



© Л. О. Денищева, Н. В. Савинцева, И. С. Сафуанов, А. В. Ушаков, В. А. Чугунов, Ю. А. Семеняченко

DOI: [10.15293/2658-6762.2104.06](https://doi.org/10.15293/2658-6762.2104.06)

УДК 373.5.016:51

Особенности формирования и оценки математической грамотности школьников

Л. О. Денищева, Н. В. Савинцева, И. С. Сафуанов,
А. В. Ушаков, В. А. Чугунов, Ю. А. Семеняченко (Москва, Россия)

Проблема и цель. Авторами исследуется проблема формирования математической грамотности обучающихся. Целью статьи является выявление современных особенностей формирования и оценки математической грамотности школьников.

Методология. Исследование основано на концептуальном подходе к понятию математической грамотности, закрепленном в концепции PISA. В основу исследования положена модель математической грамотности. Основные методы, примененные в исследовании, это анализ педагогического опыта учителей математики, анализ структуры задач на математическую грамотность, методы решения задач, основанные на математическом моделировании.

Результаты. В статье представлен анализ концептуальных основ формирования математической грамотности школьников. Авторы выявили и структурировали основные особенности заданий, направленных на формирование математической грамотности, описали основные подходы к их разработке, базирующиеся на использовании модельных схем и математическом моделировании. Прослежены и обобщены связи между контекстами реальных жизненных ситуаций и разделами содержательных линий школьного курса математики. Продемонстрирован полный процесс работы с математическими моделями на конкретных примерах заданий, возникающих в жизненных ситуациях. Авторами выявлены основные подходы к разработке

Денищева Лариса Олеговна – кандидат педагогических наук, профессор, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: DenischevaLO@mgpu.ru

Савинцева Наталья Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: SavintsevanV@mgpu.ru

Сафуанов Ильдар Суфиянович – доктор педагогических наук, профессор, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: SafuanovIS@mgpu.ru

Ушаков Андрей Владимирович – кандидат педагогических наук, доцент, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: UshakovAV@mgpu.ru

Чугунов Владимир Аркадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: CHugunovVA@mgpu.ru

Семеняченко Юлия Александровна – кандидат педагогических наук, доцент, департамент математики и физики, Московский городской педагогический университет.

E-mail: SemenyachenkoUA@mgpu.ru

заданий, предназначенных для формирования математической грамотности, опирающиеся на модельные схемы и процесс математического моделирования.

Заключение. В заключение выделяются этапы создания задач на математическую грамотность и формулируются требования к подходам их разработки. Делается вывод о возможности использования модельных схем как опорных для задач на математическую грамотность.

Ключевые слова: математическая грамотность; контекстуальные задачи; математические модели; модельные схемы; проблемная ситуация; проблемный подход; содержательные линии математики; математическое моделирование.

Постановка проблемы

Порождающий фактор настоящего исследования – дефицит материалов математического и методического содержания, направленных на формирование и оценку математической грамотности школьников. Актуальность обосновывается результатами проверки качества математической грамотности российских школьников, приведенными в международном исследовании PISA-2018¹.

Активно проблема формирования математической грамотности школьников стала исследоваться в начале XXI века. Американский исследователь L. A. Steen² отмечает возрастающую важность изучения математической грамотности в этот период, приводит различные аргументы в пользу ее развития.

E. Dubinsky [1] указывает на необходимость учитывать уровень развития абстрактного мышления для математической грамотности.

J. Kilpatrick [2], обобщив исследования рубежа веков по развитию математической грамотности, призвал реформировать математическое образование в соответствии с требованиями уровня современных информационных технологий и потребностями учащихся.

Исследованию математической грамотности учащихся различных возрастов от

начальной школы до университета посвящена монография Y. Solomon [3].

M. Niss, T. Højgaard [4] отмечают, что математическую грамотность не следует путать с математической компетентностью или считать одной из математических компетенций.

J. Craig [5], исследуя развитие интереса к проблемам числовой грамотности, отмечает, что такая грамотность несет определенные надежды на положительные эффекты: 1) она отражает нужды современной действительности; 2) делает человека сильнее и увереннее в жизни; 3) она способна помочь социальной справедливости и стабильности.

Статья I. Gal, A. Grotlüschen, D. Tout, G. Kaiser [6] также посвящена социальным аспектам математической грамотности – она рассматривает связанные с недостатком математической грамотности проблемы уязвимости взрослых, а также возможности обучения взрослых математической грамотности.

Проблемам неотъемлемых от математической грамотности разновидностей функциональной грамотности посвящен ряд статей: T. Weiland [7] о статистической грамотности, A. Ozkale, E. O. Erdogan [8], а также M. A. Sole [9] о финансовой грамотности, и E. Geraniou,

¹ Отчет по результатам международного исследования PISA-2018. URL: <https://fioco.ru/fioko-news/глобальные-компетенции-pisa-2018>

² Steen L. A. The Case for Quantitative Literacy // Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy / L. A. Steen (ed.). – Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001. – P. 1–22.

U. T. Jankvist [10] о математической цифровой грамотности. Ряд авторов (F. Gabriel, J. Signolet, M. Westwell [11], F. Gabriel, S. Buckley, A. Barthakur [12], S. E. Hiller, A. Kitsantas, J. E. Cheema, M. Poulou [13]) связывают трудности овладения математической грамотностью с известным феноменом «боязни математики» (mathematics anxiety), а также с такими психологическими явлениями, как уверенность учащихся в себе, способность к саморегуляции в обучении.

Ряд статей посвящен проблемам подготовки учителей к обучению учащихся математической грамотности. M. Genc, A. K. Erbas [14], а также С. Arslan, G. Yavuz [15] исследуют представления учителей математики о математической грамотности. Исследованию особенностей работы учителей по обучению учащихся математической грамотности посвящена статья О. Н. Bolstad [16]. U. Umbara, D. Suryadi [17] предлагают интерпретировать математическую грамотность с точки зрения подготовки учителей. S. Sevinc, R. Lesh [18] описывают курс для учителей, основанный на идеях моделирования и предназначенный для подготовки к созданию математических задач, связанных с реальной жизнью.

В последние 10–15 лет в школьные программы многих стран также включаются разделы и дисциплины, направленные на развитие математической грамотности. Исследованию этого явления посвящена статья Е. Jablonka [19].

Таким образом, в настоящее время проблеме формирования математической грамотности во всем мире уделяется существенное внимание.

Целью статьи является выявление современных особенностей формирования и оценки математической грамотности школьников.

Методология исследования

Настоящее исследование основано на концептуальном подходе к понятию математической грамотности, закрепленном в концепции PISA.

Как указано в статье М. Niss, Е. Jablonka³ в «Энциклопедии математического образования»⁴, англоязычный термин “Mathematical literacy” («Математическая грамотность») впервые появился в 1944 г., когда комиссия по послевоенным планам американского Национального совета учителей математики (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM) выдвинула требование, чтобы школа обеспечивала математическую грамотность для всех, кто способен овладеть ею⁵. В разных значениях термин употреблялся и в последующие годы, предшествовавшие его формализации после исследований PISA. Этот термин употреблялся в 1973 г. Георгом Штайнером (G. Steiner [20]), который понимал его как необходимость математических знаний в школьном объеме для людей всех профессий. В 1975 г. этот термин использовала Джудит Хектор (J. H. Hector [21]) в статье, где описывался курс, предназначенный для студентов

³ Niss M., Jablonka E. Mathematical Literacy // Encyclopedia of Mathematics Education / S. Lerman (ed). – Cham: Springer, 2020. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100

⁴ Encyclopedia of Mathematics Education / S. Lerman (ed). – Cham: Springer, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0>

⁵ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). A history of mathematics education in the United States and Canada. – Vol 32. – Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1970.

колледжей, нуждающихся в ликвидации пробелов в знании школьной математики. Таким образом, в эти годы математическая грамотность понималась как удовлетворительное владение элементарной математикой, изучаемой в школе. В 1989 г., когда впервые появились стандарты NCTM⁶, в них также говорилось о математической грамотности и о математически грамотных учащихся, однако никаких определений термина «математическая грамотность» приведено не было.

Далее концепция математической грамотности проявилась в контексте международных сравнительных исследований. Третье международное исследование по математике и естественным наукам (TIMSS), впервые проведенное в 1995 г., осуществило проверку математической и естественно-научной грамотности учащихся последнего года основной школы в 21 стране, направленное на то, чтобы «предоставить информацию о том, насколько подготовлена совокупность выпускников школ в каждой стране к тому, чтобы применять знания в области математики и естественных наук для решения жизненных задач за пределами школы».

Введенные в тестовых заданиях этого исследования контексты показывают, что здесь математическая грамотность понималась преимущественно как умение применять математику в естественных науках (в основном в физике и биологии), а также в бизнесе и промышленности. Но это «реальные жизненные ситуации» только для небольшой части учащихся, которые собираются специализироваться в области естественных наук и промышленности.

⁶ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. – Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

Основанную на результатах этого исследования, а также на стандартах NCTM первоначальную модель математической грамотности предложил Пугали (D. K. Pugalee [22]).

Более содержательная попытка явного определения появилась в разработке OECD (ОЭСР – Организация экономического сотрудничества и развития) для первого исследования PISA (Programme for International Student Assessment – Программа международного оценивания учащихся). Определение несколько раз видоизменялось с новыми циклами исследования PISA и сейчас формулируется так: «Математическая грамотность – это способность человека рассуждать математически и формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в различных контекстах реального мира. Она включает понятия, процедуры, факты и инструменты для описания, объяснения и прогнозирования явлений. Она помогает людям узнавать о роли, которую математика играет в мире, и осуществлять обоснованные суждения и решения, необходимые созидательным, заинтересованным и мыслящим гражданам XXI века».

В своем исследовании L. A. Steen⁷ представляет математическую грамотность именно так, как сформулировано в приведенном выше определении. Он отмечает, что несмотря на то что математика – древняя наука, необходимость для простых граждан быть математически грамотными появилась лишь во второй половине XX в.

⁷ Steen L. A. The Case for Quantitative Literacy // Mathematics and Democracy: The Case for Quantitative Literacy / L. A. Steen (ed.). – Washington, DC: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 2001. – P. 1–22.

В 2005 г. Ян де Ланге (J. de Lange) в статье, размещенной в «Энциклопедии социальных измерений»⁸ (см. также К. Stacey [23]), привел подробное описание понятия «математическая грамотность», основанное на определении математической грамотности, сформулированном ОЭСР для исследования PISA. Он ввел понятие пространственной грамотности и построил иерархию, где понятие «математическая грамотность» включает в себя и

пространственную грамотность, и числовую грамотность, и количественную грамотность, к которой относятся также явления изменчивости и неопределенности.

В основу настоящего исследования авторов положена модель математической грамотности.

Модель математической грамотности, принятая в исследовании PISA, выглядит следующим образом (см. рис. 1).



Рис. 1. Модель математической грамотности (PISA)

Fig. 1. Mathematical Literacy Model (PISA)⁹

Фундаментом для исследования математической грамотности являются следующие компоненты:

- *контекст*, в котором заложена проблемная ситуация;
- *содержание математического образования*, которое используется в заданиях;
- *мыслительная деятельность*, необходимая для того, чтобы связать контекст, в ко-

тором представлена проблема, с математическим содержанием, необходимым для ее решения.

Контекст задания – это особенности и элементы окружающей обстановки, представленные в задании в рамках предлагаемой ситуации. Эти ситуации связаны с разнообразными аспектами окружающей жизни и требуют для своего решения большей или мень-

⁸ de Lange J. Literacy, mathematical // Encyclopedia of Social Measurement. – 2005. – Vol. 2. – P. 533–540. DOI: <https://doi.org/10.1016/b0-12-369398-5/00244-9>

de Lange J. Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective // Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. – 2006. – Vol. 25. – P. 13–35.

⁹ PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy. – OECD Publishing, 2013. – P. 26.

шей математизации. Выделены и используются 4 категории контекстов, близкие учащимся: *общественная жизнь, личная жизнь, образование / профессиональная деятельность, научная деятельность.*

Математическое содержание заданий в исследовании распределено по четырем категориям: *пространство и форма, изменение и зависимости, количество, неопределенность и данные*, которые охватывают основные типы проблем, возникающих при взаимодействиях с повседневными явлениями. Название каждой из этих категорий отражает обобщающую идею, которая в общем виде характеризует специфику содержания заданий, относящихся к этой области.

1. *Изменение и зависимости* – задания, связанные с математическим описанием зависимости между переменными в различных процессах, т.е. с алгебраическим материалом, а также с основами математического анализа.

2. *Пространство и форма* – задания, относящиеся к пространственным и плоским геометрическим формам, отношениям, т. е. к геометрическому материалу.

3. *Количество* – задания, связанные с числами и отношениями между ними, в программах по математике этот материал чаще всего относится к курсу арифметики.

4. *Неопределенность и данные* – задания охватывают вероятностные и статистические явления и зависимости, которые являются предметом изучения разделов статистики и вероятности.

Мыслительная деятельность. При описании этой деятельности используются следующие глаголы: *формулировать, применять и*

интерпретировать. Они указывают на мыслительные действия, которые будут выполнять учащиеся:

- формулировать ситуацию на языке математики;
- применять математические понятия, факты, процедуры;
- интерпретировать, использовать и оценивать математические результаты.

Необходимо также отметить, что в концепции PISA 2021¹⁰ (очередное исследование перенесено на 2022 год) говорится, что в оценке математической грамотности необходимо учитывать растущую роль компьютеров как в повседневной жизни, так и в контекстах задач на проверку математической грамотности. Возрастает роль умения строить математические модели, которые можно было бы использовать для решения задач как самим человеком, так и с помощью компьютеров.

Учитывая сказанное, при определении уровня математической грамотности планируется оценивать навыки для XXI в.:

- критическое мышление;
- креативность;
- умение исследовать;
- самостоятельность, инициативность, настойчивость;
- пользование информацией;
- системное мышление;
- коммуникацию;
- рефлексивность.

Успешная реализация этой концепции не только требует от любого учителя высокой квалификации в своей предметной области, но и быть «современным» человеком, понимающим жизненные и технические тенденции современного общества. Все это создает определенные трудности при подготовке уроков,

¹⁰ PISA 2021. Mathematics Framework Draft. – OECD, 2018. URL: <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>

нацеленных на формирование математической грамотности.

Основные методы, примененные в настоящем исследовании, это анализ педагогического опыта учителей математики, анализ структуры задач на математическую грамотность, методы решения задач, основанные на математическом моделировании.

В рамках научно-исследовательской работы над проблемой формирования математической грамотности нами было проведено анкетирование учителей математики основной и средней школы, в котором приняли участие более 100 респондентов.

Результаты исследования

Россия принимает участие в исследовании PISA с 2003 года. Целью этого исследования является оценка подготовки учащихся 15-летнего возраста по шести направлениям, к которым относится и математика. Следует отметить, общие результаты (средние баллы) выполнения заданий на математическую грамотность российскими учащимися из года в год повышаются, но тем не менее остаются невысокими. Это продемонстрировано результатами оценки за 2018 год на следующих диаграммах (рис. 2, 3)¹¹.



PISA–2018. Результаты РФ. Общий балл



Рис. 2. Результаты оценки математической грамотности PISA-2018 по РФ
Fig. 2. Results of the PISA-2018 mathematical literacy assessment in the RF

¹¹ Функциональная грамотность: глобальные компетенции: Отчет по результатам международного исследования PISA-2018. URL: <https://fioco.ru/fioko-news/глобальные-компетенции-pisa-2018>



Результаты РФ. Уровни МГ

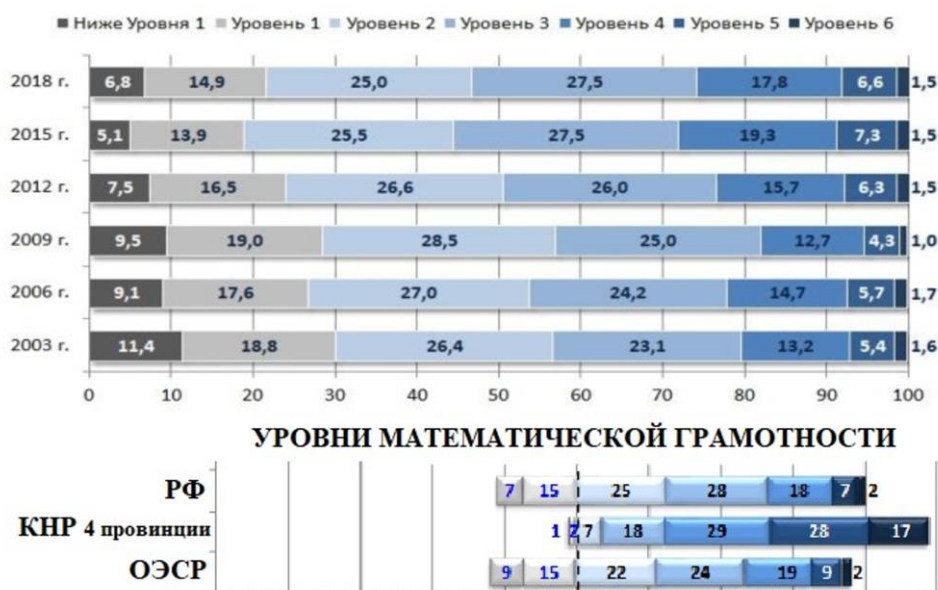


Рис. 3. Результаты оценки математической грамотности PISA-2018 по РФ. Уровни МГ

Fig. 3. Results of the PISA-2018 mathematical literacy assessment in the RF. Mathematical literacy Levels

Одновременно с участием в международных исследованиях TIMSS и PISA в России, как и в других странах, усилилось внимание к проблеме развития математической грамотности, этому посвящен ряд публикаций последних лет [24; 25; 26]. Изучение результатов исследования показало, что существенному повышению уровня математической грамотности способствует специальная работа с учащимися, основанная на систематическом выполнении заданий, ориентированных на формирование математической грамотности учащихся.

В рамках научно-исследовательской работы над проблемой формирования математической грамотности нами было проведено анкетирование учителей математики основной и средней школы, в котором приняли участие более 100 респондентов. На вопрос «Формируете ли вы математическую грамотность школьников на своих уроках?» подавляющее большинство ответило положительно. Были

перечислены темы различных разделов школьного курса математики, при изучении которых учителя пытаются формировать соответствующие умения и навыки с помощью практико-ориентированных задач. К таким темам относятся:

- «Решение текстовых, практико-ориентированных задач»;
- «Проценты»;
- «Дроби и действия с ними»;
- «Пропорция и отношения»;
- «Периметр, площадь и объемы»;
- «Понятие функции. Свойства и графики функций»;
- «Арифметическая и геометрическая прогрессии»;
- «Площади и объемы геометрических фигур»;
- «Треугольники и их свойства. Равенство и подобие треугольников»;
- «Четырехугольники и их свойства»;

– «Производная функции и ее применение. Физический и геометрический смысл производной»;

– «Графики функций и их свойства»;

– «Задачи на оптимизацию, с экономическим содержанием».

Однако, по мнению многих опрошенных, специальных заданий, которые были бы непосредственно направлены на формирование математической грамотности, в учебниках практически нет. Источников дополнительной литературы с такими заданиями явно недостаточно. Все учителя указывают на дефицит специальных заданий, подходов, методик, которые могут формировать математическую грамотность обучающихся.

Таким образом, исходя из результатов, продемонстрированных российскими школьниками в исследовании PISA-2018, а также опираясь на мнение школьных учителей математики, можно указать на следующие практические проблемы формирования математической грамотности школьников:

– недостаточное количество заданий, направленных на математическую грамотность;

– дефицит подходов к разработке заданий на математическую грамотность;

– отсутствие описания методических приемов по формированию математической грамотности школьников.

Анализ результатов оценки математической грамотности российских школьников, описанных в отчете PISA-2018, разработка фундаментальных основ формирования математической грамотности позволяют выявить особенности заданий, предназначенных для формирования и оценки математической грамотности. Опишем основные особенности таких заданий.

1. Школьникам предлагаются контекстуальные задачи, в которых изложены практические проблемные ситуации, разрешаемые средствами математики. Контекст, в рамках которого предложена проблема, является жизненным, лежит в зоне ближних интересов обучающегося. Описываемые в задачах ситуации являются характерными для повседневной учебной и внеучебной жизни обучающихся (например, связаны с личными, социальными или производственными проблемами).

2. Чтобы выполнить задание, обучающемуся необходимо холистическое, т. е. целостное, а не фрагментарное, применение математики. Это означает, что требуется осуществить полный процесс работы над задачей: погружение в проблему, включая формулирование проблемы математическим языком, поиск и осуществление ее решения, изложение и оценка результата, – а не только часть этого процесса (например, решить уравнение или преобразовать алгебраическое выражение).

3. Мыслительная деятельность, осуществляемая при решении проблемы, через анализ, синтез и обобщение должна включать формулирование, применение, интерпретацию, оценивание.

4. Структура задания состоит из описания ситуации (введения в проблему), за которой следуют связанные с ней вопросы. Введение в проблему представляет собой небольшой вводный текст мотивирующего характера. Информация, сообщаемая в задании, может быть дана в различных формах: числовой, текстовой, графической (график, диаграмма, схема, изображение и др.), и даже в форме видеоролика. Различные средства визуализации математического содержания проблемы окажут учащимся помощь на этапе ее моделиро-

вания и приведут в итоге к составлению математической модели при проведении рассуждений.

5. Если вводный текст содержит термины, которые могут быть не известны учащимся, то необходимо дать краткое пояснение, определение и/или иллюстрацию к ним, а также ссылку на источник, где можно найти пояснение к таким терминам.

6. Вопрос задания ставится таким образом, чтобы его формулировка мотивировала на отыскание поиска решения проблемы и при этом не содержала прямого указания на способ этого поиска. Отсутствие прямых указаний на правило или алгоритм выполнения (решения) позволяет проверить, насколько осознанно учащиеся применяют полученные знания, умения и навыки.

7. Предполагается, что обучающиеся могут использовать информационные технологии, позволяющие находить справочную информацию, проводить построение заданных математических объектов, переносить на плоскости заданные объекты, выполнять вычисления и др.

Опираясь на фундаментальные основы формирования математической грамотности, а также на основные подходы к составлению заданий, авторами были разработаны модели, связывающие между собой различные области содержания математики и контекстные направления, порождающие проблемные ситуации. Они представляют собой структурированные схемы, содержащие не менее трех уровней. Первый уровень – это описание раздела или содержательной линии школьного курса математики, включающей указание на возраст (класс) обучения. Второй уровень включает перечисление тем (модулей) каждого раздела и/или описание индикаторов знаний, умений и навыков, которые могут встре-

титься в реальных жизненных ситуациях и которые напрямую или косвенно связаны с этой темой. Третий уровень содержит перечисление сфер деятельности человека, в которых требуется применение математических знаний, например: общественная жизнь, личная жизнь, образование / профессиональная деятельность, научная деятельность. Блоки сфер деятельности укрупнены и составлены условно, при желании могут быть структурированы иначе. Между каждыми уровнями проведены стрелки, показывающие возможные связи, которые служат контекстуальной основой, содержащей проблемную ситуацию, для разработки задания, направленного на формирование математической грамотности.

Таким образом, *одно из возможных направлений создания или разработки задач на математическую грамотность – это опора на разработанные модельные схемы.*

Подобные модельные схемы существенно облегчают процесс разработки заданий на математическую грамотность и позволяют учителю включать подобные задачи в процесс обучения математике на различных этапах.

Разработка схем основана на анализе тематических линий школьного курса математики и мнений школьных учителей о тех разделах математики, в которых возможно формирование математической грамотности. Для того чтобы задания на математическую грамотность могли быть гармонично встроены в программу школьного курса математики и отвечали при этом своей обучающей цели, были разработаны модельные схемы. Схемы позволяют, во-первых, выявить более ярко те контекстные ситуации проблемного характера, которые являются для школьников того или иного возраста наиболее актуальными, жизненными, а во-вторых, максимально полно

охватить задачами предметные линии школьного курса математики, вписывая в них всевозможные контекстные ситуации.

Например, модельные схемы по темам «Дроби» и «Рациональные числа», приведенные на рисунках 4 и 5 соответственно, разработаны для школьников 5–6 классов (11–13 лет). Схемы помогают ориентироваться, по

каким темам школьного курса математики соответствующего класса и в каких контекстных ситуациях могут быть разработаны задачи, направленные на формирование математической грамотности учащихся этого возраста.



Рис. 4. Модельная схема «Дроби»

Fig. 4. “Fractions” model diagram

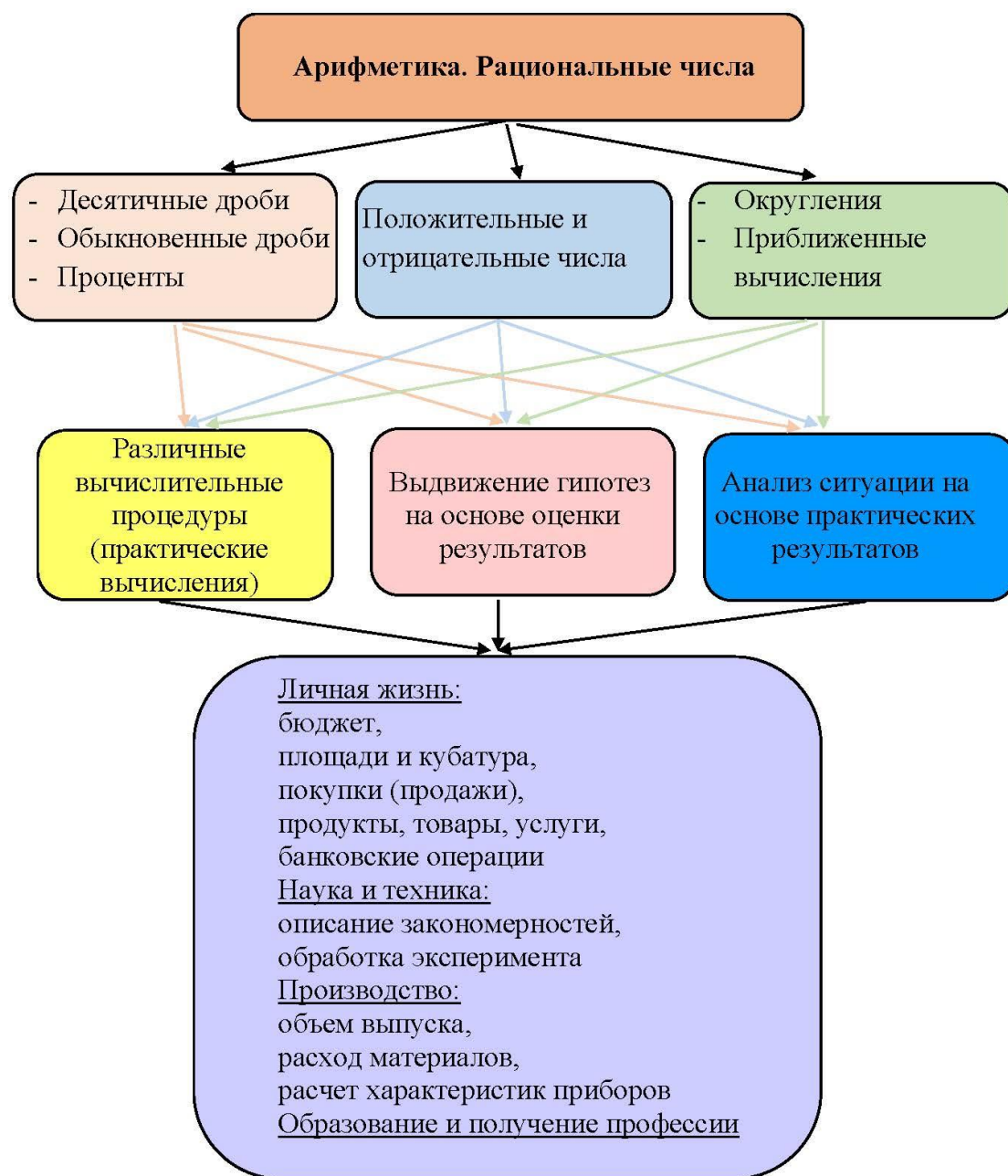


Рис. 5. Модельная схема «Рациональные числа»

Fig. 5. «Rational Numbers» model diagram

Модельная схема по разделу «Геометрия» (рис. 6) максимально полно охватывает основные геометрические темы 7–11 классов и показывает широкий диапазон контекстов задач по геометрии для форми-

рования математической грамотности. Модельная схема по теме «Функция», приведенная на рисунке 7, позволяет наметить пути создания задач на изучение функций и их свойств.

Геометрия

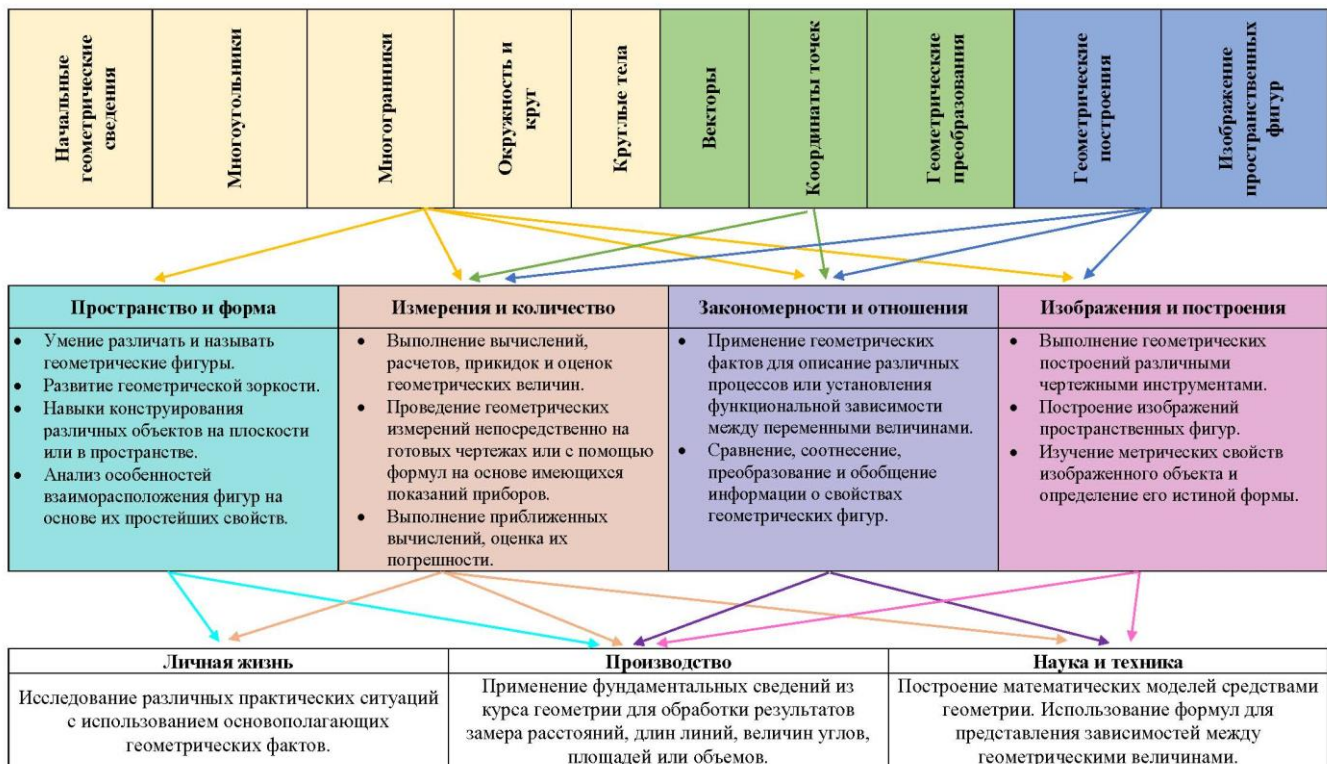


Рис. 6. Модельная схема «Геометрия»

Fig. 6. «Geometry» model diagram

Тематический раздел «Функция» курса алгебры и начал анализа 7-9 классов



Рис. 7. Модельная схема по разделу «Функция» (7-9 классы)

Fig.7. «Function» model diagram

Приведем примеры задач на формирование математической грамотности, составленные по разработанным схемам.

Дача

Семья в выходные запланировала выезд на дачу на своем автомобиле, которая находится в 90 км от дома по Ленинградскому шоссе. Чтобы поездка была успешной, надо к ней заранее подготовиться и все предусмотреть.

Задание 1. Отъехав от дома, папа заметил, что датчик уровня бензина машины показывает заполнение бака на $1/5$ (при условии, что бак машины вмещает 40 л бензина).

Вопрос 1. Помогите папе. Хватит ли этого бензина для того, чтобы доехать до дачи и обратно домой, если на 100 км тратится 10 л?

Вопрос 2. Семья планировала использовать на заправку машины в пути не больше 500 р., при условии, что 1 л бензина стоит 45 р. Хватит ли семье отложенных денег для заправки необходимого количества бензина?

Вопрос 3. Узнайте из источников, как влияет скорость автомобиля на расход бензина в дороге.

Дорожка в саду

Семья Марины любит проводить время на даче. Каждый член семьи находит занятие по душе. Мама любит разводить цветы. Марина часто помогает маме. А папа занимается благоустройством участка. Этой весной папа поставил новый забор и перенес калитку в новое место. В этой ситуации потребовалось проложить новую дорожку.

Задание. На садовом участке в точках А и В посажены розовые кусты, а в точке С находится калитка (рис. 8).

Вопрос. Как проложить от калитки прямолинейную дорожку, параллельную розовым кустам?

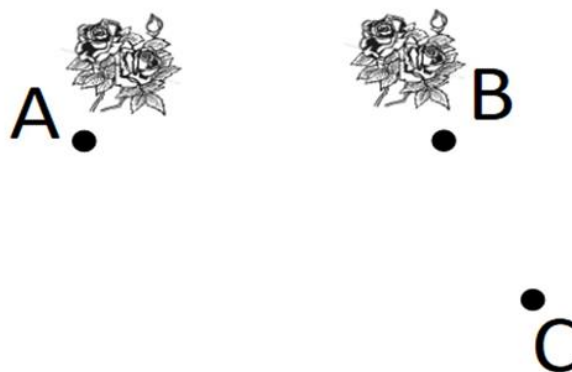


Рис. 8. Дорожка в саду
Fig. 8. Garden Path

Опираясь на зарубежные и отечественные исследования по формированию математической грамотности, можно утверждать, что основой этого процесса является проблемный подход. Однако изначально проблема не должна быть математической, а должна вытекать из окружающей нас действительности. При этом основная роль учителя состоит в том, чтобы научить обучающихся увидеть в жизненной проблеме количественные связи, сформулировать возникшую проблему на языке математики и, решив уже математическую задачу, дать обоснованное решение возникшей проблеме. Таким образом, еще одним главным аспектом концепции формирования математической грамотности является цикл моделирования (формулировать, применять, интерпретировать и оценивать). Поэтому еще одной рекомендацией при разработке задач на математическую грамотность является *реализация в ходе решения таких задач полного цикла математического моделирования*. Продемонстрируем это на следующей задаче.

Строительство дома

Семья решила построить деревянный загородный дом. Для возведения второго этажа потребовались прочные балки прямоугольного сечения. Чтобы получить балки с гарантированной прочностью, глава семьи решил

заказать эти балки вытесать из цилиндрических бревен радиуса R , но перед ним возникла проблема: «Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R , чтобы ее прочность была наибольшей?» Глава семейства попросил своего сына, Мишу, учащегося 11 класса, помочь решить эту проблему. В интернете они вычитали, что прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Миша сказал отцу, что этой информации достаточно, чтобы ответить на поставленный вопрос.

Задание 1. Повторите рассуждения Миши, которые позволят сформулировать ответ на поставленный вопрос.

Задание 2. Сформулируйте обоснованный ответ Миши на вопрос его папы: «Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R , чтобы ее прочность была наибольшей?»

Задание 3. Вычислите размеры осевого сечения балки, если в мастерской, где отец Миши их заказал, были бревна диаметра 20 см. Кроме того, найдите долю объема древесины, которая ушла в отходы, если на изготовление балок пошло 10 бревен длиной 6 м. При вычислениях примите $\sqrt{2} \cong 1,4$; $\sqrt{3} \cong 1,7$. Значения ширины и длины округлите до десятых долей и запишите в сантиметрах. Долю древесины запишите в процентах целым числом. Объем вычисляйте в кубических сантиметрах.

Приведем решение последней задачи для случая, если ее решает ученик, изучающий математику на углубленном уровне.

Задание 1.

Анализ проблемы. Поскольку в данной ситуации речь идет о прочности, основной характеристикой исследуемой проблемы является прочность балки. Миша обозначил эту ве-

личину буквой y . Известно, что прочность зависит от ширины и высоты прямоугольника, служащего осевым сечением балки. В качестве независимой переменной он выбрал ширину балки и обозначил ее буквой x . Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R (рис. 9), то $0 \leq x \leq 2R$ (при $x = 0$ и при $x = 2R$ прямоугольник «вырождается» в отрезок, равный диаметру окружности) – таковы реальные границы изменения независимой переменной: $x \in [0; 2R]$. Кроме того, высоту сечения прямоугольной балки он обозначил буквой h .

Построение математической модели. Введенные три параметра связаны между собой теоремой Пифагора. В результате Миша получил следующее выражение для определения параметра h :

$$h^2 = 4R^2 - x^2. \quad (1)$$

Далее, используя информацию, полученную из интернета, он записывает связь между прочностью балки y и параметрами x , h : $y = kxh^2$, где k – коэффициент пропорциональности. Учитывая выражение (1), им была получена следующая функциональная зависимость, связывающая прочность балки с шириной x :

$$y = kx(4R^2 - x^2). \quad (2)$$

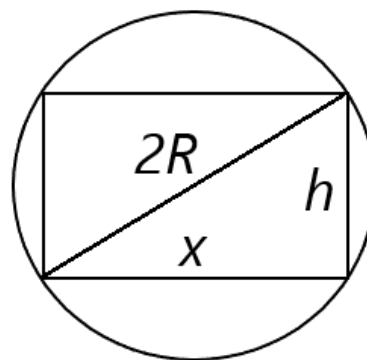


Рис. 9. Сечение балки

Fig. 9. Beam Section

Поскольку главу семейства интересуют балки максимальной прочности, то математическая задача, которая дает ответ на поставленный вопрос, может быть сформулирована так:

$$y_{max} = \max_{x \in [0, 2R]} kx(4R^2 - x^2). \quad (3)$$

Соотношение (3) представляет математическую модель рассматриваемой ситуации.

Реализация математической модели.

В силу того, что функция (2) определена и непрерывна на отрезке $[0; 2R]$, то по второй теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего наименьшего и наибольшего значения на рассматриваемом отрезке. Следовательно, задача (3) разрешима, и Миша может воспользоваться алгоритмом поиска наибольшего (наименьшего) значения заданной функции, состоящий из следующих шагов.

1. *Вычисление производной y'* , так как в точках локального максимума (минимума) по теореме Ферма, производная обращается в ноль: $y' = 4R^2 k - 3kx^2$.

2. *Отыскание стационарных точек*, в которых производная обращается в ноль: $4R^2 k - 3kx^2 = 0$. Отсюда следует:

$x_1 = 2R \sqrt{\frac{1}{3}}$ и $x_2 = -2R \sqrt{\frac{1}{3}}$. Так как наибольшее значение функции $y(x)$ ищется на отрезке $[0; 2R]$, то следует выбрать первую найденную точку, т. е. $x_1 = 2R \sqrt{\frac{1}{3}}$.

3. *Доказательство того, что точка x_1 является точкой максимума*. Для этого можно воспользоваться каким-либо достаточным признаком существования локального максимума, например проверкой знака значения второй производной в стационарной точке. В рассматриваемой ситуации:

$y'' = -6kx = -12kR \sqrt{\frac{1}{3}} < 0$, так как $k > 0$, $R > 0$. Это означает, что в точке x_1 функция $y(x)$ имеет локальный максимум. Остается

проверить значения функции на концах рассматриваемого отрезка: $y(0) = 0$ и $y(2R) = 0$, а значение функции в точке x_1 будет равно следующей величине

$$y(x_1) = kx_1(4R^2 - x_1^2) = \frac{16kR^3}{3\sqrt{3}} > 0.$$

4. *Формулировка решения математической задачи (3)*. Учитывая результаты предыдущего шага, Михаил сформулировал решение задачи (3) так: «Максимальное значение функции (2) на отрезке $[0; 2R]$ достигается в точке $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ и равно $y_{max} = \frac{16kR^3}{3\sqrt{3}}$ ».

Кроме развернутого ответа в ответ запишите максимальную величину прочности балки y_{max} , если $k = \frac{0.001\sqrt{3}\pi}{\text{см}^3}$, $R = 15\text{см}$, без указания размерности: 18.

Задание 2. Сформулируйте обоснованный ответ Миши на вопрос его папы: «Какое сечение должна иметь балка, вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R , чтобы ее прочность была наибольшей?»

Ответ. Осевым сечением балки является прямоугольник, поэтому для ответа на поставленный вопрос необходимо дать значения ширины и высоты прямоугольника. Миша определил, что прочность балки будет наибольшей, если ширина сечения равна $x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, а вы-

сота $h = \sqrt{4R^2 - x_1^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = 2R \sqrt{\frac{2}{3}}$,

т. е. $h = 2R \sqrt{\frac{2}{3}}$. Таким образом, независимо от диаметра, балка будет обладать максимальной прочностью, если осевое сечение балки имеет высоту и ширину такие, что их отношение ($h : x_1 = \sqrt{2}$) равно $\sqrt{2}$.

Ответ Миши: «Сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$ ».

Задание 3. Вычислите размеры осевого сечения балки, если в мастерской, где отец Миши их заказал, были бревна диаметром 20 см. Кроме того, найдите долю объема древесины, которая ушла в отходы, если на изготовление балок пошло 10 бревен длиной 6 м. При вычислениях примите $\sqrt{2} \cong 1.4$; $\sqrt{3} \cong 1.7$. Значения ширины и длины округлите до десятых долей и запишите в сантиметрах. Долю древесины запишите в процентах целым числом. Объем вычисляйте в кубических сантиметрах. Ответ запишите в виде таблицы:

Ширина сечения балки, x_1 , см	Высота сечения балки, h , см	Доля древесины, ушедшая в отходы, δ %
11.8	16.5	38

Ответ. Находим высоту:

$$h = 2R \sqrt{\frac{2}{3}} = 20 * \frac{1.4}{1.7} = 16.5 \text{ см}; \text{ находим ширину: } x_1 = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{20}{1.7} = 11.8 \text{ см}.$$

Обозначим V_1 – объем одного бревна; V_2 – объем одной балки; δ – доля объема древесины, которая ушла в отходы; V – объем древесины, ушедшей в отходы.

$$\text{Очевидно, что } \delta = \frac{V_1 - V_2}{V_1} * 100 \text{ \%}.$$

Вычислим

$$V_1 = \pi R^2 * 600 = 3.14 * 100 * 600 = 88400 \text{ см}^3 ; \\ V_2 = 16.5 * 11.8 * 600 = 116820 \text{ см}^3 , \text{ тогда } \delta \cong 38 \text{ \%} . \text{ Теперь можно подсчитать} \\ V = 10 * (V_1 - V_2) = \frac{\delta V_1}{10} \cong 715920 \text{ см}^3 .$$

Обсуждение, заключение

В формировании математической грамотности основной упор сделан не на овладение предметными умениями, а на умение разглядеть в обычной ситуации возможности применения математики, умение перевести

проблемную ситуацию в математическую модель, а затем уже исследование полученной модели математическими средствами. Согласно такому подходу, основное внимание нужно уделять развитию способностей обучающихся использовать математические знания в разнообразных ситуациях, требующих для своего решения различных подходов, размышлений и интуиции. Очевидно, что для этого необходимо иметь значительный объем математических знаний и умений, которые не сводятся к знанию математических фактов, терминологии, стандартных методов и умению выполнять стандартные действия и использовать определенные методы.

Для формирования математической грамотности важно:

- помнить о системности формируемых математических знаний, о необходимости теоретической базы, так как без знаний невозможно применение;
- формировать готовность к взаимодействию с математической стороной окружающего мира: через опыт и погружение в реальные ситуации;
- учить математическому моделированию реальных ситуаций и переносить способы решения учебных задач на реальные, создавать опыт поиска путей решения жизненных задач;
- развивать когнитивную сферу, учить познавать окружающий мир, развивать стремление к познанию;
- предлагать решать задачи разными способами;
- развивать регулятивную сферу и рефлексивную: учить планировать деятельность, конструировать алгоритмы (вычисления, построения и пр.), контролировать процесс и результат, выполнять проверку на соответствие исходным данным и правдоподобие, коррекцию и оценку результата деятельности.



Разработанные модельные схемы позволяют значительно расширить банк заданий, которые можно предлагать обучающимся при формировании математической грамотности. Они являются опорными при разработке таких заданий, так как явно прослеживаются взаимосвязи между контекстными областями, мате-

матическим содержанием и мыслительной деятельностью обучающегося. Авторами выявлены основные подходы к разработке заданий, предназначенных для формирования математической грамотности, опирающиеся на модельные схемы и процесс математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubinsky E. Mathematical Literacy and Abstraction in the 21st Century // *School Science and Mathematics*. – 2000. – Vol. 100 (6). – P. 289–297. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb17322.x>
2. Kilpatrick J. Understanding Mathematical Literacy: The Contribution of Research // *Educational Studies in Mathematics*. – 2001. – Vol. 47 (1). – P. 101–116. DOI: <https://doi.org/10.2307/3483255>
3. Solomon Y. *Mathematical Literacy: Developing Identities of Inclusion*. – New York: Routledge, 2009. DOI: <https://doi.org/10.4324/9780203889275>
4. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited // *Educational Studies in Mathematics*. – 2019. – Vol. 102 (1). – P. 9–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
5. Craig J. The promises of numeracy // *Educational Studies in Mathematics*. – 2018. – Vol. 99. – P. 57–71. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9824-5>
6. Gal I., Grotlüschen A., Tout D., Kaiser G. Numeracy, adult education, and vulnerable adults: a critical view of a neglected field // *ZDM - International Journal on Mathematics Education*. – 2020. – Vol. 52 (3). – P. 377–394. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01155-9>
7. Weiland T. Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies // *Educational Studies in Mathematics*. – 2017. – Vol. 96 (1). – P. 33–47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
8. Ozkale A., Erdogan E. O. An analysis of the interaction between mathematical literacy and financial literacy in PISA // *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. – 2020. – Vol. 51 (8). – P. 1–21. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1842526>
9. Sole M. A. Interdisciplinary Thinking: Financial Literacy Crosses Disciplinary Boundaries // *PRIMUM: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. – 2021. – Vol. 31 (2). – P. 153–166. DOI: <https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1639228>
10. Geraniou E., Jankvist U. T. Towards a definition of “mathematical digital competency” // *Educational Studies in Mathematics*. – 2019. – Vol. 102 (1). – P. 29–45. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8>
11. Gabriel F., Signolet J., Westwell M. A machine learning approach to investigating the effects of mathematics dispositions on mathematical literacy // *International Journal of Research & Method in Education*. – 2018. – Vol. 41 (3). – P. 306–327. DOI: <https://doi.org/10.1080/1743727X.2017.1301916>
12. Gabriel F., Buckley S., Barthakur A. The impact of mathematics anxiety on self-regulated learning and mathematical literacy // *Australian Journal of Education*. – 2020. – Vol. 64 (3). – P. 227–242. DOI: <https://doi.org/10.1177/0004944120947881>
13. Hiller S. E., Kitsantas A., Cheema J. E., Poulou M. Mathematics anxiety and self-efficacy as predictors of mathematics literacy // *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. – 2021. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1868589>



14. Genc M., Erbas A. K. Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Mathematical Literacy // *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. – 2019. – Vol. 7 (3). – P. 222–237. URL: <https://ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/611/179>
15. Arslan C., Yavuz G. A study on mathematical literacy self-efficacy beliefs of prospective teachers // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. – 2012. – Vol. 46. – P. 5622–5625. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.484>
16. Bolstad O. H. Secondary teachers' operationalisation of mathematical literacy // *European Journal of Science and Mathematics Education*. – 2020. – Vol. 8 (3). – P. 115–135. DOI: <https://doi.org/10.30935/scimath/9551>
17. Umbara U., Suryadi D. Re-Interpretation of Mathematical Literacy Based on the Teacher's Perspective // *International Journal of Instruction*. – 2019. – Vol. 12 (4). – P. 789–806. DOI: <https://doi.org/10.29333/iji.2019.12450a>
18. Sevinc S., Lesh R. Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modelling-based teacher education courses // *ZDM – International Journal on Mathematics Education*. – 2018. – Vol. 50 (1–2). – P. 301–314. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>
19. Jablonka E. The evolvement of numeracy and mathematical literacy curricula and the construction of hierarchies of numerate or mathematically literate subjects // *ZDM – International Journal on Mathematics Education*. – 2015. – Vol. 47 (4). – P. 599–609. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0691-6>
20. Steiner G. Mathematical Literacy for the Non-mathematician // *Nature*. – 1973. – Vol. 243. – P. 65–67. DOI: <https://doi.org/10.1038/243065a0>
21. Hector J. H. A Mastery Approach to Mathematical Literacy // *The Two-Year College Mathematics Journal*. – 1975. – Vol. 6 (2). – P. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.2307/3026462>
22. Pugalee D. K. Constructing a Model of Mathematical Literacy // *The Clearing House. A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*. – 1999. – Vol. 73 (1). – P. 19–22. DOI: <https://doi.org/10.1080/00098659909599632>
23. Stacey K. The PISA View of Mathematical Literacy in Indonesia // *Journal on Mathematics Education*. – 2011. – Vol. 2. – P. 95–126. DOI: <https://doi.org/10.22342/jme.2.2.746.95-126>
24. Денищева Л. О., Краснянская К. А., Рыдзе О. А. Подходы к составлению заданий для формирования математической грамотности учащихся 5-6 класса // *Отечественная и зарубежная педагогика*. – 2020. – Т. 2, № 2. – С. 181–201. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44358182>
25. Лукичева Е. Ю. Математическая грамотность: обзор понятия и методики формирования // *Непрерывное образование*. – 2020. – № 3. – С. 46–53. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44164311>
26. Рослова Л. О., Квитко Е. С., Денищева Л. О., Карамова И. И. Проблема формирования способности "применять математику" в контексте уровней математической грамотности // *Отечественная и зарубежная педагогика*. – 2020. – Т. 2, № 2. – С. 74–99. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44358177>



Larisa Olegovna Denischeva

Candidate of Pedagogical Sciences, Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9270-6200>
E-mail: DenischevaLO@mgpu.ru

Natalya Viktorovna Savintseva

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5281-4597>
E-mail: SavintsevanV@mgpu.ru

Ildar Sufiyanovich Safuanov

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-6580-0653>
E-mail: SafuanovIS@mgpu.ru

Andrei Vladimirovich Ushakov

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7665-2086>
E-mail: UshakovAV@mgpu.ru

Vladimir Arkadevich Chugunov

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6754-4083>
E-mail: CHugunovVA@mgpu.ru

Yulia Aleksandrovna Semenyachenko

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor,
Department of Mathematics and Physics,
Moscow City University, Moscow, Russian Federation.
ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9522-9040>
E-mail: SemenyachenkoUA@mgpu.ru (Corresponding Author)

Peculiarities of formation and assessment of schoolchildren's mathematical literacy

Abstract

Introduction. The study investigates the problem of developing mathematical literacy. The purpose of the article is to reveal the specifics of developing and assessing schoolchildren's mathematical literacy.



Materials and Methods. The research is based on the concept and model of mathematical literacy defined for the OECD Programme for International Student Assessment (PISA). The main research methods include an analysis of mathematics teachers' experiences and an analysis of the structure of mathematical literacy tasks.

Results. The article presents an analysis of the conceptual foundations of developing schoolchildren's mathematical literacy. The authors identified and structured the characteristic features of the tasks aimed at forming mathematical literacy, described the main approaches to their development, based on the use of model schemes and mathematical modeling. The links between the contexts of real-life situations and the content areas of the school mathematics course were traced. The complete process of working with mathematical models is illustrated by tasks arising in life situations. The authors revealed the main approaches to the development of tasks, designed to form mathematical literacy, based on the model schemes and the process of mathematical modeling.

Conclusions. In conclusion, the authors summarize stages of designing mathematical literacy tasks and the requirements to the approaches of their development. The conclusion is made about the possibility of using model schemes as a reference for mathematical literacy tasks.

Keywords

Mathematical literacy; Contextual tasks; Mathematical models; Model schemes; Problem situation; Problem approach; content lines of mathematics; Mathematical modeling.

REFERENCES

1. Dubinsky E. Mathematical literacy and abstraction in the 21st Century. *School Science and Mathematics*, 2000, vol. 100 (6), pp. 289–297. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb17322.x>
2. Kilpatrick J. Understanding mathematical literacy: The contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 2001, vol. 47 (1), pp. 101–116. DOI: <https://doi.org/10.2307/3483255>
3. Solomon Y. *Mathematical Literacy: Developing Identities of Inclusion*, New York: Routledge, 2009. DOI: <https://doi.org/10.4324/9780203889275>
4. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 2019, vol. 102 (1), pp. 9–28. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
5. Craig J. The promises of numeracy. *Educational Studies in Mathematics*, 2018, pp. 57–71. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9824-5>
6. Gal I., Grotlüschen A., Tout D., Kaiser G. Numeracy, adult education, and vulnerable adults: A critical view of a neglected field. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 2020, vol. 52 (3), pp. 377–394. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01155-9>
7. Weiland T. Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 2017, vol. 96 (1), pp. 33–47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
8. Ozkale A., Erdogan E. O. An analysis of the interaction between mathematical literacy and financial literacy in PISA. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2020, vol. 51 (8), pp. 1–21. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1842526>
9. Sole M. A. Interdisciplinary thinking: Financial literacy crosses disciplinary boundaries, *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 2021, vol. 31 (2), pp. 153–166. DOI: <https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1639228>



10. Geraniou E., Jankvist U. T. Towards a definition of “mathematical digital competency”. *Educational Studies in Mathematics*, 2019, vol. 102 (1), pp. 29–45. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09893-8>
11. Gabriel F., Signolet J., Westwell M. A machine learning approach to investigating the effects of mathematics dispositions on mathematical literacy. *International Journal of Research & Method in Education*, 2018, vol. 41 (3), pp. 306–327. DOI: <https://doi.org/10.1080/1743727X.2017.1301916>
12. Gabriel F., Buckley S., Barthakur A. The impact of mathematics anxiety on self-regulated learning and mathematical literacy. *Australian Journal of Education*, 2020, vol. 64 (3), pp. 227–242. DOI: <https://doi.org/10.1177/0004944120947881>
13. Hiller S. E., Kitsantas A., Cheema J. E., Poulou M. Mathematics anxiety and self-efficacy as predictors of mathematics literacy. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1868589>
14. Genc M., Erbas A. K. Secondary mathematics teachers’ conceptions of mathematical literacy. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 2019, vol. 7 (3), pp. 222–237. URL: <https://ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/611/179>
15. Arslan C., Yavuz G. A study on mathematical literacy self-efficacy beliefs of prospective teachers. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2012, vol. 46. pp. 5622–5625. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.484>
16. Bolstad O. H. Secondary teachers' operationalisation of mathematical literacy. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2020, vol. 8(3), pp. 115–135. DOI: <https://doi.org/10.30935/scimath/9551>
17. Umbara U., Suryadi D. Re-interpretation of mathematical literacy based on the teacher's perspective. *International Journal of Instruction*, 2019, vol. 12 (4), pp. 789–806. DOI: <https://doi.org/10.29333/iji.2019.12450a>
18. Sevinc S., Lesh R. Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modelling-based teacher education courses. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 2018, vol. 50 (1–2), pp. 301–314. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>
19. Jablonka E. The evolvement of numeracy and mathematical literacy curricula and the construction of hierarchies of numerate or mathematically literate subjects. *ZDM – International Journal on Mathematics Education*, 2015, vol. 47 (4), pp. 599–609. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0691-6>
20. Steiner G. Mathematical literacy for the non-mathematician. *Nature*, 1973, vol. 243, pp. 65–67. DOI: <https://doi.org/10.1038/243065a0>
21. Hector J. H. A Mastery Approach to Mathematical Literacy. *The Two-Year College Mathematics Journal*, 1975, vol. 6 (2), pp. 22–27. DOI: <https://doi.org/10.2307/3026462>
22. Pugalee D. K. Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House. A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, 1999, vol. 73 (1), pp. 19–22. DOI: <https://doi.org/10.1080/00098659909599632>
23. Stacey K. The PISA View of mathematical literacy in Indonesia. *Journal on Mathematics Education*, 2011, vol. 2, pp. 95–126. DOI: <https://doi.org/10.22342/jme.2.2.746.95-126>
24. Denishcheva L. O., Krasnyanskaya K. A., Rydze O. A. Approaches to drafting assignments for mathematical literacy of 5th-6th grade students. *Domestic and Foreign Pedagogy*, vol. 2 (2), pp. 181–201. (In Russian) URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44358182>



25. Lukicheva E. Yu. Mathematical literacy: An overview of the concept and methodology of formation. *Lifelong Education*, 2020, no. 3, pp. 46–53. (In Russian) URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44164311>
26. Roslova L. O., Kvitko E. S., Denishcheva L. O., Karamova I. I. The problem of forming the ability to “apply mathematics” in the context of levels of mathematical literacy. *Domestic and Foreign Pedagogy*, vol. 2 (2), pp. 74–99. (In Russian) URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44358177>

Submitted: 30 May 2021

Accepted: 10 July 2021

Published: 31 August 2021



This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. (CC BY 4.0).