствующую цепочку:

$$(3;\ 1;\ 2) \to (3;\ 2;\ 1) \to (1;\ 2;\ 3) \to (1;\ 3;\ 2) \to$$
$$\to (2;\ 3;\ 1) \to (2;\ 1;\ 3).$$

Идея состоит в том, что первый элемент фиксируется, а остальные при помощи транспозиций всевозможными способами переставляются. Затем на первое место нужно переставить другой элемент и далее поступать аналогично.

Такая цепочка не единственна.

Подстановкой множества M_n называется взаимно однозначное отображение множества M_n на себя. Подстановку удобно записывать в виде таблицы

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

где первая и вторая строки – это перестановки множества M_n, а отображение φ переводит элементы первой строки в расположенные под ними элементы второй строки.

Канонической записью подстановки множества M_n называется таблица вида $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Каждая подстановка может быть записана в каноническом виде.

Количество всех различных подстановок множества M_n равно $n!$.

Подстановка называется *чётной*, если сумма инверсий её верхней и нижней строк чётная, и *нечётной* в противном случае.

Знаком подстановки φ называется число

$$\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \text{ четная}; \\ -1, & \text{если } \varphi \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Подстановки φ_1 и φ_2 называются *равными*, если для любого элемента $i \in M_n$, верно равенство $\varphi_1(i) = \varphi_2(i)$.

Количество всех чётных подстановок множества M_n равно количеству всех нечётных и равно $\frac{n!}{2}$.

Занятие 3

Перестановки, примеры, количество перестановок, понятие инверсии, транспозиции, расположение перестановок в цепочку, чётность.

Подстановки, запись подстановок, примеры, количество подстановок, знак подстановки и способы его нахождения.

Основные типы задач. Задачи на определение подстановки и перестановки, нахождение количества инверсий и чётности перестановки, запись подстановки в каноническом виде, нахождения знака подстановки.

Задачи и упражнения

1. Какие из следующих таблиц не являются перестановками множества M_5 и почему?

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Выпишите все перестановки множества M_4. Сформулируйте какое-нибудь правило для записи всех перестановок множества M_5.

3. Начиная с перестановки $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, выпишите в цепочку все $4!$ перестановок множества M_4 так, чтобы каждая следующая получалась из предыдущей с помощью одной транспозиции.

4. Найдите количество инверсий и чётность перестановок:

а) $(3\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 4)$;

б) $(8\ \ 1\ \ 3\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 4\ \ 2)$;

в) $(n\ \ n-1\ \ \ldots\ \ 2\ \ 1)$;

г) $(n\ \ n-1\ \ 1\ \ 2\ \ \ldots\ \ n-2)$.

5. Подберите символы i и k так, чтобы перестановка множества M_8 была:

а) $(1\ \ 2\ \ 7\ \ 4\ \ i\ \ 5\ \ 6\ \ k)$ – чётной;

б) $(5\ \ i\ \ 2\ \ 1\ \ k\ \ 4\ \ 8\ \ 7)$ – нечётной.

6. Какие из следующих таблиц не являются записью подстановки некоторого множества M_n и почему:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 8 & 6 & 7 & 1 & 4 \\ 8 & 3 & 5 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$?

Запишите все подстановки в каноническом виде.

7. Найдите знаки подстановок и запишите подстановки в каноническом виде:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 4 & 8 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$.

8. Какие из следующих подстановок равны между собой:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$?

9. При каких значениях параметров i и k подстановки являются чётными:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & i & 2 & k & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 8 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & i & 5 & k & 8 & 7 \end{pmatrix}$?

Дополнительные задания

10. Начиная с перестановки $(3\ \ 2\ \ 1\ \ 4)$ выпишите в цепочку все $4!$ перестановок множества M_4 так, чтобы каждая следующая получалась из предыдущей с помощью одной транспозиции.

11. Найдите количество инверсий и чётность перестановок:

а) $(6\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 5\ \ 4)$;

б) $(8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)$;

в) $(2n\ \ 2n-1\ \ 2n-2\ \ \ldots\ \ 2\ \ 1)$;

г) $(1\ \ 3\ \ 5\ \ \ldots\ \ 2n-1\ \ 2\ \ 4\ \ \ldots\ \ 2n)$;

д) $(1\ \ 3\ \ 5\ \ \ldots\ \ 2n-1\ \ 2n\ \ 2n-2\ \ \ldots\ \ 4\ \ 2)$;

е) $(4\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 5\ \ \ldots\ \ 4n\ \ 4n-1\ \ 4n-2\ \ 4n-3)$;

ж) $(2\ \ 4\ \ 6\ \ \ldots\ \ 2n\ \ 2n-1\ \ 2n-3\ \ \ldots\ \ 3\ \ 1)$.

12. В какой перестановке множества M_n количество инверсий наибольшее?

13. Подберите символы i, j, k так, чтобы перестановка множества M_8 была:

а) $\begin{pmatrix} 2 & i & 5 & j & 7 & k & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – чётной;

б) $\begin{pmatrix} i & 3 & 8 & k & 7 & j & 1 & 4 \end{pmatrix}$ – нечётной.

14. Сколько инверсий образует а) число 1; б) число n, стоящее на k-м месте $(1 < k < n)$ в перестановке множества M_n?

15. Какие из следующих таблиц не являются записью подстановки некоторого множества M_n и почему:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$?

Запишите все подстановки в каноническом виде.

16. Найдите знаки подстановок и запишите подстановки в каноническом виде:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 6 & 3 & 8 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & n & n-1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n-2 & n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-5 & n-4 & n-3 \end{pmatrix}$.

17. При каких значениях параметров i и k подстановки являются чётными:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & i & 4 & 6 & k & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 & 8 \\ i & 4 & 5 & 7 & 3 & k & 1 & 6 \end{pmatrix}$?

§3. Определители

Определители 1-го, 2-го и 3-го порядков вычисляются по правилам:

$$|\alpha_{11}| = \alpha_{11};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21};$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} -$$

$$-\alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32}.$$

Примеры. $|2| = 2$; $|-3| = -3$;

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2;$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 6 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 7 \cdot 9 - 3 \cdot 5 \cdot 6 - 2 \cdot 8 \cdot 4 =$$

$$= 84 + 20 + 216 - 63 - 90 - 64 = 320 - 217 = 103.$$

Правильным произведением элементов квадратной матрицы $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ n-го порядка называется всякое произведение, в которое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A.

Каждое правильное произведение квадратной матрицы A можно записать в виде $\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n}$, где k_i – номер столбца, из которого взят множитель α_{ik_i}. Всякому правильному произведению соответствует единственная подстановка $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$. И, наоборот, всякой такой подстановке соответствует единственное правильное произведение $\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n}$.

Знаком правильного произведения $\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n}$ называется знак подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$.

Пример. $\alpha_{24} \cdot \alpha_{51} \cdot \alpha_{13} \cdot \alpha_{45} \cdot \alpha_{32} = \alpha_{13} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{45} \cdot \alpha_{51}$ – правильное произведение квадратной матрицы 5-го порядка со знаком, совпадающим со знаком подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, у которой в верхней строке 0 инверсий, а в нижней – 6 инверсий:

$$(3 \leftrightarrow 2; \quad 3 \leftrightarrow 1; \quad 4 \leftrightarrow 2; \quad 4 \leftrightarrow 1; \quad 2 \leftrightarrow 1; \quad 5 \leftrightarrow 1).$$

$0 + 6 = 6$ – чётное число, значит, данное правильное произведение в определителе будет иметь знак «$+$».

Количество всех правильных произведений квадратной матрицы A порядка n равно $n!$.

Определителем квадратной матрицы A порядка n называется сумма всех её правильных произведений, взятых с соответствующим знаком:

$$|A| = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot \alpha_{1\varphi(1)} \cdot \alpha_{2\varphi(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)},$$

где $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$, S_n – множество всех подстановок множества M_n.

Свойства определителей:

1) определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю;

2) определитель диагональной или треугольной матрицы равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали;

3) определитель матрицы A *равен определителю транспонированной матрицы* A^{T} *;*

4) свойства определителя, верные для его строк, выполняются и для его столбцов; и наоборот;

5) определитель, имеющий равные или пропорциональные строки (столбцы) равен нулю;

6) общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

7) если i *-я строка определителя представлена в виде суммы двух строк, то определитель равен сумме двух определителей, в которых все строки такие же, как у исходного, а* i *-е строки равны соответствующим слагаемым;*

8) если к какой-либо строке определителя прибавить любую другую строку, умноженную на произвольный скаляр, то определитель не изменится;

9) определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Следствие 1. *При перестановке любых двух строк определителя его знак меняется на противоположный.*

Пример. Вычислите определитель по определению:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Выпишем все правильные произведения, не содержащие нулей в качестве сомножителей. Заметим, что из четвертой строки в такое произведение можно взять только $\alpha_{44} = a$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Из оставшихся элементов первой строки в это правильное произведение войдет только элемент $\alpha_{11} = a$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Тогда из второй строки возьмем $\alpha_{22} = a$ и из третьей $\alpha_{33} = b$:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

В результате, единственным правильным произведением, не содержащим нулей в качестве сомножителей, является произведение $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} \cdot \alpha_{44} = a \cdot a \cdot b \cdot a$. Его знак определяется подстановкой $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, имеющей 0 инверсий, а значит $\operatorname{sgn} \varphi = +1$. Отсюда получается, $\Delta = a \cdot a \cdot b \cdot a = a^3 \cdot b$.

Минором M_{ij} элемента α_{ij} квадратной матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A после вычеркивания i-й строки и j-го столбца, т.е. строки и столбца матрицы A, в которых стоит элемент α_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента α_{ij} квадратной матрицы A (или её определителя) называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдём M_{23} и A_{23}.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -2.$$

Для любой квадратной матрицы A для любых $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, n$, выполняются равенства:

(1) $|A| = \alpha_{i1} \cdot A_{i1} + \alpha_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + \alpha_{in} \cdot A_{in}$;

(2) $|A| = \alpha_{1j} \cdot A_{1j} + \alpha_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + \alpha_{nj} \cdot A_{nj}$;

(3) $\alpha_{i1} \cdot A_{k1} + \alpha_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + \alpha_{in} \cdot A_{kn} = 0 \quad (i \neq k)$;

(4) $\alpha_{1j} \cdot A_{1k} + \alpha_{2j} \cdot A_{2k} + \ldots + \alpha_{nj} \cdot A_{nk} = 0 \quad (j \neq k)$.

Равенства (1), (2) называются, соответственно, *разложением определителя по i-й строке и j-му столбцу.*

Следствие 2. *Определитель квадратной матрицы, в одной из строк или столбцов которого есть один ненулевой элемент, а все остальные нули, равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.*

Пример. По формуле 1 разложим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ по второй строке:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{23} =$$

$$= -(12-5) - (8-2) = -7 - 6 = -13\,.$$

Первый способ вычисления определителей:

применяя свойства 7, 5, 6 и 4 (и следствие 1), сводим вычисление определителя матрицы A к вычислению определителя диагональной или треугольной матрицы, который находим по свойству 2.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)(1) \\ \\ \\ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & -13 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 5 = -25.$$

Второй способ вычисления определителей (модифицированный метод Гаусса):

применяя свойство 7 (а до этого и остальные), получаем из данного определителя определитель, равный ему, в котором в каком-то столбце или какой-то строке все элементы, кроме одного, нули, потом по следствию 2 переходим к вычислению определителя меньшего порядка и т.д.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} (2)(1)(3) = \begin{vmatrix} 8 & 7 & 0 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 6 \\ 12 & 8 & 0 & 17 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 5 & 4 & 6 \\ 12 & 8 & 17 \end{vmatrix} (-2) = - \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} (4) = - \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-15 - 4) = 19 .$$

Квадратная матрица A называется *обратимой*, если существует такая квадратная матрица B того же порядка, что $A \cdot B = B \cdot A = E$. Если матрица A обратима, то обратная единственна и обозначается через A^{-1}.

Присоединенной к квадратной матрице A порядка n называется матрица

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента α_{ij} матрицы A.

Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$, причем $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$.

Свойство матрицы A^*:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}.$$

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-4) \\ \\ \\ \end{matrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2-1) = 2 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то A^{-1} существует.

Найдем A^{-1}. Для этого вначале вычисляем A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 7 = -1.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 14) = 2.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6-4) = -2 .$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 .$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2 .$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 8 = 6 .$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -(14-16) = 2 .$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4 .$$

Значит $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot A^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверяем, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислим

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} (-2)(-1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 .$$

Так как $|A| = 0$, то матрица A не обратима, т.е. A^{-1} не существует.

Занятие 4

Определители второго и третьего порядков и способы их вычисления. Игра «Определитель».

Основные типы задач. Вычисление определителей второго и третьего порядков по введенным правилам, освоение мнемонических приемов запоминания правил. Знакомство с игрой «Определитель» для усвоения вычисления определителей третьего порядка в игре.

Задачи и упражнения

1. Вычислите определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$.

2. Вычислите определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 8 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 3 & a & -2 \\ 4 & a & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Игра «Определитель». Суть игры состоит в том, что два игрока поочерёдно расставляют числа от 1 до 9 в клетки матрицы размерности 3×3 (числа не должны повторяться). После того, как будет поставлено последнее число, вычисляется определитель полученной матрицы. Если определитель – положительный, то выигрывает первый игрок, если определитель – отрицательный, то выигрывает второй игрок.

Дополнительные задания

4. Вычислите определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix};$$

5. Вычислите определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 32 & 35 & 36 \\ 16 & 15 & 18 \\ 45 & 48 & 50 \end{vmatrix}$.

Занятие 5

Правильные произведения, их знак, количество. Понятие определителя квадратной матрицы. Вычисление определителей по определению.

Основные типы задач. Задачи на освоение понятия правильного произведения элементов определителя n-го порядка, навыков нахождения знака правильного произведения, вычисления простейших определителей по определению.

Задачи и упражнения

1. Какие из следующих произведений не являются правильными в определителе 6-го порядка и почему:

а) $\alpha_{23} \cdot \alpha_{61} \cdot \alpha_{35} \cdot \alpha_{42} \cdot \alpha_{13} \cdot \alpha_{54}$;

б) $\alpha_{16} \cdot \alpha_{43} \cdot \alpha_{32} \cdot \alpha_{65} \cdot \alpha_{11} \cdot \alpha_{24}$;

в) $\alpha_{13} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{37} \cdot \alpha_{45} \cdot \alpha_{52} \cdot \alpha_{61}$?

2. С каким знаком входят следующие правильные произведения в определитель восьмого порядка:

а) $\alpha_{21} \cdot \alpha_{46} \cdot \alpha_{13} \cdot \alpha_{87} \cdot \alpha_{34} \cdot \alpha_{62} \cdot \alpha_{78} \cdot \alpha_{55}$;

б) $\alpha_{33} \cdot \alpha_{57} \cdot \alpha_{14} \cdot \alpha_{61} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{78} \cdot \alpha_{45} \cdot \alpha_{86}$?

3. Подберите значения i и k так, чтобы произведение $\alpha_{13} \cdot \alpha_{2i} \cdot \alpha_{35} \cdot \alpha_{4k} \cdot \alpha_{52} \cdot \alpha_{66}$ было правильным произведением определителя шестого порядка со знаком «+».

4. Вычислите определители по определению:

а) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$.

Дополнительные задания

5. Какие из следующих произведений не являются правильными в определителе 6-го порядка и почему:

а) $\alpha_{32} \cdot \alpha_{51} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{16} \cdot \alpha_{45} \cdot \alpha_{63}$;

б) $\alpha_{31} \cdot \alpha_{25} \cdot \alpha_{53} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{46} \cdot \alpha_{14} \cdot \alpha_{62}$?

6. С каким знаком входят следующие правильные произведения в определитель восьмого порядка:

а) $\alpha_{13} \cdot \alpha_{24} \cdot \alpha_{35} \cdot \alpha_{48} \cdot \alpha_{51} \cdot \alpha_{62} \cdot \alpha_{73} \cdot \alpha_{87}$;

б) $\alpha_{25} \cdot \alpha_{37} \cdot \alpha_{81} \cdot \alpha_{13} \cdot \alpha_{42} \cdot \alpha_{84} \cdot \alpha_{58} \cdot \alpha_{66}$?

7. Подберите значение i, j и k так, чтобы произведение $\alpha_{51} \cdot \alpha_{i6} \cdot \alpha_{1j} \cdot \alpha_{35} \cdot \alpha_{44} \cdot \alpha_{6k}$ было правильным произведением определителя шестого порядка со знаком «–».

8. Вычислите определители по определению:

а) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & b & x & y \\ c & z & t & m \\ a & b & 0 & 0 \\ c & z & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Занятие 6

Свойства определителей. Вычисление определителей треугольных матриц, вычисление определителей при помощи приведения к треугольному виду (первый способ).

Основные типы задач. Задачи на свойства определителей и навыки вычисления определителей по свойствам. Вычисление определителей приведением к треугольному виду.

Задачи и упражнения

1. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите определители по свойствам:

а) $\begin{vmatrix} 867 & 743 \\ 767 & 643 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 84 & 3 & 843 \\ 53 & 1 & 531 \\ 71 & 2 & 712 \end{vmatrix}$.

3. Известно, что числа 194, 291 и 388 делятся на 97. Не вычисляя определителя третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \\ 3 & 8 & 8 \end{vmatrix}$, докажите, что он делится на 97.

4. Как изменится определитель порядка n, если первый столбец поставить на последнее место, а остальные сдвинуть влево, сохраняя их взаимное расположение?

5. Чему равен определитель, у которого сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

6. Вычислите определители приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Дополнительные задания

7. Вычислите определитель, используя свойства:

$$\begin{vmatrix} 253 & 53 & 2 \\ 456 & 56 & 4 \\ 751 & 51 & 7 \end{vmatrix}.$$

8. Как изменится определитель порядка n, если строки определителя записать в обратном порядке?

9. Чему может быть равен определитель n-го порядка, у которого ровно n элементов отличны от нуля? Почему?

10. Вычислите определители приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Занятие 7

Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителей по строке и по столбцу. Модифицированный метод Гаусса вычисления определителей.

Основные типы задач. Задачи на понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя, формулы разложения определителя по строкам и столбцам, преобразования определителя, не меняющие его. Вычисление определителей модифицированным методом Гаусса.

Задачи и упражнения

1. Вычислите определители, разлагая их по строке или по столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & x & y & x & 3 \\ 0 & b & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & y & z & c & 0 \\ 5 & z & 4 & y & 4 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Вычислите определители модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. Элементы определителя третьего порядка Δ равны $+1$ или -1. Докажите, что:

а) Δ делится на 2;
б) Δ делится на 4.

Дополнительные задания

5. Вычислите определители, разлагая их по строке или по столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определители модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

8. Элементы определителя третьего порядка Δ равны $+1$ или -1. Докажите, что если $\Delta \neq 0$, то $\Delta = 4$ или $\Delta = -4$.

Занятие 8

Обратная матрица, её единственность. Присоединенная матрица. Формула для нахождения обратной матрицы.

Основные типы задач. Освоение понятия обратной, присоединенной матриц, их свойств, алгоритм нахождения присоединённой матрицы. Нахождение обратной матрицы по формуле. Решение матричных уравнений с действием умножения.

Задачи и упражнения

1. Найдите по формуле обратные матрицы для следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;   б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;   г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что для целочисленной квадратной матрицы A обратная матрица A^{-1} тоже целочисленная тогда и только тогда, когда определитель матрицы A равен $+1$ или -1.

3. Пусть $|A| \neq 0$. Как изменится матрица A^{-1}, если:

а) к i-й строке прибавить k-ю ($i \neq k$), умноженную на скаляр λ;

б) i-ю строку умножить на скаляр $\lambda \neq 0$?

4. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задания

5. Найдите по формуле обратные матрицы для следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ -3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

6. Пусть $|A| \neq 0$. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A поменять местами i-ю и k-ю строки ($i \neq k$)?

7. Решите матричные уравнения:

а) $Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольная работа №1

Примерный вариант

1. Выполните действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n $(n \in \mathbb{N})$ и докажите её методом математической индукции, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 2 & x & 0 & y \\ x & 2 & 2 & 0 \\ y & 0 & 0 & y \\ 2 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

4. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Найдите A^{-1} по формуле, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

ТЕМА 2. *СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)*

§1. Основные определения

Системой k линейных уравнений от n неизвестных называется система вида

$$\text{(I)}\ \begin{cases} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_n=\beta_1, \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_n=\beta_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{k1}\cdot x_1+\alpha_{k2}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{kn}\cdot x_n=\beta_k, \end{cases},$$

где α_{ij} – коэффициенты при неизвестном x_j в i-м уравнении системы, β_i – свободный член i-го уравнения.

Основной матрицей A системы (I) называется матрица

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix},$$

расширенной – матрица $\bar{A}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn} & \beta_k \end{pmatrix},$

столбцом неизвестных – матрица $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$

столбцом свободных членов – матрица $B=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix},$

матричной формой записи системы (I) – $A \cdot X = B$.

Пример. Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad - x_4 = 2; \end{cases}$$

имеем:

$$\alpha_{11} = 2,\ \alpha_{12} = 1,\ \alpha_{13} = -1,\ \alpha_{14} = 3,\ \beta_1 = 1,$$
$$\alpha_{21} = 1,\ \alpha_{22} = 0,\ \alpha_{23} = -2,\ \alpha_{24} = 1,\ \beta_2 = 0,$$
$$\alpha_{31} = 1,\ \alpha_{32} = 3,\ \alpha_{33} = 0,\ \alpha_{34} = -1,\ \beta_3 = 2;$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи – $A \cdot X = B$ или

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решением СЛУ (I) называется такая упорядоченная n-ка чисел $(\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$, что для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняется равенство:

$$\alpha_{i1} \cdot \gamma_1 + \alpha_{i2} \cdot \gamma_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \gamma_n = \beta_i.$$

Решить СЛУ (I) – значит найти множество всех её решений.

Пример. Решением системы $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 \qquad = 1; \end{cases}$ является упорядоченная тройка чисел $(1;\ 1;\ 0)$, т.к. верна система равенств $\begin{cases} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2, \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1, \\ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1. \end{cases}$

Занятие 9

Системы линейных уравнений – основные понятия: коэффициенты, основная и расширенная матрицы, столбцы неизвестных и свободных членов, матричная форма записи СЛУ, решение уравнения и СЛУ, проверка упорядоченных n-ок на решение СЛУ.

Основные типы задач. Задачи на основные определения, запись систем линейных уравнений в матричном виде, нахождение коэффициентов по их индексам и, наоборот. Проверка решений системы.

Задачи и упражнения

1. Выпишите коэффициенты $\alpha_{13},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23}$, свободные члены $\beta_1,\ \beta_3$, основную и расширенную матрицы, столбцы неизвестных и свободных членов для систем:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \qquad x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 \qquad + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$

2. Запишите системы в матричном виде:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$

3. Какие из следующих упорядоченных n-ок $c_1 = (1;\ -1;\ 0)$, $c_2 = (0;\ 1;\ 1)$, $c_3 = (1;\ -1;\ 1)$, $c_4 = (1;\ 2;\ 1;\ 0)$, $c_5 = (0;\ 1;\ 1;\ -1)$, $c_6 = (1;\ 1;\ 1;\ -1)$ являются решениями систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\,? \end{cases}$

Дополнительные задания

4. Выпишите коэффициенты α_{13}, α_{22}, α_{23},, свободные члены β_1, β_3, основную и расширенную матрицы, столбцы неизвестных и свободных членов системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

5. Запишите систему в матричном виде:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Какие из следующих упорядоченных n-ок $c_1 = (1;\ -1;\ 0)$, $c_2 = (0;\ 1;\ 1)$, $c_3 = (1;\ -1;\ 1)$, $c_4 = (1;\ 2;\ 1;\ 0)$, $c_5 = (0;\ 1;\ 1;\ -1)$, $c_6 = (1;\ 1;\ 1;\ -1)$ являются решениями систем:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$?

§2. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

Система линейных уравнений

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{n1} \cdot x_1 + \alpha_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot x_n = \beta_n; \end{cases}$$

в которой количество уравнений равно количеству неизвестных, решается по *правилу* Крамера, если, и только если определитель Δ основной матрицы этой системы не равен 0. В этом случае система имеет единственное решение $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, причем $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, где Δ_k получается из Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов B.

Занятие 10

Решение систем по правилу Крамера – условия и формулы для нахождения неизвестных.

Основные типы задач. Отработка формулировки правила Крамера. Решение СЛУ по правилу Крамера.

Задачи и упражнения

1. Какие из следующих систем решаются по правилу Крамера?

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

2. Решите следующие системы по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ -2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

Дополнительные задания

3. Какие из следующих систем решаются по правилу Крамера?

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$

4. Решите следующие системы по правилу Крамера.

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 2, \\ 7x_1 + 10x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 + 6x_2 + 18x_3 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 13x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 19x_3 + 17x_4 = 3. \end{cases}$

5. Что произойдет с решениями системы линейных уравнений, решаемой по правилу Крамера, если:

а) поменять местами i-е и k-е уравнения $(1 \le i, \quad k \le n)$;

б) во всех уравнениях поменять все соответствующие коэффициенты при неизвестном x_i на коэффициенты при неизвестном x_j и наоборот $(1 \le i < j \le n)$?

§3. Модифицированный метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Система линейных уравнений (1) *равносильна* системе (2), если обе системы зависят от одного и того же числа неизвестных и множества их решений совпадают.

Для любых СЛУ (1), (2) и (3) выполняются следующие свойства отношения равносильности:

1) $(1) \Leftrightarrow (1)$;

2) если $(1) \Leftrightarrow (2)$, то $(2) \Leftrightarrow (1)$;

3) если $(1) \Leftrightarrow (2)$ и $(2) \Leftrightarrow (3)$, то $(1) \Leftrightarrow (3)$.

Ведущим коэффициентом в уравнении системы может быть выбран любой ненулевой коэффициент при неизвестных.

СЛУ называется *полностью преобразованной системой* (ППС), если:

1) она не содержит нулевых уравнений;

2) противоречивые уравнения, если они есть, находятся в конце системы;

3) в каждом непротиворечивом уравнении есть ведущий коэффициент, причем только один;

4) все ведущие коэффициенты равны единице;

5) если $\alpha_{ij} = 1$ – ведущий коэффициент в ППС, стоящий в i-м уравнении при неизвестном x_j, то во всех остальных уравнениях системы коэффициенты при x_j равны нулю, т.е.

$$\alpha_{mj} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = j; \\ 0, & \text{если } m \neq j \end{cases}$$

6) все ведущие коэффициенты стоят по порядку: слева направо и сверху вниз.

Элементарными преобразованиями СЛУ называются преобразования одного из следующих типов:

а) умножение какого-либо уравнения системы на ненулевой скаляр;

б) прибавление к одному из уравнений любого другого, умноженного на произвольный скаляр;

в) исключение из системы нулевого уравнения.

Теорема (о преобразованиях СЛУ).

1) Если к системе линейных уравнений применить конечное число элементарных преобразований, то в результате получится система, равносильная исходной.

2) Любая система линейных уравнений при помощи конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к равносильной ей ППС.

Пример. Система

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + & & & -2\cdot x_5 = 3, \\ & 1\cdot x_2 & & + x_5 = 1, \\ & & 1\cdot x_3 & - x_5 = 2, \\ & & & 1\cdot x_4 + x_5 = 3; \end{cases}$$

является полностью преобразованной (ППС).

Системы

$$\begin{cases} 1\cdot x_2 - 3x_3 = 2, \\ 1\cdot x_1 + 2x_3 = 0, \\ -x_3 + 1\cdot x_4 = 1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1\cdot x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 1\cdot x_2 = 2, \\ 1\cdot x_3 = 3; \end{cases}$$

не являются ППС.

Пример. Если уравнение $x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = -1$ умножить на 2, то получится уравнение $2\cdot x_1 - 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = -2$.

Пример. Если к уравнению $3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - 3\cdot x_3 = 5$ прибавить уравнение $x_1 - 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = -1$, умноженное на 2, то получится уравнение $5\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 = 3$.

Пример. Привести СЛУ $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = -4 \end{cases}$ к равносильной ей ППС:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, & (-2)(-1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, & \\ x_1 + x_2 = -4 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\cdot x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, & \\ x_2 - x_3 = -3, & (1)(-2) \\ 2\cdot x_2 - 2x_3 = -6 & \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\cdot x_1 + x_3 = -1, \\ \mathbf{1}\cdot x_2 - x_3 = -3, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1}\cdot x_1 + x_3 = -1, \\ \mathbf{1}\cdot x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

Вместо элементарных преобразований системы достаточно производить аналогичные преобразования с расширенной матрицей системы. Например, для предыдущей системы получим

$$\begin{array}{c} \\ \bar{A} = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} (-2)(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (1)(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -3 \end{array}\right) \end{array}.$$

Последняя матрица называется *конечной*, она соответствует ППС $\begin{cases} \mathbf{1} \cdot x_1 \qquad + x_3 = -1, \\ \qquad \mathbf{1} \cdot x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

В матрице $\bar{A}$ при преобразованиях будем отделять столбец свободных членов от остальных коэффициентов чертой, т.к. среди них нельзя выбирать ведущие. Этот способ приведения СЛУ к равносильной ей ППС называется *модифицированным методом Гаусса*.

Элементарным преобразованиям системы соответствуют следующие элементарные преобразования расширенной матрицы:

а) умножение любой строки на ненулевой скаляр;

б) прибавление к одной из строк матрицы любой другой, умноженной на произвольный скаляр;

в) исключение нулевой строки.

Признаки конечной матрицы, соответствующей ППС:

1) в каждой строке, имеющей ненулевые элементы до черты, есть ровно один выделенный коэффициент, равный 1 (ведущий);

2) в столбце, где стоит ведущий коэффициент, все остальные элементы равны нулю;

3) все строки, в которых до черты все нули, а за чертой – не нуль, расположены последними;

4) в матрице исключены полностью нулевые строки;

5) ведущие элементы стоят по порядку – слева направо и сверху вниз.

Теорема (о множестве всех решений ППС):

1) Если ППС содержит противоречивое уравнение, то множество всех её решений пусто.

2) Пусть ППС не содержит противоречивых уравнений. Тогда:

а) если количество ведущих коэффициентов равно количеству неизвестных, то решение единственно;

б) если количество ведущих коэффициентов меньше количества неизвестных, то множество всех решений бесконечно.

Зависимыми неизвестными называются неизвестные, соответствующие в ППС ведущим коэффициентам, *независимыми* – все остальные.

Общим решением совместной СЛУ называется система, полученная из равносильной ей ППС после перенесения всех независимых неизвестных в правую часть.

Если ППС имеет единственное решение, то оно и будет соответствующим общим решением. *Решить СЛУ* – значит найти её общее решение.

Пример. Найти общее решение СЛУ, если равносильная ей ППС имеет вид: $\begin{cases} \mathbf{1}\cdot x_1 \qquad + x_3 = -1, \\ \qquad \mathbf{1}\cdot x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

По определению общее решение в данном случае

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -1 - x_3, \\ \boldsymbol{x}_2 = -3 + x_3. \end{cases}$$

Частные решения СЛУ получаются из общего решения после того, как всем независимым неизвестным придаются какие-либо конкретные значения. Этот этап решения СЛУ лучше всего оформлять в виде таблицы:

Заготовка:

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3

Придание значений независимым неизвестным:

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3
		2

Окончательная таблица:

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3
–3	–1	2

Упорядоченная n-ка $c = (-3;\ -1;\ 2)$ – это частное решение исходной СЛУ.

Занятие 11

Равносильные преобразования, ППС, приведение системы линейных уравнений к ППС, соответствие преобразований системы и её расширенной матрицы. Конечная матрица.

Основные типы задач. Задачи на равносильные преобразования, навыки получения ППС, конечной матрицы, решения ППС.

Задачи и упражнения

1. При каком значении параметра β для решений $c_1 = (\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ и $c_2 = (\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$ уравнения

$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$ решением является и сумма $c_1 + c_2 = (\beta_1 + \gamma_1;\ \ \beta_2 + \gamma_2;\ \ \ldots;\ \ \beta_n + \gamma_n)$?

2. При каком значении параметра β для решения $c_1 = (\beta_1;\ \ \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \beta_n)$ уравнения $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$ и произвольного скаляра $\lambda \neq 0$ решением является и произведение $\lambda \cdot c_1 = (\lambda \cdot \beta_1;\ \ \lambda \cdot \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \lambda \cdot \beta_n)$?

3. Какие из следующих преобразований систем линейных уравнений являются равносильными:

а) прибавление к одному уравнению нескольких других, умноженных на произвольные скаляры;

б) удаление противоречивого уравнения;

в) удаление непротиворечивого уравнения;

г) транспозиция переменных x_i и x_j при $i \neq j$;

д) вычитание из одного уравнения любого другого;

е) перестановка двух уравнений?

4. Какие из следующих систем линейных уравнений являются ППС?

а) $\begin{cases} 1 \cdot x_1 - x_2 \qquad + x_4 = 2, \\ \qquad 1 \cdot x_2 \quad - 2x_4 = 0, \\ \qquad\qquad 1 \cdot x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 \cdot x_1 - x_2 \qquad - 2x_4 = 3, \\ \qquad\qquad 1 \cdot x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 1 \cdot x_2 \qquad - x_4 = 0, \\ 2x_1 \qquad + 1 \cdot x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

5. Какие из следующих матриц являются конечными?

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$.

в) $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

6. Может ли

а) система линейных уравнений иметь ровно четыре различных решения;

б) ППС содержать противоречивое уравнение?

7. Приведите примеры:

а) противоречивой системы из трех уравнений от пяти неизвестных;

б) непротиворечивой системы от двух неизвестных из четырех уравнений.

Дополнительные задания

8. Определите, является ли следующая система линейных уравнений ППС?

$$\begin{cases} \quad 1\cdot x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + 1\cdot x_4 = -3. \end{cases}$$

9. Какие из следующих матриц являются конечными?

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

б) $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$

10. Могут ли системы от 3-х и 5-ти неизвестных быть равносильными?

11. Приведите пример противоречивой системы от трех неизвестных из одного уравнения.

Занятие 12

Решение СЛУ модифицированным методом Гаусса. Общее решение СЛУ и его нахождение.

Основные типы задач. Решение СЛУ модифицированным методом Гаусса. Отработка понятия общего решения СЛУ. Нахождение общего решения и частных решений СЛУ.

Задачи и упражнения

1. Решите следующие системы линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 9, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 11x_4 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 10x_4 = 8. \end{cases}$

2. Решите модифицированным методом Гаусса следующие системы с параметром:

а) $\begin{cases} ax_1 + x_2 = a, \\ x_1 + ax_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases}$

3. Найдите общее и одно частное решения систем:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 4. \end{cases}$

Дополнительные задания

4. Решите следующие системы линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 7, \\ 6x_1 + 7x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 3, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

5. Решите модифицированным методом Гаусса следующие системы с параметром:

а) $\begin{cases} 2\alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = \alpha, \\ \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = \alpha. \end{cases}$

6. Найдите общее и одно частное решения систем:

а) $\{3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2;$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1, \\ 7x_1 \qquad\qquad + x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$

Контрольная работа № 2

Примерный вариант

1. Найдите x_3 по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 4x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$$

2. Решите систему модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = -1, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

3. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 1, \\ 8x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -1. \end{cases}$$

4. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

5. Когда система линейных уравнений, решаемая по правилу Крамера, имеет нулевое решение?

ТЕМА 3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

§1. Арифметические векторы и действия с ними. Линейная зависимость и независимость

Арифметические векторы являются, по сути, матрицами размерности $1 \times n$ с такими же действиями умножения на скаляр и сложения (значит, складывать можно только векторы одинаковой размерности покомпонентно). Поэтому для этих действий с векторами выполняются аналогичные свойства, что и для этих же действий с матрицами.

Множество всех n-мерных векторов с компонентами из поля P обозначается через P^n.

Вектор $b \in P^n$ *линейно выражается* через последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из P^n, если существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ такие, что $b = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_k \cdot b_k$.

Векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и вектора b из P^n называется уравнение $b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k$.

Однородным векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из P^n называется уравнение $\theta = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k$.

Если векторное уравнение

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k$$

имеет решение, то вектор b линейно выражается через последовательность векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$. Однородное векторное уравнение всегда имеет хотя бы одно решение – нулевое:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, \text{ т.к. } \theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_k .$$

Последовательность векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ из P^n называется *линейно независимой*, если её однородное векторное уравнение имеет единственное нулевое решение, и *линейно зависимой*, если существует и ненулевое решение.

Для линейного выражения вектора $b = (\beta_1;\ \ \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \beta_n)$ через последовательность векторов

$$a_1 = (\alpha_{11};\ \ \alpha_{12};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{1n}),$$
$$a_2 = (\alpha_{21};\ \ \alpha_{22};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{2n}),$$
$$\ldots$$
$$a_k = (\alpha_{k1};\ \ \alpha_{k2};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{kn}),$$

нужно записать систему линейных уравнений, равносильную векторному уравнению

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k = b.$$

Как известно, получится система, расширенная матрица которой является следующей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k1} & \beta_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k2} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \ldots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{kn} & \beta_n \end{array}\right).$$

Эту матрицу можно выписывать сразу. Для этого нужно в первом столбце записать компоненты вектора a_1, во втором – a_2 и т.д., а за чертой – компоненты вектора b.

Затем, согласно модифицированному методу Гаусса, приводим элементарными преобразованиями строк эту матрицу к конечной, и записываем решение системы и соответствующего векторного уравнения. Если множество решений не пусто, то вектор b линейно выражается через последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, а если – пусто, то не выражается.

Пример. Вектор $b=(3;\ \ 2;\ \ 4)$ линейно выразить через последовательность векторов $a_1=(1;\ \ 1;\ \ -1)$, $a_2=(2;\ \ 1;\ \ 1)$, $a_3=(1;\ \ -1;\ \ 1)$.

Записываем расширенную матрицу соответствующей системы, над столбцами ставим неизвестные, под столбцами – векторы (чтобы не забыть), и преобразовываем матрицу к конечной:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} (-1)(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (2)(3)(\cdot(-1)) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1/4) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ (-2)(3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Получили, что $x_1=-2$, $x_2=3$, $x_3=-1$, т.е.

$$b=(-2)\cdot a_1+3\cdot a_2+(-1)\cdot a_3=-2a_1+3a_2-a_3.$$

Для линейного выражения нескольких векторов $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ через последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ нужно записать матрицу, в которой до черты стоят по порядку компоненты векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, а за чертой –

$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$. Приведя эту матрицу к конечной, в i-м столбце за чертой получим коэффициенты линейного выражения вектора b_i через $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, если это выражение возможно $(1 \le i \le m)$.

Пример. Линейно выразить векторы $b_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $b_2 = (1;\ -1;\ 2)$, $b_3 = (1;\ 1;\ 1)$ через последовательность векторов $a_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (1;\ 2;\ -1)$, $a_3 = (0;\ -1;\ 1)$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1)(1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \end{array}.$$

Получили:

для вектора b_1 – $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \phantom{\boldsymbol{x}_2 -{}} x_3 = 2, \\ \phantom{\boldsymbol{x}_1 +{}} \boldsymbol{x}_2 - x_3 = -1 \end{cases}$,

для b_2 – $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + \phantom{\boldsymbol{x}_2 -{}} x_3 = 3, \\ \phantom{\boldsymbol{x}_1 +{}} \boldsymbol{x}_2 - x_3 = -2 \end{cases}$,

а для b_3 – $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + x_3 = 1, \\ \boldsymbol{x}_2 - x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1. \end{cases}$

Значит, вектор b_3 не выражается линейно через $a_1,\ a_2,\ a_3$, а $b_1,\ b_2$ выражаются, причем, придавая x_3

произвольные значения, получим разные выражения. Например, для вектора b_1, если $x_3 = 1$, то $x_1 = 1,\quad x_2 = 0$ и

$$b_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_1 + a_3 .$$

Для вектора b_2, если $x_3 = 1$, то $x_1 = 2,\quad x_2 = -1$ и

$$b_2 = 2 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = 2a_1 - a_2 + a_3 .$$

Для выяснения линейной независимости или зависимости последовательности векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ нужно решать однородное векторное уравнение или, равносильно, однородную систему линейных уравнений. Столбец свободных членов в этой системе в начале и после элементарных преобразований строк состоит из нулей и его можно не записывать.

Поэтому можно сразу записать матрицу, столбцами которой являются компоненты соответствующих векторов, и приводить её к конечной. Если в каждом столбце конечной матрицы есть ведущий коэффициент, то последовательность ЛНЗ, в противном случае ЛЗ.

Пример. Выяснить, является ли последовательность векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ линейно зависимой или нет:

а) $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 3;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ 2;\ 0)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ -1;\ 1)$.

$$\text{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} (-1)(1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Последовательность линейно зависима, т.к.

$$a_2 = a_1 + a_3 .$$

б) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (1)(-1) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot 1/2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot 1/2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} (1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Последовательность линейно независима.

Занятие 13

Действия с векторами. Выражение вектора через последовательность векторов. ЛЗ и ЛНЗ последовательности векторов.

Основные типы задач. Освоение понятий арифметического вектора, действий с векторами и их свойств, последовательности векторов, вычисление линейных комбинаций арифметических векторов. Представление вектора как линейной комбинации данных векторов. Свойства линейной зависимости и линейной независимости. Доказательство ЛЗ или ЛНЗ последовательности векторов.

Задачи и упражнения

1. Найдите линейную комбинацию $a_1 - 2a_2 + 3a_3$ для последовательности векторов:

$$a_1 = (1;\ \ 2;\ \ 3),\ a_2 = (2;\ \ 3;\ \ 5),\ a_3 = (-1;\ \ 0;\ \ 1).$$

2. Представьте вектор

$$b = 2\cdot(a_1 + a_2 - 3a_3) - 3\cdot(a_1 - a_2 - 2a_3) + 5\cdot(a_1 - a_2 + a_3)$$

в виде линейной комбинации векторов a_1, a_2, a_3 и найдите его для данных задачи 1.

3. Найдите вектор b из уравнения

$$2(a_1 - a_2 + a_3 - 2b) - (2a_1 + a_2 - a_3) + 3(3a_1 - a_2 + a_3 + b) = \\ = a_1 + 2a_2 - a_3 + b$$

для данных задачи 1.

4. Выясните, можно ли вектор b линейно выразить через последовательность векторов a_1, a_2, …, a_k, если:

а) $b = (-1;\ -3)$, $a_1 = (2;\ 1)$, $a_2 = (3;\ -1)$;

б) $b = (0;\ 1)$, $a_1 = (1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 3)$, $a_3 = (1;\ 2)$;

в) $b = (1;\ -1;\ 1)$, $a_1 = (1;\ -2;\ 0)$, $a_2 = (2;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 2;\ 1)$;

г) $b = (-1;\ 2;\ 1)$, $a_1 = (1;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (1;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (-1;\ 1;\ 0)$, $a_4 = (1;\ 1;\ 1)$.

5. Найдите линейно зависимые и линейно независимые последовательности векторов:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (-1;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ -1;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 2;\ -1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 0)$, $a_3 = (1;\ 1;\ 1)$;

в) $a_1 = (1;\ -1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (0;\ 1;\ 2;\ 2)$,
$a_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $a_4 = (-1;\ 1;\ -1;\ 1)$;

г) $a_1 = (3;\ 2;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$,
$a_3 = (1;\ 0;\ 1;\ 2)$, $a_4 = (2;\ -1;\ 3;\ 1)$;

д) $a_1 = (0;\ -1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$,
$a_3 = (1;\ -1;\ -1;\ 0)$, $a_4 = (3;\ -1;\ 1;\ 1)$.

6. Известно, что последовательность $a_1,\ a_2,\ a_3$ ЛНЗ. Выясните, являются ли ЛЗ или ЛНЗ последовательности векторов:

а) $b_1 = a_1 + a_2 - a_3,\quad b_2 = 2a_1 - a_2 + a_3,\quad b_3 = a_1 + a_3$;

б) $b_1 = 2a_1 - a_2 - a_3,\quad b_2 = -a_1 + a_2 + a_3,\quad b_3 = a_1 + 3a_2 - a_3$.

7. При каких значениях параметра λ последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ линейно зависима:

а) $a_1 = (1;\ \ -1;\ \ \lambda)$, $a_2 = (\lambda;\ \ -1;\ \ 2)$,

$a_3 = (2-\lambda;\ \ \lambda-1;\ \ 0)$;

б) $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ \lambda)$, $a_2 = (1;\ \ \lambda;\ \ 1)$, $a_3 = (\lambda;\ \ 1;\ \ 1)$?

Дополнительные задания

8. Найдите линейную комбинацию $a_1 - 2a_2 + 3a_3$ для последовательности векторов:

$a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_2 = (2;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 2)$, $a_3 = (-1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 2)$.

9. Представьте вектор

$$b = 2\cdot(a_1 + a_2 - 3a_3) - 3\cdot(a_1 - a_2 - 2a_3) + 5\cdot(a_1 - a_2 + a_3)$$

в виде линейной комбинации векторов $a_1,\ a_2,\ a_3$ и найдите его для данных задачи 8.

10. Выясните, можно ли вектор b линейно выразить через последовательность векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$, если:

а) $b = (0;\ \ 0;\ \ 0)$, $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 2)$, $a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 1)$,
$a_3 = (1;\ \ 2;\ \ 1)$, $a_4 = (1;\ \ 0;\ \ 2)$;

б) $b = (-1;\ \ 0;\ \ 3)$,
$a_1 = (1;\ \ -1;\ \ 1)$, $a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_3 = (3;\ \ 5;\ \ 1)$;

в) $b = (3;\ \ 2;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 1)$,

$a_2 = (1;\ \ 0;\ \ 1;\ \ 2)$, $a_3 = (2;\ \ -1;\ \ 3;\ \ 1)$, $a_4 = (1;\ \ -2;\ \ 3;\ \ 0)$.

11. Найдите линейно зависимые и линейно независимые последовательности векторов:

а) $a_1 = (-1;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_2 = (0;\ \ 1;\ \ 1)$, $a_3 = (0;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_4 = (-1;\ \ 1;\ \ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ \ 0;\ \ 2;\ \ 1)$, $a_2 = (1;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 0)$,

$a_3 = (0;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 1)$;

в) $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 2)$, $a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 1;\ \ -1)$,

$a_3 = (1;\ \ 2;\ \ 1;\ \ 0)$, $a_4 = (2;\ \ 3;\ \ 3;\ \ -3)$.

12. Известно, что последовательность $a_1,\ a_2,\ a_3$ ЛНЗ. Выясните, являются ли ЛЗ или ЛНЗ последовательность векторов

$$b_1 = a_1 + a_2 - 2a_3,\quad b_2 = 2a_1 - a_2 - a_3,\quad b_3 = 4a_1 - 5a_2 + a_3.$$

13. При каких значениях параметра λ последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ линейно зависима:

а) $a_1 = (1;\ \ \lambda + 2)$, $a_2 = (\lambda;\ \ \lambda)$;

б) $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ \lambda)$, $a_2 = (1;\ \ \lambda;\ \ 1)$, $a_3 = \left(\lambda^2;\ \ 1;\ \ 1\right)$?

Базис и ранг последовательности арифметических векторов

Базисом последовательности векторов

$$(*)\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$$

из пространства P^n называется такая её подпоследовательность $Б$, что

1) подпоследовательность $Б$ ЛНЗ и

2) каждый вектор из (*) линейно выражается через векторы $Б$.

Каждая ненулевая последовательность векторов из P^n имеет базис, причем количество векторов в базисах одной и той же последовательности одинаково.

Рангом конечной ненулевой последовательности векторов из P^n называется количество векторов в любом её базисе.

Базисом арифметического векторного пространства P^n называется последовательность векторов из P^n, которая ЛНЗ и через которую линейно выражается каждый вектор из P^n.

Количество векторов в любых двух базисах пространства P^n одинаково и называется *размерностью пространства* P^n. Размерность P^n равна n, причём любая ЛНЗ последовательность из n векторов пространства P^n является её базисом.

Для нахождения базиса конечной последовательности ненулевых векторов записываем матрицу, столбцами которой являются компоненты соответствующих векторов, приводим её к конечной.

Все векторы, соответствующие столбцам с ведущими коэффициентами в полученной конечной матрице, образуют базис последовательности. Их количество равно рангу последовательности.

В каждом столбце полученной конечной матрицы стоят коэффициенты разложения соответствующего вектора по найденному базису: каждый коэффициент разложения по базису умножается на тот вектор в базисе, который соответствует столбцу с ведущим коэффициентом, стоящим в той же строке, что и данный коэффициент.

Пример. Найти базис и ранг последовательности векторов

$$a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 1),\ a_2 = (0;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 1),\ a_3 = (2;\ \ 3;\ \ 1;\ \ 3),$$

$$a_4 = (2;\quad 1;\quad -1;\quad 1),\ a_5 = (1;\quad 0;\quad 1;\quad 0)$$

и выразить все векторы последовательности через найденный базис.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{matrix} \end{array} (-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 1/2 \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1)(-1) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{matrix} \end{array}.$$

Получилось, что базисом данной последовательности будет $Б = \langle a_1;\quad a_2;\quad a_5 \rangle$. В третьем столбце находятся коэффициенты разложения вектора a_3 по найденному базису, причем в этом разложении 2 умножается на a_1, 1 – на a_2, а 0 – на a_5, т.е.

$$a_3 = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_5 = 2a_1 + a_2.$$

Аналогично

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_5,$$

$$a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_5,$$

$$a_4 = 2 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2 + 0 \cdot a_5,$$

$$a_5 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_5.$$

Так как в полученном базисе 3 вектора, то ранг последовательности равен 3.

Занятие 14

Базис и ранг последовательности векторов, способы их нахождения.

Основные типы задач. Изучение понятия базиса, его свойств. Нахождение базиса последовательности векторов, изучение алгоритма нахождения базиса.

Задачи и упражнения

1. В каком случае последовательность векторов из $\mathbb{R}^n$ имеет единственный с точностью до перестановки векторов базис?

2. При каких значениях пареметра λ последовательность векторов $a_1 = (\lambda;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 0;\ \lambda)$, $a_3 = (1;\ \lambda;\ \lambda)$ является базисом пространства $\mathbb{R}^3$?

3. Докажите, что ранги последовательностей векторов (1) $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ и (2) $b_1 = a_1 - a_2$, $b_2 = a_2 - a_3$, $\ldots$, $b_{k-1} = a_{k-1} - a_k$, $b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ одинаковы.

4. Найдите базис и ранг последовательности векторов и выразите все векторы последовательности через найденный базис:

а) $a_1 = (1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 1)$, $a_3 = (0;\ 1)$, $a_4 = (1;\ -1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 2)$, $a_2 = (0;\ -1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 2;\ 1)$, $a_4 = (1;\ 3;\ 0)$;

в) $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 2)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ 3)$,
$a_3 = (1;\ 0;\ 1;\ 1)$, $a_4 = (0;\ 1;\ -2;\ 1)$, $a_5 = (3;\ 1;\ 1;\ 4)$;

г) $a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 3;\ 4;\ 3)$,
$a_3 = (-1;\ 0\ \ 1;\ 0)$, $a_4 = (5;\ 6;\ 7;\ 6)$, $a_5 = (2;\ 4;\ 6;\ 4)$.

5. При каких значениях параметра λ последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ имеет максимальный ранг, если

а) $a_1 = (1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ \lambda)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ \lambda)$, $a_2 = (1;\ \lambda;\ 1)$, $a_3 = (\lambda;\ 1;\ 1)$;

в) $a_1 = (1;\ -1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (1;\ \lambda;\ 1;\ 1)$,

$$a_3 = (0;\ 1;\ \lambda - 1;\ 1),\ a_4 = (1;\ 2;\ 1;\ -1)?$$

Дополнительные задания

6. Сколько различных базисов (с точностью до перестановки векторов в базисе) имеет последовательность из $k+1$ вектора ранга k, содержащая пропорциональные векторы?

7. Найдите базис и ранг последовательности векторов и выразите все векторы последовательности через найденный базис:

а) $a_1 = (1;\ -1)$, $a_2 = (1;\ 2)$, $a_3 = (1;\ 0)$, $a_4 = (2;\ 3)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (2;\ 3;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 2;\ 1)$, $a_4 = (0;\ 1;\ 1)$;

в) $a_1 = (1;\ 0;\ 2;\ -1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ 1)$,

$$a_3 = (1;\ 1;\ 1;\ -1),\ a_4 = (0;\ 1;\ 0;\ -1),\ a_5 = (1;\ 0;\ 0;\ -1).$$

8. При каких значениях параметра λ последовательность векторов $a_1 = (\lambda;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ \lambda - 2;\ 0)$ имеет максимальный ранг?

§2. Обращение матриц модифицированным методом Гаусса

Для нахождения обратной матрицы для квадратной матрицы $A = A_{n\times n}$ записываем новую матрицу $(A\,|\,E)$, т.е. матрицу, в которой до черты стоит матрица A, а за чертой – единичная матрица E той же размерности. Приводим полученную матрицу к конечной. Если в конечной матрице до черты получилась матрица E, то за чертой стоит искомая обратная матрица A^{-1}. Если же до черты матрицы E не получилось (в последней строке до черты все элементы равны нулю), то матрица A необратима.

Пример. Выяснить, обратима ли матрица $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и, если обратима, то найти обратную.

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-4)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -13 & 0 & 11 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) (-2)(7) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & -2 & -13 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -6 & 2 & 11 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -7 & 2 & 13 \end{array}\right) = \left(E \middle| A^{-1}\right).$$

Таким образом, матрица A обратима и $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 11 \\ -2 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 13 \end{pmatrix}$.

Пример. Выяснить, обратима ли матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ и если обратима, то найти обратную к ней.

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (-3)(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (1)(-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Так как в конечной матрице слева от черты стоит матрица, отличная от E, то A необратима.

Занятие 15

Обращение матриц модифицированным методом Гаусса.

Основные типы задач. Обращение матриц модифицированным методом Гаусса.

Задачи и упражнения

1. Найдите модифицированным методом Гаусса матрицы, обратные к данным, если они существуют:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 4 & 7 & 2\\ 9 & 6 & 8\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -3 & 6\\ 3 & 8 & 6 & 9\\ 2 & 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3 & 2\\ 21 & 8 & 11 & 10\\ 6 & 2 & 6 & 0\\ 7 & 3 & 8 & -1\end{pmatrix}$.

2. Пусть A^{-1} – обратная к матрице A. Выразите обратную к матрице A^{T} через A и A^{-1}.

3. В обратимой матрице A поменяли местами i-й и j-й столбцы. Как изменится обратная к новой матрице по сравнению с матрицей A^{-1}?

Дополнительные задания

4. Найдите модифицированным методом Гаусса матрицы, обратные к данным, если они существуют:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & -1\\ -2 & 4 & 1\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & 7 & 10\end{pmatrix}$;

и) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

5. В обратимой матрице A поменяли местами i-ю и j-ю строки. Как изменится обратная к новой матрице по сравнению с матрицей A^{-1}?

Подпространства арифметического векторного пространства

Подпространством арифметического векторного пространства P^n называется такое его непустое подмножество L, что:

1) для любых $a, b \in L$ выполняется $a + b \in L$;

2) для любых $\lambda \in P$ и $a \in L$ вектор $\lambda \cdot a \in L$,

т.е. если L замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры.

Для выяснения, будет ли какое-нибудь множество L подпространством пространства P^n, требуется проверить, что $L \neq \varnothing$, $L \subset P^n$ и условия 1) и 2) определения.

Пример. Выяснить, является ли множество L всех векторов пространства P^n, у которых сумма двух первых компонент равна нулю, подпространством пространства P^n?

Заметим, что

$$L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \right\}.$$

Тогда, $L \neq \varnothing$, т.к. $\theta = (0;\ \ 0;\ \ \ldots;\ \ 0) \in L$ и $L \subset P^n$.

Пусть $a,\ \ b \in L$ и $\lambda \in P$,

$$a = (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n),$$

$$b=(\beta_1;\quad \beta_2;\quad \beta_3;\quad \ldots;\quad \beta_n),$$

причем $\alpha_1+\alpha_2=0$ и $\beta_1+\beta_2=0$.

Тогда для суммы получаем:

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1;\quad \alpha_2+\beta_2;\quad \alpha_3+\beta_3;\quad \ldots;\quad \alpha_n+\beta_n) \text{ и}$$

$$(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=0+0=0,$$

откуда следует, что $a+b\in L$.

Аналогично,

$$\lambda\cdot a=(\lambda\cdot\alpha_1;\quad \lambda\cdot\alpha_2;\quad \lambda\cdot\alpha_3;\quad \ldots;\quad \lambda\cdot\alpha_n)$$

и т.к. $\lambda\cdot\alpha_1+\lambda\cdot\alpha_2=\lambda\cdot(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda\cdot 0=0$, то $\lambda\cdot a\in L$.

Так как все аксиомы подпространства выполнены, то L – подпространство пространства P^n.

Пример. Выяснить, является ли подпространством арифметического пространства P^n множество

$$L=\left\{(\alpha_1;\quad \alpha_2;\quad \alpha_3;\quad \ldots;\quad \alpha_n)\in P^n \,\middle|\, \alpha_1^2-\alpha_2^2=0\right\}.$$

Заметим, что

$$a=(2;\quad -2;\quad \alpha_3;\quad \ldots;\quad \alpha_n),\quad b=(1;\quad 1;\quad \beta_3;\quad \ldots;\quad \beta_n)\in L,$$

т.к. $2^2-(-2)^2=0$ и $1^2-1^2=0$. Но

$$a+b=(3;\quad -1;\quad \alpha_3+\beta_3;\quad \ldots;\quad \alpha_n+\beta_n)\notin L,$$

т.к. $3^2-(-1)^2=9-1=8\neq 0$. Поэтому не все аксиомы подпространства для множества L выполняются, а значит, оно не является подпространством.

Базисом подпространства L называется линейно независимая последовательность векторов из L, через которую линейно выражаются все векторы подпространства L.

Ненулевое подпространство пространства P^n имеет базис. Количество векторов в любых двух базисах подпространства L одинаково и называется *размерностью* L. Размерность подпространства не превосходит числа n.

Занятие 16

Определение подпространства.

Основные типы задач. Отработка понятия подпространства, проверка является ли данное подмножество подпространством, нахождение базиса линейной оболочки последовательности векторов.

Задачи и упражнения

1. Докажите, что пересечение двух подпространств пространства P^n является его подпространством.

2. Какие из указанных ниже подмножеств арифметического векторного пространства P^n являются его подпространствами:

а) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n \right\}$;

б) $L = \left\{ (1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \right\}$;

в) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = 0 \right\}$;

г) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 = 3\alpha_2 \right\}$;

д) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1^2 = \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n \right\}$;

е) $L = \left\{ (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = 0 \right\}$?

3. *Линейной оболочкой* последовательности векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ пространства P^n называется множество

$L(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k)=\{\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\dots+\alpha_k\cdot a_k \mid \alpha_i\in P\}$, т.е. множество всех линейных комбинаций векторов $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$. Докажите, что линейная оболочка любой последовательности векторов – подпространство пространства P^n.

4. Найдите базис линейной оболочки $L(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k)$ последовательности векторов $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$, если:

а) $a_1=(1;\ -1)$, $a_2=(2;\ 1)$, $a_3=(0;\ 1)$;

б) $a_1=(1;\ -1;\ 1;\ 0)$, $a_2=(2;\ 1;\ 2;\ 1)$, $a_3=(1;\ 2;\ 1;\ 1)$, $a_4=(3;\ 0;\ 3;\ 1)$.

Дополнительные задания

5. Пусть $L_1,\ L_2$ – подпространства пространства P^n. *Суммой* подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1+L_2=\{a+b \mid a\in L_1,\ b\in L_2\}$. Докажите, что сумма подпространств L_1+L_2 является подпространством пространства P^n.

6. Какие из указанных ниже подмножеств арифметического векторного пространства P^n являются его подпространствами:

а) $L=\{(0;\ \alpha_2;\ \alpha_3;\ \dots;\ \alpha_n)\in P^n\}$;

б) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)\in P^n \mid \alpha_1^3+\alpha_2^3+\dots+\alpha_3^3=0\}$;

в) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)\in P^n \mid \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=0\}$;

г) $L=\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)\in P^n \mid \alpha_1=3\alpha_2+1\}$?

7. Найдите базис линейной оболочки $L(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k)$ последовательности векторов $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$, если:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 0;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ -1;\ 1;\ -1)$,

$a_3 = (0;\ 1;\ 0;\ 1)$, $a_4 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$.

§3. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальные системы решений (ФСР)

Множество M всех решений однородной СЛУ

$$(*)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n}\cdot x_n = 0, \\ \alpha_{21}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{k1}\cdot x_1 + \alpha_{k2}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn}\cdot x_n = 0; \end{cases}$$

является подпространством арифметического векторного пространства P^n, если каждое решение системы (*) рассматривать как арифметический вектор.

Если $M \neq \{\theta\}$, то M имеет базис, называемый *фундаментальной системой решений* (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Каждое решение системы (*) является линейной комбинацией векторов ФСР.

Чтобы найти ФСР однородной системы, требуется в первую очередь найти её общее решение. ФСР получается из общего решения как набор частных решений.

Для нахождения первого решения придаем первому независимому неизвестному значение 1, всем остальным независимым – значение 0, и находим для них значения зависимых неизвестных. Для второго элемента ФСР значение

1 придаем второму по порядку независимому неизвестному, всем остальным независимым – значение 0, и находим снова значения зависимых неизвестных в этом случае и т.д.

Полученное таким образом множество частных решений однородной системы и образует её ФСР. В ФСР входит ровно столько векторов, сколько независимых неизвестных имеет общее решение однородной системы.

Пример. Найти ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}.$$

Найдем общее решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)(-2)(-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right)(1)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ \boldsymbol{x}_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 3x_3 - 2x_4, \\ \boldsymbol{x}_2 = 5x_3 - 3x_4. \end{cases}$$ – общее решение.

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3	x_4
		1	0
		0	1

– заготовка для нахождения ФСР.

Заполняем таблицу, находя значения зависимых неизвестных по общему решению:

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3	x_4

3	5	1	0
–2	–3	0	1

В результате $c_1 = (3;\ \ 5;\ \ 1;\ \ 0)$, $c_2 = (-2;\ \ -3;\ \ 0;\ \ 1)$ – ФСР данной однородной системы.

$$M = \{\alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2 \,|\, \alpha_1,\ \ \alpha_2 \in P\}$$

– множество всех её решений .

Возможность найти ФСР помогает решать некоторые задачи.

Пример. Найти однородную СЛУ, множеством решений которой является линейная оболочка последовательности векторов $a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 1)$, $a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 2)$, $a_3 = (1;\ \ 0;\ \ -1;\ \ 1)$.

Найдем базис данной последовательности:

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} (-2) \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1)(-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 \\ -1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базисом является $Б = \langle a_2;\ \ a_3 \rangle$.

Общее уравнение искомой однородной СЛУ имеет вид: $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \alpha_3 \cdot x_3 + \alpha_4 \cdot x_4 = 0$. Подставим вместо $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4$ соответствующие компоненты векторов a_2 и a_3 и найдем ФСР полученной однородной СЛУ от неизвестных $\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3,\ \ \alpha_4$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 \qquad + 2\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 \qquad - \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} (-2) \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\alpha_3 \qquad = 0, \\ \alpha_1 \qquad - \alpha_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_2 = \quad -2\alpha_3, \\ \boldsymbol{\alpha}_4 = -\alpha_1 + \alpha_3 \end{cases} \text{– общее решение.}$$

α_1	$\boldsymbol{\alpha}_2$	α_3	$\boldsymbol{\alpha}_4$
1	0	0	–1
0	–2	1	1

$c_1 = (1; \ 0; \ 0; \ -1)$, $c_2 = (0; \ -2; \ 1; \ 1)$ – ФСР.

Тогда все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - x_4 = 0, \\ \quad -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

являются линейными комбинациями векторов $a_2, \ a_3$, а т.к. это базис последовательности $a_1, \ a_2, \ a_3$, то множеством решений будет $L(a_1; \ a_2; \ a_3)$. Заметим, что такая система не единственна. Любое из уравнений, например, можно заменить суммой этого уравнения и второго уравнения, умноженного на произвольный скаляр λ. Можно также к уравнениям этой системы добавить их любую линейную комбинацию или уравнение умножить на ненулевой скаляр.

Пример. Найти базис пересечения подпространств $L_1 = L(a_1; \ a_2; \ a_3)$ и $L_2 = L(b_1; \ b_2; \ b_3)$, где $a_1 = (0; \ 1; \ 2)$,

$a_2 = (1;\ \ 1;\ \ -1)$, $a_3 = (2;\ \ 3;\ \ 0)$ и $b_1 = (1;\ \ 1;\ \ -3)$, $b_2 = (0;\ \ 1;\ \ 5)$, $b_3 = (5;\ \ 8;\ \ 0)$.

Сначала найдем базисы L_1 и L_2:

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array} \begin{matrix} (-1)(1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} (-2) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array},$$

$Б_1 = \langle a_1;\ \ a_2 \rangle$ – базис L_1;

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \end{array} \begin{matrix} (-1)(3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} (-5) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \end{array},$$

$Б_2 = \langle b_1;\ \ b_2 \rangle$ – базис L_2. Пусть $L = L_1 \cap L_2$. Тогда

$$a \in L \Leftrightarrow a \in L_1 \text{ и } a \in L_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \text{ и } a = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 = \theta \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_2 - \beta_1;\ \ \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2;\ \ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\beta_1 - 5\beta_2) =$$

$$=(0;\quad 0;\quad 0)\Leftrightarrow\begin{cases} \alpha_2-\beta_1 = 0,\\ \alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2=0,\\ 2\alpha_1-\alpha_2+3\beta_1-5\beta_2=0.\end{cases}\qquad (*)$$

Найдем ФСР полученной однородной системы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & -b_1 & -b_2 \end{array} \end{array} (-1)(1) \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}(-2) \sim$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot(1/3)(-1/3) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2/3 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2/3 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=\dfrac{2}{3}\beta_1,\\ \boldsymbol{\alpha}_2=\beta_1,\\ \boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{2}{3}\beta_1. \end{cases}$$

$\boldsymbol{\alpha}_1$	$\boldsymbol{\alpha}_2$	β_1	$\boldsymbol{\beta}_2$
$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$

Вектор $\left(\dfrac{2}{3};\quad 1;\quad 1;\quad \dfrac{2}{3}\right)$ является ФСР однородной системы (*) линейных уравнений. Базисом пересечения $L_1\cap L_2=L$ будет последовательность

$$b=\frac{2}{3}a_1+1\cdot a_2=1\cdot b_1+\frac{2}{3}b_1=\left(1;\quad \frac{5}{3};\quad \frac{1}{3}\right),$$

состоящая из одного вектора.

Количество векторов в базисе пересечения подпространств равно количеству независимых неизвестных в общем решении полученной системы (*) от неизвестных α_i и β_j.

Занятие 17

Нахождение ФСР однородных систем. Нахождение базисов подпространств.

Основные типы задач. Нахождение ФСР однородной системы по алгоритму. Применение понятия ФСР и алгоритма его нахождения к нахождению систем, решениями которой являются векторы некоторого подпространства; базисов пересечения подпространств и базисов подпространств арифметического векторного пространства.

Задачи и упражнения

1. Найдите ФСР следующих однородных систем:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ г) $\{x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0.$

2. Найдите однородную систему линейных уравнений, решениями которой являются лишь векторы из линейной оболочки последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

а) $a_1 = (1;\ -1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ -1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ -1)$, $a_4 = (0;\ -1;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ -1;\ 1;\ -1)$, $a_3 = (1;\ -2;\ 2;\ -2)$.

3. Найдите базисы пересечения подпространств $L_1 = L(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k)$ и $L_2 = L(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$, если:

а) $a_1 = (1;\ -1;\ 2)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 2;\ -1)$, $b_1 = (0;\ 1;\ -1)$, $b_2 = (1;\ 1;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ -1;\ 0;\ 1)$, $a_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 0;\ -1;\ 2)$, $b_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $b_2 = (1;\ -2;\ 1;\ 0)$, $b_3 = (2;\ -1;\ 2;\ 1)$, $b_4 = (3;\ 0;\ 3;\ 2)$.

4. Найдите базисы подпространств арифметического векторного пространства P^n:

а) $L = \left\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 = \alpha_2\right\}$;

б) $L = \left\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 = 0\right\}$;

в) $L = \left\{(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots = 0\right\}$;

г) $L = \left\{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \in P^n \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \ldots \text{ и} \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots \end{array}\right\}$.

Дополнительные задания

5. Найдите ФСР следующих однородных систем:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

6. Найдите однородную систему линейных уравнений, решениями которой являются лишь векторы из линейной оболочки последовательности векторов $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$:

а) $a_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $a_2 = (0;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (2;\ 1;\ 3)$;

б) $a_1 = (1;\ \ 0;\ \ -1;\ \ 1)$, $a_2 = (0;\ \ 1;\ \ 1;\ \ -1)$.

7. Найдите базисы пересечения подпространств $L_1 = L(a_1,\ \ a_2,\ \ \ldots,\ \ a_k)$ и $L_2 = L(b_1,\ \ b_2,\ \ \ldots,\ \ b_m)$, если

$$a_1 = (1;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 0),\ a_2 = (2;\ \ 1;\ \ -1;\ \ 1),$$
$$a_3 = (1;\ \ 2;\ \ -2;\ \ -1),\ a_4 = (3;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 1),$$
$$b_1 = (1;\ \ 1;\ \ -1;\ \ 0),\ b_2 = (2;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 1),$$
$$b_3 = (1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 1),\ b_4 = (2;\ \ 2;\ \ 0;\ \ 1).$$

8. Найдите базисы подпространств арифметического векторного пространства P^n:

а) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,|\, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \right\}$;

б) $L = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n \,|\, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 \right\}$ $\ (n \geq 4)$.

§4. Ранги матриц, их применение

Строчечным рангом ненулевой матрицы $A = A_{k \times n}$ называется количество векторов в базисе последовательности её строк, рассматриваемых как арифметические вектор-строки, а *столбцовым рангом* – количество векторов в базисе последовательности её столбцов, рассматриваемых как вектор-столбцы.

Строчечный и столбцовый ранги нулевой матрицы равны нулю.

Подматрицей матрицы A порядка s $(1 \leq s \leq \min(k;\ \ n))$ называется любая матрица, которая получается из A после вычеркивания $(k - s)$ её строк и $(n - s)$ её столбцов, т.е. остается матрица размерности $s \times s$. Определитель подматрицы s-го порядка матрицы A называется её *минором s-го порядка.*

Минорным рангом матрицы A называется наибольший из порядков её ненулевых миноров.

Обозначения: $r(A)$ – строчечный, $\rho(A)$ – столбцовый, $m(A)$ – минорный ранги матрицы A.

Теорема (о ранге). *Для любой матрицы A её строчечный, столбцовый и минорный ранги равны:*

$$r(A) = \rho(A) = m(A).$$

Это число называется *рангом* матрицы A и обозначается $rang(A)$.

$\rho(A)$ равен количеству ведущих коэффициентов конечной матрицы, полученной из A с помощью конечного числа элементарных преобразований, а $r(A)$ – для матрицы A^{T} (транспонированной к A).

Пример. Найти столбцовый ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к конечной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} (1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \rho(A) = 2.$$

Пример. Найти строчечный ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&3&1&1\\1&-2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A^{T} к конечной:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&3&-2\\-1&1&-2\\2&1&1\end{pmatrix}(-1)(1)(-2)\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1\\0&3&-3\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}(-3)(-1)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1\\0&0&0\\0&\mathbf{1}&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&1\\0&\mathbf{1}&-1\end{pmatrix}, \text{ т.е. } r(A)=2\,.$$

Пример. Найти минорный ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&3&1&1\\1&-2&-2&1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&3&1\\1&-2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&3&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&1&1\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\-2&-2&1\end{vmatrix}=0\,,$$

т.е. все миноры порядка 3 равны нулю, а минор порядка 2: $\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=3\neq0$, поэтому $m(A)=2$.

Для произвольных матриц A и B, для которых существует произведение $A\cdot B$, выполняется неравенство

$$rang(A\cdot B)\le\min(rang\,A,\quad rang\,B)\,.$$

Если же матрица A – квадратная и невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то

$$rang(A \cdot B) = rang\, B \text{ и } rang(C \cdot A) = rang\, C .$$

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её расширенной матрицы равен рангу её основной матрицы.

Занятие 18

Столбцовый, строчечный и минорный ранги матриц. Способы нахождения рангов, теорема о ранге.

Основные типы задач. Освоение понятий столбцового, строчечного и минорного рангов. Нахождение ранга матрицы по алгоритму.

Задачи и упражнения

1. Найдите (столбцовый, строчечный, минорный) ранги матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что $rang(A) \le \min(k,\ \ n)$, где k – число строк, n – число столбцов матрицы A.

3. Докажите, что совместная система от n неизвестных имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен n.

4. Докажите, что если две СЛУ от n неизвестных совместны и равносильны, то ранги расширенных матриц этих систем совпадают. Можно ли утверждать подобное для рангов основных матриц этих систем?

5. Найдите ранги матриц в зависимости от значений параметра λ:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & 2\lambda + 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Дополнительные задания

6. Найдите (столбцовый, строчечный, минорный) ранги матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы ранг матрицы $A = A_{n\times n}$ был равен:

а) 1; б) n;
в) 0; г) $n-1$;
д) 2 при $n \geq 2$.

8. Найдите ранги матриц в зависимости от значений параметра λ:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & \lambda+1\\ 1 & \lambda-1 & 1\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & \lambda+1 & 1\\ 1 & -1 & \lambda & \lambda\\ \lambda & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9. Пусть $A = A_{k\times n}$, $B = B_{k\times n}$. Сформулируйте условия единственности решения каждого из матричных уравнений $A\cdot X = B$ и $Y\cdot A = B$.

§5. Решение неоднородных систем линейных уравнений

Система линейных уравнений

$$(*)\quad \begin{cases}\alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_n=0,\\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_n=0,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ \alpha_{k1}\cdot x_1+\alpha_{k2}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{kn}\cdot x_n=0;\end{cases}$$

называется *однородной ассоциированной* системой для системы

$$(**)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_n=\beta_1, \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_n=\beta_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{k1}\cdot x_1+\alpha_{k2}\cdot x_2+\ldots+\alpha_{kn}\cdot x_n=\beta_k. \end{cases}.$$

Если $M\neq\varnothing$ – множество всех решений системы (**), $a\in M$ и $Б=\langle c_1;\ c_2;\ \ldots;\ c_r\rangle$ – ФСР однородной ассоциированной системы (*), то любое решение $b\in M$ системы (**) есть сумма её частного решения a и линейной комбинации векторов ФСР системы (*), причём других решений нет:

$$b\in M\ \Leftrightarrow\ b=a+\gamma_1\cdot c_1+\gamma_2\cdot c_2+\ldots+\gamma_r\cdot c_r\,,\ \ \gamma_i\in P\,.$$

Пример. Записать произвольное решение СЛУ

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=1; \end{cases}$$

в виде суммы её частного решения и линейной комбинации векторов ФСР её однородной ассоциированной системы.

Заметим, что основные матрицы произвольной системы линейных уравнений и её ассоциированной системы одинаковы. Значит, можно преобразовывать расширенную матрицу неоднородной системы (**), а чтобы получить конечную матрицу для однородной системы (*), нужно в конечной матрице неоднородной системы столбец после черты заменить нулевым. Далее будем преобразовывать только расширенную матрицу неоднородной системы (**).

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array} (-2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) (2)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Это – конечная матрица неоднородной системы (**),

$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 1 - x_3 - 5x_4, \\ \boldsymbol{x}_2 = \qquad\quad -3x_4 \end{cases}$ – её общее решение.

Положим, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, т.е. $a = (1;\ 0;\ 0;\ 0)$ – частное решение неоднородной системы (**).

$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ – конечная матрица однородной ассоциированной системы (*).

$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -x_3 - 5x_4, \\ \boldsymbol{x}_2 = \qquad -3x_4 \end{cases}$ – её общее решение. Найдем ФСР:

$\boldsymbol{x}_1$	$\boldsymbol{x}_2$	x_3	x_4
–1	0	1	0
–5	–3	0	1

Векторы $c_1 = (-1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $c_2 = (-5;\ -3;\ 0;\ 1)$ – ФСР однородной системы (*).

Любое решение неоднородной системы (**) имеет вид

$$b = a + \alpha_1 \cdot c_1 + \alpha_2 \cdot c_2,$$

где $a = (1;\ 0;\ 0;\ 0)$, $c_1 = (-1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $c_2 = (-5;\ -3;\ 0;\ 1)$ и $\alpha_1,\ \alpha_2 \in P$.

Пример. Для всех значений параметра λ решить неоднородную систему $\begin{cases} x - y + \lambda \cdot z = 1, \\ x + \lambda y - z = 2, \\ \lambda x - y + z = \lambda. \end{cases}$.

Исследование данной СЛУ с параметрами будем проводить по мере преобразования её расширенной матрицы, причем преобразования делаются до тех пор, пока в каждой ненулевой строке основной матрицы не будет выбран ведущий коэффициент.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & =1 & 1 & \lambda \end{array}\right) \end{array} (-1)(-\lambda) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 & 0 \end{array}\right).$$

Ведущие коэффициенты не должны равняться нулю, поэтому, начиная с этого места, мы вынуждены рассматривать разные случаи. В качестве кандидата на роль ведущего будем рассматривать элемент $\lambda - 1$.

а) Если $\lambda - 1 = 0$, т.е. $\lambda = 1$, то получаем следующее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot 1/2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1/2 \end{array}\right).$$

В этом случае $\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{3}{2} \\ \boldsymbol{y} = \dfrac{1}{2} + z \end{cases}$ – общее решение данной СЛУ.

б) Если $\lambda - 1 \neq 0$, то третью строку сократим на $\lambda - 1$ и получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & 0 \end{array}\right)(-\lambda-1)(1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -\lambda-1 & 0 \end{array}\right).$$

Единственный кандидат на роль ведущего элемента во второй строке $\lambda^2 + \lambda$. Исследуем все случаи для этого элемента.

в) Если $\lambda = 0$, то получаем матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \end{array}\right)$.

В этом случае СЛУ не имеет решений, т.к. содержит противоречивое уравнение (см. строку два).

г) Если $\lambda = -1$, получаем матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right)$.

В этом случае также нет решений.

д) $\lambda^2 + \lambda \neq 0$, т.е. $\lambda \neq 0;\ -1$. Тогда вторую строку сократим на $\lambda^2 + \lambda$ и получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\left(\lambda^2+\lambda\right) \\ 0 & \mathbf{1} & -\lambda-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (1)(\lambda+1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \left(\lambda^2+\lambda+1\right)/\left(\lambda^2+\lambda\right) \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/\lambda \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/\left(\lambda^2+\lambda\right) \end{array}\right).$$

В этом случае данная система имеет единственное решение

$$\boldsymbol{x} = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda},\ \boldsymbol{y} = \frac{1}{\lambda},\ \boldsymbol{z} = \frac{1}{\lambda^2 + \lambda}.$$

Ответ: если $\lambda = 1$, то решением является $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} + z\right)$;

если $\lambda = 0$ или $\lambda = -1$, то множество решений пусто;

если $\lambda \neq 0, -1, 1$, то система имеет единственное решение $\left(\frac{\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 1}; \frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda^2 + \lambda}\right)$.

Занятие 19

Выражение решений неоднородной системы через её частное решение и ФСР ассоциированной однородной системы. Исследование и решение СЛУ с параметрами.

Основные типы задач. Решение СЛУ с параметрами модифицированным методом Гаусса. Нахождение решений неоднородной системы как суммы частного решения этой системы и линейной комбинации векторов ФСР ассоциированной однородной системы.

Задачи и упражнения

1. Выразите произвольное решение неоднородной системы через её частное решение и ФСР ассоциированной однородной системы:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$

2. Докажите, что если векторы $a-b$, $c-b$ и c являются решениями неоднородной СЛУ, то вектор a – также решение этой неоднородной СЛУ.

3. Исследуйте и решите системы с параметрами:

а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ \lambda \cdot x + y + z = 1, \\ x + y + \lambda \cdot z = \lambda; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a \cdot x + y + z = 4, \\ x + by + z = 3, \\ x + 2by + z = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + \lambda y + z = 1, \\ x + y + \lambda z = \lambda. \end{cases}$

Дополнительные задания

4. Выразите произвольное решение неоднородной системы через её частное решение и ФСР ассоциированной однородной системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\{x_1 - 2x_2 + x_3 = 2.$

5. Докажите, что если векторы $a - b$ и b являются решениями неоднородной СЛУ, то вектор b – решение ассоциированной однородной СЛУ.

6. Исследуйте и решите системы с параметрами:

а) $\begin{cases} a \cdot x + y + z = a, \\ x + by + z = b, \\ x + y + cz = c; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$

Контрольная работа № 3

Примерный вариант

1. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:
$a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 2)$, $a_2 = (2;\ -1;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ -2;\ 2;\ -1)$, $a_4 = (2;\ 1;\ -1;\ -2)$, $a_5 = (5;\ 1;\ -1;\ 1)$.

2. Найдите A^{-1} модифицированным методом Гаусса, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Какое из множеств

$$L_1 = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \alpha_4) \in R^4 \,\middle|\, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \right\},$$

$$L_2 = \left\{ (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \alpha_3;\ \ \alpha_4) \in R^4 \,\middle|\, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = \alpha_4 \right\}$$

является подпространством арифметического векторного пространства R^4 и почему?

4. Выразите решение СЛУ

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

через её частное решение и ФСР ассоциированной однородной СЛУ.

5. Исследуйте вопрос о существовании решений системы в зависимости от значения параметра и найдите эти решения:

$$\begin{cases} x_1 + \lambda \cdot x_2 + x_3 = 1, \\ (\lambda - 1) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2x_3 = \lambda - 1, \\ x_1 + x_2 + (\lambda + 1) \cdot x_3 = 1. \end{cases}$$

ТЕМА 4. ОБЩЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

§1. Алгебраические операции

n-арной алгебраической операцией, заданной на непустом множестве A, называется правило, ставящее каждой упорядоченной n-ке элементов A единственный элемент из A.

Пример. Правило $\rho(x;\ y;\ z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2 + 1}$ является 3-арной (тернарной) алгебраической операцией на множествах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$, но не является ею на множествах $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$, т.к. $\rho(1;\ 0;\ 2) = \dfrac{1^2 - 0^2}{2^2 + 1} = \dfrac{1}{5}$, а $\dfrac{1}{5}$ не является целым или натуральным числом.

Если $n = 2$, то алгебраическая операция на множестве A называется *бинарной* или, сокращённо, БАО.

Пример. Сложение является бинарной алгебраической операцией на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Действительно, $\mathbb{N} \neq \varnothing$ и для любых двух натуральных чисел всегда существует и единственная их сумма, являющаяся натуральным числом.

Непустое множество с заданными на нем алгебраическими операциями называется *алгеброй.*

Пример. На множестве $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел заданы бинарные алгебраические операции сложения и умножения: $+$ и $\cdot$, а также выделенный элемент «единица» (это 0-арная операция). Получается алгебра, обозначаемая $\langle \mathbb{N};\ +;\ \cdot;\ 1 \rangle$.

Бинарная алгебраическая операция $*$ называется:

а) *ассоциативной* на множестве A, если для любых $a,b,c \in A$ выполняется равенство $(a*b)*c = a*(b*c)$;

б) *коммутативной*, если для любых $a,b \in A$: $a*b = b*a$.

Элемент $e \in A$ называется *нейтральным* элементом относительно операции $*$, если для любого элемента $a \in A$: $a*e = e*a = a$.

Элемент $a' \in A$ называется *симметричным* к элементу $a \in A$ относительно операции $*$ с нейтральным элементом $e \in A$, если: $a*a' = a'*a = e$.

Пример. Сложение $+$ и вычитание $-$ являются бинарными алгебраическими операциями на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$. Сложение на $\mathbb{Z}$ ассоциативно, коммутативно и имеет нейтральный элемент $0 \in \mathbb{Z}$. Вычитание не ассоциативно, не коммутативно и не имеет нейтрального элемента. Относительно сложения каждое целое число имеет симметричный элемент, который называется противоположным.

Занятие 20

Алгебраические операции, бинарные и унарные операции. Свойства операций и их проверка. Алгебры.

Основные типы задач. Задачи на определение бинарной операции, проверку их свойств. Проверка того, что некоторое правило на данном множестве является операцией; проверка ассоциативности, коммутативности, наличия нейтрального; нахождение симметричных элементов.

Задачи и упражнения

1. Выясните, будет ли вычитание бинарной операцией на множествах:

а) $\mathbb{N}$; б) $\mathbb{Z}$;
в) $\mathbb{Q}$; г) $\mathbb{R}$.

2. Выясните, будет ли деление бинарной операцией на множествах:

а) $\mathbb{N}$; б) $\mathbb{Q}$;
в) $\mathbb{Q}^*$; г) $\mathbb{R}_+$.

3. Выясните, будет ли сложение матриц бинарной операцией на множествах:

а) $\mathbb{R}_{k\times n}$; б) $\mathbb{R}_{n\times n}$;
в) всех невырожденных матриц из $\mathbb{R}_{n\times n}$.

4. Выясните, будет ли умножение матриц бинарной операцией на множествах:

а) $\mathbb{R}_{k\times n}$; б) $\mathbb{R}_{n\times n}$.

5. Какими свойствами (ассоциативность, коммутативность, существование нейтрального элемента, существование симметричного элемента) обладают следующие операции:

а) сложение на $\mathbb{N}$;
б) сложение на $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$;
в) вычитание на $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$;
г) умножение на $\mathbb{N}$;
д) сложение на $\mathbb{R}_{m\times n}$;
е) умножение на $\mathbb{R}_{n\times n}$;
ж) правило $x * y = x + y - 1$ на $\mathbb{Z}$;
з) правило $x * y = 3xy$ на $\mathbb{Q}$?

6. Докажите, что для бинарной операции $*$, заданной на множестве A, выполняются следующие свойства:

а) если нейтральный существует, то он единственен;

б) $(a*b)' = b' * a'$, если для a и b существуют симметричные a' и b'.

Дополнительные задания

7. Выясните, будет ли деление бинарной операцией на множествах:

а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{R}$;

в) $\mathbb{Z}^*$; г) $\mathbb{R}^*$, где $A^* = A \setminus \{0\}$.

8. Выясните, будет ли умножение матриц бинарной операцией на множестве всех невырожденных матриц из $\mathbb{R}_{n\times n}$.

9. Какими свойствами (ассоциативность, коммутативность, существование нейтрального элемента, существование симметричного элемента) обладают следующие операции:

а) умножение на множестве всех невырожденных матриц из $\mathbb{R}_{n\times n}$;

б) правило $x * y = x + y - 3$ на $\mathbb{Z}$;

в) правило $x * y = 5xy$ на $\mathbb{Q}$?

10. Пусть $*$ - бинарная операция на множестве A. Если БАО $*$ ассоциативна на A и для элемента $a \in A$ существует симметричный $a' \in A$, то

а) симметричный элемент единственен;

б) $(a')' = a$, т.е. симметричный к a' равен a.

11. Какими свойствами обладает БАО, заданная на множестве $\mathbb{R}_{n\times n}$ правилом $A \circ B = A \cdot B - B \cdot A$?

Докажите, что для этой операции выполняются свойства:

а) $A \circ E = \Theta_{n\times n}$, где $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$, $E \in \mathbb{R}_{n\times n}$ – единичная, $\Theta_{n\times n} \in \mathbb{R}_{n\times n}$ – нулевая матрицы;

б) $A \circ B = -B \circ A$, где A, B – произвольные матрицы из $\mathbb{R}_{n\times n}$;

в) $(A \circ B) \circ C + (B \circ C) \circ A + (C \circ A) \circ B = \Theta_{n\times n}$.

§2. Группы

Можно дать два эквивалентных определения группы.

Определение 1. Непустое множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция $*$ ассоциативна;

2) существует нейтральный относительно операции $*$ элемент $e \in G$;

3) для любого $a \in G$ существует симметричный относительно операции $*$ элемент $a' \in G$.

Определение 2. Непустое множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция $*$ ассоциативна;

2) для любых элементов $a, b \in G$ уравнения $a * x = b$ и $y * a = b$ имеют решения в G.

Группа называется *коммутативной* или *абелевой*, если операция $*$ коммутативна на G.

Пример. Пусть $G = \{1;\ \ -1\}$. Докажем, что G – группа относительно умножения.

Действительно, произведение любых двух элементов из G определено единственным образом и является элементом из G, т.к. $1 \cdot 1 = (-1)\cdot(-1) = 1 \in G$ и $1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1 \in G$. Таким образом, умножение является бинарной операцией на множестве G. Элемент $1 \in G$ – нейтральный по умножению. И по свойствам целых чисел умножение на G является ассоциативным и коммутативным, т.е. $\langle G; \ \cdot \rangle$ – абелева группа по определению 1.

Подгруппой группы $\langle G; \ * \rangle$ называется непустое подмножество H группы G, которое само является группой относительно операции $*$, т.е. $\langle H; \ * \rangle$ – группа.

Критерий подгруппы. *Непустое подмножество H группы $\langle G; \ * \rangle$ является её подгруппой тогда и только тогда, когда*

1) для любых элементов $a, b \in H$ элемент $a * b \in H$;

2) для любого $a \in H$ симметричный элемент $a' \in H$.

Пример. Множество всех целых четных чисел относительно операции сложения является подгруппой группы $\langle \mathbb{Z}; \ + \rangle$.

Действительно, это множество не пусто и является подмножеством множества $\mathbb{Z}$. Если a, b – два четных целых числа, то их сумма также четное целое число. Симметричным к элементу $a = 2k$ по сложению является элемент $(-a) = -(2 \cdot k) = 2 \cdot (-k)$ – четное целое число.

Группа $\langle G; \ * \rangle$ *изоморфна* группе $\langle H; \ \circ \rangle$, если существует взаимно однозначное отображение f множества G на множество H такое, что для любых элементов $a, b \in G$ верно равенство: $f(a * b) = f(a) \circ f(b)$.

Пример. Группа $\langle \mathbb{Z}; \ + \rangle$ изоморфна группе $\langle A; \ \cdot \rangle$, где $A = \left\{ 2^k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Действительно, в качестве требуемой функции $f:\mathbb{Z}\to A$ возьмем функцию, определяемую равенством $f(k)=2^k$ для любого $k\in\mathbb{Z}$.

Тогда f – взаимно однозначное отображение $\mathbb{Z}$ на A, т.к если $k\neq m$, то $f(k)=2^k\neq f(m)=2^m$.

Если $k,m\in\mathbb{Z}$, то

$$f(k+m)=2^{k+m}=2^k\cdot 2^m=f(k)\cdot f(m).$$

Занятие 21

Понятие группы, подгруппы, изоморфизма групп.

Основные типы задач. Задачи на освоение понятий группы, подгруппы, изоморфизма групп. Проверка, что некоторое множество относительно данной БАО является группой. Проверка, что подмножество является подгруппой данной группы. Проверка изоморфизма групп.

Задачи и упражнения

1. Выясните, какие из следующих алгебр являются группами:

а) $\langle\mathbb{N};\ \ +\rangle$; б) $\langle\mathbb{Z};\ \ +\rangle$;

в) $\langle\mathbb{R}_+;\ \ +\rangle$; г) $\langle\mathbb{Z};\ \ \cdot\rangle$;

д) $\langle\mathbb{R}^*;\ \ +\rangle$; е) $\langle\mathbb{Q}_+;\ \ \cdot\rangle$;

ж) $\langle\mathbb{R}^*;\ \ \cdot\rangle$; з) $\langle\mathbb{R}_{n\times n};\ \ +\rangle$

и) $\langle\mathbb{R}_+;\ \ \cdot\rangle$.

2. Докажите, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ является группой относительно операции $\circ$, определенной равенством $x\circ y=x+y-4$.

3. В абелевой мультипликативной группе $\langle G; \ \cdot\rangle$ определим частное элементов a и b следующим образом: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. Докажите, что

а) $\frac{a}{a} = 1$ (где 1 – нейтральный по умножению на G);

б) $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$;

в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$;

г) $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ тогда и только тогда, когда $a \cdot y = b \cdot x$.

4. Выясните, какие из следующих множеств образуют подгруппу группы всех целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению:

а) $4\mathbb{Z} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

б) $\mathbb{N}$;

в) $\mathbb{Q}$;

г) $A = \{-1; \ 0; \ 1\}$.

5. Выясните, какие из следующих множеств образуют подгруппу группы всех ненулевых действительных чисел $\mathbb{R}^*$ по умножению:

а) $\mathbb{Q}^*$;

б) $\mathbb{Q}_+$ – всех положительных рациональных чисел;

в) I – всех иррациональных чисел.

6. Докажите изоморфность следующих групп:

а) $\langle \mathbb{Z}; \ +\rangle$ и $\langle 4\mathbb{Z}; \ +\rangle$;

б) $\langle A; \ \cdot\rangle$ и $\langle B; \ \cdot\rangle$, где $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{5^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Дополнительные задания

7. Выясните, какие из следующих алгебр являются группами:

а) $\langle \mathbb{Q}; \ +\rangle$;

б) $\langle \mathbb{R}; \ +\rangle$;

в) $\langle \mathbb{N}; \ \cdot \rangle$; г) $\langle \mathbb{Q}; \ \cdot \rangle$;

д) $\langle \mathbb{R}; \ \cdot \rangle$; е) $\langle \mathbb{R}_{k\times n}; \ + \rangle$;

ж) $\langle \mathbb{R}_{n\times n}; \ \cdot \rangle$;

з) множество всех невырожденных квадратных матриц порядка n по умножению.

8. Докажите, что если в группе $\langle G; \ \circ \rangle$ для любого элемента $a \in G$ выполняется равенство $a \circ a = e$, то группа абелева.

9. Для каких значений α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ множество $\mathbb{R}$ является группой относительно операции $\circ$, определенной равенством $x \circ y = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma$?

10. Выясните, какие из следующих множеств образуют подгруппу группы всех целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению:

а) $B = \{0\}$;

б) $m\mathbb{Z} = \{m \cdot k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, где m – целое число.

11. Выясните, какие из следующих множеств образуют подгруппу группы всех ненулевых действительных чисел $\mathbb{R}^*$ по умножению:

а) $\mathbb{R}_+$;

б) $\mathbb{R}_-$ – всех отрицательных действительных чисел;

в) $H = \{-1; \ 1\}$;

г) $A = \{-1; \ 0; \ 1\}$;

д) $B = \{0\}$.

12. Докажите изоморфность групп $\langle 5\mathbb{Z}; \ + \rangle$ и $\langle G; \ \cdot \rangle$, где $G = \{2^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$;

13. Докажите, что группы $\left\langle \mathbb{Q}^+;\ \cdot \right\rangle$ и $\left\langle \mathbb{Q};\ + \right\rangle$ не изоморфны.

§3. Кольца и поля

Непустое множество K с заданными на нём бинарными алгебраическими операциями $+$ (сложение) и $\cdot$ (умножение) называется *кольцом*, если выполняются следующие свойства:

1) $\left\langle K;\ + \right\rangle$ – коммутативная (абелева) группа;

2) для любых $a, b, c \in K$:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{и} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(левая и правая дистрибутивность).

Кольцо называется *ассоциативным*, если операция умножения ассоциативна; *коммутативным* – если эта операция коммутативна; *кольцом с единицей* – если существует нейтральный элемент относительно умножения $1 \in K$.

Ненулевые элементы a и b кольца K называются *делителями нуля*, если $a \cdot b = 0$ или $b \cdot a = 0$.

Коммутативное кольцо $\left\langle K;\ +,\ \cdot \right\rangle$ с единицей называется *областью целостности*, если из условия $a \cdot b = 0$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$.

Пример. Кольцо целых чисел является областью целостности, а кольцо матриц размерности 2×2 $\left\langle \mathbb{R}_{2\times 2};\ +,\ \cdot \right\rangle$ будет некоммутативным и с делителями нуля, т.к. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Коммутативно-ассоциативное кольцо с единицей $\langle P;\ +,\ \cdot\rangle$, в котором $0 \neq 1$ и в котором для каждого ненулевого элемента a существует обратный $a^{-1} \in P$, называется *полем.*

Известно, что в поле нет делителей нуля.

Подполем поля $\langle P;\ +,\ \cdot\rangle$ называется непустое подмножество F поля P такое, что $\langle F;\ +,\ \cdot\rangle$ – поле.

Пример. Поле $\langle \mathbb{Q};\ +,\ \cdot\rangle$ является подполем поля $\langle \mathbb{R};\ +,\ \cdot\rangle$.

Подполем поля $\langle \mathbb{R};\ +,\ \cdot\rangle$ будет каждое поле вида $\langle F;\ +,\ \cdot\rangle$, где $F = \left\{a + b\sqrt{k} \mid k \in \mathbb{N};\ a,\ b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Занятие 22

Кольца, примеры, свойства. Поля, подполя, их свойства. Отличие полей от колец. Примеры.

Основные типы задач. Задачи на определение кольца, области целостности, поля, подполя. Задачи на проверку того, что некоторое множество относительно заданных операций является кольцом, полем, подполем, обладает определёнными свойствами.

Задачи и упражнения

1. Выясните, какие из следующих числовых множеств образуют кольцо (поле) относительно обычных действий сложения $+$ и умножения $\cdot$:

а) $\mathbb{N}$; б) $\mathbb{N} \cup \{0\}$;

в) $\mathbb{Z}$; г) $m \cdot \mathbb{Z} = \left\{m \cdot k \middle| m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

д) $\mathbb{R}_{-}$; е) $\mathbb{Q}[5] = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a,\ b \in \mathbb{Q}\right\}$.

Все ли из колец в этой задаче являются областями целостности? Почему?

2. Докажите, что множество всех упорядоченных пар действительных чисел $\mathbb{R}^2$ относительно операций, заданных правилами $(x;\ y)+(a;\ b)=(x+a;\ y+b)$ и $(x;\ y)\cdot(a;\ b)=(xa;\ yb)$, является кольцом, но не полем.

3. Докажите, что множество $P=\{0;\ 1\}$ с действиями, заданными таблицами

+	0	1
0	0	1
1	1	0

и

·	0	1
0	0	0
1	0	1

является полем.

Дополнительные задания

4. Выясните, какие из следующих числовых множеств образуют кольцо (поле) относительно обычных действий сложения $+$ и умножения $\cdot$:

а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{R}$;

в) $\mathbb{R}^*$; г) $\mathbb{Q}[5]=\left\{a+b\sqrt{5}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}$.

Все ли из колец в этой задаче являются областями целостности? Почему?

5. Докажите, что множество всех квадратных матриц $\mathbb{R}_{n\times n}$ относительно обычного сложения матриц и умножения, заданного правилом $A\circ B=A\cdot B-B\cdot A$, является кольцом, но не полем. Какими свойствами кольца оно обладает? Есть ли в нем делители нуля?

6. Докажите, что множество $C=\{(x;\ \ y)|x,\ \ y\in\mathbb{R}\}$ относительно действий сложения и умножения, заданных равенствами

$$(x;\ \ y)+(a;\ \ b)=(x+a;\ \ y+b),$$

$$(x;\ \ y)\cdot(a;\ \ b)=(x\,a-y\,b;\ \ x\,b+y\,a)$$

является полем.

7. Докажите, что множество $\overline{\mathbb{R}}=\{(x;\ \ 0)|x\in\mathbb{R}\}$ относительно действий, введенных в задаче 6, является подполем поля $\mathbb{C}$.

Контрольная работа № 4

Примерный вариант

1. Докажите, что правило $x\circ y=|x\cdot y|$ является бинарной алгебраической операцией на множестве $\mathbb{Q}$. Какимим свойствами обладает эта операция?

2. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ является группой относительно операции умножения матриц.

3. Докажите, что множество $M=\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| x,\ \ y\in\mathbb{Q}\right\}$ является полем относительно обычных операций сложения и умножения матриц.

4. Докажите, что множество $L=\{(x;\ \ y)|\ x,y\in\mathbb{R}\}$ относительно действий, определённых равенствами

$$(a;\ \ b)+(x;\ \ y)=(a+x;\ \ b+y)\ \text{ и}$$

$$(a;\quad b)\cdot(x;\quad y)=(a\cdot x;\quad 0)$$

является кольцом. Какими свойствами обладает данное кольцо?

5. Докажите, что множество $K=\left\{(-3)^k \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ является подгруппой группы всех ненулевых рациональных чисел по умножению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варпаховский, Ф.Л.* Алгебра: учеб. пособие для студ.-заочников 1 курса физ.-мат. фак-ов. пед. ин-тов/ Ф.Л.Варпаховский, А.С.Солодовников. – М.: Просвещение, 1981.

2. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру/ А.И.Кострикин. – М.: Наука, 1977.

3. *Кострикин, А.И.* Сборник задач по алгебре/ А.И.Кострикин и др. – М.: Наука, 1987.

4. *Кузьмичёв, А.И.* Линейная алгебра-1: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета/ А.И.Кузьмичёв. – Новосибирск: Изд.НГПУ, 2007.

5. *Куликов, Л.Я.* Алгебра и теория чисел/ Л.Я.Куликов. – М.: Высшая школа, 1979.

6. *Куликов, Л.Я.* Сборник задач по алгебре и теории чисел/ Л.Я.Куликов, Л.И.Москаленко, А.А.Фомин. – М.: Просвещение, 1993.

7. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры /А.Г.Курош. – М.: Наука, 1975.

8. *Мальцев, И.А.* Линейная алгебра/ И.А.Мальцев. – Новосибирск: Изд. Ин-та математики, 2001.

9. Методическая разработка занятий по алгебре и теории чисел: для студ. 1 курса ФМФ/ Сост. А.М.Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ,1985.

10. Методическая разработка занятий по линейной алгебре: для студ. 1 курса мат. фак-та пед. ин-та/ Сост. А.М.Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ, 1988.

11. *Шнеперман, Л.Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел/ Л.Б.Шнеперман. – Минск, 1982.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кузьмичёв Анатолий Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–1

Задачник-практикум для студентов 1-го курса
математического факультета

В авторской редакции

Компьютерная вёрстка *А. Саянская*

Подписано в печать 20.02.09 г. Формат бумаги 60x84/16.

Печать RISO. Уч.-изд.л. 7,37. Усл.печ.л. 6,85. Тираж 100 экз.

Заказ №

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, Вилюйская, 28