Новосибирский государственный
педагогический университет

Г.М. СЕРЕГИН

МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ И УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Новосибирск
Издательство НИПКиПРО
2020

УДК 372.016:51*05/07
ББК 74.262.21-24я7
С 325.

Рецензенты:

Е.А. Рудакова, кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры математического образования НИПКиПРО,

Н.А. Бурова, кандидат педагогических наук, доцент,
доцент кафедры геометрии и методики обучения математике НГПУ

С 325 **Серегин, Г.М.**

Магические квадраты на внеклассных занятиях и уроках математики: учебно-методическое пособие / Г.М. Серегин. – Новосибирск: Изд-во НИПКиПРО, 2020. – 52 с.

ISBN 978-5-87847-748-2

В методическом пособии рассмотрены вопросы истории возникновения и способы составления магических квадратов. На конкретных примерах сложения и вычитания алгебраических выражений алгебры 7 класса показывается, как можно разработать дидактические материалы по математике на основе свойств магических квадратов.

Для учителей средних учебных заведений, студентов и магистрантов педагогических вузов.

УДК 372.016:51*05/07
ББК 74.262.21-24я7

Учебное издание

Серегин Григорий Михайлович
Магические квадраты
на внеклассных занятиях
и уроках математики

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 03.03.2020. Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсет № 1.
Гарнитура Times. Печать RISO. Усл. печ. л. 3,03. Тираж 50 экз. Заказ № 6.

Издательство НИПКиПРО. 630007, г. Новосибирск, Красный пр., 2.
Тел.: (383) 223-56-96. E-mail: iio99@mail.ru.

ISBN 978-5-87847-750-5

Предисловие

На уроках математики и внеклассных занятиях учащимся 5-6 классов часто предлагают задания на числовые конструкции: готовые построения из чисел или такие, которые могут из них быть построены. Деятельность учащихся при выполнении таких заданий состоит либо в поиске условия, на котором построена конструкция, либо в поиске создания такой числовой конструкции. К заданиям на числовые конструкции, в частности, относятся следующие:

– поиск записи некоторого числа с помощью нескольких одинаковых чисел, знаков арифметических действий и скобок;

– поиск записи некоторого числа из цифр данного многозначного числа с помощью знаков арифметических действий и скобок;

– поиск закономерности построения числовой последовательности или таблицы чисел.

К заданиям предыдущего вида можно отнести задания на составление магических квадратов или на заполнении в магическом квадрате пустых клеток. Упражнения на сложение и вычитание натуральных чисел в форме магического квадрата, в котором некоторые клетки пустые и требуется найти недостающие числа, можно встретить на страницах учебников математики 5-6 классов.

В предлагаемом пособии достаточно подробно рассматриваются вопросы, связанные с магическими квадратами. История появления и различные способы построения магических квадратов могут быть рассмотрены на занятиях математического кружка. В основе содержания этой части пособия лежат соответствующие разделы книги Б.А. Кордемского «Занимательная математика» [3]. Упражнения на сложение и вычитание алгебраических выражений, представленные в последней части пособия, можно использовать на уроках закрепления и проверки усвоения учебного материала 7 класса. На конкретных примерах показано, как составить упражнения, при выполнении которых используются свойства магических квадратов. Такой приём составления дидактических материалов может быть использован, в частности, в тех разделах школьной математики, где изучаются действия сложения и вычитания с натуральными, целыми, дробными, иррациональными числами и выражениями.

1. История появления магических квадратов

Магический квадрат – это квадратная таблица из чисел, в которой суммы чисел вдоль любой строки, любого столбца и любой из двух главных диагоналей равны одному и тому же числу.

Магический квадрат – древнекитайского происхождения. В древнекитайской рукописи Же-Ким (XII-XII вв. до н.э.) рассказано предание о том, что во времена правления императора Ию из вод Жёлтой реки (реки Хуанхэ) всплыла священная черепаха. На панцире черепахи был изображён таинственный рисунок из белых и чёрных кружков (рис.1). Эта таблица известна под названием Ло-шу. В рисунке была найдена удивительная закономерность. Её открытие произвело столь неизгладимое впечатление, что символ стали считать священным.

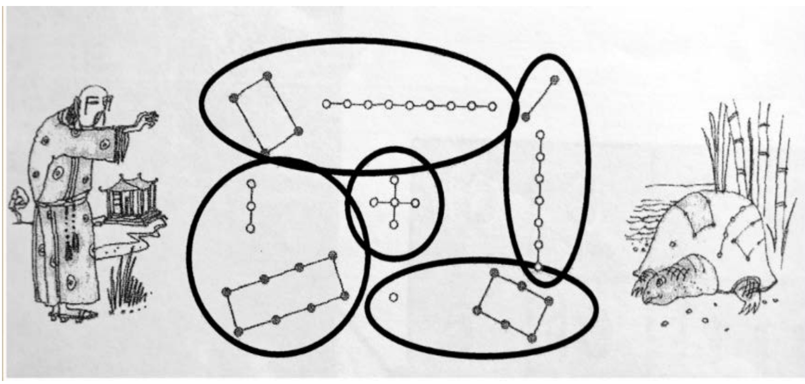

Рис.1

В старейшем в мире магическом квадрате китайцев чёрными кружками изображены чётные (женственные) числа, а белыми – нечётные (мужественные числа). Цифра 5 в середине квадрата означала землю, а вокруг неё в строгом равновесии располагались огонь (2 и 7), вода (1 и 6), дерево (3 и 8), металл (4 и 9). Девять порядковых чисел размещены в девяти клетках квадрата так, что суммы чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одинаковы и равны 15 (рис. 2).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис.2

Следующие по времени сведения о магических квадратах дошли до нас из Индии и Византии. Вот один из таких древнеиндийских памятников двухтысячелетней давности (рис.3):

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис.3

Европейцев с магическими квадратами познакомил в начале XV века византийский писатель Э. Мосхопулос. А в начале XVI века один из них был увековечен выдающимся немецким художником, гравёром и немного математиком Альбрехтом Дюрером в его гравюре «Меланхолия» (рис.4).

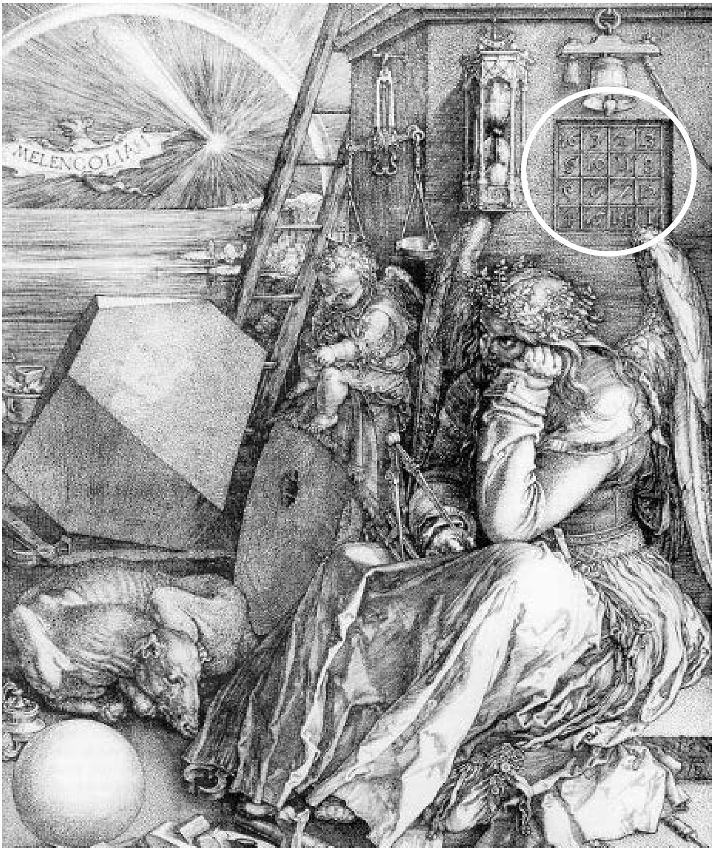

Рис.4

На этой гравюре магический квадрат (рис.5) помещён в правом верхнем углу (на рисунке он обведён кружком) и может быть получен преобразованием приведённого выше древнеиндийского магического квадрата. В нём сумма чисел по каждой строке, каждому столбцу и двум диагоналям равна 34. Это число называется постоянной или константой магического квадрата. Средние числа в нижней строке (15 и 14) означают дату 1514 – год издания этой гравюры Альбрехта Дюрера.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис.5

Этот магический квадрат обладает и другими замечательными свойствами. Укажем некоторые из них.

1. Сумма чисел, стоящих в углах этого квадрата, а также сумма чисел в каждом из маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам данного квадрата, и в таком же центральном квадрате тоже одинаковы и каждая из них равна 34, т.е. константе этого квадрата (рис.6). Такие квадраты, в отличие от обычных магических квадратов, можно назвать *волшебными* или *сверхмагическими*.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис.6

2. В каждой его строке есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 15, и ещё пара рядом стоящих чисел, сумма которых 19.

3. Сумма квадратов чисел, стоящих в двух крайних строках квадрата, и сумма квадратов чисел, стоящих в двух средних, будут равными. Аналогичным свойством обладают и столбцы этого квадрата

4. Если в данный квадрат вписать ещё один квадрат с вершинами, расположенными в серединах сторон данного квадрата, то сумма чисел, расположенных вдоль одной пары противоположных сторон вписанного квадрата, равна сумме чисел, расположенных вдоль другой пары противоположных его сторон, и каждая из этих сумма равна константе данного квадрата. Более того, равны между собой суммы квадратов и суммы кубов этих чисел.

5. Если все столбцы магического квадрата сделать строками, сохраняя их чередование, то есть, числа первого столбца в той же последовательности расположить в виде первой строки, числа второго столбца в виде второй строки и т.д., то квадрат останется магическим с теми же его свойствами.

6. Если поменять местами отдельные строки или столбцы магического квадрата, то некоторые свойства могут исчезнуть, а другие появиться. Так, если поменять местами первую и вторую строки данного квадрата, то получим новый квадрат, у которого суммы чисел вдоль строк и столбцов не изменились, но суммы чисел вдоль диагоналей стали другими, не равными константе квадрата. Такой магический квадрат называется неполным или полумагическим.

Продолжая обменивать местами строки и столбцы квадрата, будем получать всё новые и новые магические и полумагические квадраты из 16 чисел.

Магическим квадратам приписывали различные мистические свойства. В XVI веке Корнелий Генрих Агриппа построил квадраты 3-9 порядков, которые были связаны с астрологией семи планет. Бытовало поверье, что выгравированный на серебре магический квадрат защищает от чумы. Даже сегодня среди атрибутов европейских прорицателей можно увидеть магические квадраты.

Способами составления магических квадратов занимались многие математики: в XVI веке А. Ризе и М. Штифель, в XVII веке А. Кирхер и Баше де Мезериак. Теорией магических квадратов занимался французский математик Делаир. Для составления магических квадратов с нечётным числом клеток имеется очень простой общий способ. Для составления же магических квадратов с чётным числом клеток все имеющиеся способы значительно сложнее.

В XIX и XX вв. интерес к магическим квадратам вспыхнул с новой силой. Их стали исследовать с помощью методов высшей алгебры. В настоящее время понятия магических квадратов обобщены (расширены) в различных направлениях. В частности, под магическим квадратом понимают квадратные таблицы, заполненные не обязательно первыми натуральными и последовательными числами.

Легко видеть, что из любого магического квадрата можно получить бесконечное множество других магических квадратов путём умножения всех его чисел на одинаковый множитель или прибавлением к ним одного и того же слагаемого.

Приведём ещё два магических квадрата, состоящие из 16 и 9 клеток и заполненные натуральными (не подряд) числами. Постоянная для одного из них равна 77 (рис.7), а другого – 105 (рис.8). Эти два квадрата представляют особенный интерес как в смысле трудности их составления, так и в смысле законов распределения простых чисел. Если все числа этих квадратов умножить на 10, а затем ко всем числам большего из них прибавить 7, а ко всем числам меньшего прибавить 9, то получатся снова магические квадраты, заполненные только одними простыми числами, и притом различными (не повторяющимися). Постройте получившиеся новые квадраты самостоятельно.

26	23	56
65	35	5
14	47	44

Рис.7

36	13	22	6
3	25	10	39
4	27	15	31
34	12	30	1

Рис.8

2. Способы построения магических квадратов

Каждый элемент магического квадрата называется клеткой. Квадрат, сторона которого состоит из n клеток, содержит n^2 клеток и называется квадратом n-го порядка.

В большинстве магических квадратов используются первые n последовательных натуральных чисел. Сумма S чисел, стоящих в каждой строке, каждом столбце и на любой диагонали, называется постоянной квадрата. Так как сумма всех чисел в магическом квадрате вычисляется по формуле суммы арифметической прогрессии: $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$, то постоянная квадрата k будет равна $k = \frac{n(n^2+1)}{2}$, при этом $n \geq 3$.

Зависимость постоянной квадрата от его порядка можно проследить с помощью таблицы (рис.9):

n	3	4	5	6	7	8	9
k	15	34	65	111	175	260	369

Рис.9

Две диагонали, проходящие через центр квадрата, называются главными диагоналями. Ломаной называется диагональ, дойдя до края квадрата, продолжается параллельно первому отрезку от противоположного края (такую диагональ образуют заштрихованные клетки на рис.10). Клетки, симметричные относительно центра квадрата, называются кососимметричными. Таковы, например, клетки a и b на рис.10.

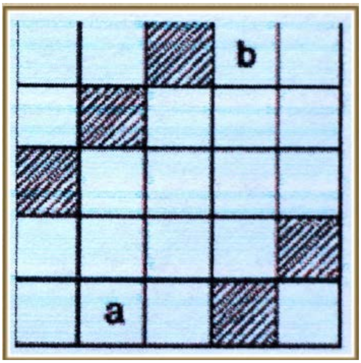

Рис.10

Рассмотрим решение задания на магический квадрат, которое было предложено Н.К. Антоновичем в книге «Когда кончается урок математики» [2].

Задание 1. В квадрате пятого порядка расставьте натуральные числа от 1 до 25 включительно, чтобы получился магический квадрат (на рис.11 в клетках вместо чисел стоят буквы латинского алфавита, которые следует заменить соответствующими числами).

A	***B***	***C***	***D***	***E***
F	***G***	***H***	***I***	***K***
L	***M***	***N***	***O***	***P***
Q	***R***	***S***	***T***	***U***
V	***W***	***X***	***Y***	***Z***

Рис.11

При этом необходимо соблюдать следующие условия:

1) По диагонали AZ числа представляют собой арифметическую прогрессию с разностью 1.

2) По диагонали EV должна быть такая же прогрессия, но с разностью 5.

3) $K + P = H$, где K, P, H – квадраты натуральных чисел.

4) C и X имеют вид $4a - 1$, где a – натуральное число.

Решение. Постоянная квадрата пятого порядка равна 65 (рис. 9).

В соответствии с первым условием запишем формулу суммы арифметической прогрессии: $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Так как $S = 65$, $d = 1$, $n = 5$, то $a_1 = 11$. Тогда последовательно получим:

$$A = a_1 = 11, \quad G = 12, \quad N = 13, \quad T = 14, \quad Z = 15.$$

По второму условию $N = 13$ является одновременно и членом арифметической прогрессии EV с разностью 5, то $I = 8$, $E = 3$, $R = 18$, $V = 23$.

Для K, P и H, являющихся квадратами некоторых натуральных чисел, выполняется равенство $K + P = H$, значит, должна существовать такая тройка чисел, сумма квадратов двух из них должна равняться квадрату третьего числа. Но число H не может быть больше 25 по условию задачи, поэтому пифагорова тройка в данном случае – это (3,4,5) и, отсюда, либо $K = 9$, $P = 16$, $H = 25$, либо $K = 16$, $P = 9$, $H = 25$. В первом случае сумма чисел, стоящих во второй строке, будет равна 9 + 8 + 25 + 12 = 54. Учитывая постоянную квадрата, равную 65, получим, что оставшееся число $F = 11$, что невозможно, т.к. $A = 11$. Значит остаётся второй случай и тогда $F = 4$.

Числа, удовлетворяющие четвёртому условию, образуют следующую возрастающую последовательность: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, … . В искомом квадрате чисел, больших 25, быть не должно, кроме того, числа 3, 11, 15 и 23 уже стоят в квадрате. Поэтому остаются 7 и 19.

Если $X = 7$, а $C = 19$, то $V + X + Z = 23 + 7 +$ $+ 15 = 45$, значит, сумма чисел, стоящих в двух оставшихся пустых клетках равна 20. Это могут быть следующие пары чисел: (1;19), (2;18), (3;17), (4;16), (5;15), (6;14), (7;13), (8;12), (9;11) и (10;10). Последняя пара исключается, так как одинаковые числа быть не должны. Во всех других парах имеются числа, которые уже стоят в квадрате. Поэтому $X = 19$, а $C = 7$. Учитывая постоянную квадрата, в третьем столбце находим $S = 1$, а в пятом столбце $U = 22$. Тогда в четвёртой строке $Q = 10$, а в первом столбце $L = 17$. Искомый квадрат стал выглядеть так (рис.12):

11	B	**7**	D	**3**
4	**12**	**25**	**8**	**16**
17	M	**13**	O	**9**
10	**18**	**1**	**14**	**22**
23	W	**19**	Y	**15**

Рис. 12

Остались не вставленными следующие числа: 2, 5, 6, 20, 21, 24. В верхней строке сумма чисел $B + D = 44$, из оставшихся чисел это могут быть только числа 20 и 24. Если $B = 20$, то $M + W = 15$. Но из оставшихся чисел такую сумму получить нельзя. Поэтому остаётся $B = 24$, а $D = 20$.

В пятой строке сумма $W + Y = 8$, это могут быть только 2 и 6. Если $Y = 6$, то $O = 17$, из оставшихся чисел такая сумма не получится, поэтому $Y = 2$, $W = 6$. Отсюда, учитывая постоянную квадрата, получим, что во втором столбце $M = 5$, $O = 21$. Магический квадрат с указанными свойствами построен (рис.13).

11	**24**	**7**	**20**	**3**
4	**12**	**25**	**8**	**16**
17	**5**	**13**	**21**	**9**
10	**18**	**1**	**14**	**22**
23	**6**	**19**	**2**	**15**

Рис.13

Правила построения магических квадратов делятся на три категории в зависимости от того, каков порядок квадрата: нечётен, равный удвоенному нечётному числу или равен учетверённому нечётному числу. Общий метод построения всех квадратов неизвестен, хотя широко применяются различные схемы, некоторые из которых мы рассмотрим ниже.

2.1. Магические квадраты нечётного порядка

2.1.1. Индийский (Сиамский) метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называется также сиамским) является, по-видимому, самым древним алгоритмом построения магических квадратов произвольного нечётного порядка $n = 2m + 1$. Рассмотрим построение этим методом магического квадрата 7-го порядка.

Первое число 1 следует поместить в середину верхней строки.

Далее будем вписывать числа по порядку по восходящей диагонали. Как только число выходит за пределы квадрата, сразу перенесём его в эквивалентную ячейку внутри квадрата, как это произошло с числом 2 (рис.14).

	31	40	49	2	11	20	
30	39	48	1	10	19	28	30
38	47	7	9	18	27	29	38
46	6	8	17	26	35	37	46
5	14	16	25	34	36	45	5
13	15	24	33	42	44	4	13
21	23	32	41	43	3	12	21
22	31	40	49	2	11	20	

Рис.14

Затем, поднимаясь вверх по восходящей диагонали, доходим до края квадрата, и число 5 будет уже за границей квадрата. Его переносим по горизонтальной строке в левый конец строки и вновь поднимаемся по восходящей вверх. Клетка после числа 7 занята числом 1, поэтому опускаемся на клетку вниз (под число 7) и ставим в эту клетку число 8. Заметим, что число 7 является порядком квадрата. Снова поднимаемся по восходящей диагонали вверх, число 11 уже выходит за границу квадрата, поэтому её записываем в нижней клетке этого столбца. Дойдя до числа *kn*, то есть до числа кратного порядку квадрата, пишем следующее число снизу от только что записанного числа, как это сделали с числом 7, и снова записываем числа по восходящей диагонали. Такой «прыжок вниз» будет после чисел 14, 21, 28, 35 и 42. Полученный квадрат является магический, его константа равна 175.

Приведём построение магического квадрата 9-го порядка (рис.15). Его константа, найденная по вышеприведённой формуле равна 369.

	48	**59**	**70**	**81**	**2**	**13**	**24**	**35**	
47	58	69	80	**1**	12	23	34	**45**	**47**
57	68	79	**9**	11	22	33	44	**46**	**57**
67	78	8	**10**	21	32	43	**54**	56	**67**
77	7	**18**	20	31	42	53	**55**	66	**77**
6	17	**19**	30	41	52	**63**	65	76	**6**
16	**27**	29	40	51	62	**64**	75	5	**16**
26	**28**	39	50	61	**72**	74	4	15	**26**
36	38	49	60	71	**73**	3	14	25	**36**
37	**48**	**59**	**70**	**81**	**2**	**13**	**24**	**35**	

Рис.15

Числа, вышедшие за границу квадрата справа и сверху, и затем перемещённые в крайний левый столбец таблицы и крайнюю нижнюю строку квадрата соответственно, записаны более крупным и полужирным шрифтом. Выделены так же числа, кратные порядку квадрата, т.е. числа вида $9n$, и числа, которые сразу следуют за числами указанного вида.

Задание 1. Постройте с помощью индийского (сиамского) метода магические квадраты 5-го и 11-го порядков. По указанной выше формуле найдите константу магического квадрат 11-го порядка.

2.1.2. Метод Баше (метод террас)

Этот метод построения магических квадратов нечётного порядка был разработан французским математиком XVII века Баше де Мезериаком. Он заключается в следующим.

				1				
			2		6			
		3		7		11		
	4		8		12		16	
5		9		13		17		21
	10		14		18		22	
		15		19		23		
			20		24			
				25				

Рис.16.

Исходный квадрат временно дополняется до симметричной ступенчатой фигуры со ступеньками в одну клетку. В полученной фигуре располагаем по порядку косыми рядами сверху вниз налево (или направо) натуральные числа, начиная с числа 1 (см. рис.16). Все числа, оказавшиеся внутри квадрата, оставляем на месте. Каждое число, оказавшееся вне квадрата, переносим внутрь квадрата вдоль той же строки или того же столбца ровно на столько клеток, каков порядок этого квадрата.

Так, например, для квадрата пятого порядка, изображённого на рис.16 число 1 перемещается на 5 единиц вниз в клетку под числом 13, число 4 – вправо на 5 единиц в клетку за число 12, число 21 – влево в клетку за число 13, а 20 – в клетку вверх за число 8. В результате получится магический квадрат, изображённый на рис.17. (Сравните его с магическим квадратом на рис.13.)

3	20	7	24	11
16	8	25	12	4
9	21	13	5	17
22	14	1	18	10
15	2	19	6	23

Рис.17.

Константой этого квадрата является число 65. Заметим, что этот квадрат, кроме основного свойства, присущего всем магическим квадратам, обладает и дополнительным свойством: все пары чисел, расположенные симметрично относительно центральной клетки, дают одинаковые суммы, равные 26. Магические квадраты, обладающие таким свойством, называются симметрическими. Симметрическим является и выше построенный магический квадрат 9-го порядка (рис.15).

Этот метод террас можно использовать для решения заданий занимательного характера вида: составить магический квадрат пятого порядка, если все различные буквы, стоящие в клетках левого крайнего столбца этого квадрата, образуют некоторое слово, например, слово «число». Приведём решение этого задания (рис.18 и рис.19).

				ч				
			ч		и			
		ч		и		с		
	ч		и		с		л	
ч		и		с		л		о
	и		с		л		о	
		с		л		о		
			л		о			
				о				

Рис.18

ч	л	и	о	с
л	и	о	с	ч
и	о	с	ч	л
о	с	ч	л	и
с	ч	л	и	о

Рис.19

Непосредственное применение метода привело к полумагическому квадрату. Выполним перестановку строк: третью строку сделаем второй, пятую – третьей, вторую – четвёртой, а четвёртую – пятой. Получится магический квадрат, левый столбец которого образует слово «число» (рис.20).

ч	**л**	**и**	**о**	**с**
и	**о**	**с**	**ч**	**л**
с	**ч**	**л**	**и**	**о**
л	**и**	**о**	**с**	**ч**
о	**с**	**ч**	**л**	**и**

Рис.20.

Можно было сразу переставить строки местами так, чтобы в левом крайнем столбце получилось требуемое слово. А можно было переставлять столбцы так, чтобы в крайней верхней строке получилось слово «число» (рис.21). В обоих случаях мы воспользовались свойствами строк и столбцов магических квадратов.

ч	**и**	**с**	**л**	**о**
л	**о**	**ч**	**и**	**с**
и	**с**	**л**	**о**	**ч**
о	**ч**	**и**	**с**	**л**
с	**л**	**о**	**ч**	**и**

Рис.21

Аналогично решается и построение любого магического квадрата, строка (или столбец) которого состоит из нечётного числа различных букв, образующих некоторое слово. Приведём построение магического квадрата, крайняя верхняя строка которого состоит из букв, образующих слово «вершина» (рис.22).

						В						
					В		Е					
				В		Е		Р				
			В	И	Е	Н	Р	А	Ш			
		В	И	Е	Н	Р	А	Ш	В	Н		
	В		Е	Н	Р	А	Ш	В	И		Н	
В		Е	Н	Р	А	Ш	В	И	Е	Н		А
	Е		Р	А	Ш	В	И	Е	Н		А	
		Р	А	Ш	В	И	Е	Н	Р	А		
			Ш	В	И	Е	Н	Р	А			
				И		Н		А				
					Н		А					
						А						

Рис.22

В получившемся квадрате переставим столбцы так, чтобы буквы верхней крайней строки образовывали слово «вершина» (рис.23 а).

В	**Е**	**Р**	**Ш**	**И**	**Н**	**А**
И	**Н**	**А**	**В**	**Е**	**Р**	**Ш**
Е	**Р**	**Ш**	**И**	**Н**	**А**	**В**
Н	**А**	**В**	**Е**	**Р**	**Ш**	**И**
Р	**Ш**	**И**	**Н**	**А**	**В**	**Е**
А	**В**	**Е**	**Р**	**Ш**	**И**	**Н**
Ш	**И**	**Н**	**А**	**В**	**Е**	**Р**

Рис.23 а.

Замечание

Обратим внимание на важную особенность расположения букв на рис.21. Во второй строке слово «число» вписано с 3-й клетки, а те буквы, которые не поместились, перенесены в начало строки. В третьей строке это слово начинается с 5-й клетки, а четыре оставшиеся буквы также перенесены в начало строки. В четвёртой строке слово «число» начинается со 2-й клетки, а в пятой строке – с 4-й.

Эту же особенность построения таких заданий можно заметить и в магическом квадрате на рис.23 а, если его записать в таком виде (рис.23 б):

В	Е	Р	Ш	И	Н	А
Н	А	**В**	Е	Р	Ш	И
Ш	И	Н	А	**В**	Е	Р
Е	Р	Ш	И	Н	А	**В**
А	**В**	Е	Р	Ш	И	Н
И	Н	А	**В**	Е	Р	Ш
Р	Ш	И	Н	А	**В**	Е

Рис.23 б.

В этом случае в первые четыре строки слово «вершина» вписывается с нечётных клеток: 1, 3, 5 и 7, а в следующие три – с чётных: 2, 4 и 6. Такой метод решения задач подобного типа можно назвать «***методом сдвига***». Если теперь вместо слова «число» взять набор из пяти *любых различных* натуральных чисел, то используя метод сдвига можно составить числовой магический квадрат пятого порядка.

Другими словами, методом сдвига можно составить магический квадрат произвольного нечётного порядка $n = 2m + 1$, в котором число различных чисел, не только натуральных, а также букв или иных знаков равно $2m + 1$, т.е. порядку искомого магического квадрата.

Задание 2. Постройте с помощью метода Баше (метода террас) магические квадраты 7-го и 9-го порядков. Сравните их с уже построенными индийским методом такими квадратами (рис.11 и рис.12). Какой из методов предпочтительней и почему?

Задание 3. Постройте методом террас и методом сдвига магические квадраты, состоящие из букв, входящих в слова «конус», «цифра», «сфера», «циркуль», «диаметр», «треугольник». Приведите примеры других слов, являющихся математическими терминами, состоящими из нечётного числа различных букв, и постройте магические квадраты.

2.2. Магические квадраты чётного порядка

2.2.1. Квадраты порядка, кратного четырём или чётно-чётного порядка. Метод Рауз-Болла

Для составления магического квадрата порядка $n = 4, 8, 12, \dots 4k$ удобна следующая схема:

1) разместить числа в клетках заданного квадрата в порядке их возрастания (в натуральном порядке);

2) выделить по углам заданного квадрата четыре квадрата со сторонами $\frac{n}{4}$ и в центре один квад-

рат со стороной $\frac{n}{2}$ (например, как это сделано на рис.24 а);

3) в пяти выделенных квадратах поменять местами числа, расположенные симметрично относительно центра заданного квадрата; это значит, что в натуральном расположении чисел квадрата четвёртого порядка надо поменять местами 1 и 16, 4 и 13, 6 и 11, 7 и 10 (рис.24 б). Остальные числа оставить на своих местах.

1	2	3	**4**
5	**6**	**7**	8
9	**10**	**11**	12
13	14	15	**16**

Рис.24 а

16	2	3	**13**
5	**11**	**10**	8
9	**7**	**6**	12
4	14	15	**1**

Рис.24 б

Квадрат, полученный на рис.24 б, практически аналогичен магическому квадрату, изображённому на гравюре А. Дюрера (см. рис.4 и рис.5).

В схеме составления магического квадрата, представленной выше, можно числа, стоящие в пяти выделенных квадратах, оставить на месте, а в остальных четырёх прямоугольниках поменять местами числа, расположенные симметрично относительно центра квадрата. В результате также получится магический квадрат.

Применим метод Рауз-Болла при построении магического квадрата 8-го порядка. Числа в исходном квадрате, расположенные в выделенных пяти квадратах, записаны полужирным (рис.25 а).

1	**2**	3	4	5	6	**7**	**8**
9	**10**	11	12	13	14	**15**	**16**
17	18	**19**	**20**	**21**	**22**	23	24
25	26	**27**	**28**	**29**	**30**	31	32
33	34	**35**	**36**	**37**	**38**	39	40
41	42	**43**	**44**	**45**	**46**	47	48
49	**50**	51	52	53	54	**55**	**56**
57	**58**	59	60	61	62	**63**	**64**

Рис.25 а

64	**63**	3	4	5	6	**58**	**57**
56	**55**	11	12	13	14	**50**	**49**
17	18	**46**	**45**	**44**	**43**	23	24
25	26	**38**	**37**	**36**	**35**	31	32
33	34	**30**	**29**	**28**	**27**	39	40
41	42	**22**	**21**	**20**	**19**	47	48
16	**15**	51	52	53	54	**10**	**9**
8	**7**	59	60	61	62	**2**	**1**

Рис.25 б

В натуральном расположении чисел квадрата восьмого порядка (рис.25 а) надо поменять местами 1 и 64, 10 и 55, 2 и 63, 9 и 56, 19 и 46, 28 и 37, 20 и 45, 27 и 38, 21 и 44 и т.д. (рис.25 б).

Квадраты, составленные по указанной схеме, будут всегда магическими симметрическими.

Задание 5. Используя рассмотренный выше метод Рауз-Болла, составьте магический квадрат 12-го порядка.

2.2.2. Квадраты чётного порядка, не кратного четырём. Метод М. Штифеля и формулы Л. Бибербаха

Для построения квадратов порядка n = 6, 10, 14, … 4k+2, наиболее предпочтительным является метод «рамок», разработанный ещё в 1544 г. М. Штифелем. Он заключается в том, что любым способом составляется магический квадрат порядка $n - 2$ (т.е. кратного четырём), затем составленный квадрат вставляется в рамку, вместе с которой образуется магический квадрат требуемого порядка n. Таким способом магические квадраты 4-го и 8-го порядков могут быть достроены до магических квадратов соответственно 6-го, 10-го порядков, и т.д. Этот метод можно распространить на квадраты нечётного порядка: из квадратов 3-го порядка образовать квадрат 4-го порядка и т.д.

Покажем, как можно составить магический квадрат 6-го порядка. Для этого вначале заполним рамку, которая должна содержать внутри себя любой магический квадрат 4 порядка. В этой рамке должны стоять 20 чисел: 4 числа по углам и по 4 числа на каждой из сторон рамки. Для нахождения этих чисел воспользуемся методом немецкого математика Л. Бибербаха (1954 г.).

В первую очередь расположим в рамке первые $2n-2$ натуральных числа, т.е. числа от 1 до 10. Числа 1 и 2 поместим в левый и правый верхние углы рамки соответственно. Для оставшихся восьми чисел воспользуемся формулами Бибербаха. Для чётного n вверху и внизу рамки должны располагаться те числа из последовательности 1, 2, 3, …, $2n$-2, которые подбираются соотношением

$$a+b+\left(\overline{\frac{n-4}{2}}\right)_{\text{в}}=\left(\overline{\frac{n}{2}}\right)_{\text{н}}.$$

Остальные числа из этой же последовательности располагаются слева и справа в соответствии с требованием:

$$a-b+\left(\overline{\frac{n-2}{2}}\right)_{\text{л}}=\left(\overline{\frac{n-2}{2}}\right)^{*}_{\text{п}}.$$

Числа a и b назначаются из условия, что $a<b$ и $a+b$ не делится на 2. Из оставшихся чисел указанной последовательности подбираем столько

слагаемых, сколько указывает число, стоящее под чертой.

Так как числа 1 и 2 уже заняли свои места, то для оставшихся восьми чисел формулы Бибербаха примут вид: $3 + (\bar{1})_{\text{в}} = (\bar{3})_{\text{н}}$ и $-1 + (\bar{2})_{\text{л}} = (\bar{2})_{\text{п}}^{*}$. Это значит, что числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 надо разбить на четыре группы. В одну группу выделяется одно число, во вторую – три, в третью – два и в четвёртую – остальные два. Из указанных восьми чисел первой формуле удовлетворяет число 9 и сумма 3+4+5; для второй формулы – суммы чисел 6+10 и 7+8. Эти числа и поместим в нашу рамку так, как это сделано на рис.26.

1	**9**	34	33	32	**2**
6					31
10					27
30					**7**
29					**8**
35	28	**3**	**4**	**5**	36

Рис.26

Заметим, что эти числа, выделенные другим цветом, расположены так, чтобы соответствующие клетки на другой стороне рамки были пустыми. Оставшиеся незанятые клетки заполняются числами, дополняющие уже записанные до числа, равного $n^2 + 1$, в данном случае до числа 37. Эти числа занимают клетки на противоположных сторонах рамки. Так, например, против числа 7 будет стоять число 30, против числа 9 – число 28. В левом нижнем углу будет число 35, а в правом нижнем углу – число 36 (рис.26). Рамка для магического квадрата 6-го порядка заполнена.

Возьмём теперь любой магический квадрат 4-го порядка, например, магический квадрат А. Дюрера (рис.5) и увеличим все числа на 10, т.е. на $2n - 2$. Получим новый магический квадрат (рис. 27) и вставим его в заполненную нами рамку для магического квадрата 6 порядка. Магический квадрат 6-го порядка готов (рис.27). Его константа равна 111.

1	**9**	34	33	**32**	**2**
6	26	13	12	23	31
10	15	20	21	18	27
30	19	16	17	22	**7**
29	14	25	24	11	**8**
35	28	**3**	**4**	**5**	36

Рис.27.

Задание 6. Составьте магический квадрат 10-го порядка

Решение. Выполнение этого задания аналогично составлению квадрата 6-го порядка. Однако потребует значительно большего времени.

Вначале заполним рамку, которая должна содержать внутри себя любой магический квадрат 8 порядка. В этой рамке должны стоять 36 чисел – 4 числа по углам и по 8 чисел на каждой из сторон рамки.

Вначале расположим в рамке первые $2n - 2$ натуральных числа, т.е. числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Числа 1 и 2 поместим в левый и правый верхние углы рамки соответственно. Для оставшихся шестнадцати чисел воспользуемся формулами Бибербаха. Эти формулы, с учётом того, что n = 10, примут вид:

$$3 + (\bar{3})_{\text{в}} = (\bar{5})_{\text{н}} \text{ и } -1 + (\bar{4})_{\text{л}} = (\bar{4})^{*}_{\text{п}}.$$

В первую группу из трёх верхних чисел отнесём числа 16, 17 и 18; их сумма равна 51. Значит сумма пяти нижних чисел из формулы должна быть равной 48. Подбором определяем эти числа: 3 + 9 + 10 + 11 + 15 = 48. Остались такие восемь чисел: 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14. Сумма четырёх чисел на правой стороне рамки должна быть на 1 больше суммы чисел на левой стороне рамки. Так как сумма этих восьми чисел равна 69, то сумма справа равна 34, а слева – 35. Это будут такие суммы: 6 + 7 + 8 + 14 = 35 и 4 + 5 + 12 + 13 = 34.

1	**16**	**17**	**18**	98	92	91	90	86	**2**
6									95
7									94
8									93
14									87
97									**4**
96									**5**
89									**12**
88									**13**
99	85	84	83	**3**	**9**	**10**	**11**	**15**	100

Рис. 28

Таким образом, первые 18 чисел для рамки магического квадрата 10-го порядка выбраны. Остальные числа являются дополнительными к выбранным до числа $n^2 + 1$, т.е. до числа 101. Все эти 36 чисел и поместим в нашу рамку так, как это сделано на рис.28.

Возьмём теперь любой магический квадрат 8-го порядка, например, магический квадрат на рис.22 б. Каждое из его чисел увеличим на $2n - 2$, т.е. на 18 и вставим его в получившуюся рамку (рис.29). Тем самым получен магический квадрат

10-го порядка, константа этого магического квадрата равна 505.

1	**16**	**17**	**18**	**98**	**92**	**91**	**90**	**86**	**2**
6	82	81	21	22	23	24	76	75	**95**
7	74	73	29	30	31	32	68	67	**94**
8	35	36	64	63	62	61	41	42	**93**
14	43	44	56	55	54	53	49	50	**87**
97	51	52	48	47	46	45	57	58	**4**
96	59	60	40	39	38	37	55	56	**5**
89	34	33	69	70	71	72	28	27	**12**
88	26	25	77	78	79	80	20	19	**13**
99	**85**	**84**	**83**	**3**	**9**	**10**	**11**	**15**	**100**

Рис. 29

Возьмём теперь любой магический квадрат 8-го порядка, например, магический квадрат на рис.25 б. Каждое из его чисел увеличим на $2n - 2$, т.е. на 18 и вставим его в получившуюся рамку (рис.29). Тем самым получен магический квадрат 10-го порядка, константа этого магического квадрата равна 505.

Задание 7. Составьте магический квадрат 14-го порядка, используя метод Штифеля и формулы Бибербаха. Вычислите константу этого магического квадрата.

3. Упражнения по алгебре 7 класса, при выполнении которых используются свойства магических квадратов.

Магические и полумагические квадраты можно применять на уроках математики при закреплении учебного материала и проведении самостоятельных и проверочных работ. Это касается прежде всего тех разделов школьной математики, где изучаются сложение и вычитание арифметических и алгебраических выражений: действия с натуральными, целыми, дробными, иррациональными числами и выражениями, а также сложение и вычитание алгебраических выражений. Для составления таких заданий можно воспользоваться формулами магических квадратов 3-го и 4-го порядков, приведённых в книге Б.А. Кордемского «Математическая смекалка» [3].

Покажем на примерах, как можно составить упражнения на сложение и вычитание алгебраических выражений по алгебре 7 класса, при выполнении которых используются свойства магических квадратов.

3.1. Составление магических квадратов 3-го порядка алгебраического содержания

Воспользуемся формулой магического квадрата 3-го порядка, представленной в книге [3]:

$k + x$	$k - x - y$	$k + y$
$k - x + y$	k	$k + x - y$
$k - y$	$k + x + y$	$k - x$

Константа этого квадрата равна $S = 3k$. Используя эту таблицу, составим задания на сложение и умножение алгебраических выражений для учащихся седьмого класса.

Задание 1

Пусть $k = 0{,}5$, тогда постоянная квадрата S равна 1,5 и магический квадрат примет вид:

$x + 0{,}5$	$0{,}5 - x - y$	$0{,}5 + y$
$y - x + 0{,}5$	$0{,}5$	$0{,}5 + x - y$
$0{,}5 - y$	$x + y + 0{,}5$	$0{,}5 - x$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$x + 0{,}5$	$0{,}5 - x - y$	$0{,}5 + y$
		$0{,}5 + x - y$
$0{,}5 - y$		

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$x + 0{,}5$		
$y - x + 0{,}5$	**0,5**	$0{,}5 + x - y$
		$0{,}5 - x$

Задание 2

Пусть $k = 2$, $x = 0{,}3a$; $y = -0{,}7b$; $S = 6$. Магический квадрат примет вид:

$0{,}3a + 2$	$0{,}7b - 0{,}3a + 2$	$2 - 0{,}7b$
$2 - 0{,}7b - 3a$	**2**	$2 - 0{,}7b + 3a$
$0{,}7b + 2$	$0{,}3a - 0{,}7b + 2$	$2 - 3a$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

		$2 - 0{,}7b$
$2 - 0{,}7b - 3a$	**2**	$2 - 0{,}7b + 3a$
$0{,}7b + 2$		

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$0{,}3a + 2$	$0{,}7b - 0{,}3a + 2$	$2 - 0{,}7b$
		$2 - 0{,}7b + 3a$
$0{,}7b + 2$		

Задание 3.

Пусть $k = -3,\ x = -\frac{3}{7}a,\ y = \frac{1}{3}b,\ S = -9.$ Тогда магический квадрат примет вид:

$-\frac{3}{7}a - 3$	$\frac{3}{7}a - \frac{1}{3}b - 3$	$\frac{1}{3}b - 3$
$\frac{3}{7}a + \frac{1}{3}b - 3$	3	$-\frac{3}{7}a - \frac{1}{3}b - 3$
$-\frac{1}{3}b - 3$	$-\frac{3}{7}a + \frac{1}{3}b - 3$	$\frac{3}{7}a - 3$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$-\frac{3}{7}a - 3$	$\frac{3}{7}a - \frac{1}{3}b - 3$	
$\frac{3}{7}a + \frac{1}{3}b - 3$		$-\frac{3}{7}a - \frac{1}{3}b - 3$
$-\frac{1}{3}b - 3$		

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

		$\frac{1}{3}b - 3$
$\frac{3}{7}a + \frac{1}{3}b - 3$	-3	$-\frac{3}{7}a - \frac{1}{3}b - 3$
$-\frac{1}{3}b - 3$		

Задание 4

Пусть $\boldsymbol{k=1}$, $\boldsymbol{x=(a+b)(2a-3b)}$, $\boldsymbol{y=(b-a)(4a-5b)}$, $\boldsymbol{S=3}$. Тогда магический квадрат примет вид:

$\boldsymbol{(a+b)(2a-3b)+1}$	$\boldsymbol{2a^2+8b^2-8ab+1}$	$\boldsymbol{1-(a-b)(4a-5b)}$
$\boldsymbol{1+10ab-6a^2-2b^2}$	$\boldsymbol{1}$	$\boldsymbol{6a^2+2b^2-10ab+1}$
$\boldsymbol{1-(b-a)(4a-5b)}$	$\boldsymbol{1-2a^2-8b^2+8ab}$	$\boldsymbol{1-(a+b)(2a-3b)}$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$\boldsymbol{(a+b)(2a-3b)+1}$	$\boldsymbol{2a^2+8b^2-8ab+1}$	$\boldsymbol{1-(a-b)(4a-5b)}$
$\boldsymbol{1+10ab-6a^2-2b^2}$		
		$\boldsymbol{1-(a+b)(2a-3b)}$

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

		$\boldsymbol{1-(a-b)(4a-5b)}$
$\boldsymbol{1+10ab-6a^2-2b^2}$		
$\boldsymbol{1-(b-a)(4a-5b)}$	$\boldsymbol{1-2a^2-8b^2+8ab}$	$\boldsymbol{1-(a+b)(2a-3b)}$

3.2. Составление магических квадратов 4-го порядка алгебраического содержания

В книге Б.А. Кордемского «Математическая смекалка» [3] приводится следующая формула магического квадрата 4-го порядка (формула Стасевича):

$2z - y$	$y + t - x$	$y + t - z$	$2x - t$
$x + y - z$	x	z	$z + t - x$
$x + y - t$	y	t	$z + t - y$
$2t - x$	$x + z - y$	$x + z - t$	$2y - z$

Константой этого квадрата является выражение $S = x + y + z + t$. На основе этой таблицы можно составлять задания для работы на уроках алгебры в 7 классе. Приведём примеры таких заданий.

Задание 1.

Пусть $t = -3$, $z = 8$, $S = x + y + 5$. Тогда магический квадрат примет вид:

$16 - y$	$y - x - 3$	$y - 11$	$2x + 3$
$x + y - 8$	x	8	$5 - x$
$x + y + 3$	y	-3	$5 - y$
$-6 - x$	$x - y + 8$	$x + 11$	$2y - 8$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

16 – y	***y – x - 3***		***2x + 3***
	x	***8***	***5 – x***
x + y + 3	***y***		
	x – y +8	***x + 11***	

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

16 – y		***y – 11***	***2x + 3***
x + y – 8	***x***		
		– 3	***5 – y***
– 6 – x	***x – y +8***		***2y – 8***

Задание 2.

Пусть t = - 1,1; z = 0,5; x = 0,2a; y = - 0,3b; S = 0,2a – 0,3b – 0,6. Тогда магический квадрат примет вид:

1 + 0,3b	***– 0,2a – 0,3b + 1,1***	***– 0,3b***	***0,4a + 1,1***
0,2a – 0,3b – 0,5	***0,2a***	***0,5***	***– 0,2a – 0,6***
0,2a – 0,3b + 1,1	***– 0,3b***	***– 1,1***	***0,3b – 0,6***
– 2,2 – 0,2a	***0,2a + 0,3b + 0,5***	***0,2a + 1,6***	***– 0,6b – 0,5***

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта.

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

1 + 0,3b	***– 0,2a – 0,3b + 1,1***		***0,4a + 1,1***
	0,2a	***0,5***	***– 0,2a – 0,6***
0,2a – 0,3b + 1,1	***– 0,3b***		
	0,2a + 0,3b + 0,5	***0,2a + 1,6***	

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

1 + 0,3b		***– 0,3b***	***0,4a + 1,1***
0,2a – 0,3b – 0,5	***0,2a***		
		– 1,1	***0,3b – 0,6***
- 2,2 – 0,2a	***0,2a + 0,3b + 0,5***		***– 0,6b – 0,5***

Задание 3.

Пусть $t = 5,\ z = -2,\ x = \frac{2}{3}a,\ y = \frac{4}{9}b,\ S = \frac{2}{3}a + \frac{4}{9}b + 3$. Тогда магический квадрат примет вид:

$-\frac{4}{9}b - 4$	$\frac{4}{9}b - \frac{2}{3}a + 5$	$\frac{4}{9}b + 7$	$\frac{4}{3}a - 5$
$\frac{2}{3}a + \frac{4}{9}b + 2$	$\frac{2}{3}a$	-2	$3 - \frac{2}{3}a$
$\frac{2}{3}a + \frac{4}{9}b - 5$	$\frac{4}{9}b$	5	$3 - \frac{4}{9}b$
$10 - \frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a - \frac{4}{9}b - 2$	$\frac{2}{3}a - 7$	$\frac{8}{9}b + 2$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта:

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

		$\frac{4}{9}b+7$	$\frac{4}{3}a-5$
$\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}b+2$	$\frac{2}{3}a$	-2	$3-\frac{2}{3}a$
	$\frac{4}{9}b$		$3-\frac{4}{9}b$
$10-\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a-\frac{4}{9}b-2$	$\frac{2}{3}a-7$	

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$-\frac{4}{9}b-4$	$\frac{4}{9}b-\frac{2}{3}a+5$		
	$\frac{2}{3}a$		$3-\frac{2}{3}a$
$\frac{2}{3}a+\frac{4}{9}b-5$	$\frac{4}{9}b$	5	$3-\frac{4}{9}b$
		$\frac{2}{3}a-7$	$\frac{8}{9}b+2$

Задание 4.

Пусть $t = -\frac{3}{2}$, $z = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}a$, $y = -\frac{3}{4}b$, $S = \frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b - 1$. Тогда магический квадрат примет вид:

$\frac{3}{4}b + 1$	$-\frac{3}{4}b - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}b - 2$	$a + \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}$	$-1 - \frac{1}{2}a$
$\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}b$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}b - 1$
$-3 - \frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a + 2$	$-\frac{3}{2}b - \frac{1}{2}$

Исходя из этой таблицы, можно предложить на уроке такие два варианта:

Вариант 1. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

		$-\frac{3}{4}b - 2$	$a + \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}$	$-1 - \frac{1}{2}a$
	$-\frac{3}{4}b$		$\frac{3}{4}b - 1$
$-3 - \frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}a + 2$	

Вариант 2. Найдите константу (постоянную) магического квадрата и заполните пустые клетки:

$\frac{3}{4}b+1$	$-\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}$		
	$\frac{1}{2}a$		$-1-\frac{1}{2}a$
$\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b+\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}b$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}b-1$
		$\frac{1}{2}a+2$	$-\frac{3}{2}b-\frac{1}{2}$

3.3. Задание на составление и решение уравнений по выражениям, входящим в магический квадрат

Задание. Найдите x и y, если суммы выражений в каждой строке и в столбце таблицы равны одному и тому же числу [4].

c	**– c – 1**	**x**	**2a – 1**
2b – 3c	**a**	**2(c – b)**	**c – a**
8 – a – b + c	**1 – c**	**b**	**a – c**
3a – 2c	**y**	**a – b**	**– 2 – c**

Из условия задачи можно сделать вывод, что данная таблица представляет собой полумагический квадрат, так как неизвестно, какова сумма выражений, стоящих по главным диагоналям таблицы.

Вычислим сумму выражений, стоящих во второй строке таблицы:

$$2b - 3c + a + 2(c - b) + c - a = 0.$$

Значит, что константа этого полумагического квадрата равна 0. Воспользуемся этим результатом для нахождения значений параметров a, b и c.

Для нахождения параметра c определим сумму выражений, стоящих в третьей строке:

$$8 - a - b + c + 1 - c + b + a - c = 9 - c, \quad c = 9.$$

Значение параметра a найдём из значения суммы выражений, стоящих в четвёртом столбце:

$$2a - 1 + c - a + a - c - 2 - c = 2a - 3 - c,$$

$$2a - 3 - c = 0, \text{ т.к. } c = 9, \text{ то } a = 6.$$

Параметр b найдём из значения сумму выражений, стоящих в первом столбце таблицы:

$$c + 2b - 3c + 8 - a - b + c + 3a - 2c = b - 3c + 2a + 8,$$

$b - 3c + 2a + 8 = 0$, т.к. $a = 6$ и $c = 9$, то $b = 7$.

Сумма выражений во втором столбце:

$$-c - 1 + a + 1 - c + y = a - 2c + y,$$

отсюда $y = 2c - a$, т.е. $y = 12$.

Сумма выражений в первой строке:

$$c - c - 1 + x + 2a - 1, \quad x + 2a - 2 = 0, \quad x = 2 - 2a,$$

т.е. $x = -10$.

Заметим, что при нахождении значений x и y значение параметра b можно было не находить.

Ответ: $x = -10$, $y = 12$.

Список использованных источников

1. Доморяд, А.П. Математические развлечения и игры. Физматгиз, М., 1956.

2. Когда кончается урок математики. Методические рекомендации для руководителей математических кружков учащихся восьмых классов / Антонович Н.К. – Новосибирск: Наука. Сиб. отдние, 1989. – 131 с.

3. Кордемский, Б.А. Математическая смекалка. М., Наука, 1965. – 568 с.

4. Математика после уроков. Методические рекомендации в помощь руководителям кружков юных математиков 6-7 классов / Антонович Н.К. – Новосибирск: Западно-сибирское книжное издательство, 1985 г. - – 160 с.

5. Постников, М.М. Магические квадраты. «Наука», 1963

6. Серпинский, В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, перев. с польского. Физматгиз, М. 1963.

7. Таранова М.В. Исследовательские и познавательные проекты по математике и её приложениям: Учебно-методическое пособие / М.В. Таранова. – Новосибирск: Изд-во НИПКиПРО, 2017. – 120 с.

Содержание