А. Н. Крыловъ.

БЕСѢДЫ

О СПОСОБАХЪ ОПРЕДѢЛЕНІЯ

ОРБИТЪ КОМЕТЪ И ПЛАНЕТЪ

ПО МАЛОМУ ЧИСЛУ НАБЛЮДЕНІЙ.

(Оттискъ изъ «Извѣстій Николаевской Морской Академіи», № 1, 1911 г.).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1911.

Бесѣды о способахъ опредѣленія орбитъ кометъ и планетъ по малому числу наблюденій.

(Николаевская Морская Академія Февраль и Мартъ 1910 г.).

Изъ множества своихъ появленій лишь въ третій разъ по пути, заранѣе предвычисленному и во время предугаданное приближается къ землѣ то свѣтило, которое, можетъ быть, послужило однимъ изъ поводовъ къ составленію величайшаго творенія величайшаго генія.

Въ самомъ дѣлѣ, въ предисловіи къ первому изданію „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" Newton говоритъ: „При изданіи этого сочиненія приложилъ много труда Edmond Halley, этотъ въ высшей степени проницательный и разносторонній ученый. Онъ не только правилъ корректуру и заботился объ изготовленіи рисунковъ, но именно онъ побудилъ меня къ самому составленію этого сочиненія; такъ какъ онъ постоянно требовалъ отъ меня дать доказательства вида путей небесныхъ тѣлъ, то онъ-же просилъ меня и сообщить ихъ Королевскому Обществу, его-же послѣднее своими настояніями и благосклонностью содѣйствовало тому, что я началъ думать объ изданіи этого сочиненія".

Комета, теперь Галлеевой называемая, при своемъ появленіи въ 1682 году послужила вмѣстѣ съ кометою 1680 года къ подтвержденію того, что и движеніе этихъ свѣтилъ подчинено великому закону всемірнаго тяготѣнія.

Въ пятой главѣ третьей книги Principia Ньютонъ приводитъ между прочими и свои собственныя наблюденія кометы 1680 года при помощи 7 футоваго телескопа и микрометра имъ-же самимъ изготовленнаго. Едва-ли это не первыя наблюденія, произведенныя микрометромъ для опредѣленія относительнаго положенія кометы и неподвижныхъ звѣздъ, такъ что и тутъ Ньютонъ явился творцомъ методы, получившей впослѣдствіи самое широкое развитіе.

Въ этой-же главѣ Ньютонъ ставитъ и даетъ геометрическое рѣшеніе такой общей задачи. *По тремъ наблюденіямъ опредѣлить параболическую орбиту кометы,* и затѣмъ приведя элементы орбиты кометы 1680 года говоритъ: „всѣ эти опредѣленія выполнены графически при помощи раздѣленнаго на равныя части масштаба и таблицы натуральныхъ синусовъ, для нанесенія угловъ по ихъ хордамъ". „Я составилъ", продолжаетъ Ньютонъ,

„большой чертежъ, въ которомъ большая полуось земной орбиты изображалась длиною въ $16^1/_3$ дюймовъ“.

Сличеніе наблюденныхъ мѣстъ кометы и снятыхъ съ этого чертежа даютъ разницы не превосходящія $2'$ по долготѣ и $10'$ по широтѣ.

Изложеніе этой геометрической методы Ньютона и составитъ предметъ первой бесѣды нашей.

Вы увидите, что способъ Ньютона представляетъ собою образецъ самаго чистаго геометрическаго синтеза, той необычайной проникновенности, которой отличаются Principia, поэтому если вы впослѣдствіи забудете ходъ разсужденій Ньютона, то ихъ возможно лишь припомнить, самому-же до нихъ никогда не дойти, не возстановить.

Приблизительно черезъ сто лѣтъ послѣ перваго изданія Principia, Лапласъ далъ методу опредѣленія орбитъ чисто аналитическую, въ которой ходъ разсужденій и выкладокъ идетъ совершенно естественно, такъ сказать, самъ собою и разъ эта метода показана ее уже забыть нельзя — изложеніе этой методы Лапласа составитъ предметъ второй бесѣды нашей.

Развитіе анализа въ теченіе 18 столѣтія не могло не оказать существеннаго вліянія на способы опредѣленія параболическихъ орбитъ кометъ по тремъ наблюденіямъ, а одна замѣчательная теорема Эйлера, затѣмъ вновь открытая Ламбертомъ, внесла значительное упрощеніе въ аналитическое рѣшеніе этого вопроса, которое теперь и доведено до высокой степени простоты и совершенства; въ третьей бесѣдѣ нашей мы и постараемся дать очеркъ примѣняемыхъ теперь способовъ рѣшенія поставленной и рѣшенной Ньютономъ задачи.

Извѣстно, что въ первую ночь XIX столѣтія была открыта первая изъ малыхъ планетъ „Церера“. Для нихъ теперь уже не хватаетъ миѳологическихъ именъ, ибо къ марту 1908 года ихъ насчитывалось уже 659, къ которымъ каждый годъ прибавляется около 10, по большей части улавливаемыхъ фотографической пластинкой.

Сношенія сто лѣтъ тому назадъ не отличались теперешней быстротой и извѣстія изъ Палермо, гдѣ наблюдалъ Piazzi, достигли другихъ астрономовъ, когда планета была вновь утеряна, ибо Piazzi заболѣлъ и свои наблюденія прекратилъ, а тѣмъ временемъ планета скрылась въ лучахъ солнца, и казалось, что лишь новая счастливая случайность могла привести ее въ поле зрѣнія телескопа.

Такимъ образомъ появилась надобность въ опредѣленіи орбитъ планеты по малому числу близкихъ между собою наблюденій.

За рѣшеніе этой задачи взялся тогда 24 лѣтній, но уже издавшій Disquisitiones Arithmeticae, Gauss — признанный Princeps Mathematicorum.

Вотъ что онъ самъ говоритъ въ своемъ сочиненіи: Theoria Motus Corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, изданномъ въ 1809 году: „при опредѣленіи параболическихъ орбитъ кометъ по малому числу наблюденій трудность задачи облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что одинъ изъ элементовъ извѣстенъ, ибо большая ось полагается безконечной, по самому предположенію, что орбита параболическая". „Для весьма растянутыхъ орбитъ кометъ подобныхъ Галлеевой движеніе вблизи perигелія весьма близко къ параболическому, и періодическое возвращеніе кометы дало время ея оборота, а значитъ и большую полуось. Для открытой въ 1781 году планеты Уранъ опредѣлили сперва приближенную круговую орбиту, и такъ какъ эксцентриситетъ истинной орбиты оказался малымъ, то эта орбита оказалась близкой къ дѣйствительности и дала возможность слѣдить за планетой и пополнять по желанію наблюденія ея, послужившія затѣмъ и для опредѣленія истинной орбиты ея". „Тѣмъ не менѣе", продолжаетъ Гауссъ „представляется страннымъ, что общая задача: *опредѣлить орбиту небеснаго тѣла, не дѣлая никакихъ гипотетическихъ предположеній, по наблюденіямъ неохватывающимъ большого промежутка времени и не представляющимъ выбора для примѣненія спеціальныхъ способовъ,* оставалась нерѣшенной до начала этого столѣтія". „Въ сентябрѣ мѣсяцѣ 1801 г.", говоритъ онъ далѣе: „въ то время какъ я былъ занятъ совершенно другими вопросами, мнѣ пришли нѣкоторыя идеи, указывавшія на возможность рѣшенія поставленной выше задачи". Какъ разъ въ это время пришло извѣстіе о новой планетѣ, которая была наблюдаема въ Палермо съ 1 января по 11 февраля 1801 года астрономомъ Piazzi, и были опубликованы самыя наблюденія". „Могъ-ли представиться болѣе благопріятный случай, чтобы испытать практическую примѣнимость моихъ соображеній, какъ для опредѣленія орбиты планеты „Церера", описавшей въ теченіе 41 дня геоцентрическую дугу всего въ 3°, послѣ чего, почти черезъ годъ, планету надлежало искать въ совершенно другой области неба нежели тамъ, гдѣ она была усмотрѣна".

„Первое приложеніе было сдѣлано въ октябрѣ 1801 года и въ первую-же ясную ночь (7 декабря 1801 года) планета была усмотрѣна въ той точкѣ, которую указывали вычисленія".

Въ „Theoria Motus" Гауссъ и излагаетъ свой способъ опредѣленія орбитъ планетъ по тремъ наблюденіямъ, доведенный, какъ и все, что Гауссъ издавалъ, до высшей степени законченности и совершенства.

Ознакомленію со способомъ Гаусса и будутъ посвящены послѣдующія бесѣды наши.

Вамъ можетъ показаться страннымъ, что вмѣсто того, чтобы бесѣдовать съ Вами о предметахъ моей спеціальности я вдаюсь въ область совершенно ей чуждую. Не состоитъ-ли отдыхъ и развлеченіе въ томъ, чтобы позаняться инымъ дѣломъ нежели то, которымъ занятъ постоянно,— если многіе видятъ отдыхъ въ томъ, чтобы сидя за шахматной доской соображать самыя неожиданныя комбинаціи и придумывать самые замысловатые ходы, то отчего-же для отдыха не перечесть лишній разъ со вниманіемъ избранныхъ мѣстъ изъ произведеній величайшихъ геніевъ и для развлеченія не побесѣдовать о ихъ твореніяхъ.

Бесѣда 1.

Способъ Ньютона.

§ 1. Основаніемъ всѣхъ способовъ опредѣленія орбитъ кометъ или планетъ служатъ законы Кэплера, послужившіе къ открытію закона всемірнаго тяготѣнія и сами изъ него вытекающіе въ обобщенномъ видѣ и болѣе точной формулировкѣ нежели высказанная Кэплеромъ.

Эта болѣе полная формулировка слѣдующая:

I. Всякая планета или комета движется по коническому сѣченію (эллипсъ, парабола или гипербола) въ одномъ изъ фокусовъ коего находится солнце.

II. Движеніе по этой кривой происходитъ такъ, что площади, описываемыя радіусомъ векторомъ соединяющимъ планету съ солнцемъ пропорціональны времени ихъ описанія.

III. Для различныхъ небесныхъ тѣлъ площади, описываемыя радіусомъ векторомъ въ единицу времени пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ произведеній параметровъ на сумму массъ соотвѣтствующаго свѣтила и солнца.

Формулировка третьяго закона наиболѣе разнится отъ данной Кэплеромъ, но легко показать, что эта послѣдняя изъ нея вытекаетъ.

Въ самомъ дѣлѣ пусть Q есть удвоенная площадь, описываемая во время t свѣтиломъ коего масса μ, причемъ масса солнца принята за 1, тогда послѣдній законъ показываетъ что количество:

$$\frac{Q}{t\cdot\sqrt{p}\cdot\sqrt{1+\mu}}=K. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

есть *постоянное* для всѣхъ тѣлъ солнечной системы.

Въ случаѣ эллиптической орбиты, обозначая черезъ T время полнаго оборота и черезъ G *удвоенную* площадь орбиты получимъ:

$$G=2\pi ab=2\pi a^2\sqrt{1-e^2}=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}$$

ибо параметръ $p = a(1 - e^2)$, гдѣ e есть эксцентриситетъ орбиты, и предыдущее соотношеніе будетъ:

$$\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{T\cdot\sqrt{p}\cdot\sqrt{1+\mu}} = K$$

или

$$\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{T\cdot\sqrt{1+\mu}} = K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

когда μ ничтожно мало, то отсюда слѣдуетъ

$$\frac{a^3}{T^2} = K^2 = \text{постоянной}$$

т. е. кубы большихъ осей орбитъ пропорціональны квадратамъ временъ обращенія.

Постоянная K въ фор. (1) введена Гауссомъ и называется *Гауссовой* постоянной; онъ опредѣлилъ ея значеніе принимая за a большую полуось земной орбиты и полагая $a = 1$, за T продолжительность звѣзднаго года равную:

$$T = 365{,}2563835 \text{ средн. солн. сутокъ.}$$

и

$$\mu = \frac{1}{354710}$$

тогда

$$K = 0{,}017020209895$$

$$\log K = \bar{2}{,}2355814414$$

Несмотря на то, что позднѣйшія наблюденія показали, что массу земли μ надо увеличить приблизительно на $10\%_0$ противъ принятой Гауссомъ величины, но приведеннаго выше значенія Гауссовой постоянной не мѣняютъ, т. е. ее какъ бы считаютъ относящейся къ нѣкоторому фиктивному тѣлу, большая полуось орбиты коего нѣсколько меньше полуоси земной орбиты.

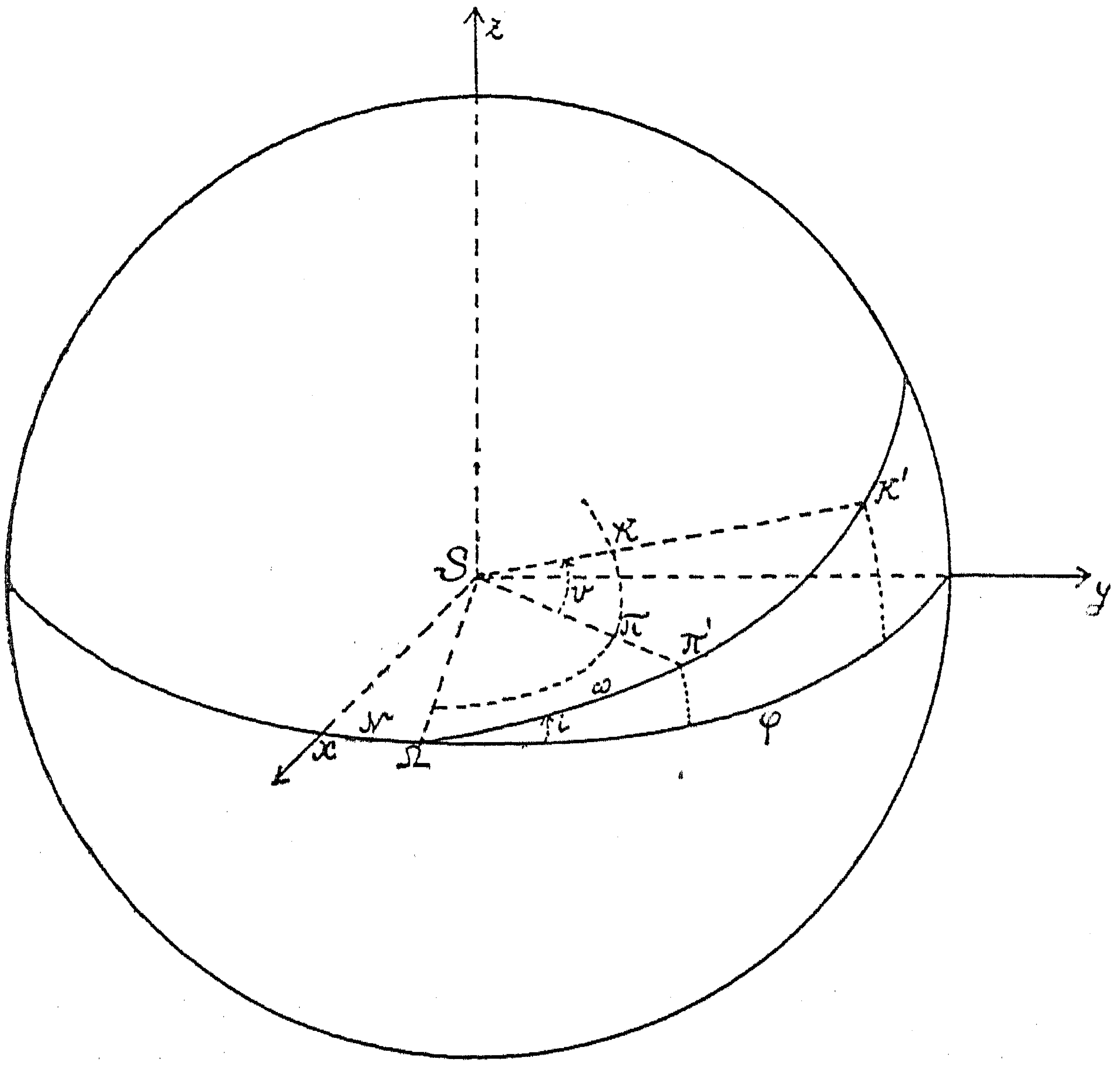
§ **2.** При опредѣленіи орбитъ небесныхъ тѣлъ за основную координатную плоскость принимаютъ плоскость эклиптики и, относя все къ геліоцентрическимъ координатамъ, направляютъ ось x-овъ въ точку весенняго равноденствія, ось y-овъ въ точку коей долгота 90° и ось z-овъ въ сѣверное полушаріе.

Орбита свѣтила опредѣляется слѣдующими *элементами.*

1) *Долгота выходящаго узла:* N.

2) *Наклонность* i, причемъ этотъ уголъ считаютъ между направленіями касательныхъ при выходящемъ узлѣ къ эклиптикѣ и къ орбитѣ (на не-

Черт. 1.



бесной сферѣ) первой по счету долготъ, второй по движенію свѣтила. Это движеніе когда наклонность меньше 90° называютъ *прямымъ*, когда больше 90° *попятнымъ*.

Эти два элемента опредѣляютъ положеніе плоскости орбиты.

3) *Положеніе перигелія* π, опредѣляемое или его *долготою*, или его *долготою по орбитѣ* $(\Omega + \omega)$, или его *аргументомъ широты* ω.

4) *Большая полуось орбиты* a (когда орбита эллиптическая).

5) *Эксцентриситетъ* e.

Для параболической орбиты $e = 1$ и вмѣсто a задаютъ или параметръ p или полупараметръ q равный разстоянію отъ перигелія до солнца.

Эта вторая группа элементовъ т. е. 3, 4 и 5 опредѣляетъ положеніе орбиты въ ея плоскости, видъ и размѣры ея.

6) Положеніе свѣтила на его орбитѣ въ нѣкоторый заданный моментъ именуемый *эпохою*. Это положеніе задается или *истинною аномаліею* v, или аргументомъ широты $\Omega K'$, или *эксцентрическою аномаліею* u, связанной съ истинной, соотношеніемъ

$$tg\,\frac{1}{2}\,u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot tg\,\frac{1}{2}\,v$$

или-же, въ особенности для кометъ, задаютъ *время прохожденія черезъ перигелій*.

Итакъ для эллиптической орбиты планеты или кометы надо знать *шесть* элементовъ, для параболическихъ орбитъ кометъ—*пять*.

§ 3. Каждое наблюденіе свѣтила опредѣляетъ положеніе въ пространствѣ луча зрѣнія соединяющаго центръ свѣтила съ глазомъ наблюдателя въ данный моментъ.

Такъ какъ движеніе земли предполагается извѣстнымъ, то положеніе сказаннаго луча вполнѣ опредѣляется, если задать *направленіе* его. Такое направленіе опредѣляется *двумя* независимыми другъ отъ друга углами (геоцентрическою широтою и долготою свѣтила), а такъ какъ эти же углы можно бы выразить въ функціи элементовъ орбиты планеты, то каждое наблюденіе свѣтила доставляетъ *два* независимыхъ уравненія между этими элементами, значитъ для полнаго опредѣленія орбиты достаточно *трехъ* полныхъ наблюденій.

Такова чисто аналитическая постановка вопроса, но получаемыя такимъ образомъ уравненія оказываются настолько сложными и къ тому же трансцендентными, что такой прямой путь рѣшенія не приводитъ къ практическимъ результатамъ.

Ньютонъ поставилъ задачу иначе, связавъ ее непосредственно съ законами Кэплера.

Какъ уже сказано — каждое полное наблюденіе опредѣляетъ положеніе въ пространствѣ прямой, на которой свѣтило въ разсматриваемый моментъ находилось; орбита свѣтила плоская, путь его коническое сѣченіе, движеніе по этому пути совершается по закону площадей.—Отсюда такая задача: *Даны три прямыя въ пространствѣ, пересѣчь ихъ плоскостью проходящей черезъ центръ солнца такъ, чтобы въ коническомъ сѣченіи, имѣющимъ своимъ фокусомъ въ центръ солнца, проходящемъ черезъ упомянутыя три точки пересѣченія, площади секторовъ ограниченныя радіусами векторами идущими въ эти точки, равнялись бы исчисленнымъ по законамъ Кэплера, пользуясь найденнымъ параметромъ кривой и промежутками времени между наблюденіями.*

При Ньютонѣ были извѣстны лишь планеты до Сатурна и ему не надо было показывать, какъ опредѣлить, тогда уже хорошо извѣстныя орбиты ихъ, поэтому онъ и ограничивается рѣшеніемъ поставленной задачи для *параболическихъ* орбитъ кометъ.

Въ этомъ случаѣ задача нѣсколько упрощается тѣмъ, что нѣтъ надобности имѣть шесть уравненій, и достаточно вышеупомянутыя три прямыя пересѣчь плоскостью такъ, чтобы *отношеніе* площадей параболическихъ секторовъ равнялось отношенію промежутковъ времени описанія ихъ.

§ 4. Прежде чѣмъ приводить Ньютоново рѣшеніе поставленной задачи покажемъ другую задачу изъ его-же Arithmetica Universalis, вошедшую и въ Principia, а именно:

Задача LVI. (Arith. Univers.). *Опредѣлить, имѣя четыре наблюденія, произведенныя въ разное время, разстояніе до земли и законъ движенія кометы, предполагая это движеніе равномѣрнымъ и прямолинейнымъ.*

Ньютонъ сперва опредѣляетъ проекцію искомой прямой на плоскость эклиптики, а въ такомъ случаѣ его задача можетъ быть формулирована такъ: *опредѣлить курсъ, ходъ и разстояніе до чужого корабля взявъ четыре пеленга его, замѣтивъ соотвѣтствующіе моменты и зная путь своего корабля. Ходъ чужого корабля предполагается равномѣрнымъ, курсъ его прямолинейнымъ.*

Короче говоря имѣемъ такую геометрическую задачу: *данныя четыре прямыя пересѣчь пятою такъ, чтобы ея отрѣзки между данными находились въ заданномъ отношеніи.* Въ этомъ послѣднемъ видѣ эта задача и ея рѣшеніе помѣщены и въ Principia, какъ слѣдствія леммы XXVII первой книги.

Замѣчательно изящное чисто геометрическое рѣшеніе этой задачи далъ современникъ Ньютона, знаменитый строитель собора Св. Павла въ Лондонѣ архитекторъ и математикъ *Wren*.

Вотъ его рѣшеніе: пусть 1, 2, 3, 4 (черт. 2) заданныя четыре прямыя x, y, z, соотвѣтственно отрѣзки ими образуемые на пятой, причемъ x лежитъ между 1 и 2, y между 2 и 3, z между 3 и 4. Надо чтобы было:

$$x:y:z=a:b:c$$

гдѣ a, b, c, три заданныхъ длины или числа.

Отмѣтимъ (фиг. 2) точки пересѣченія данныхъ прямыхъ, а именно: $A(1,2)$; $B(3,4)$; $C(2,3)$; $D(2,4)$; $E(3,1)$ $I(1,4)$ и отложимъ отъ точки C соотвѣтственно по прямымъ 2-й и 3-й такіе отрѣзки CF и CG чтобы было:

$$CF:CD=(a+b):c$$

$$CG:CE=(b+c):a$$

черезъ полученныя точки проводимъ прямыя AG и FB до ихъ пересѣченія въ точкѣ H. Черезъ полученную точку H проводимъ прямую HM параллельную прямой 3-й до ея пересѣченія съ 1-й въ точкѣ M, и прямую HK параллельную 2-й до ея пересѣченія съ 4-й въ точкѣ K. Прямая MK и есть искомая.

Въ самомъ дѣлѣ обозначимъ черезъ S и T точки пересѣченія прямыхъ HM съ 2-й и HK съ 3-й.

Тогда треугольникъ AMH даетъ

$$CG:CE=HS:SM=(b+c):a$$

треугольникъ-же HMK даетъ

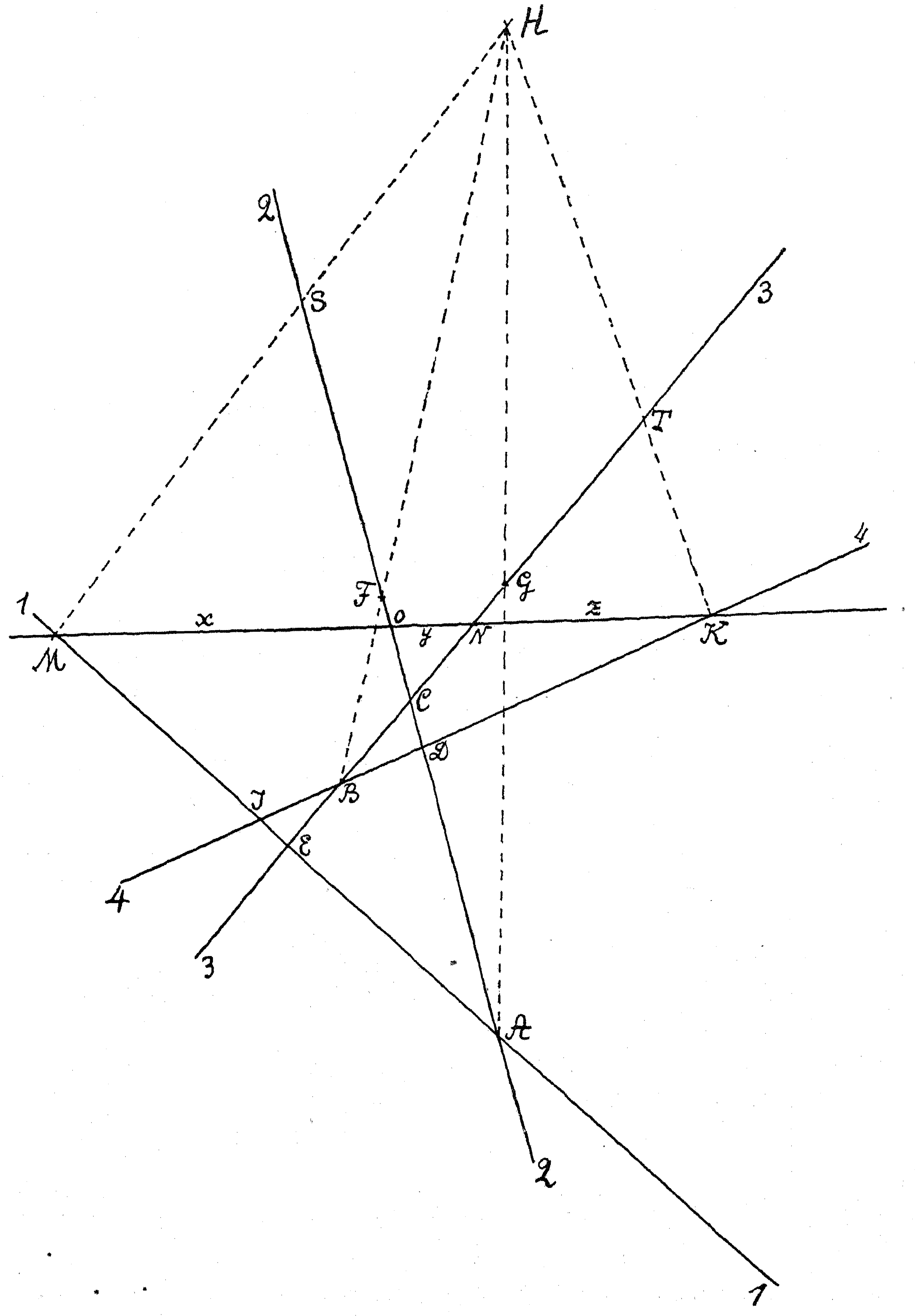
$$HS:SM=OK:MO=(b+c):a$$

Точно также треугольники HBK и HMKдаютъ:

$$CF:CD=(a+b):c=HT:TK=MN:NK$$

что вмѣстѣ съ предыдущей пропорціей и показываетъ, что прямая MK есть искомая.

Черт. 2.



Рѣшеніе это представляется крайне простымъ, но чтобы убѣдиться насколько оно остроумно, и какой требовало находчивости, попробуйте его возстановить черезъ мѣсяцъ или черезъ два или вообще послѣ того какъ Вы его забудете, что будетъ гораздо раньше.

Само собою разумѣется, что весьма легко дать рѣшеніе этой задачи пользуясь пріемами аналитической геометріи, причемъ потребуется рѣшать уравненія лишь первой степени. Это послѣднее рѣшеніе можно вести совершенно естественнымъ и прямымъ путемъ и слѣдовательно забыть его нельзя.

Въ самомъ дѣлѣ пусть

$$y + a_i x + b_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

суть уравненія четырехъ заданныхъ прямыхъ отнесенныхъ къ какимъ бы то ни было осямъ координатъ и пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda t \\ y &= y_0 + \mu t \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

есть законъ движенія чужого корабля или кометы, смотря по тому навигаціонную или астрономическую задачу мы разсматриваемъ. Будемъ считать время t съ момента прохожденія черезъ первую прямую, тогда мѣста корабля въ моменты: $t_1 = 0$, t_2, t_3, t_4, будетъ:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0; \qquad & y_1 &= y_0 \\ x_i &= x_0 + \lambda t_i; \qquad & y_i &= y_0 + \mu t_i \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (i = 2, 3, 4) \end{aligned}$$

подставляя въ уравненія (1) имѣемъ:

$$(4) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \begin{aligned} & y_0 + a_1 x_0 + b_1 = 0 \\ & y_0 + a_i x_0 + a_i t_i \lambda + t_i \mu + b_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (i = 2, 3\,4) \end{aligned}$$

откуда и найдутся неизвѣстныя:

$$x_0, \; y_0, \; \lambda \text{ и } \mu.$$

Рѣшеніе системы (4) упрощается вычитая первое уравненіе изъ трехъ остальныхъ и приводится такимъ образомъ къ рѣшенію трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными:

$$(a_i - a_1) x_0 + a_i t_i \lambda + t_i \mu = b_1 - b_i \quad . \; . \; . \; . \quad (i = 2, 3, 4)$$

Не входя въ изслѣдованіе этихъ трехъ уравненій, замѣтимъ по поводу навигаціонной задачи, что если путь своего корабля равномѣрный и прямолинейный, то задача становится неопредѣленной.

Курсъ и ходъ цѣли суть необходимые элементы для установки миннаго прицѣла, построеніе данное Wren'омъ требующее лишь пеленговъ и исполнимое одною линейкою, невольно заставляетъ думать, что есть возможность устроить такой минный прицѣлъ, въ которомъ эта задача рѣшалась бы автоматически, помощію сочетанія подвижныхъ линеекъ. Но если попробовать составлять схему такого прицѣла, то конструкція его получается чрезмѣрно сложной, по крайней мѣрѣ я не съумѣлъ придумать простой схемы.

При опредѣленіи кометной орбиты, если комета усмотрѣна вдали отъ перигелія рѣшенная выше задача даетъ приближенныя указанія о разстояніи кометы отъ земли и отъ солнца, и о скорости ея движенія. Эти указанія полезны какъ исходныя приближенія при опредѣленіи орбиты.

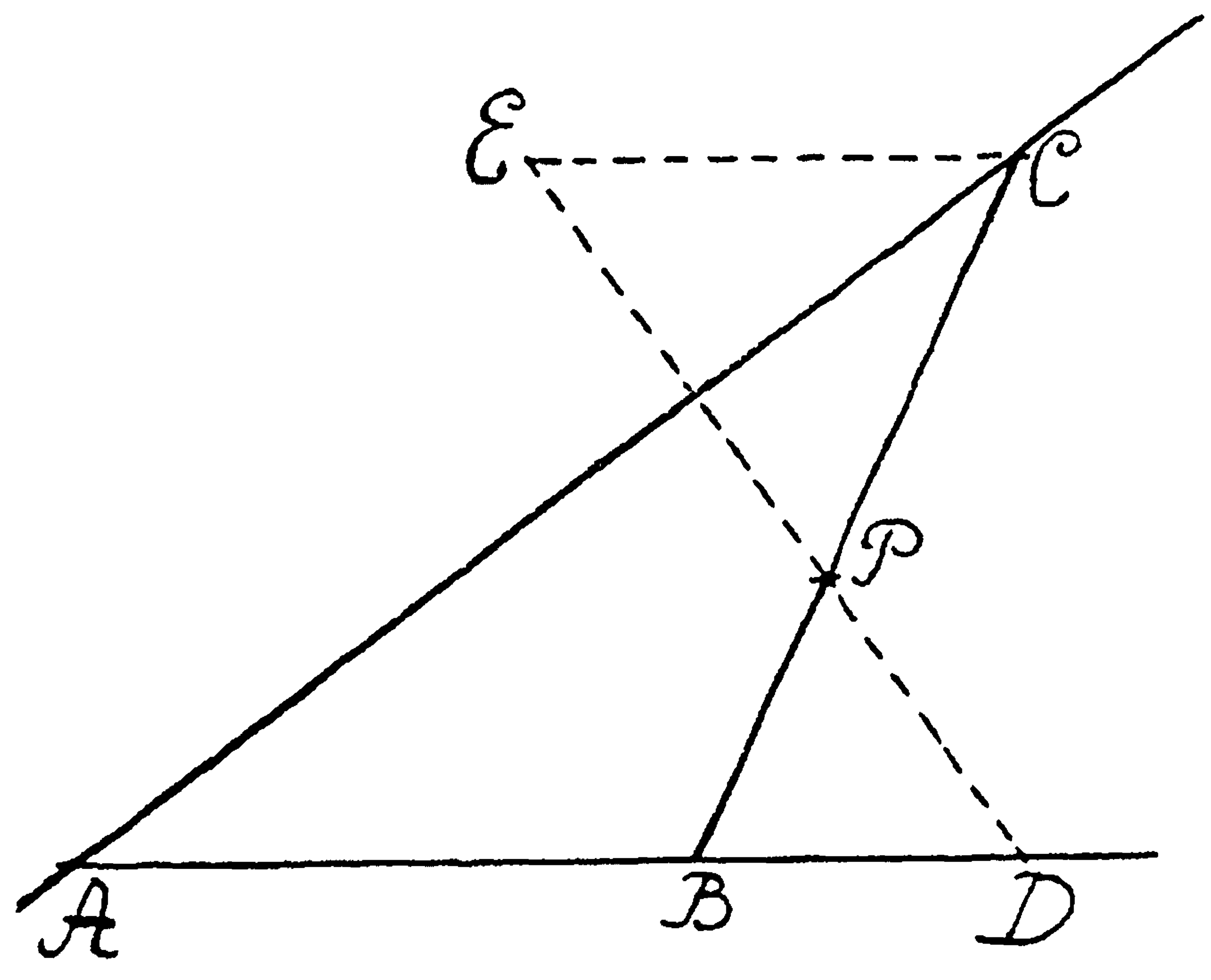
§ 5. Ньютонъ объ опредѣленіи параболическихъ орбитъ кометъ по тремъ наблюденіямъ говоритъ слѣдующее: „я пробовалъ рѣшать разными способами эту задачу, которая весьма трудна, для этого я рѣшилъ задачи приведенныя въ первой книгѣ (построеніе коническихъ сѣченій удовлетворяющихъ разнаго рода условіямъ) но затѣмъ я пришелъ къ болѣе простому рѣшенію излагаемому ниже“.

Этому рѣшенію Ньютонъ предпосылаетъ слѣдующія леммы.

1°) **Лемма VII.** *Черезъ данную точку P провести прямую BC такъ чтобы ея отрѣзки BP и PC, получаемыя отъ пересѣченія съ двумя данными прямыми AB и AC находились въ данномъ отношеніи.*

Проводимъ черезъ точку P произвольно прямую EPD и откладываемъ длину PE такъ чтобы отношеніе $PE:PD$ имѣло заданную величину, проводимъ EC параллельно AB, точка C принадлежитъ искомой прямой.

Черт. 3.



Вторая лемма даетъ способъ подраздѣлить хорду на такіе два отрѣзка которые относились бы между собою какъ времена описанія соотвѣтствующихъ имъ дугъ параболы. Эта лемма слѣдующая:

Лемма VIII. *Пусть ABC есть дуга параболы коей фокусъ S. Отмѣтимъ точку I средину хорды AC и проведемъ діаметръ $I\mu$, по продолженному діаметру $I\mu$ отложимъ длину $\mu O = \frac{1}{2} I\mu$, и по продолженію прямой OS отложимъ длину $S\xi = 2\,OS$, тогда если точку ξ соединить съ точкою B, то полученный отрѣзокъ хорды AE будетъ приблизительно пропорціоналенъ времени описанія дуги AB.*

Замѣтимъ что точка μ представляетъ вершину сегмента ABC т. е. касательная въ ней параллельна хордѣ AC.

Такъ какъ времена описанія дугъ AB и AC относятся какъ площади секторовъ $ASB : ASC$ то надо доказать справедливость *приближеннаго* равенства:

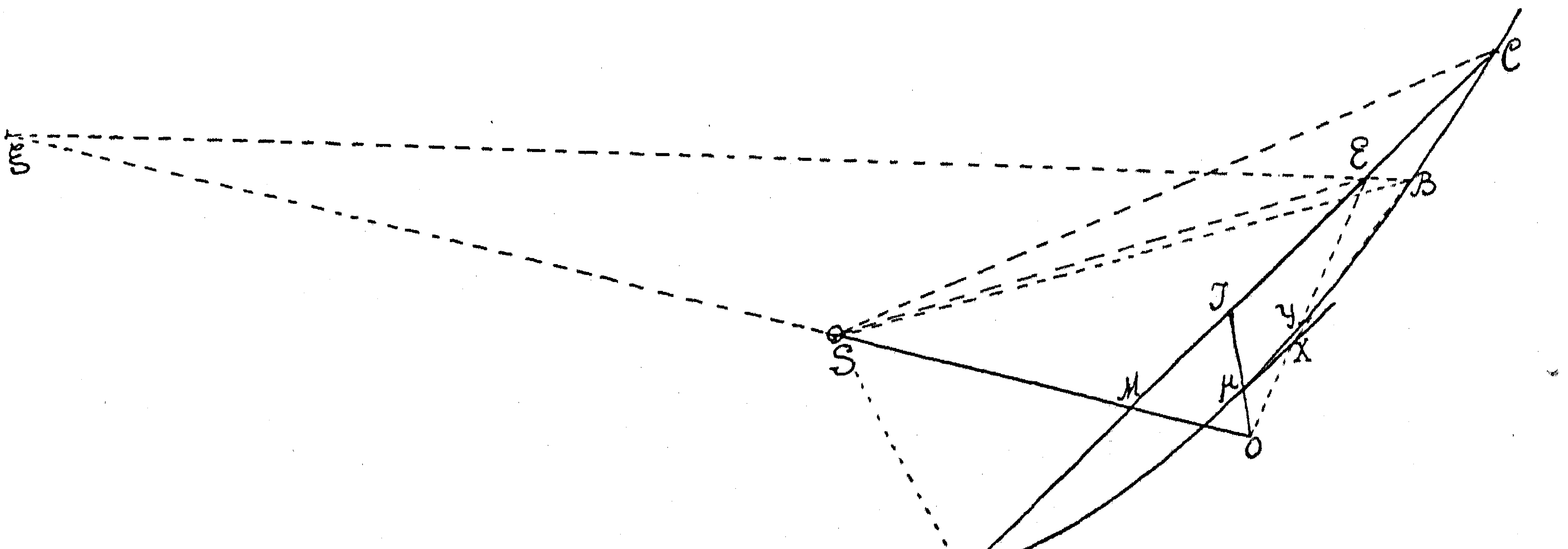
$$AE : AC = ASB : ASC.$$

Эта теорема есть основная въ методѣ Ньютона, доказываетъ онъ ее такъ:

„Проведемъ EO и отмѣтимъ точку Y пересѣченія этой прямой съ параболою, проведемъ касательную въ вершинѣ μ и отмѣтимъ точку ея пересѣченія X съ прямою EO, тогда криволинейная площадь $AEX\mu A$ такъ относится къ криволинейной площади $ACY\mu A$ какъ AE относится къ AC, а такъ какъ и площади треугольниковъ ASE и ASC находятся въ томъ-же отношеніи, то и полныя площади $ASEX\mu A$ и $ASCY\mu A$ будутъ находиться въ отношеніи AE къ AC. А такъ какъ ξO относится къ SO какъ 3 къ 1 и въ томъ-же отношеніи находятся и EO къ XO, то прямая SX параллельна EB, слѣдовательно если провести прямую BX то площадь треугольника SEB равна площади треугольника XEB.

Слѣдовательно если къ площади $ASEX\mu A$ придать площ. EXB и вычесть площадь SEB то останется площадь $ASBX\mu A$ равная площади $ASEX\mu A$, которая какъ указано относится къ площади $ASCY\mu A$ какъ EA къ AC.

Черт. 4.



Площадь-же $ASBX\mu A$ *весьма близка къ равенству* съ площадью $ASBY\mu A$, эта-же площадь относится къ площади $ASCY\mu A$ какъ время описанія дуги AB, относится къ времени описанія дуги AC, значитъ и отношеніе AE къ AC весьма близко къ отношенію этихъ промежутковъ времени".

Какъ видно изъ этого отрывка Ньютонъ ведетъ свои доказательства всецѣло по образцу древнихъ т. е. составляя пропорціи и отношенія, а не алгебраическія выраженія для разнаго рода частей фигуры, чтобы, пользуясь этими выраженіями, находить соотношенія между этими частями.

Такой способъ доказательствъ намъ мало привыченъ и слѣдить за нимъ утомительно, по болѣе привычному намъ способу теорему доказали бы такъ:

$$\text{пл. } AEX\mu A = AI\mu + IEX\mu$$

$$AI\mu = \frac{2}{3} AI \cdot I\mu \cdot \sin I$$

$$IEX\mu = \frac{1}{2} I\mu \cdot [IE + \mu X] \sin I = \frac{2}{3} IE \cdot I\mu \cdot \sin I$$

ибо

$$\mu X = \frac{1}{3} IE$$

Значитъ

$$AEX\mu A = \frac{2}{3}(AI + IE)\, I\mu \cdot \sin I = \frac{2}{3} AE \cdot I\mu \cdot \sin I$$

Съ другой стороны

$$\text{пл. } ACBY\mu A = \frac{2}{3} AC \cdot I\mu \cdot \sin I$$

Слѣдовательно

$$AEX\mu A : ACBY\mu A = AE : AC$$

а такъ какъ площади треугольниковъ ASE и ASC имѣющихъ общую сторону AS и общій уголъ A пропорціональны сторонамъ AE и AC т. е.

$$ASE : ASC = AE : AC$$

то и площади

$$ASEX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC$$

Но въ силу паралельности прямыхъ EB и SX

$$\text{площ. } SEB = \text{пл. } EXB$$

слѣдовательно

$$ASEX\mu A + EXB - SEB = ASEX\mu A = ASBX\mu A$$

и подставляя въ предыдущую пропорцію имѣемъ

$$ASBX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC$$

Площадь-же $ASBX\mu A$ *весьма близка* какъ указываетъ Ньютонъ къ площади сектора $ASBY\mu A$ и притомъ тѣмъ ближе чѣмъ точка B ближе къ вершинѣ μ.

При дальнѣйшемъ изложеніи мы не будемъ придерживаться буквальнаго перевода текста Ньютона, а будемъ передавать его разсужденія и доказательства, пользуясь болѣе привычнымъ намъ изложеніемъ помощію формулъ и равенствъ, подобно тому какъ сдѣлано съ вышеприведеннымъ доказательствомъ.

„Когда-же точка B совпадаетъ съ точкою μ то вышеуказанное соотношеніе не *приближенное* а *точное*“ замѣчаетъ Ньютонъ, въ слѣдствіи къ этой леммѣ.

Къ этой-же леммѣ Ньютонъ прибавляетъ еще такое „поученіе“ (scholium).

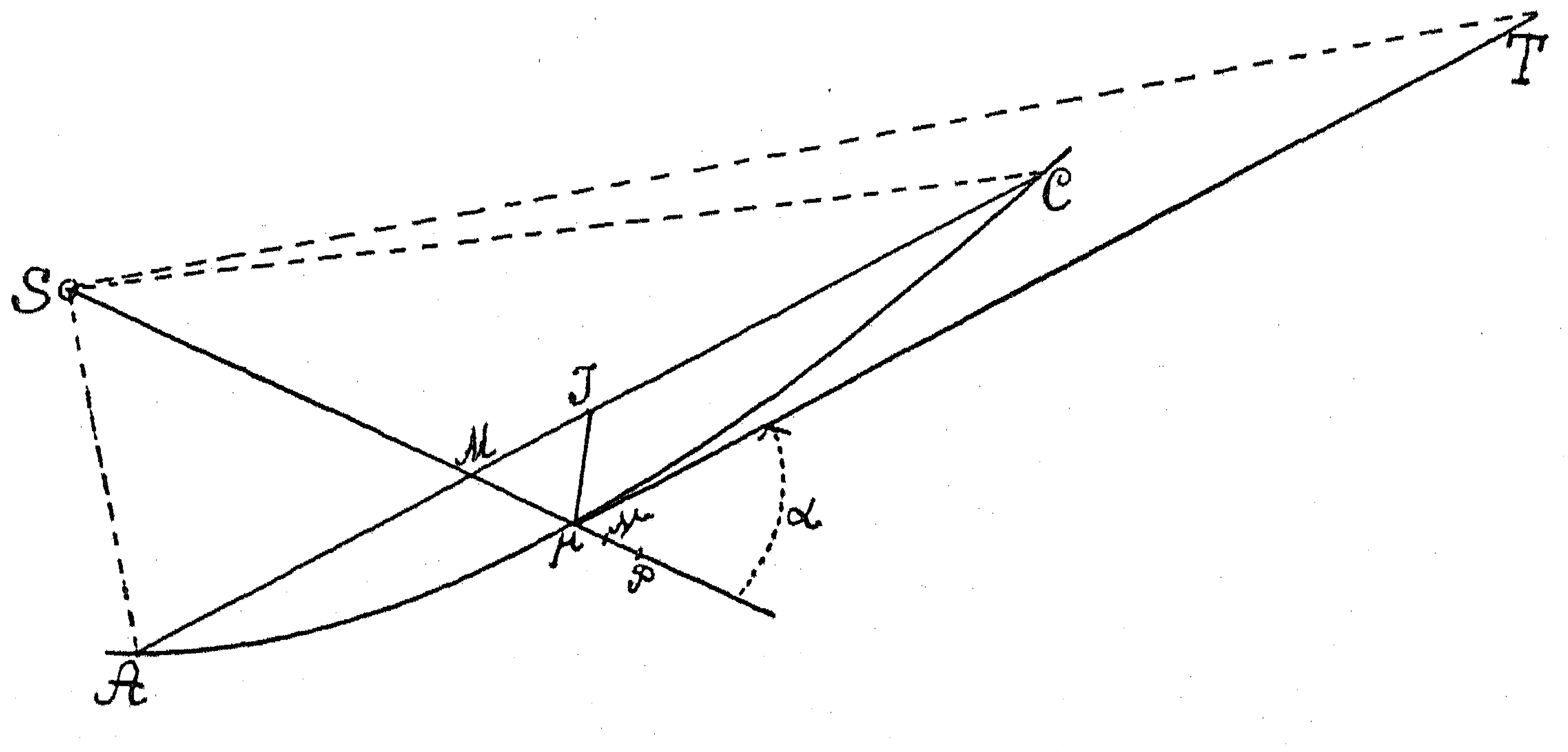
„Если провести $\mu\xi$ пересѣкающую AC въ точкѣ δ и $S\mu$ пересѣкающую AC въ точкѣ M и отложить длину ξn которая такъ относилась бы къ μB какъ $27MI$ относится къ $16M\mu$ то прямая nB разсѣчетъ хорду AC гораздо ближе къ отношенію временъ нежели прежде. Точку n надлежитъ откладывать за точкою ξ если точка B лежитъ отъ вершины параболы дальше нежели точка μ и въ сторону фокуса если ближе“.

Доказательства Ньютонъ не приводитъ.

3) **Лемма IX:** *Длины* $I\mu$, μM и $\dfrac{AI^2}{4S\mu}$ *равны между собою*, „ибо величина $4S\mu$ есть удвоенный параметръ (latus rectum) параболы относящійся къ вершинѣ μ.“

Само собою разумѣется, что Ньютонъ предполагаетъ читателя вполнѣ знакомаго съ геометріей коническихъ сѣченій, почему и ограничиваетъ свое объясненіе этой леммы выше приведенными немногими словами, въ леммѣ-же XIII первой книги, гдѣ приведено это-же свойство параболы онъ прямо дѣлаетъ указаніе: „patet ex conicis“.

Черт. 5.



Составивъ чертежъ (фиг. 5) и замѣчая что діаметръ $I\mu$ параллеленъ оси параболы, и что касательная раздѣляетъ пополамъ уголъ между радіусомъ векторомъ и продолженіемъ діаметра видимъ, что въ треугольникѣ $MI\mu$ углы $M=I=\alpha$, гдѣ α есть уголъ между касательной и діаметромъ, слѣдовательно:

$$I\mu = M\mu$$

Чтобы доказать вторую часть леммы замѣтимъ, что подъ словомъ „параметръ относящійся ко вершинѣ μ." надлежитъ разумѣть величину $2p_1$ въ уравненіи параболы

$$Y^2 = 2p_1 X$$

отнесенномъ къ касательной въ точкѣ μ и къ діаметру μI.

Если первоначальное уравненіе параболы есть

$$y^2 = 2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

и координаты точки μ назовемъ черезъ $x_0 y_0$ то

$$tg\,\alpha = \frac{p}{y_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin}\alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + y_0^2}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p+2x_0}} \\ \operatorname{Cos}\alpha &= \frac{y_0}{\sqrt{p^2+y_0^2}} = \frac{\sqrt{2x_0}}{\sqrt{p+2x_0}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Между координатами (x, y) и X, Y имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія

$$x = X + x_0 + Y\cos\alpha$$

$$y = y_0 + Y\sin\alpha$$

подставляя въ уравненіе (1) получаемъ

$$Y^2 \sin^2\alpha + 2\,Y y_0 \sin\alpha + y_0^2 = 2p\,(X + x_0 + Y\cos\alpha)$$

которое принимаетъ видъ

$$Y^2 = \frac{2p}{\sin^2\alpha} X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

въ силу (2) и равенства

$$y_0^2 = 2p\,x_0$$

Такимъ образомъ

$$p_1 = \frac{p}{\sin^2\alpha}$$

Съ другой стороны по свойству параболы

$$S\mu = \frac{p}{2} + x_0$$

иначе

$$2\,S\mu = p + 2x_0 = \frac{p}{\sin^2\alpha} = p_1$$

Значитъ

$$4S\mu = 2p_1$$

Изъ уравненія-же параболы

$$Y^2 = 2p_1 X$$

дѣлая

$$X = I\mu \text{ и } Y = AI = IC$$

слѣдуетъ

$$I\mu = \frac{AI^2}{2p_1} = \frac{AI^2}{4S\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Что и составляетъ вторую часть леммы.

4) **Лемма X.** *Если на продолженіи $S\mu$ отложить длины μN и μP такъ, чтобы было $\mu N = \frac{1}{3} I\mu$ и чтобы*

$$SP : SN = SN : S\mu$$

то SP будетъ такою высотою (разстояніемъ до солнца) *при которомъ комета имѣетъ такую скорость, двигаясь съ которою равномѣрно, она проходитъ путь равный хордѣ AC въ то-же самое время, въ какое она описываетъ дугу параболы $A\mu C$.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы комета продолжала двигаться по касательной μT съ тою скоростью V_μ которую она имѣетъ въ точкѣ μ въ теченіе такого-же промежутка времени какъ она проходитъ путь $A\mu C$, то она прошла бы такую длину μT, что площадь $S\mu T = SA\mu C$, но площадь

$$SA\mu C = ASC + AC\mu = \frac{1}{2} AC \cdot SM \cdot \sin\alpha + \frac{2}{3} I\mu \cdot AC \cdot \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} AC\left(SM + \frac{4}{3} I\mu\right)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot SN \cdot \sin\alpha$$

вмѣстѣ съ тѣмъ

$$S\mu T = \frac{1}{2} S\mu \cdot \mu T \cdot \sin\alpha$$

Слѣдовательно

$$\mu T : AC = SN : S\mu$$

Но при движеніи по параболамъ скорости обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ изъ разстояній $\left(\text{скорость } V^2 = \frac{2k^2}{r}\right)$

Значитъ скорость соотвѣтствующая разстоянію SP, которую мы обозначимъ черезъ V_P, получится изъ пропорціи

$$V_\mu : V_P = SP^{\frac{1}{2}} : S\mu^{\frac{1}{2}}$$

а такъ какъ по построенію

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}$$

то

$$\frac{SP}{S\mu} = \frac{SN^2}{S\mu^2}$$

и слѣдовательно

$$V_\mu : V_P = SN : S\mu = \mu T : AC$$

а значитъ

$$\frac{\mu T}{V_\mu} = \frac{AC}{V_P} = t$$

гдѣ t есть время описанія дуги $A\mu C$, что и доказываетъ теорему.

Къ этой теоремѣ Ньютонъ прибавляетъ такое слѣдствіе, которое въ тѣхъ случаяхъ, когда комета описала небольшую дугу упрощаетъ построеніе:

Слѣдствіе. Комета, двигаясь равномѣрно со скоростью соотвѣтствующей разстоянію $S\mu = \frac{2}{3} I\mu$, прошла бы путь равный хордѣ AC въ то-же время какъ она описываетъ дугу $A\mu C$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu} = \frac{\left(S\mu + \frac{1}{3} I\mu\right)^2}{S\mu} = S\mu + \frac{2}{3} I\mu + \frac{1}{9} \frac{I\mu^2}{S\mu}$$

послѣдній членъ малъ и если имъ пренебречь, то и получится приближенное равенство

$$SP = S\mu + \frac{2}{3} I\mu.$$

5) **Лемма XI.** *Комета, падающая на солнце безъ начальной скорости съ разстоянія $SN = S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ подъ дѣйствіемъ постоянной силы соотвѣтствующей этому разстоянію SN, проходитъ путь равный $I\mu$ въ половину того времени, въ теченіе котораго она описываетъ дугу AC своей орбиты.*

Какъ показано въ предыдущей леммѣ комета прошла бы въ теченіе времени описанія дуги $A\mu C$ путь равный хордѣ AC двигаясь равномѣрно со скоростью соотвѣтствующей разстоянію

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu}.$$

При равныхъ разстояніяхъ скорости соотвѣтствующія движенію по кругу и по параболѣ относятся между собою какъ $\sqrt{2}:1$, значитъ въ продолженіи разсматриваемаго времени t, въ движеніи по кругу радіуса SP была бы пройдена дуга σ, длина коей есть

$$\sigma = \frac{AC}{\sqrt{2}} = v_0 t$$

Ускореніе при разстояніи $r = SP$ есть

$$w = \frac{v_0^2}{r}$$

слѣдовательно въ теченіе времени t, высота паденія при постоянной силѣ, а значитъ и постоянномъ w была бы

$$h = \frac{1}{2} wt^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{r} \cdot t^2 = \frac{\sigma^2}{2 \cdot SP} = \frac{AC^2}{4SP}$$

если-же взять половинное время $\frac{t}{2}$ то высота

$$h_1 = \frac{1}{4} h = \frac{AI^2}{4 \cdot SP}.$$

Въ разстояніи-же SN ускореніе обратно пропорціональное квадратамъ разстояній, будетъ $w \cdot \frac{SP^2}{SN^2}$, а слѣдовательно и высота паденія h_2 будетъ:

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AI^2}{4SP} \cdot \frac{SP^2}{SN^2} = \frac{AI^2}{4 \cdot S\mu} = I\mu = M\mu$$

въ силу леммы VIII.

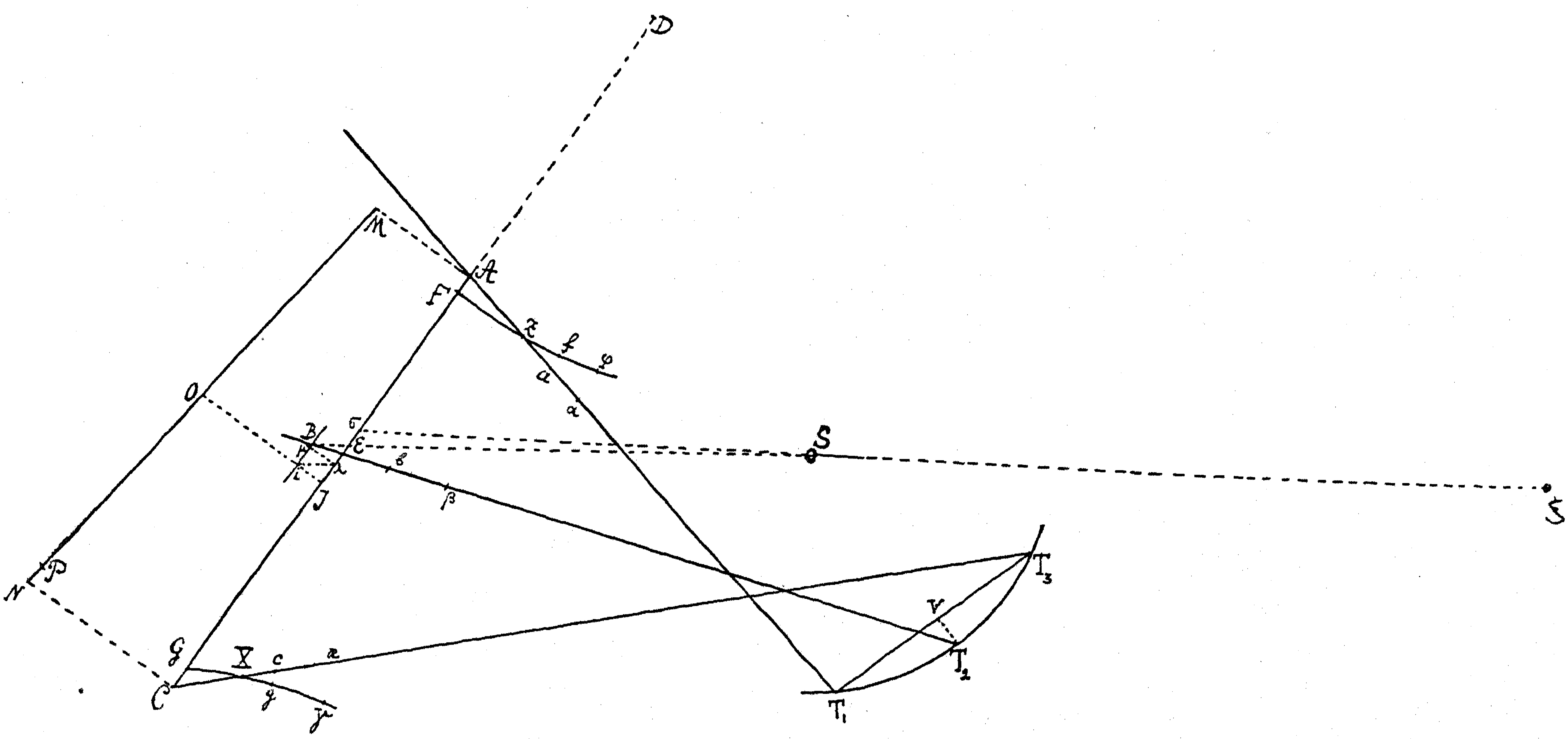
§ 6. Послѣ этихъ предварительныхъ предложеній, служащихъ основаніемъ его способа, Ньютонъ и переходитъ къ изложенію рѣшенія задачи XXI, третьей книги Principia.

Задача XXI. *Опредѣлить орбиту кометы движущейся по параболѣ по тремъ наблюденіямъ ея.*

Изъ имѣющихся наблюденій кометы надо выбрать три такихъ, промежутки между которыми приблизительно равны между собою, причемъ, тотъ промежутокъ, гдѣ комета движется медленнѣе надо взять нѣсколько больше второго напр. такъ чтобы разность промежутковъ такъ относилась къ суммѣ ихъ, какъ эта послѣдняя приблизительно къ 600 днямъ, иными словами чтобы точка E (черт. 4) упадала ближе къ M и отъ нея продвигалась бы къ I а не къ A.

Пусть (фиг. 6) S представляетъ солнце T_1, T_2, T_3 — мѣста земли, $T_1 A$, $T_2 B$, $T_3 C$ проложенія на эклиптику направленій на комету, τ_1 время протекшее между первымъ и вторымъ наблюденіями, τ_2 — между вторымъ и третьимъ выраженное въ среднихъ суткахъ.

Черт. 6.



Обозначимъ черезъ X ту длину которую можетъ пройти комета въ теченіе всего промежутка $\tau_1 + \tau_2$, двигаясь равномѣрно со скоростью соотвѣтствующей (въ параболическомъ движеніи) среднему разстоянію отъ земли до солнца.

Эта длина найдется по формулѣ

$$X = \frac{2\pi}{365{,}256\cdots} \cdot a \cdot \sqrt{2}\,(\tau_1 + \tau_2)$$

гдѣ a есть большая полуось земной орбиты, и пусть $T_2 V$ есть перпендикуляръ опущенный изъ мѣста T_2 на хорду $T_1 T_3$, тогда надо поступать слѣдующимъ образомъ:

1) На средней линіи $T_2 B$ возьмемъ точку B и примемъ ее за проекцію на плоскость эклиптики мѣста кометы при второмъ наблюденіи

(ниже будетъ указано какъ разсчитать приближенное мѣсто точки B) и отложимъ по направленію къ солнцу длину BE, которая такъ относится къ стрѣлкѣ $T_2 V$ какъ произведеніе $SB \cdot ST_2^2$ относится къ кубу разстоянія кометы до солнца т. е. къ кубу гипотенузы такого прямоугольнаго треугольника коего одинъ катетъ есть BS, а другой $T_2 B \cdot \operatorname{tg} \beta_2$ гдѣ β_2 есть широта кометы при второмъ наблюденіи.

2) Черезъ точку E проводимъ прямую AEC, отрѣзки коей относятся между собою какъ промежутки времени $\tau_1 : \tau_2$, тогда точки A и C будутъ приближенныя проэкціи мѣстъ кометы при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ, если только B взято вѣрно въ мѣстѣ соотвѣтствующемъ второму наблюденію.

3) Раздѣливъ AC въ точкѣ I пополамъ проводимъ перпендикуляръ Ii до пересѣченія его въ точкѣ i съ прямою Bi параллельной AC. Черезъ i проводимъ прямую Si до пересѣченія ея съ AC въ точкѣ λ и дополняемъ паралелограмъ $i\mu\lambda I$. Беремъ длину $I\sigma = 3I\lambda$ и проводимъ черезъ S прямую $\sigma S \xi$, по которой отлогаемъ $\sigma\xi = 3S\sigma + 3i\lambda$.

4) Вытеревъ прямую AC и точки E и I проводимъ отъ точки B къ точкѣ ξ новую длину BE, которая такъ относится къ первой, какъ BS^2 къ $\left(S\mu + \frac{1}{3} i\lambda\right)^2$ и черезъ полученное новое мѣсто точки E проводимъ новую прямую AEC какъ и прежде т. е. чтобы ея отрѣзки $AE : EC$ какъ $\tau_1 : \tau_2$.

Полученныя точки A и C представятъ точнѣе мѣста кометы, нежели въ первый разъ.

5°) Проводимъ къ AC перпендикуляры AM и CN и IO и откладываемъ по нимъ длины:

$$AM = AT_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{и} \quad CN = T_3 C \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

гдѣ β_1 и β_3 широты при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ, проводимъ MN и отмѣчаемъ точку O ея пересѣченія съ IO, и построивъ вновь параллелограммъ $iI\lambda\mu$ откладываемъ по продолженной линіи IA длину

$$ID = S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$$

и снявъ разстояніе OD разчисляемъ длину MP по пропорціи:

$$MP : X = \sqrt{a} : \sqrt{OD}$$

гдѣ a есть большая полуось земной орбиты въ масштабѣ чертежа, длина-же X, расчислена какъ указано выше, и откладываемъ длину MP по линіи MN.

Если точка P упадетъ въ точку N то A, B и C и суть проекціи мѣстъ кометы на плоскость эклиптики. Если-же точка P не упадетъ въ N то по прямой AC надо отложить длину $CG = NP$ такъ, чтобы точка G лежала отъ C въ ту-же сторону какъ P отъ N.

6) Взявъ затѣмъ вмѣсто точки B другія b, β, строимъ какъ описано исходя отъ нихъ точки a, c, g, и α, $\varkappa$, γ.

7) Проводимъ черезъ точки G, g, γ кругъ (согласную кривую) и отмѣчаемъ пересѣченіе его X съ прямою $T_3 C$ эта точка X и есть искомая проекція кометы на плоскость эклиптики при третьемъ наблюденіи.

8) Отложивъ отъ точекъ A, a, α длины AF, af, $\alpha\varphi$ соотвѣтственно равныя CG, cg, $\varkappa\gamma$ получимъ точки F, f, φ также расположенныя по отношенію къ прямой $T_1 A$ какъ G, g, γ по отношенію къ CT_3, проводимъ черезъ нихъ дугу круга, въ пересѣченіи которой съ прямою AT_1 и получаемъ въ точкѣ Z проекцію мѣста кометы при первомъ наблюденіи.

9°) Отложивъ по перпендикулярамъ къ XZ въ точкахъ X и Z соотвѣтственно длины:

$$A' Z = T_1 Z \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \text{ и } C' X = T_2 X \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

получимъ мѣста кометы въ ея орбитѣ, послѣ чего орбита и найдется по извѣстному построенію параболы по двумъ точкамъ и фокусу, что и требовалось.

Описывая вышеизложенное построеніе я нѣсколько отступалъ отъ буквальной передачи текста Ньютона, который не пользуется формулами, вмѣстѣ съ тѣмъ я подраздѣлилъ это описаніе на пункты для удобства справокъ и ссылокъ при выполненіи чертежа.

Ньютонъ весьма кратко поясняетъ этотъ чертежъ слѣдующими словами:

„Доказательство этого построенія слѣдуетъ изъ леммъ, ибо прямая AC точкою E раздѣляется въ отношеніи временъ по леммѣ VII, какъ то и надлежитъ по леммѣ VIII, и BE по леммѣ IX есть часть прямой BS или $B\xi$ проектированная на плоскость эклиптики и заключенная между дугою ABC и хордою AEC, MP (по слѣдствію леммы X) есть длина хорды той дуги которую описываетъ по своей орбитѣ комета между первымъ и третьимъ наблюденіями, и которая должна равняться MN, если только B есть точная проекція мѣста кометы на плоскость эклиптики".

„Кромѣ того точки B, b, β, слѣдуетъ брать не какъ нибудь а близко къ истинному ихъ мѣсту. Если приближенно извѣстенъ уголъ AQT_2 подъ которымъ проекція хорды орбиты пересѣкаетъ прямую $T_2 B$, то подъ этимъ угломъ надо провести прямую AC такъ, чтобы ея длина AC относилась къ $\frac{4}{3} T_1 T_3$ какъ $\sqrt{SQ}$ относится къ $\sqrt{ST_1}$, и, проведя прямую SEB, которой часть EB равнялась бы длинѣ стрѣлки $T_2 V$, получимъ ту точку B отъ которой надо начинать построеніе. Послѣ того какъ опредѣлено первое приближенное положеніе прямой AC, и опредѣлена и построена, какъ описано, длина MP, надо взять на прямой $T_2 B$ точку b такъ, чтобы, обозначая черезъ Y пересѣченіе линій $T_1 A$ и $T_2 C$, разстояніе Yb такъ относилось къ YB какъ

$$\frac{MP \cdot \sqrt{SB}}{MN \cdot \sqrt{Sb}}.$$

Такимъ-же образомъ найдется и третья точка β, если бы понадобилось производить третью операцію. Но при такомъ способѣ обыкновенно двухъ операцій довольно. Когда величина Bb получится больше истинной, то послѣ того какъ найдены точки F, f, и G, g, то проведя прямыя Ff и Gg получимъ въ ихъ пересѣченіи съ прямыми $T_1 A$ и $T_2 C$ искомыя точки X и Z".

§ 7. Какъ самое построеніе такъ и краткое его доказательство требуютъ нѣкоторыхъ поясненій а именно:

По п. 1. Длина BE есть проекція стрѣлки $B'E'$ на плоскость эклиптики, величина-же этой стрѣлки, представляющей какъ бы путь пройденный кометою по направленію къ солнцу равномѣрно ускореннымъ движеніемъ по сравненію съ таковымъ-же для земли, будетъ обратно пропорціональна квадратамъ соотвѣтствующихъ разстояній т. е. будетъ

$$B'E' : T_2 V = ST_2^2 : B'S^2$$

чтобы получить BE надо спроектировать $B'E'$ на плоскость эклиптики, отсюда множитель $\frac{SB}{SB'}$ и такимъ образомъ и получается даваемое Ньютономъ выраженіе:

$$BE = T_2 V \cdot \frac{ST_2^2 \cdot SB}{SB'^3}$$

Нетрудно этой формулѣ придать и другой видъ, а именно, принимая орбиту земли за кругъ радіуса $a = 1$, получили бы углы:

$$\alpha_1 = T_1 ST_2 = \frac{2\pi}{365{,}25} \cdot (t_2 - t_1) = k\tau_1$$

$$\alpha_2 = T_2 ST_3 = \frac{2\pi}{365{,}25} \cdot (t_3 - t_2) = k\tau_2$$

Стрѣлка f въ этомъ кругѣ была бы

$$f = 2 \sin\frac{\alpha_1}{2} \cdot \sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{1}{2}\alpha_1 \alpha_2 = \frac{k^2}{2} \cdot \tau_1 \tau_2$$

если ограничиваться точностью до 4-хъ степеней промежутковъ времени, или угловъ α_1 и α_2. Значитъ при разстоянiи $B'S = r_2$ будетъ:

$$B'E' = \frac{k^2}{2} \cdot \frac{\tau_1 \tau_2}{r_2^{\,2}}$$

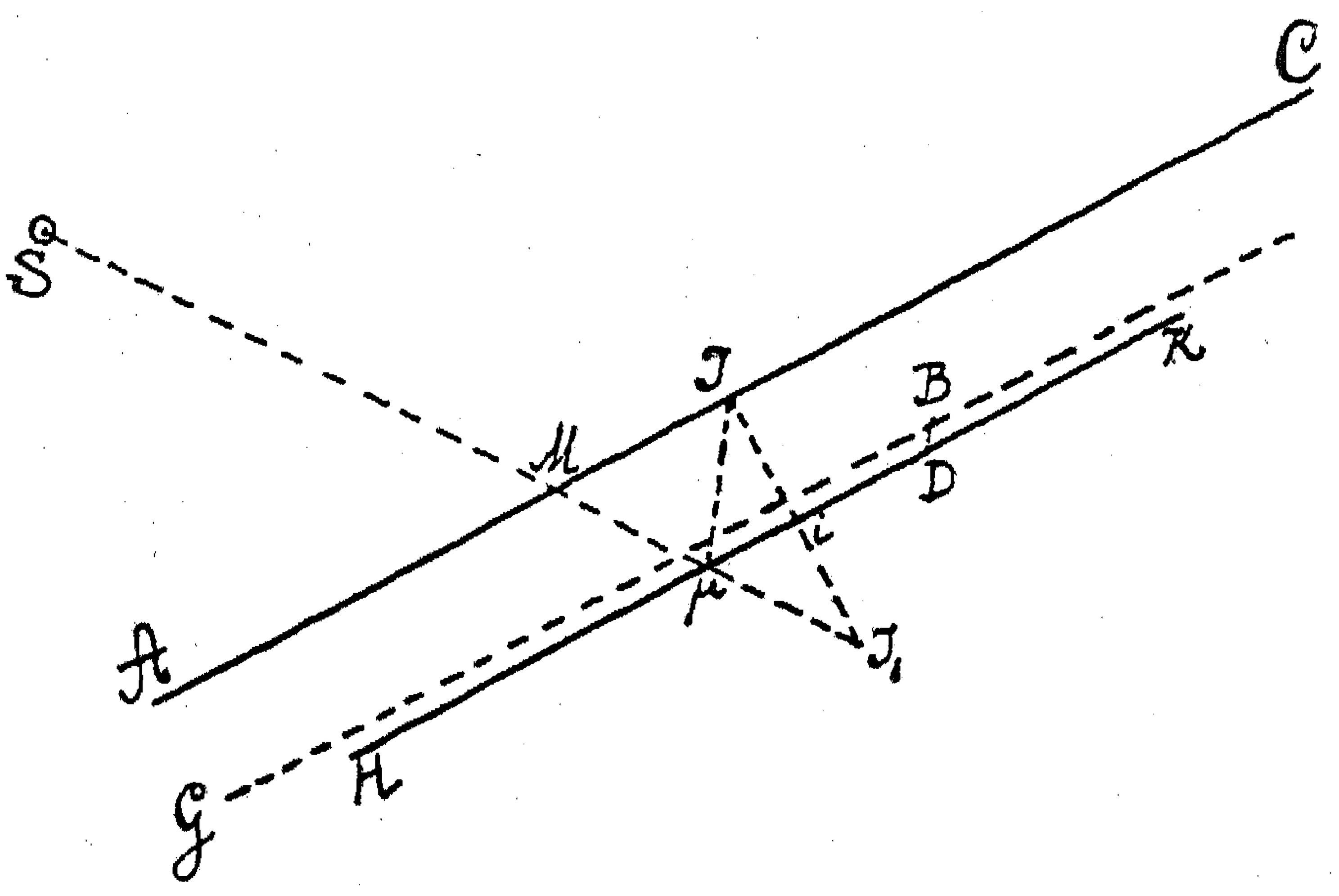
Ниже мы дадимъ другое точное выраженiе этой стрѣлки или стрѣлки μM (черт. 7) слѣдующее изъ леммъ.

П. 2. Поясненiй не требуетъ.

П. 3. Этотъ пунктъ является самымъ существеннымъ въ методѣ и приводимое построенiе, будучи *приближеннымъ*, требуетъ сравненiя съ *точнымъ* чтобы видѣть степень приближенiя.

Вообразимъ сперва что мы бы дѣлали построенiе въ плоскости самой орбиты, а затѣмъ его спроектируемъ на плоскость эклиптики.

Черт. 7.



Пусть S есть солнце—фокусъ параболы (чер. 7) AC ея хорда и HK паралельная хордѣ касательная къ вершинѣ сегмента; чтобы построить вершину μ въ силу леммы IX надо найти на касательной такую точку μ, соединивъ которую съ фокусомъ S и съ срединою хорды I получили бы *равныя* длины $I\mu = \mu M$, для этого очевидно стоитъ только по перпендикуляру къ хордѣ и касательной HK, отложить длину $iI_1 = iI$ и полученную точку I_1 соединить съ точкою S, въ пересѣченiи прямой $I_1 S$ съ касательною HK и получится искомая точка μ.

Но у насъ касательной къ вершинѣ не дано, а дана нѣкоторая точка лежащая на параболѣ B—близкая къ вершинѣ.

Въ силу той-же леммы уравненiе искомой параболы отнесенное къ касательной къ вершинѣ HK и сопряженному дiаметру μI будетъ

$$Y^2 = 2p_1 X$$

причемъ

$$2p_1 = 4S\mu.$$

Для точки B, абсцисса X есть BD, ордината μD, значитъ

$$DB = \frac{\mu D^2}{4S\mu}.$$

Съ другой стороны

$$I\mu = \frac{AI^2}{4S\mu}.$$

Значитъ

$$\frac{DB}{I\mu}=\left(\frac{\mu D}{AI}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

Но длина μD соотвѣтствуетъ пути проходимому кометою въ теченіе времени: $\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)-\tau_2=\frac{1}{2}(\tau_1-\tau_2)$, длина-же AI—времени $\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)$ слѣдовательно приближенно будетъ

$$DB=\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right)^2\cdot I\mu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (**)$$

Если DB настолько мало по сравненію съ $I\mu$, что можетъ быть пренебрегаемо, то прямая BG и можетъ быть принята за касательную, и по ней построена вершина параболы.

Во всякомъ случаѣ принявъ это въ первомъ приближеніи, снимемъ отъ полученнаго мѣста вершины разстояніе до точки B, расчислимъ BD по фор. (*) и нанеся точку D проведемъ исправленное положеніе касательной и по ней найдемъ исправленное мѣсто вершины μ_1.

Получивъ это мѣсто вершины согласно леммѣ XI расчисляемъ длину $I\mu$ или μM, по формулѣ:

$$I\mu=\mu M=\frac{1}{2}\cdot K^2\cdot\left(\frac{t_3-t_1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{SN^2}$$

причемъ K есть Гауссова постоянная и $SN=S\mu_1+\frac{1}{3}I\mu_1$, и получаемъ исправленную величину *стрѣлки* $I\mu$, пользуясь ею строимъ исправленное мѣсто касательной и т. д. пока два послѣдовательныя приближенія не будутъ совпадать.

Но Ньютонъ выполняетъ построеніе не въ плоскости орбиты а въ проекціи на плоскость эклиптики.

Для проекціи орбиты, которая очевидно также будетъ параболою, *солнце S уже не будетъ фокусомъ*, поэтому въ проекціи длины $I\mu$ и μM между собою *не равны* и выше приведеннаго *точнаго* построенія вершины параболы по данной хордѣ и касательной къ вершинѣ выполнить нельзя ибо мѣсто фокуса неизвѣстно.

Чтобы обойти это затрудненіе Ньютонъ и пользуется тѣмъ обстоятельствомъ, что величина μi мала по сравненію съ $S\mu$ и значитъ *линіи $S\mu$ и Si можно принять за паралельныя*, что онъ и дѣлаетъ откуда и слѣдуетъ даваемое имъ построеніе точки μ, т. е. проекціи вершины сегмента параболы; эта точка очевидно есть вмѣстѣ съ тѣмъ и вершина сегмента проектированной орбиты.

Для полученія второго приближенія слѣдовало бы расчислить длину μM проекціи стрѣлки, и эту исправленную длину отложить по направленію $S\mu$ отъ точки M и получили-бы исправленное положеніе касательной.

Но Ньютонъ величиною DB пренебрегаетъ, описывая свое построеніе, но разбирая его примѣръ и полученныя имъ числа мы увидимъ, что онъ ввелъ эту поправку, и прямо исправляетъ положеніе точки E, дѣлящей хорду въ отношеніи промежутковъ, причемъ $B\xi$ и $S\mu$ считаетъ паралельными и слѣдовательно длину BE равной длинѣ μM, отсюда и слѣдуетъ указанное въ П. 4 построеніе.

Но лемма XI даетъ *длину* $I\mu$, *которая равна* $M\mu$ *въ плоскости орбиты но не въ проекціи* и уголъ между $I\mu$ и $M\mu$ конечный, такъ что отношеніе проекцій этихъ длинъ можетъ отличаться на конечную величину отъ 1, въ каковомъ случаѣ упрощенное построеніе Ньютона не будетъ обладать любою степенью точности, а лишь ограниченной.

Очевидно, что обративъ вниманіе на то точное построеніе, которое надлежало-бы выполнять въ плоскости орбиты, нетрудно ввести въ описанное Ньютономъ построеніе и надлежащія поправки, въ тѣхъ случаяхъ когда ими пренебрегать нельзя, какъ мы подробнѣе покажемъ при разсмотрѣніи самаго примѣра приводимаго Ньютономъ.

По П. 5. Указанное въ леммѣ X разстояніе SP служащее для разсчета длины хорды $A'C'$ выражается формулою

$$SP = \frac{\left(S\mu' + \frac{1}{3}M'\mu'\right)^2}{S\mu'}$$

обозначая буквами со значками точки лежащія въ плоскости орбиты и коихъ проекціи обозначены тѣми-же буквами безъ значковъ.

Слѣдовательно будетъ

$$S\mu'^2 = S\mu^2 + IO^2$$

принимая приближенно что возвышеніе точки μ и точки I одинаковы

$$i'\lambda' = i\lambda \cdot \frac{S\mu'}{S\mu}.$$

Подставляя получимъ

$$SP = S\mu'\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{i\lambda}{S\mu}\right\}^2 = S\mu' + \frac{2}{3}i\lambda\cdot\frac{S\mu'}{S\mu} + \cdots$$

$$= S\mu' + \frac{2}{3}i\lambda + \cdots = \sqrt{\left(S\mu + \frac{2}{3}i\lambda\right)^2 + IO^2} = OD$$

пренебрегая величинами $\frac{i\lambda^2}{S\mu}$ и ей подобными.

П. 6. Поясненій не требуетъ.

П. 7 и 8. Точки F, f, φ, суть ничто иное какъ „ложныя положенія" точки Z. Ясно, что эту часть чертежа можно выполнять въ произвольномъ масштабѣ откладывая лишь при точкахъ A, a, α, длины пропорціональныя AF, af, $\alpha\varphi$, такъ чтобы проведя черезъ точки F, f, φ, согласную кривую (дугу круга по Ньютону) получить отчетливое пересѣченіе съ прямою T_1A, или вообще съ принятою условно за изображеніе оси $Aa\alpha$, служащей для построенія „ложныхъ положеній".

Послѣ того какъ получены точки A и C—проекціи мѣстъ кометы при первомъ и третьемъ наблюденіи на плоскость эклиптики дальнѣйшее опредѣленіе элементовъ построеніемъ настолько просто, что Ньютонъ не считаетъ нужнымъ даже упоминать о немъ.

Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ по перпендикулярамъ къ XZ въ точкахъ X и Z длины

$$A'Z = T_1 Z \cdot \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{и} \quad C'X = T_3 X \cdot \operatorname{tg} \beta_3$$

гдѣ β_1 и β_3 геоцентрическія широты, при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ получаемъ совмѣщенныя положенія мѣстъ кометы A' и C' на плоскости эклиптики.

Продоливъ прямую $A'C'$ до пересѣченія съ ея проекціей XZ въ точкѣ Ω—получаемъ точку принадлежащую линіи узловъ, соединивъ эту точку съ S—получаемъ линію узловъ, а значитъ и долготу восходящаго узла.

Вообразивъ что плоскость истинной орбиты совмѣщена съ плоскостью эклиптики поворотомъ около линіи узловъ, получаемъ точки A_1 и C_1, черезъ которыя и проводимъ параболу имѣющую свой фокусъ въ S. Эта парабола и есть искомая орбита, предполагая ее совмѣщенной съ эклиптикою.

Замѣтимъ, что выполняя совмѣщеніе точекъ A_1 и C_1 попутно получаемъ наклонность.

§ 8. Для перваго приложенія этой методы Ньютонъ беретъ комету 1680 года и изъ ряда ея наблюденій выбираетъ слѣдующія три

Число.	Ист. время.	Долгота солнца.	Долгота кометы.	Широта кометы.
1680 г. Декабря 21	$6^ч\ 36^м\ 59^с$	281° 6′ 44″	305° 8′ 12″	21° 42′ 13″ N
1681 г. Января 5	6 1 38	296 22 18	8 48 53	26 15 7
1681 г. „ 25	7 58 42	316 45 36	39 35 0	17 56 30

и получаетъ слѣдующіе элементы орбиты:

Долгота восход. узла	$271^\circ\ 53'$
Наклонность	$61^\circ\ 20'\frac{1}{3}$
Разстояніе перигелія отъ узла	$8^\circ\ 38'$
Долгота перигелія	$267^\circ\ 43'$
Широта перигелія	$7^\circ\ 34'\ S$
Параметръ	236,8
Площадь описываемая въ 1 сутки . . .	93585

предполагая что полуось земной орбиты $a = 10000$.

Комета описываетъ орбиту двигаясь по порядку знаковъ (движеніе прямое) и проходила черезъ перигелій 8 декабря 1680 г. въ $0^ч\ 4^м$ пополудни.

„Всѣ эти опредѣленія“ продолжаетъ Ньютонъ: „сдѣланы графически; пользуясь раздѣленнымъ на равныя части масштабомъ и откладывая углы по хордамъ пользуясь таблицею натуральныхъ синусовъ; я составилъ большой чертежъ (construendo schema satis amplum) въ которомъ полудіаметръ земной орбиты принятъ равнымъ $16\frac{1}{3}$ англійскихъ дюймовъ“.

Относительно этого чертежа, полагая $a = 10000$, Ньютонъ даетъ слѣдующія данныя:

$$ST_2 = 9842{,}1; \qquad T_2V = 455.$$

Взявъ

$$BT_2 = 5657$$

получаемъ

$$SB = 9747, \quad BE = 412, \quad S\mu = 9503, \quad i\lambda = 413$$

(при первомъ приближеніи).

При второмъ

$$BE = 421;\ OD = 10186;\ X = 8528{,}4;\ MN = 8450;\ MP = 8475;\ NP = 25.$$

Для дальнѣйшихъ приближеній Ньютонъ беретъ

$$T_2b = 5640$$

и тогда получается

$$T_1X = 4775 \quad \text{и} \quad T_3Z = 11322,$$

по которымъ затѣмъ и опредѣлены вышеприведенные элементы орбиты.

По этимъ элементамъ Ньютонъ вычисляетъ мѣста кометы и сличаетъ ихъ съ наблюденными, само собою разумѣется и для другихъ дней а не только для послужившихъ для построенія. Оказывается что разности по долготѣ не превышаютъ $2'$ по широтѣ $10'$.

Затѣмъ Ньютонъ приводитъ результаты вычисленій Галлея, который опредѣлилъ ту же орбиту „per calculum arithmeticum“ и тогда отклоненія вычисленныхъ мѣстъ отъ наблюденныхъ не превосходили 3′.

Для второго примѣра Ньютонъ беретъ комету 1682 года и опредѣляетъ для нея параболическую орбиту.

Здѣсь-же Ньютонъ указываетъ, что Галлей замѣтивъ сходство элементовъ у кометы 1682 года съ такою, которая появлялась черезъ промежутки по 75 лѣтъ, вычислилъ для нея эллиптическую орбиту, удовлетворявшую, съ доступною тогда точностью, всѣмъ наблюденіямъ.

Приведя затѣмъ еще нѣсколько примѣровъ Ньютонъ и приходитъ къ заключенію, что и кометы въ своемъ движеніи управляются закономъ всемірнаго тяготѣнія.

§ 9. Я попробовалъ вмѣстѣ съ С. В. Вяхиревымъ составить тотъ чертежъ о которомъ упоминаетъ Ньютонъ и въ томъ-же самомъ масштабѣ $a = 16^1/_3$ дюйма, буквально слѣдуя при выполненіи построеній приведеннымъ указаніямъ. (Чертежъ былъ показанъ на лекціи). Мы получили графически элементы близкіе къ Ньютоновымъ но, конечно, далеко не съ тою точностью.

При составленіи этого чертежа не трудно было убѣдиться, что вышеизложенныхъ указаній для графическаго опредѣленія орбиты не должно придерживаться буквально, а примѣнять попутно и „calculum arithmeticum“, и не все чертитъ на главномъ чертежѣ, а всѣ поправки вычерчивать на отдѣльномъ чертежѣ въ масштабѣ по крайней мѣрѣ въ 100 разъ болѣе крупномъ нежели главный чертежъ, на что не потребуется большого мѣста, но тогда и получится „schema satis amplum“, какъ о томъ будетъ разъяснено ниже.

Въ самомъ дѣлѣ, если длина $a = 10000$, изображается на чертежѣ $16^1/_3$ дюймами, т. е. 400 миллиметрами, то послѣдніе знаки такихъ чиселъ какъ 4775, 11322, 8475, 10186 и т. д. которые, какъ будетъ показано ниже, *вѣрные* изобразятся на чертежѣ величиною въ $^4/_{100}$ миллиметра, что далеко превышаетъ достижимую въ графическихъ построеніяхъ точность, или-же надо считать, что и въ графическомъ искусствѣ Ньютону была присуща та же — „vis prope divina“, какъ и его генію.

§ 10. Какъ видно, метода Ньютона обладаетъ такою наглядностью, и вмѣстѣ съ тѣмъ *подраздѣленіе* хорды на части пропорціональныя промежуткамъ времени совершается съ точностью далеко превосходящей ту, какъ это дѣлается въ методѣ Ольберса, что является естественное желаніе развить ее аналитически, т. е. Ньютоново построеніе выразить формулами и по нимъ произвести вычисленія орбитъ нѣкоторыхъ кометъ.

Подобное развитіе повидимому дѣлалось, по крайней мѣрѣ на это есть указаніе въ статьѣ Valz'а, помѣщенной въ прибавленіи къ Connaissance des Temps за 1835 г. Такъ Valz говоритъ, что въ 1744 году

De Chesaux въ своей работѣ о кометѣ этого года прилагаетъ вычисленія къ методѣ Ньютона, но мнѣ представилось, что проще развить всѣ нужныя формулы, нежели разыскать неизвѣстно гдѣ болѣе 150 лѣтъ тому назадъ напечатанную работу.

Къ развитію этихъ формулъ вновь побуждаетъ также и то обстоятельство, что метода Ньютона въ знаменитѣйшихъ и подробнѣйшихъ руководствахъ какъ то: Oppolzer-Lehrbuch der Bahnbestimmung, Klinkerfues — Theoretische Astronomie оба изданія, Bauschinger — Bahnbestimmung der Himmelskörper или вовсе не упоминается или упоминается мимоходомъ какъ графическая и не могущая доставлять достаточной точности результатовъ.

Между прочимъ Bauschinger въ историческомъ обзорѣ методовъ[1]) говоритъ: „Рѣшеніе Ньютона выполнялось графическими построеніями и было примѣнимо. Галлей опредѣлилъ помощію этого способа множество орбитъ и всѣ методы 18-го столѣтія болѣе или менѣе придерживаются этого рѣшенія. *Ньютонъ пользуется тѣмъ свойствомъ, что хорда раздѣляется среднимъ радіусомъ векторомъ пропорціонально временамъ т. е. онъ замѣняетъ, какъ замѣчаетъ Ламбертъ, сектора соотвѣтствующими треугольниками; чего недостаетъ его методѣ чтобы сдѣлать ее совершенной — это теоремы Эйлера-Ламберта, вмѣсто которой онъ довольствуется приближеннымъ соотношеніемъ между хордою, радіусами векторами и промежуткомъ времени*“.

Какъ видно изъ предыдущаго, все подчеркнутое невѣрно.

Ньютонъ не только не замѣняетъ секторовъ треугольниками (какъ то дѣлаютъ теперь въ методѣ Ольберса) но своею леммою VIII даетъ построеніе несравненно точнѣйшее; ясно, что разыскивая это построеніе онъ недовольствовался тою точностью, которую доставляло-бы подраздѣленіе хорды среднимъ радіусомъ векторомъ, и видно что это изумительное построеніе даже Ньютонъ нашелъ не сразу — не даромъ онъ называетъ разсматриваемую задачу „longe difficillimum“.

Лемма X связывающая длину хорды съ промежуткомъ времени и разстояніемъ отъ солнца до вершины сегмента имѣетъ совершенно то-же значеніе какъ и теорема Эйлера-Ламберта, ибо даетъ возможность находить длину хорды *не вычисляя* элементовъ орбиты и такимъ манеромъ составляетъ „ложныя положенія“ для разысканія неизвѣстной. Эта теорема Ньютона не есть приближенная а совершенно точная.

Такимъ образомъ метода Ньютона, будучи переведена на разсчетъ можетъ доставлять результатъ любой степени точности, ни въ чемъ не уступая методѣ Ольберса, которую мы изложимъ въ третьей бесѣдѣ нашей, а въ нѣкоторыхъ случаяхъ и превосходя ее.

Чтобы получить требуемыя формулы сдѣлаемъ слѣдующія обозначенія

---

[1]) Bahnbestimmung. Стр. 388.

$t_1\ \ t_2\ \ t_3$ — моменты наблюденій
$\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3$ — геоцентрич. долготы кометы
$\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3$ — геоцентрич. широты кометы
$L_1\ \ L_2\ \ L_3$ — долготы земли
$R_1\ \ R_2\ \ R_3$ — радіусы векторы земли
$\rho_1\ \ \rho_2\ \ \rho_3$ — укороченныя разстоянія кометы до земли т. е. проекціи истинныхъ разстояній на плоскость эклиптики.

$$\left.\begin{aligned}\tau_1&=k(t_2-t_1)\\ \tau_2&=k(t_3-t_2)\\ \tau_3&=k(t_3-t_1)\\ &=\tau_1+\tau_2\end{aligned}\right\}$$ Промежутки между наблюденіями выраженныя въ астрономической единицѣ времени.

$k\,(\log k=2{,}235814)$ — Гауссова постоянная.

Тогда мы будемъ имѣть

1) Координаты земли

$$\xi_i=R_i\cos L_i;\qquad \eta_i=R_i\sin L_i\qquad (i=1,\,2,\,3)\qquad (*)$$

2) Координаты кометы

$$x_i=\xi_i+\rho_i\cos\alpha_i;\ y_i=\eta_i+\rho_i\sin\alpha_i;\ z_i=\rho_i\operatorname{tg}\beta_i\qquad (i=1,\,2,\,3)\qquad (**)$$

3) Избравъ, какъ будетъ указано ниже, величину ρ_2, вычисляемъ координаты x_2, y_2, точки B, проекціи второго мѣста кометы, и проводимъ черезъ эту точку прямую $A'C'$ такъ чтобы ея отрѣзки $A'B:BC'=\tau_1:\tau_2$; разстоянія точекъ A' и C' до соотвѣтствующихъ мѣстъ земли обозначимъ черезъ ρ_1' и ρ_3', тогда обозначая черезъ l величину $\dfrac{A'C'}{\tau_3}$ и черезъ γ уголъ между направленіемъ прямой $A'C'$ и осью x-овъ, получимъ координаты точки A'

$$x_1'=x_2-l\tau_1\cos\gamma\qquad y_1'=y_2-l\tau_1\sin\gamma$$

координаты точки C' (1)

$$x_3'=x_2+l\tau_2\cos\gamma\qquad y_3'=y_3+l\tau_2\sin\gamma$$

Съ другой стороны тѣ-же координаты выражаются такъ

$$\begin{aligned}x_1'&=\xi_1+\rho_1'\cos\alpha_1 & y_1'&=\eta_1+\rho_1'\sin\alpha_1\\ x_3'&=\xi_3+\rho_3'\cos\alpha_3 & y_3'&=\eta_3+\rho_3'\sin\alpha_3\end{aligned}\qquad (2)$$

Откуда слѣдуютъ для опредѣленія $\rho_1'\,\rho_3'\ l$ и γ такія уравненія

$$\begin{aligned}\rho_1'\cos\alpha_1&=x_2-\xi_1-l\tau_1\cos\gamma & \rho_1'\sin\alpha_1&=y_2-\eta_1-l\tau_1\sin\gamma\\ \rho_3'\cos\alpha_3&=x_2-\xi_3+l\tau_2\cos\gamma & \rho_3'\sin\alpha_3&=y_2-\eta_3+l\tau_2\sin\gamma\end{aligned}$$

исключая изъ которыхъ $l\cos\gamma$ и $l\sin\gamma$ имѣемъ

$$\rho_1'\tau_2\cos\alpha_1+\rho_3'\tau_1\cos\alpha_3=(x_2-\xi_1)\tau_2+(x_2-\xi_3)\tau_1$$
$$\rho_1'\tau_2\sin\alpha_1+\rho_3'\tau_1\sin\alpha_3=(y_2-\eta_1)\tau_2+(y_2-\eta_3)\tau_1$$

Замѣтивъ, что $\tau_3=\tau_1+\tau_2$ мы представимъ рѣшенія этихъ уравненій въ такомъ видѣ

$$\left.\begin{aligned}\rho_1'&=l_1+\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{(x_2-\xi_3)\sin\alpha_3-(y_2-\eta_3)\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\\ \rho_3'&=l_3-\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{(x_2-\xi_1)\sin\alpha_1-(y_2-\eta_1)\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned}l_1&=\frac{1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\cdot\big((\xi_3-\xi_1)\sin\alpha_3-(\eta_3-\eta_1)\cos\alpha_3\big)\\ l_3&=\frac{1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\cdot\big((\xi_3-\xi_1)\sin\alpha_1-(\eta_3-\eta_1)\cos\alpha_1\big)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Эти формулы можно было бы написать и сразу изъ разсмотрѣнія чертежа, замѣтивъ что l_1 и l_3 суть разстоянія $T_1 Q$ и $T_3 Q$ отъ земли до точки Q — пересѣченія лучей $T_1 A$ и $T_3 C$, но мы предпочли аналитическій выводъ, чтобы не было никакихъ сомнѣній относительно знаковъ, и общности этихъ формулъ при всякихъ значеніяхъ входящихъ въ нихъ величинъ, считая всѣ углы отъ 0 до 360° какъ принято для долготы вообще.

Необходимо также обратить вниманіе, что эти выраженія содержатъ величины x_2 и y_2 *линейно*, слѣдовательно проистекающія изъ нихъ дифференціальныя формулы по измѣняемости этихъ перемѣнныхъ будутъ *абсолютно точныя,* при всякихъ значеніяхъ приращеній δx_2 и δy_2, а не только до первыхъ степеней этихъ приращеній, какъ то было бы при нелинейной зависимости.

Найдя по фор. (3) и (4) величины ρ_1' и ρ_3' вычисляемъ по формуламъ (2) координаты точекъ A' и C' и повѣряемъ все вычисленіе пропорціей

$$\frac{x_3'-x_1'}{x_2-x_1'}=\frac{y_3'-y_1'}{y_2-y_1'}=\frac{\tau_3}{\tau_1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Вычисливъ по формуламъ (**) при избранномъ значеніи ρ_2 координаты x_2, y_2, z_2 и по нимъ величины

$$\begin{aligned}d_2&=\sqrt{x_2^2+y_2^2}\\ r_2&=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}=\sqrt{d_2^2+z_2^2}\quad\ldots\ldots\ldots(6)\\ \operatorname{tg}\gamma_2&=\frac{y_2}{x_2}\end{aligned}$$

вычисляемъ величину стрѣлки f_0 по формулѣ

$$f_0 = \frac{1}{8}\tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Эта формула слѣдуетъ изъ леммы (XI) принявъ въ первомъ приближеніи $SN = r_2$ и сейчасъ-же исправляемъ найденное значеніе по формулѣ

$$f_1 = \frac{1}{8}\tau_3^2 \cdot \frac{1}{\left(r_2 + \frac{1}{3}f_0\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Проекція этой стрѣлки на плоскость эклиптики будетъ

$$BE = h = f_1 \cdot \frac{d_2}{r_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7'')$$

причемъ направленіе BE идетъ отъ точки B къ солнцу т. е. составляетъ съ осью x-овъ уголъ $180^\circ + \gamma_2$.

Слѣдуя Ньютонову построенію, хорду AC надо проводить черезъ точку E, а не черезъ точку B, какъ предположено при выводѣ формулъ (3), слѣдовательно надо ввести поправки, которыя выразятся такъ

$$\delta\rho_1' = \frac{\tau_3}{\tau_2} h \cdot \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

и (8)

$$\delta\rho_3' = -\frac{\tau_3}{\tau_1} h \frac{\sin(\gamma_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}$$

ибо

$$\delta x_2 = -h\cos\gamma_2; \qquad \delta y_2 = -h\sin\gamma_2$$

а значитъ соотвѣтствующіе избранному значенію ρ_2 значенія укороченныхъ разстояній ρ_1 и ρ_3 будутъ

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_1' + \delta\rho_1' \\ \rho_3 &= \rho_3' + \delta\rho_3' \end{aligned} \qquad (9)$$

Опредѣливъ величины ρ_1 и ρ_3 вычисляемъ координаты точекъ A и C или непосредственно по формуламъ (**) или по формуламъ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + \delta x_1'; \quad y_1 = y_1' + \delta y_1'; \quad z_1 = z_1' + \delta z_1' \\ x_3 &= x_3' + \delta x_3'; \quad y_3 = y_3' + \delta y_3'; \quad z_3 = z_3' + \delta z_3' \end{aligned} \qquad (10)$$

причемъ

$$\delta x_1' = \delta\rho_1' \cos\alpha_1; \quad \delta y_1' = \delta\rho_1' \sin\alpha_1; \quad \delta z_1' = \delta\rho_1' \operatorname{tg}\beta_1$$

и (11)

$$\delta x_3' = \delta\rho_3' \cos\alpha_3; \quad \delta y_3' = \delta\rho_3' \sin\alpha_3; \quad \delta z_3' = \delta\rho_3' \operatorname{tg}\beta_3$$

Найдя координаты $x_1 y_1$, $x_3 y_3$ точекъ A и C вычисляемъ длину проекціи хорды

$$c_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

и направленіе этой проекціи γ

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Сопоставивъ вышеприведенныя формулы съ даннымъ въ § 6 описаніемъ построенія Ньютона мы увидимъ, что мы воспроизвели первые два пункта этого построенія.

Слѣдуетъ теперь воспроизвести изложенное въ п. 3 построеніе поправокъ.

Для этого можно поступать двояко:

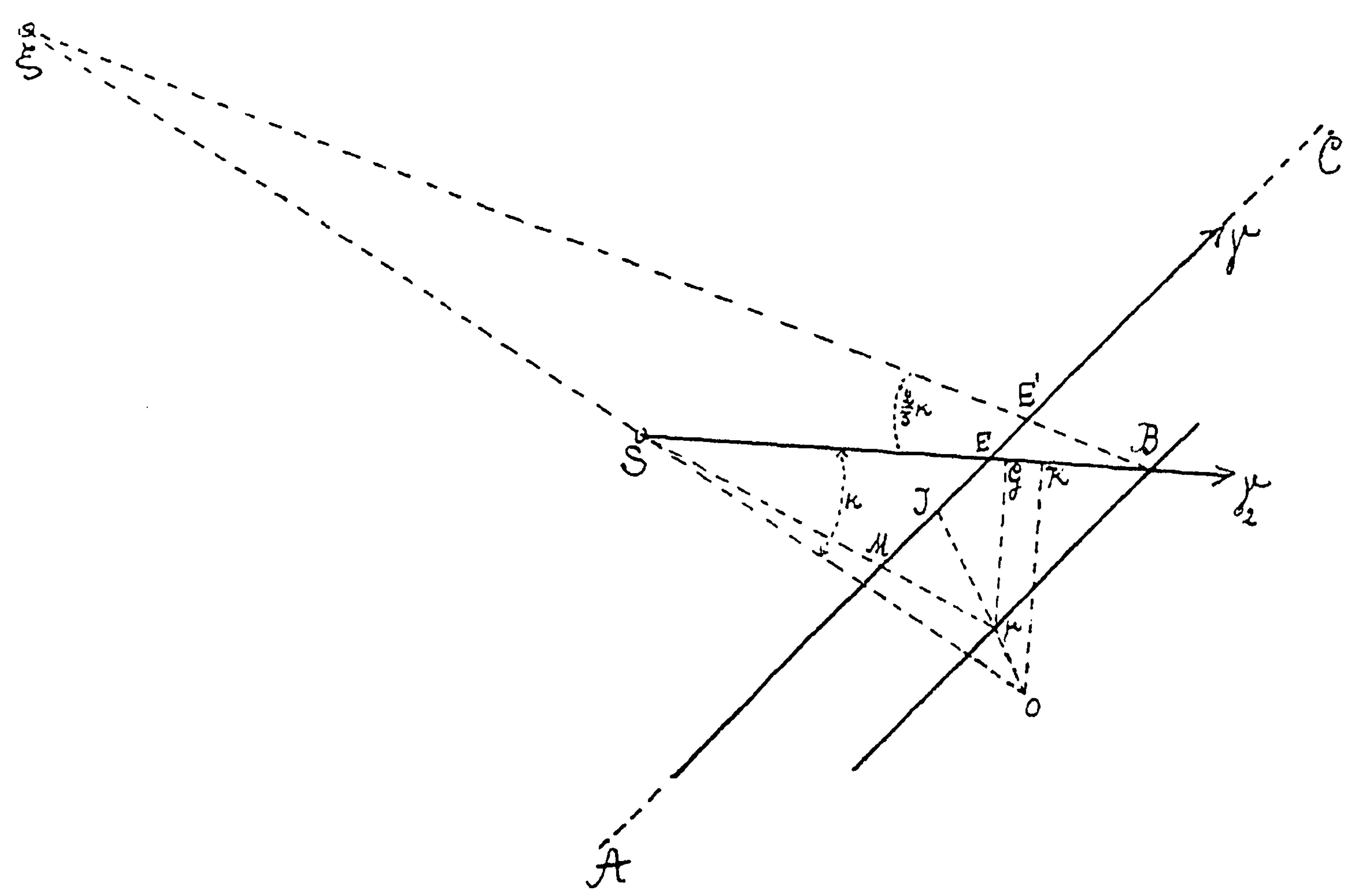
1) пользуясь только разсчетомъ

2) пользуясь и разсчетомъ и чертежомъ исполняемымъ въ столь крупномъ масштабѣ, чтобы опредѣляемыя графически малыя поправки обладали-бы точностью соотвѣтствующею точности всего вычисленія. Такъ напр. положимъ, что вычисленіе ведется на 5 знаковъ по пяти значнымъ логариѳмамъ и величина h оказалась 0,00125, а величины $\rho_1 \rho_3$ и r_2 какъ обыкновенно въ нѣсколько десятыхъ напр. $\rho_1 = 0{,}58725$; $\rho_3 = 0{,}87352$; $r_2 = 0{,}98575$, тогда принявъ за масштабъ чертежа $a = 100000$ mm. видимъ что h изобразится длиною въ 125 mm. всѣ величины связанныя съ h изобразятся приблизительно такими-же величинами и значитъ всѣ „поправочные паралелограммы“ такіе какъ $i\mu\lambda I$ и пр. свободно умѣстятся на обыкновенномъ листѣ писчей бумаги, но ясно, что ни на какомъ листѣ нельзя будетъ нанести точку S, разстояніе до которой выразилось-бы длиною въ 98 метровъ, а точка ξ разстояніе до которой составило-бы около 300 метровъ не умѣстилась-бы и на разбивочномъ плазѣ Балтійскаго Завода.

Но выносить на чертежъ этихъ точекъ нѣтъ и надобности, надо лишь знать направленіе разныхъ линій на нихъ идущихъ отъ точекъ чертежа, а эти направленія легко опредѣляются разсчетомъ. Судя по приведеннымъ у Ньютона числамъ такой или подобный этому чертежъ — по точности своей, и притомъ легко достижимой, и соотвѣтствующей требованіямъ онъ и назвалъ „schema satis amplum“.

Итакъ пусть черт. 8 изображаетъ схематически поправочное построеніе Ньютона.

Черт. 8.



Направленіе хорды AC есть γ, направленіе SB есть γ_2, разстоянія

$$AI = IC = \frac{1}{2} c_1, \quad AE = \frac{\tau_1}{\tau_3} c_1, \quad EC = \frac{\tau_2}{\tau_3} c_1, \quad BF = h$$

слѣдовательно

$$IE = \frac{1}{2}(AE - EC) = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_3} \cdot c_1 = \delta \quad \ldots \ldots (14)$$

Отмѣтимъ точку i, проекцію точки I на прямую $B\mu$ (на чертежѣ не показано) и т. к. разстояніе SB и $S\mu$ весьма велики по сравненію съ $B\mu$, то длины BE и $M\mu$ въ первомъ приближеніи считаетъ равными, такъ что

$$BE = \mu M = \mu I = h.$$

Затѣмъ имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} Bi &= -IE - h\cos(\gamma - \gamma_2) \\ i\mu &= -h \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) \\ B\mu &= -\delta - 2h\cos(\gamma - \gamma_2) = \varepsilon \\ BG &= -\varepsilon \cdot \cos(\gamma - \gamma_2) = \lambda \\ S\mu &= \quad SB - \lambda = d_2 - \lambda \\ \mu\mu' &= \quad z = z_2 + \varepsilon \cdot \operatorname{tg} j, \quad \text{причемъ } \operatorname{tg} j = \frac{z_3 - z_1}{c_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (15)$$

$$\left.\begin{aligned} S\mu' &= \sqrt{S\mu^2 + z^2} \\ SN &= S\mu' + \frac{1}{3} f_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Опредѣливъ величину SN на основанiи леммы XI вычисляемъ болѣе точное значенiе f а именно

$$f = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{1}{SN^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

и затѣмъ

$$h = f \cdot \frac{d_2}{r_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

если эта величина окажется чувствительно разнящейся отъ первоначальной, то повторяемъ вычисленiе. Получивъ окончательную величину h надо разчислить новое мѣсто E' точки E, иными словами длину EE'.

Для этого сперва расчисляемъ уголъ $k = BSO$, который будетъ весьма малый и выразится формулой

$$\sin k = k \cdot \sin 1'' = \frac{OK}{SO} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$OK = \varepsilon \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) + \frac{1}{2} h \cdot \sin 2(\gamma - \gamma_2).$$

Такъ какъ величины BS и SO близки къ равенству, то уголъ

$$\xi BS = \frac{2}{3} k$$

и изъ треугольника $EE'B$ слѣдуетъ

$$EE' = g = \frac{2}{3} k \cdot \frac{h}{\sin\left(\gamma - \gamma_2 + \frac{2}{3} k\right)} \cdot \sin 1''$$

или проще

$$g = \frac{2}{3} k \cdot \frac{h}{\sin(\gamma - \gamma_2)} \cdot \sin 1'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Величина EE' обыкновенно оказывается весьма малой, лишь въ томъ случаѣ, когда уголъ $\gamma - \gamma_2$ самъ малый, то g достигаетъ, влiяющаго на дальнѣйшiй разсчетъ, значенiя.

Замѣтимъ здѣсь-же что эта величина EE' и есть та поправка, которую построенiе Ньютона вноситъ въ построенiе, которымъ пользуются въ методѣ Ольберга, беря вмѣсто точки E' точку E.

Совмѣстное пользованіе чертежомъ и разсчетомъ будетъ состоять въ томъ, что всѣ направленія, какъ уже сказано, вычисляются, всѣ же длины такія какъ $B\mu$, μG, OK и пр. строятся и снимаются съ чертежа, а затѣмъ по формулѣ (20) расчисляется величина g.

Эта операція соотвѣтствуетъ п. 3. Ньютонова построенія.

Получивъ величину $g = EE'$ и ея направленіе т. е. γ или $180^\circ + \gamma$, скажемъ γ, расчисляемъ поправки

$$\left.\begin{aligned}\delta\rho_1 &= -\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot g\cdot\frac{\sin(\gamma-\alpha_3)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\\ \delta\rho_3 &= +\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot g\,\frac{\sin(\gamma-\alpha_1)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

ибо переносу точки E по направленію γ на длину g соотвѣтствуютъ приращенія

$$\delta x_2 = g\cos\gamma \quad \text{и} \quad \delta y_2 = g\sin\gamma$$

Присовокупивъ эти поправки къ найденнымъ выше значеніямъ ρ_1 и ρ_3, получимъ ихъ окончательныя значенія, соотвѣтствующія избранному значенію ρ_2.

Эта операція соотвѣтствуетъ п. 4 построенія Ньютона.

Остается теперь примѣнить лемму X и сличить длину хорды расчисленную по формулѣ

$$c = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2} \quad \ldots\ldots (13')$$

съ тою, которая по этой леммѣ соотвѣтствуетъ разстоянію отъ вершины сегмента до солнца и промежутку времени τ_3.

Длина этой хорды σ расчислится по формулѣ

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\,\tau_3}{\sqrt{SP}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

непосредственно вытекающей изъ этой леммы и основной формулы движенія по параболѣ

$$v^2 = \frac{2}{r}$$

гдѣ v есть скорость, r разстояніе до солнца и время τ выражено въ астрономическихъ единицахъ.

Величина-же SP по той-же леммѣ выражается такъ

$$SP = \frac{SN^2}{S\mu'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

величины-же SN и $S\mu'$ у насъ уже найдены.

Вычисливъ σ составляемъ разность

$$f(\rho_2) = c - \sigma = N$$

Если эта разность равна нулю, то величина ρ_2 и есть искомая, если-же нѣтъ, то принятое значеніе ρ_2 есть одно изъ „ложныхъ положеній".

Эта операція соотвѣтствуетъ 5-му п. Ньютонова построенія.

Если величину ρ_2 для перваго ложнаго положенія избирать не на обумъ, а поступать такъ какъ будетъ указано ниже, то принятое значеніе ρ_2 будетъ отличаться отъ истиннаго не болѣе 0.005 и для исправленія не будетъ надобности повторять разсчетъ полностью, а можно будетъ примѣнять дифференціальныя формулы.

Эти дифференціальныя формулы, непосредственно вытекающія изъ основныхъ, слѣдующія:

$$\delta d_2 = \delta\rho_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \gamma_2)$$

$$\delta\gamma_2 = \frac{1}{d_2} \cdot \delta\rho_2 \sin(\alpha_2 - \gamma_2)$$

$$\delta z_2 = \delta\rho_2 \cdot tg\,\beta_2$$

$$\delta r_2 = \frac{1}{r_2}\left[d_2 \cdot \delta d_2 + z_2\,\delta z_2\right]$$

$$\delta h = \frac{h}{d_2} \cdot \delta d_2 - \frac{3h}{r_2} \cdot \delta r_2$$

$$\delta\rho_1 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \cdot [\delta\rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \delta h \sin(\gamma_2 - \alpha_3) + h \cdot \cos(\gamma_2 - \alpha_3)\,\delta\gamma$$

$$\delta\rho_3 = -\frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \cdot [-\delta\rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \delta h \sin(\gamma_2 - \alpha_1) + h \cos(\gamma_2 - \alpha_1)\,\delta\gamma_2]$$

$$\delta c_1 = -\delta\rho_1 \cdot \cos(\gamma - \alpha_1) + \delta\rho_3 \cos(\gamma - \alpha_3)$$

$$\delta(z_3 - z_1) = \delta\rho_2 (tg\,\beta_3 - tg\,\beta_1)$$

$$\delta c = \frac{1}{c}\left[c_1\,\delta c_1 + (z_3 - z_1)\,\delta(z_3 - z_1)\right]$$

$$\delta f = -\frac{2f}{r_2} \cdot \delta r_2$$

$$\delta(SP) = \delta r_2 + \frac{2}{3}\,\delta f$$

$$\delta\sigma = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma^3}{\tau_3^2} \cdot \delta(SP)$$

$$\delta f(\rho_2) = \delta(c - \sigma) = \delta c - \delta\sigma$$

Вычисливъ величину $\delta\,(c-\sigma)$ мы получимъ ее въ видѣ $M\cdot\delta\rho_2$ гдѣ M будетъ имѣть нѣкоторое вполнѣ опредѣленное численное значеніе, тогда искомая поправка $\delta_1\rho_2$ будетъ

$$\delta_1\rho_2 = -\frac{N}{M} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (24)$$

Опредѣливъ эту поправку, вычисляемъ *непосредственно* величину r_2 по фор. (6). ибо соотношеніе между r_2 и ρ'_2 не линейное и слѣдовательно, если $\delta\rho_2$ имѣетъ значительную величину, то членами второго порядка относительно $\delta\rho_2$ нельзя бы было пренебрегать, и по найденному r_2, величины f и SP и k.

Вычисливъ также непосредственно величину c, составляетъ разность

$$c-\sigma = N_1$$

которая окажется обыкновенно весьма малой, по ней находимъ

$$\delta_2\rho_2 = -\frac{N_1}{M}$$

и окончательно будетъ

$$\delta\rho_2 = \delta_1\rho_2 + \delta_2\rho_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (25)$$

и

$$\rho_2 = \rho'_2 + \delta\rho_2$$

По найденной величинѣ $\delta\rho_2$ составляемъ $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_3$ и исправленныя значенія ρ_1, ρ_3 и c.

Этимъ и оканчивается первая часть работы т. е. опредѣленіе двухъ крайнихъ укороченныхъ разстояній, иными словами, опредѣленіе мѣстъ кометы въ пространствѣ при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ.

§ 11. Прежде чѣмъ идти-далѣе, пояснимъ, какимъ образомъ находить приближенное значеніе ρ_2, съ котораго начинать вычисленіе.

Это опредѣленіе дѣлается всего проще, выполняя, съ сравнительно грубымъ приближеніемъ, Ньютоново построеніе *безъ построенія поправочныхъ параллелограмовъ.*

Порядокъ дѣйствій такой:

1) Принять за масштабъ чертежа $a=200$ mm., тогда весь чертежъ обыкновенно умѣщается на простомъ листѣ писчей бумаги.

2) Вычисливъ координаты земли, нанести точки T_1, T_2, T_3.

3) Положить $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1$, и вычислить соотвѣтствующія значенія $x_1, y_1;\ x_2\ y_2;\ x_3\ y_3$, и, вынеся соотвѣтствующія точки, соединить ихъ соотвѣтственно съ точками T_1, T_2, T_3, получатся проложенія на плоскость эклиптики лучей на коихъ комета усматривалась.

4) Взять $\rho_2 = 1.00$ и, через полученную точку, построить хорду AC, и, расчитавъ величину самой хорды, сличить ее съ величиною σ расчисляемой по формулѣ

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\,\tau_3}{\sqrt{r_2}}$$

5) Если окажется что

$$c > \sigma,$$

то $\rho_2 < 1.00$ и наоборотъ.

6) Положимъ окажется $\rho_2 < 1.00$ тогда взять $\rho_2 = 0.50$ и повторить построеніе. Затѣмъ простая пропорція доставитъ болѣе близкое значеніе ρ_2 и найдутся два предѣла отличающихся на 0,10 между которыми ρ_2 заключается, т. е. для одного изъ этихъ значеній $c - \sigma$ отрицательное, для другого положительное.

7) Избрать новый масштабъ обыкновенно $a = 1000$ mm. или $a = 2000$ mm. и въ этомъ увеличенномъ масштабѣ составить новый чертежъ, на которомъ выполнить построеніе хорды AC, не дѣлая поправочныхъ параллелограмовъ, но нанося точку E, расчитывая h какъ указано выше.

Этотъ второй чертежъ и доставитъ значеніе ρ_2 съ точностью до 0.005 даже при грубомъ исполненіи карандашомъ, самыми обыкновенными чертежными инструментами, ибо величина 0.005 будетъ изображаться длиною въ 5 mm. или въ 10 mm.

Опредѣленное такимъ образомъ значеніе ρ_2 и можно принять за исходное для разсчета.

Повидимому и самъ Ньютонъ придерживался такого порядка работы, ибо вотъ его слова изъ сочиненія De mundi systemate, гдѣ онъ даетъ другой пріемъ опредѣленія кометныхъ орбитъ: „Haec omnia perago primum graphice opere celeri et rudi, dein graphice maiori cum diligentia, ultimo per computationem nurmeralem“, т. е. „все это я исполняю сперва графически наскоро и грубо, затѣмъ графически съ вящею тщательностью и наконецъ числовымъ разсчетомъ“.

Всякій же числовой разсчетъ у Ньютона исполнялся не иначе какъ „accuratissime“.

§ 12. Ранѣе чѣмъ приступать ко второй части работы, т. е. къ опредѣленію элементовъ орбиты по найденнымъ двумъ положеніямъ, полезно сдѣлать слѣдующую провѣрку.

Эйлеръ въ 1743, а затѣмъ Ламбертъ въ 1761 дали слѣдующее соотношеніе между двумя радіусами векторами r_1 и r_3, хордою s, промежуткамъ времени $t_3 - t_1$ при движеніи свѣтила по параболѣ:[1])

$$6k(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_3 - s)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

[1]) Эта формула будетъ выведена въ 3-ей бесѣдѣ.

причемъ знакъ $+$ надо брать въ томъ случаѣ, когда уголъ между радіусами векторами, считаемый по направленію движенія, иначе разность аномалій, болѣе 180°, знакъ $-$ когда менѣе, какъ то обыкновенно и бываетъ.

Найдя ρ_1 и ρ_3 вычисляемъ координаты $x_1\ y_1\ z_1$, x_3, y_3, z_3, и по нимъ радіусы векторы

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$r_3 = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}$$

и затѣмъ, по формулѣ Эйлера, величину хорды s.

Эта величина должна въ точности равняться величинамъ c и σ опредѣленнымъ по методѣ Ньютона, разность можетъ достигать лишь нѣсколькихъ единицъ послѣдняго знака, какъ неизбѣжной при вычисленіи по логариѳмамъ погрѣшности.

Для облегченія вычисленія по фор. (26) составлены таблицы; составленіе ихъ мы объяснимъ при изложеніи методы Ольберса, а здѣсь скажемъ только, что это вычисленіе дѣлается такъ:

$$s = (r_1 + r_3) \cdot \eta \cdot \mu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

причемъ

$$\eta = \frac{2k\,(t_3 - t_1)}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\tau_3}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27')$$

$\log \mu$ находятся въ таблицѣ по аргументу η.

Такая таблица помѣщена напр. въ Lehrbuch der Bahnbestimmung Oppolzer'a, въ курсѣ Астрономіи Faye, и наконецъ въ собраніи астрономическихъ таблицъ:—Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie.

Во всякомъ случаѣ, когда величины r_1 и r_3 вычислены, то, если нѣтъ подъ руками указанныхъ таблицъ, слѣдуетъ сдѣлать провѣрку поправочнаго построенія Ньютона, *исполняя это построеніе не въ проекціи на плоскость эклиптики, а въ плоскости самой орбиты.*

Такая провѣрка необходима по слѣдующей причинѣ: въ § 7, указывая *точное* построеніе, мы упоминали, что въ проекціи солнце не будетъ служить фокусомъ той параболы, которая представляетъ проекцію орбиты и тогда длины $I\mu$ и $M\mu$, а значитъ и $I\mu$ и $i\lambda$, не будутъ равны между собою и *ихъ отношеніе можетъ отличаться отъ 1 на конечную, а не на малую величину,* Ньютонъ-же, рекомендуя построеніе поправочныхъ параллелограмовъ, какъ бы тѣмъ самымъ неявно принимаетъ сохраненіе равенства $I\mu = M\mu = i\lambda$, иными словами, что какъ будто бы и въ проекціи солнце остается фокусомъ.

Въ большей части случаевъ, происходящая отъ такого допущенія, погрѣшность нечувствительна, при вычисленіи на пять и даже на шесть знаковъ, но когда величина h значительная, какъ то имѣетъ мѣсто въ примѣрѣ Ньютона, и уголъ $\gamma_2 - \gamma$ малый, то погрѣшность становится чувствительной даже при вычисленіи на пять знаковъ.

Когда r_1 r_3 и c вычислены, то по этимъ тремъ сторонамъ строится треугольникъ SAO и въ немъ снимается уголъ SIC гдѣ I есть средина хорды, послѣ чего или строится чертежъ въ достаточномъ масштабѣ, или производится разсчетъ, беря, само собою разумѣется, сперва

$$BE = f = \frac{1}{8}\tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Найдя, по этому построенію, величины $S\mu$, SN и SP и вычислимъ хорду

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\tau_3}{\sqrt{SP}}.$$

Если бы оказалась, что разница съ предыдущимъ значеніемъ чувствительна, то нѣтъ надобности повторять всего разсчета, а стоитъ только опредѣлить, соотвѣтствующее разности $c - \sigma$, значеніе $\delta\rho_2$, по нему $\delta\rho_1$ и $\delta\rho_3$, по этимъ послѣднимъ δx_1 δy_1 δz_1, δx_3 δy_3 δz_3 и затѣмъ

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \frac{1}{r_1}(x_1\,\delta x_1 + y_1\,\delta y_1 + z_1\,\delta z_1) \\ \delta r_3 &= \frac{1}{r_3}(x_3\,\delta x_3 + y_3\,\delta y_3 + z_3\,\delta z_3) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (28)$$

Результатъ получится тожественный съ даваемымъ теоремой Эйлера.

Если-же упомянутыя таблицы есть подъ руками, то, расчисливъ хорду, s или σ по формулѣ Эйлера, совершенно такъ-же исправляемъ r_1 и r_3.

Понятно, что всѣ дифференціальныя поправки расчисляются съ соотвѣтственно меньшей относительной точностью, т. е. или логариѳмической линейкѣ или по 3-хъ или 4-хъ значнымъ логариѳмамъ.

§ 13. Когда такимъ образомъ, величины

$$r_1,\ r_3 \quad \text{и} \quad c$$

найдены, то элементы орбиты опредѣляются по слѣдующимъ формуламъ, которыя мы выведемъ въ третьей бесѣдѣ нашей:

а) Геліоцентрическія координаты: широта θ и долгота λ

$$\begin{aligned} \sin\theta_1 &= \frac{z_1}{r_1} & \sin\theta_3 &= \frac{z_3}{r_3} \\ tg\,\lambda_1 &= \frac{y_1}{x_1} & tg\,\lambda_3 &= \frac{y_3}{x_3} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (29)$$

б) Долгота узла N.

$$tg\left[\frac{\lambda_1+\lambda_3}{2}-N\right]=\frac{\sin(\theta_1+\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_3)}\cdot tg\,\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_3)\quad\ldots\ldots\quad(30)$$

в) Наклонность i

$$\operatorname{tg} i=\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\sin(\lambda_1-N)}=\frac{\operatorname{tg}\theta_3}{\sin(\lambda_3-N)}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(31)$$

надо вычислить по обѣимъ формуламъ, согласіе должно быть *полнос.* въ этомъ контроль вычисленія.

г) Истинныя аномаліи v_1 и v_3

$$\sin^2\frac{1}{2}(v_3-v_1)=\frac{(p-r_1)(p-r_3)}{r_1 r_3}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(32)$$

гдѣ

$$2p=r_1+r_3+c$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}(v_3+v_1)=\frac{\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{1}{4}(v_3-v_1)\quad\ldots\ldots\quad(33)$$

д) Аргументы широты u_1; u_3

$$\cos u_1=\cos\theta_1\cos(\lambda_1-N);\quad \cos u_3=\cos\theta_3\cos(\lambda_3-N)\quad\ldots\quad(34)$$

или если углы u_1 и u_3 малые по формуламъ

$$\operatorname{tg} u_1=\frac{\operatorname{tg}(\lambda_1-N)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg} u_3=\frac{\operatorname{tg}(\lambda_3-N)}{\cos i}.$$

Контроль

$$u_3-u_1=v_3-v_1\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(35)$$

е) Аргументъ широты перигелія ω

$$\omega=u_1+v_1=u_3+v_3\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(36)$$

ж) Полупараметръ — разстояніе перигелія до солнца q

$$\sqrt{q}=\sqrt{r_1}\cos\frac{1}{2}v_1=\sqrt{r_3}\cos\frac{1}{2}v_3\quad\ldots\ldots\ldots\quad(37)$$

Надо вычислять по объимъ формуламъ, согласіе должно быть полное въ этомъ контроль.

з) Время прохожденія черезъ перигелій

$$t_1 - t_0 = q^{\frac{3}{2}}\ m_1$$
$$t_3 - t_0 = q^{\frac{3}{2}}\ m_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Величины m_1 и m_3 находятся въ т. наз. таблицѣ Barker'а параболическаго движенія соотвѣтственно по аргументамъ v_1 и v_3.

и) Для провѣрки надо вычислить мѣсто при *второмъ* наблюденіи и сличить вычисленныя по элементамъ геоцентрическія широты и долготы съ наблюденными. Формулы для этого служащія, очевидны изъ вышеприведенныхъ.

§ 14. Само собою разумѣется, что изучая Ньютона и желая показать аналитическое развитіе его методы, надо помнить его слова: „in scientiis addiscendis exempla non minus docunt quam praecepta" т. е. „при изученіи наукъ примѣры не меньше поучаютъ нежели правила".

Поэтому мы дадимъ рядъ примѣровъ вполнѣ подробно провычисленныхъ, въ той послѣдовательности и по той методѣ, какъ приведено въ §§ 10, 11, 12.

По поводу этихъ формулъ необходимо замѣтить, что ими лишь устанавливается послѣдовательность вычисленій и операцій, соотвѣтствующая, даваемому Ньютономъ, построенію, но для вычисленія имъ слѣдуетъ придать болѣе удобный видъ, это даетъ не только упрощеніе въ работѣ, но повышаетъ точность результатовъ, давая вмѣстѣ съ тѣмъ возможность пользоваться логариѳмами съ меньшимъ числомъ знаковъ.

Мы ограничимся лишь самыми необходимыми преобразованіями, такъ какъ образцы подобнаго рода преобразованій, и притомъ образцы доведенные до высшаго совершенства, мы укажемъ при изложеніи методы Гаусса, который на эту сторону дѣла обращалъ самое серьезное вниманіе.

Какъ видно изъ § 10 первая часть работы заключается въ вычисленіи двухъ родовъ величинъ ρ_1', ρ_3' и c, r_1 и r_3 затѣмъ поправокъ къ нимъ.

Эти поправки могутъ быть вычисляемые, по основному принципу всякаго рода численныхъ вычисленій *съ относительною точностью во столько разъ меньшею относительной точности основныхъ величинъ, во сколько разъ поправка меньше самой величины.*

Поэтому, если поправка составляетъ напримѣръ $^1/_{100}$ основной величины, то если эта величина вычисляется по семи-значнымъ логариѳмамъ, то поправку достаточно вычислять по пяти-значнымъ, а если сама величина вычисляется по пяти-значнымъ таблицамъ, то поправку можно вычислять по трехъ-значныхъ—иными словами по логариѳмической линейкѣ 50 сантиметровой длины.

Итакъ можно сказать, что вычисленіе поправокъ обладаетъ желаемою степенью простоты и точности даже если его выполнять по формуламъ § 10.

При вычисленіи основныхъ величинъ самымъ неудобнымъ, и вносящимъ наибольшую неточность, обстоятельствомъ является то, когда такая величина опредѣляется *какъ разность двухъ чиселъ, каждое изъ которыхъ въ большое число разъ ее превосходитъ*. Такъ напримѣръ, если число

$$a = b - c$$

причемъ

$$b = 15{,}78937$$

$$c = 15{,}77362$$

и въ нихъ послѣдній знакъ сомнителенъ, какъ то будетъ если эти числа получились отъ вычисленія по семи-значнымъ логариѳмамъ, то число $a = 0{,}01575$, будетъ имѣть всего *три* знака вѣрныхъ, а значитъ и въ дальнѣйшемъ всѣ числа, съ нимъ связанныя, будутъ обладать точностью всего до третьяго знака, и такимъ образомъ, *изъ за утраты въ разности $b-c$ первыхъ значащихъ цифръ утрачивается точность всего вычисленія.*

Съ этого рода обстоятельствомъ и приходится считаться въ особенности при вычисленіи величинъ ρ_1' и ρ_3', являющихся какъ разъ основными для всего дальнѣйшаго разсчета.

Поэтому формулы (3) и (4) и требуютъ такого преобразованія—чтобы всѣ тѣ большія величины, которыя пропадаютъ въ разности были-бы исключены въ самой формулѣ т. е. чтобы *эта разность вычислялась непосредственно, не вычисляя слагаемыхъ.*

Чтобы этого достигнуть, поступимъ такъ: въ выраженіяхъ (3) и (4) замѣнимъ величины x_2, y_2, ξ_1, η_1, ξ_3, η_3 ихъ величинами (*) и (**) тогда получимъ формулы

$$\begin{aligned} \rho_1' &= a_1 + b_1 \rho_2 \\ \rho_3' &= a_3 + b_3 \rho_2 \end{aligned} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

причемъ

$$b_1 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}; \qquad b_3 = \frac{\tau_3}{\tau_1} \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad \ldots \ldots (40)$$

величины же a_1 и a_3 опредѣляются равенствами:

$$\begin{aligned} &a_1 \cdot \tau_1 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = \tau_3 R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - \tau_2 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) - \tau_1 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) \\ &\text{и} \\ &-a_3 \tau_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = \tau_3 R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) - \tau_2 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) - \tau_1 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) \end{aligned} \quad (41)$$

Величины b_1 и b_3 имѣютъ вполнѣ удобный для вычисленія по непосредственно заданнымъ величинамъ видъ.

Исключеніе составляетъ тотъ случай, когда движеніе кометы по долготѣ весьма медленное и значитъ, вслѣдствіи самихъ погрѣшностей наблюденій, разности $\alpha_3-\alpha_2$ и $\alpha_3-\alpha_1$ не обладаютъ достаточной относительной точностью.

Этотъ случай равносиленъ тому, что линіи T_1A, T_2B и T_3C на чертежѣ Ньютона между собою почти параллельны; ясно что въ этомъ случаѣ построеніе Ньютона становится неопредѣленнымъ, и этотъ случай требуетъ отдѣльнаго разсмотрѣнія, которое мы и сдѣлаемъ, давъ вмѣстѣ съ тѣмъ примѣръ кометы 1781 года, гдѣ онъ какъ разъ имѣетъ мѣсто.

Итакъ въ общемъ случаѣ для вычисленія величинъ b_1 и b_3 послужатъ формулы (39).

Если бы мы стали вычислять величины a_1 и a_3 по фор. (41) и пожелали бы получить эти величины съ точностью соотвѣтствующей точности величинъ b_1 и b_3, то у насъ какъ разъ оказалось бы указанное выше неблагопріятное обстоятельство, ибо какъ мы покажемъ, величины a_1, a_3 всегда малыя, тогда какъ b_1 и b_3 близки къ 1, если только долготы кометъ измѣняются приблизительно пропорціонально времени.

Итакъ возьмемъ равенство, опредѣляющее величину a_1 и, замѣтивъ что $\tau_3=\tau_1+\tau_2$, напишемъ его такъ:

$$\begin{aligned}\tau_2\cdot a_1\ \sin(\alpha_3-\alpha_1)=&\ \tau_1\,[R_2\sin(\alpha_3-L_2)-R_3\sin(\alpha_3-L_3)]\\&+\tau_2\,[R_2\sin(\alpha_3-L_2)-R_1\sin(\alpha_3-L_1)]\end{aligned}$$

Затѣмъ въ первой скобкѣ сдѣлаемъ:

$$R_3=\frac{R_3+R_2}{2}+\frac{R_3-R_2}{2}$$

$$R_2=\frac{R_3+R_2}{2}-\frac{R_3-R_2}{2}$$

и во второй:

$$R_2=\frac{R_2+R_1}{2}+\frac{R_2-R_1}{2}$$

$$R_1=\frac{R_2+R_1}{2}-\frac{R_2-R_1}{2}$$

тогда получимъ:

$$\begin{aligned}\tau_2 a_1\sin(\alpha_3-\alpha_1)=&\ \tau_1(R_3+R_2)\ \sin\frac{1}{2}(L_3-L_2)\ \cos\left(\alpha_3-\frac{L_3+L_2}{2}\right)\\&-\tau_2(R_2+R_1)\ \sin\frac{1}{2}(L_2-L_1)\cdot\cos\left(\alpha_3-\frac{L_2+L_1}{2}\right)\\&-\tau_1(R_3-R_2)\cdot\cos\frac{1}{2}(L_3-L_2)\cdot\sin\left(\alpha_3-\frac{L_3+L_2}{2}\right)\\&+\tau_2(R_2-R_1)\ \cos\frac{1}{2}(L_2-L_1)\ \sin\left(\alpha_3-\frac{L_1+L_2}{2}\right)\end{aligned}$$

Эта формула была-бы уже болѣе благопріятна для вычисленія т. к. каждый ея членъ заключаетъ по малому множителю, и притомъ два послѣднихъ члена даже по весьма малому, ибо разности радіусовъ векторовъ земли за малыя промежутки времени весьма малы. Но всетаки продолжимъ преобразованіе дальше.

Возьмемъ сперва первые два члена, которые являются главными и сдѣлаемъ

$$E = \tau_1 (R_3 + R_2) \sin \frac{1}{2} (L_3 - L_2)$$

$$F = \tau_2 (R_2 + R_1) \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1)$$

и затѣмъ:

$$E = \frac{E+F}{2} + \frac{E-F}{2}$$

$$F = \frac{E+F}{2} - \frac{E-F}{2}$$

тогда эти два члена даютъ:

$$(E+F) \quad \sin \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \quad \sin \left(\alpha_3 - \frac{L_3 + 2L_2 + L_1}{4} \right)$$

$$+ (E-F) \cdot \cos \frac{1}{4} (L_3 - L_1) \cdot \cos \left(\alpha_3 - \frac{L_3 + 2L_2 + L_1}{4} \right)$$

Это выраженіе уже вполнѣ благопріятно для вычисленій, ибо числа E и F оба заключаютъ малаго множителя и оба *положительные* и почти равные между собою, ихъ сумма $E+F$ опредѣлится значитъ безъ всякой утраты точности, а затѣмъ эта малая положительная величина вновь множится на малаго множителя $\sin \frac{1}{4} (L_3 - L_1)$.

Разность $E-F$ можетъ быть вычислена или непосредственно, или слѣдующимъ образомъ: долготы земли измѣняются пропорціонально времени приблизительно по 1° въ сутки, значитъ величины $\frac{1}{2} (L_3 - L_2)$ и $\frac{1}{2} (L_2 - L_1)$ будутъ заключать столько градусовъ, сколько сутокъ въ соотвѣтствующемъ полу-промежуткѣ между наблюденіями, т. е. для новѣйшихъ наблюденій около 2-хъ, для такихъ малыхъ дугъ синусы пропорціональны угламъ и значитъ

$$\tau_1 \cdot \sin \frac{1}{2} (L_3 - L_2) = \tau_2 \sin \frac{1}{2} (L_2 - L_1)$$

а слѣдовательно

$$E-F=(R_3-R_1)\quad\tau_1\cdot\sin\frac{1}{2}(L_3-L_2)$$
$$=(R_3-R_1)\quad\tau_2\quad\sin\frac{1}{2}(L_2-L_1)\qquad\ldots\ldots(42)$$

а если вычислить оба эти выраженія и взять среднее, то $E-F$ могло бы быть получено съ такою точностью, которая превышаетъ ту съ каковою извѣстны R_3, R_1, и которая при первомъ вычисленіи орбиты, гдѣ возмущенія не принимаются во вниманіе, и гдѣ пренебрегаютъ паралаксомъ и аберраціей, не нужна.

Перейдемъ къ послѣднимъ двумъ членамъ выраженія a_1.

Дѣлаемъ

$$G=\tau_1(R_3-R_2)\cos\frac{1}{2}(L_3-L_2)$$

$$H=\tau_2(R_2-R_1)\cos\frac{1}{2}(L_2-L_1)$$

и затѣмъ

$$G=\frac{G+H}{2}+\frac{G-H}{2}$$

$$H=\frac{G+H}{2}-\frac{G-H}{2}$$

тогда эти два члена дадутъ:

$$+(G+H)\sin\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cdot\cos\left(\alpha_3-\frac{L_1+2L_2+L_3}{4}\right)$$

$$-(G-H)\cos\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cdot\sin\left(\alpha_3-\frac{L_1+2L_2+L_3}{4}\right).$$

Замѣтивъ, что углы $\frac{L_3-L_2}{2}$ и $\frac{L_2-L_1}{2}$ малые, такъ что косинусы ихъ весьма близки къ 1 и что произведенія $\tau_1(R_3-R_2)$ и $\tau_2(R_2-R_1)$ въ силу пропорціи

$$\frac{R_3-R_2}{\tau_2}=\frac{R_2-R_1}{\tau_1}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

равны между собою, видимъ что величина $G-H$ будетъ ничтожно малой и этимъ членомъ можно всегда пренебрегать.

Пропорція-же (*) имѣетъ мѣсто тѣмъ точнѣе чѣмъ измѣненія R происходятъ быстрѣе, когда-же эта пропорція не имѣетъ мѣста, т. е. вблизи перигея и апогея, то сами разности R_3-R_2 и R_2-R_1 ничтожно малы.

Итакъ окончательно имѣемъ:

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot \tau_2 \cdot \sin(\alpha_3-\alpha_1) = {} & (E+F)\sin\frac{1}{4}(L_3-L_1)\sin(\alpha_3-L_0) \\
& +(E-F)\cos\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cos(\alpha_3-L_0) \\
& +(G+H)\sin\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cos(\alpha_3-L_0) \\
& -(G-H)\cos\frac{1}{4}(L_3-L_1)\sin(\alpha_3-L_0)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots (43)
$$

и

$$
\begin{aligned}
-a_3\,\tau_1\sin(\alpha_3-\alpha_1) = {} & (E+F)\sin\frac{1}{4}(L_3-L_1)\sin(\alpha_1-L_0) \\
& +(E-F)\cos\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cos(\alpha_1-L_0) \\
& +(G+H)\sin\frac{1}{4}(L_3-L_1)\cos(\alpha_1-L_0) \\
& -(G-H)\cos\frac{1}{4}(L_3-L_1)\sin(\alpha_1-L_0)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots (43')
$$

гдѣ

$$
\begin{aligned}
E &= \tau_1(R_3+R_2)\sin\frac{1}{2}(L_3-L_2) \\
F &= \tau_2(R_2+R_1)\sin\frac{1}{2}(L_2-L_1)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots (44)
$$

$$
E-F=(R_3-R_1)\cdot\tau_1\cdot\sin\frac{1}{2}(L_3-L_2)=(R_3-R_1)\,\tau_2\sin\frac{1}{2}(L_2-L_1) \quad (42)
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \tau_1(R_3-R_2)\cos\frac{1}{2}(L_3-L_2) \\
H &= \tau_2(R_2-R_1)\cos\frac{1}{2}(L_2-L_1)
\end{aligned}
\qquad \ldots\ldots (45)
$$

и

$$
L_0=\frac{L_1+2L_2+L_3}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (46)
$$

Въ такомъ видѣ, хотя съ внѣшняго вида эти формулы и представляются сложнѣе фор. (3) и (4), но вычисленіе по нимъ гораздо проще, тѣмъ болѣе, что въ многихъ случаяхъ возможно ограничиваться первымъ членомъ.

Очевидно, что можно бы было соединить члены по-парно первый съ третьимъ и второй съ четвертымъ, но можно этого и не дѣлать, ибо это не вноситъ существеннаго упрощенія.

Вычисленіе хорды c можно производить или по формуламъ (12 и 13); но если бы оказалось, что разности координатъ $x_3 - x_1$ и $y_3 - y_1$ опредѣляются недостаточно точно, то слѣдуетъ поступить такъ:

Вычислить по формуламъ

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) - R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) \\ l_3 \cdot \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) - R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (47)$$

величины l_1 и l_3 и затѣмъ величины

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \rho_1 - l_1 \\ f_3 &= \rho_3 - l_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

тогда

$$c_1^2 = f_1^2 + f_3^2 - 2 f_1 f_3 \cdot \cos(\alpha_3 - \alpha_1) = (f_1 - f_3)^2 + 4 f_1 f_3 \cdot \sin^2 \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2} \quad (49)$$

и затѣмъ

$$c^2 = c_1^2 + (z_3 - z_1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Величины r_1 и r_3 хорошо опредѣляются по формуламъ

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d_1^2 + z_1^2 \\ r_3^2 &= x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = d_3^2 + z_3^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (51)$$

Но если бы пожелали избѣжать вычисленія координатъ земли $\xi_1, \eta_1, \xi_3, \eta_3$ (когда нѣтъ подъ руками таблицъ, гдѣ эти величины даются), то можно примѣнить формулы:

$$\left.\begin{aligned} d_1^2 &= R_1^2 + \rho_1^2 + 2 R_1 \rho_1 \cos(\alpha_1 - L_1) \\ &= (R_1 - \rho_1)^2 + 4 R_1 \rho_1 \cos^2 \frac{\alpha_1 - L_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (52)$$

и

$$\left.\begin{aligned} d_3^2 &= R_3^2 + \rho_3^2 + 2 R_3 \rho_3 \cos(\alpha_3 - L_3) \\ &= (R_3 - \rho_3)^2 + 4 R_3 \rho_3 \cos^2 \frac{\alpha_3 - L_3}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (52')$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= d_1^2 + z_1^2 \\ r_3^2 &= d_3^2 + z_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

§ 15. Для современныхъ весьма точныхъ наблюденій и при малыхъ промежуткахъ τ_1 и τ_2 не превышающихъ 5 дней, величина стрѣлки f оказывается столь малой, что величину ρ_2, достаточно близкую къ истинной, для дальнѣйшаго примѣненія дифференціальныхъ формулъ, можно получить, не строя чертежа, а пользуясь приближеннымъ разсчетомъ.

Въ самомъ дѣлѣ

$$f = \frac{1}{8}\tau_3^2 \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

при

$$t_3 - t_1 = 10, \qquad \lg\tau = \log k_3 (t_3 - t_1) = \bar{1}.2356$$

$$\lg\frac{1}{8}\tau_3^2 = \bar{3}.5671; \qquad \frac{1}{8}\tau_3^2 = 0.003\ldots$$

и слѣдовательно, если только r_2 не мало, то стрѣлка f выражается тысячными долями.

Тогда, вычисливъ a_1, b_1, a_3, b_3, l_1 и l_3 задаемъ $\rho_2 = 1$, вычисляемъ ρ'_1 и ρ'_2 и по нимъ хорду c съ грубымъ приближеніемъ т. е. не болѣе какъ на три знака по логариѳмической линейкѣ, и, вычисливъ также r_2, сличаемъ величины c и σ, расчисляя σ по формулѣ

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\,\tau_3}{\sqrt{r_2}}.$$

Затѣмъ беремъ $\rho_2 = 0.50$, поступаемъ такъ-же, послѣ чего составляемъ пропорцію и т. д., какъ пояснено выше относительно чертежа, дозволяющаго замѣнять приближенное вычисленіе построеніемъ.

§ 16. Перейдемъ теперь къ примѣрамъ.

Казалось бы естественнымъ за первый примѣръ и взять примѣръ самого Ньютона т. е. комету 1680 года; мы этотъ примѣръ и приведемъ, но въ заключеніе этой статьи, ибо этотъ примѣръ является наиболѣе труднымъ, и лучше начать для уясненія дѣла съ простѣйшихъ примѣровъ, доставляемыхъ новѣйшими болѣе точными наблюденіями, дозволяющими довольствоваться меньшими промежутками.

Итакъ для перваго примѣра возьмемъ тотъ, для котораго Bauschinger въ своей Bahnbestimmung дѣлаетъ полный разсчетъ по методѣ Ольберса.

Bauschinger производитъ вычисленіе по шестизначнымъ логариѳмамъ до $1/_{10}$ долей секунды въ углахъ, не указывая какими таблицами логариѳмовъ онъ пользуется, но видимое дѣло, такими, гдѣ аргументы даны черезъ 10″; мы же воспользуемся самыми обыденными семизначными таблицами Вега и будемъ вести вычисленіе основныхъ величинъ на семь знаковъ, не заботясь о безусловной вѣрности при выборкѣ послѣдняго знака т. е. наше вычисленіе будетъ подобно вычисленію по шестизначнымъ таблицамъ при тщательной выборкѣ.

Для наглядности мы пользовались чертежами, уменьшенныя копіи которыхъ прилагаются. Въ остальномъ примѣръ не требуетъ поясненій.

Примѣръ 1-ый.

Комета 1896 г. IV. Bauschinger. Bahnbestim. стр. 359.

№	t Sept. 1896.	α ☄	β ☄	L ♁	lg R
1	7.42259	171°22′ 49″.4	+59°46′ 6″.8	345°41′ 26″.2	0.003027
2	10.35812	176 22 51.9	61 27 43.8	348 32 48.8	0.002690
3	13.41354	182 11 53.2	63 3 56.7	351 31 26.2	0.002327

№	lg cos α	lg sin α	lg tg β	lg $(t_{i+1} - t_i)$	lg τ
1	$\bar{1}$.9950668 (n)	$\bar{1}$.1757256	0.2345186	0.4676865	$\bar{2}$.7032669
2	$\bar{1}$.9991332 (n)	$\bar{2}$.8001671	0.2645520	0.4850710	$\bar{2}$.7206524
3	$\bar{1}$.9996803 (n)	$\bar{2}$.5838205 (n)	0.2940674	0.7774957	$\bar{1}$.0130771

Вычисленіе координатъ земли.

№	lg cos L	lg sin L	lg ξ	lg η	ξ	η
1	$\bar{1}$.9863127	$\bar{1}$.3929744 (n)	$\bar{1}$.9893397	$\bar{1}$.3960014 (n)	0.9757525	−0.2488866
2	$\bar{1}$.9912649	$\bar{1}$.2979048 (n)	$\bar{1}$.9939549	$\bar{1}$.3005948 (n)	0.9861768	−0.1997997
3	$\bar{1}$.9952304	$\bar{1}$.1684859 (n)	$\bar{1}$.9975574	$\bar{1}$.1708129 (n)	0.9943916	−0.1481880

Координаты кометы при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.00$.

№	$\rho \cos \alpha$	$\rho \sin \alpha$	x	y	z
1	-0.9887	0.1499	-0.0129_6	-0.0990	1.716
2	-0.9980	0.0631	-0.0118	-0.1367	1.839
3	-0.9993	-0.0384_5	-0.0048_6	-0.1865	1.968

Координаты точекъ для составленія чертежа.

Масштабъ $a = 400$ mm.

Мѣста земли.

№	ξ mm.	η mm.
1	390.4	-99.6
2	394.4	-80.0
3	397.8	-59.2

Мѣста кометы.

№	$\rho = 1.00$		$\rho = 0.50$	
	x mm.	y mm.	x mm.	y mm.
1	-5.2	-39.6	192.6	-69.6
2	-4.7	-54.7	194.9	-67.3
3	-2.0	-74.6	197.8	-67.0

I. Опредѣленіе приближенной величины ρ_2 по чертежу.

1) $\rho_2 = 1.00$.

Чертежъ даетъ:

$c_1 = 62.5$ mm. $= 0.156$; $d_2 = 56$ mm. $= 0.140$; $z_2 = 1.84$; $\sqrt{2}\,\tau_3 = 0.1457$

$r_2 = \sqrt{3.39 + 0.02} = \sqrt{3.41} = 1.845$; $\sigma = 0.1074$

$\rho_1 = 1.00 + 24$ mm. $= 1.06$; $\rho_3 = 1.00 - 22$ mm. $= 0.945$

$z_1 = 1.716 + 0.103 = 1.819$; $z_3 = 1.968 - 0.108 = 1.860$; $z_3 - z_1 = 0.141$

$c = \sqrt{c_1^2 + (z_3 - z_1)^2} = \sqrt{0.0244 + 0.0199} = \sqrt{0.0443} = 0.2105.$

Такъ какъ c приблизительно равно 2σ, то надо взять ρ_2 такъ чтобы c_1 уменьшилось примѣрно вдвое, прикладывая масштабную линейку видимъ, что это будетъ когда ρ_2 близко къ 0.80, поэтому беремъ:

2) $\rho_2 = 0.80$.

Чертежъ даетъ:

$c_1 = 47.2$ mm. $= 0.118$; $d_2 = 95.2$ mm. $= 0.238$; $\rho_1 = 1.00 - 60.5$ mm. $= 1.00 - 0.151 = 0.849$;
$\rho_2 = 1.00 - 98$ mm. $= 1.00 - 0.245 = 0.755$; $z_1 = 1.457$; $z_3 = 1.486$; $z_3 - z_1 = 0.031$;

$$c = \sqrt{0.01395 + 0.00096} = 0.1218$$

$$r_2 = \sqrt{2.168 + 0.057} = 1.490 \qquad \sigma = \frac{0.1457}{\sqrt{1.490}} = 0.1199$$

$$c - \sigma = 0.1218 - 0.1199 = + 0.0019.$$

Согласіе настолько близкое, что не составляя даже болѣе крупнаго чертежа можно принять $\rho_2 = 0.80$ за исходное значеніе для вычисленій.

II. $\rho_2 = 0.80.$ $\log \rho_2 = \bar{1}.9030900.$

1) *Вычисленіе:* $x_2\ y_2\ z_2$.

$\lg \rho_2 \cos \alpha_2 = \bar{1}.9022232\,(n)$	-0.7984050	$x_2 = 0.1877718$
$\lg \rho_2 \sin \alpha_2 = \bar{2}.7032571$	$+0.0504960$	$y_2 = -0.1493037$
$\lg \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 = 0.1676420$		$z_2 = 1.471093.$

2) *Вычисленіе величинъ:* $a_1\ b_1\ a_3\ b_3$.

$R_1 = 1.006994$	$R_2 = 1.006213$	$R_3 = 1.005373$	
$R_3 + R_2 = 2.011586$	$\lg 0.3035386$	$R_3 - R_2 = -0.000840$	$\lg \bar{4}.9243\,(n)$
$R_2 + R_1 = 2.013207$	$\lg 0.3038884$	$R_2 - R_1 = -0.000781$	$\lg \bar{4}.8927\,(n)$
$\alpha_3 - \alpha_1 = 10°49'3''.8$	$\lg \sin \bar{1}.2734298$	$\lg \frac{\tau_3}{\tau_2} = 0.2924247$	
$\alpha_3 - \alpha_2 = 5\ 49\ 1.3$	$\lg \sin \bar{1}.0058322$	$\lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.3098092$	
$\alpha_2 - \alpha_1 = 5\ \ 0\ 2.5$	$\lg \sin \bar{2}.9403561$		

$$\frac{1}{2}(L_3 - L_2) = 1°29'18''.7 \qquad \frac{1}{2}(L_2 - L_1) = 1°25'41''.3 \qquad \frac{1}{2}(L_3 - L_1) = 2°55'\ 0''.0$$

$$L_0 = 348\ 34\ 37.5 \qquad \alpha_3 - L_0 = 193\ 37\ 15.7 \qquad \alpha_1 - L_0 = 182\ 48\ 11.9$$

а) *Вычисленіе:* b_1 *и* b_3.

$$\begin{aligned} \lg n_1 &= 1.0189949 \\ \lg \sin(\alpha_3 - \alpha_2) &= \bar{1}.0058322 \\ \hline \lg b_1 &= 0.0248271 \\ b_1 &= \mathit{1.0588322} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg n_3 &= 1.0363794 \\ \lg \sin(\alpha_2 - \alpha_1) &= \bar{2}.9403561 \\ \hline \lg b_3 &= \bar{1}.9767355 \\ b_3 &= \mathit{0.9478411} \end{aligned}$$

б) *Вычисленіе:* $E,\ F,\ G,\ H.$

$$\begin{aligned} \lg \tau_1 &= \bar{2}.703267 \\ \lg (R_3 + R_2) &= 0.303539 \\ \lg \sin \frac{L_3 - L_2}{2} &= \bar{2}.414585 \\ \hline \lg E &= \bar{3}.421391 \\ E &= 0.00263871 \\ E + F &= 0.00527591 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg \tau_2 &= \bar{2}.720652 \\ \lg (R_2 + R_1) &= 0.303888 \\ \lg \sin \frac{L_2 - L_1}{2} &= \bar{2}.396603 \\ \hline \lg F &= \bar{3}.421143 \\ F &= 0.00263720 \\ E - F &= 0.00000151 \end{aligned}$$

$\lg \tau_1 = \bar{2}.7033$	$\lg \tau_2 = \bar{2}.7207$
$\lg (R_3 - R_2) = \bar{4}.9243\ (n)$	$\lg (R_2 - R_1) = \bar{4}.8927\ (n)$
$\lg \cos \dfrac{L_3 - L_2}{2} = \bar{1}.9998$	$\lg \cos \dfrac{L_2 - L_1}{2} = \bar{1}.9998$
$\lg G = \bar{5}.6274\ (n)$	$\lg H = \bar{5}.6132\ (n)$
$G = -0.00004240$	$H = -0.00004104$
$G + H = -0.00008344$	$-(G - H) = +0.00000136$

$\lg (E + F)$	$\bar{3}.722297$	$\bar{6}.1790$	$\bar{5}.9212\ (n)$	$\bar{6}.1335$
$\dfrac{L_3 - L_1}{4}$	$\bar{2}.405687$	$\bar{1}.9999$	$\bar{2}.4057$	$\bar{1}.9999$
	$\bar{4}.127984$	$\bar{6}.1789$	$\bar{6}.3269\ (n)$	$\bar{6}.1334$
$\alpha_3 - L_0$	$\bar{1}.371989\ (n)$	$\bar{1}.9876\ (n)$	$\bar{1}.9876\ (n)$	$\bar{1}.3720\ (n)$
	$\bar{5}.499973\ (n)$	$\bar{6}.1665\ (n)$	$\bar{6}.3145$	$\bar{7}.5054\ (n)$
$\lg \dfrac{1}{\tau_2 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}$	2.005918	2.0059	2.0059	2.0059
	$\bar{3}.505891\ (n)$	$\bar{4}.1724\ (n)$	$\bar{4}.3204$	$\bar{5}.5113\ (n)$
	$+0.0032055$	-0.0001487	$+0.0002091$	-0.00003246

$$a_1 = -\mathit{0.0031776.}$$

	$\bar{4}.127984$	$\bar{6}.1789$	$\bar{6}.3269\ (n)$	$\bar{6}.1334$
$\alpha_1 - L_0$	$\bar{2}.689375\ (n)$	$\bar{1}.9995\ (n)$	$\bar{1}.9995\ (n)$	$\bar{2}.6894\ (n)$
$\lg \dfrac{1}{\tau_1 \sin (\alpha_3 - \alpha_1)}$	$2.023303\ (n)$	$2.0233\ (n)$	$2.0233\ (n)$	$2.0233\ (n)$
	$\bar{4}.840662$	$\bar{4}.2017$	$\bar{4}.3497\ (n)$	$\bar{6}.8461$
	-0.0006920	$+0.0001591$	-0.0002237	$+0.0000070$

$$a_3 = +\mathit{0.0006353.}$$

Итакъ:

$$\rho_1' = -0.0031776 + 1.0588322\ \rho_2$$
$$\rho_3' = 0.0006353 + 0.9478411\ \rho_2$$

и слѣдовательно при $\rho_2 = 0.80$ будетъ:

$$\rho_1' = 0.8438882 \qquad \lg \rho_1' = \bar{1}.9262849$$
$$\rho_3' = 0.7589082 \qquad \lg \rho_3' = \bar{1}.8801893.$$

3) *Повѣрка найденныхъ величинъ.*

$\lg \rho_1' \cos \alpha_1 = \bar{1}.9213517\ (n)$	-0.8343565	$x_1' = 0.1413960$
$\lg \rho_1' \sin \alpha_1 = \bar{1}.1020105$	$+0.1264767$	$y_1' = -0.1224099$
$\lg \rho_3' \cos \alpha_3 = \bar{1}.8798696\ (n)$	-0.7583498	$x_3' = 0.2360418$
$\lg \rho_3' \sin \alpha_3 = \bar{2}.4640098\ (n)$	-0.0291079	$y_3' = -0.1772959$

$x_3' - x_1' = 0.0946458$	$\bar{2}.9761014$	$y_3' - y_1' = -0.0548860$	$\bar{2}.7394616$
$x_2 - x_1' = 0.0463758$	$\bar{2}.6662917$	$y_2 - y_1' = -0.0268938$	$\bar{2}.4296522$
	0.3098097		0.3098094

$$\lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.3098092.$$

Разница въ 7-мъ знакѣ неизбѣжна вслѣдствіи накопленія погрѣшностей при вычисленіи по логариѳмамъ.

4) *Вычисленіе:* r_2, f, h, σ.

$\lg y_2 = \bar{1}.1740716\,(n)$ $\bar{1}.7940492$

$\lg x_2 = \bar{1}.2736304$ $\bar{1}.8936180$ $\bar{1}.3800124$

$\lg \operatorname{tg} \gamma_2 = \bar{1}.9004412\,(n)$ $\lg z_2 = 0.1676420$ $\bar{1}.9942986$ $0.1733434 = \lg r_2$

$\gamma_2 = 360° - 38°29'22''.1$ $\lg \operatorname{cotg} i = \bar{1}.2124704$ $r_2 = 1.490539$

$= 321\ 30'37''.9$ $\frac{2}{3} f_0 = 0.000398$

$SP = 1.490937$

$\lg \frac{1}{8} \tau_3^2 = \bar{3}.12205$ $\lg f_0 = 4.77538$ $\lg SP = 0.1734592$

$2 \lg' r_2 = \bar{1}.65332$ $\lg \cos i = \bar{1}.20667$ $\frac{1}{2} \lg SP = 0.0867296$

$\lg f = \bar{4}.77538$ $\lg h = \bar{5}.98204$ $\lg \sqrt{2}\, \tau_3 = \bar{1}.1635921$

$f = 0.0005962$ $h = 0.00009595$ $\lg \sigma = \bar{1}.0768625$

$\sigma = \mathbf{0.1193710.}$

5) *Вычисленіе поправокъ* $\delta\rho_1'$ *и* $\delta\rho_3'$ *и величинъ* ρ_1 *и* ρ_3.

$\gamma_2 = 321°30'38''$ $\gamma_2 = 321°30'38''$

$\alpha_3 = 182\ 11'53$ $\alpha_1 = 171\ 22\ 49$

$\gamma_2 - \alpha_3 = 139\ 18\ 45$ $\lg \sin \bar{1}.81423$ $\gamma_2 - \alpha_1 = 150\ \ 7\ 49$ $\lg \sin \bar{1}.69729$

$\lg h\ \bar{5}.98204$ $\lg h\ \bar{5}.98204$

$\lg n_1\ 1{,}01899$ $\lg(-n_3)\ \bar{1}.03638\,(n)$

$\lg \delta\rho_1' = \bar{4}.81526$ $\lg \delta\rho_3' = \bar{4}.71571\,(n)$

$\delta\rho_1' = 0.0006535$ $\delta\rho_3' = -0.0005196$

$\rho_1' = 0.8438882$ $\rho_3' = 0.7589082$

$\rho_1 = 0.8445417$ $\rho_3 = 0.7583886$

$\lg \rho_1 = \bar{1}.9266211$ $\lg \rho_3 = \bar{1}.8798918$

6) *Вычисленіе хорды с.*

$\lg \delta x_1' = \bar{4}.81533\,(n)$ $\delta x_1' = -0.0006536$ $\lg \delta x_3' = \bar{4}.71539$ $\delta x_3' = +0.0005193$

$\lg \delta y_1' = \bar{5}.99099$ $\delta y_1' = +0.0000979$ $\lg \delta y_3' = \bar{5}.29953$ $\delta y_3' = +0.0000199$

$x_1 = 0.1407424$ $y_1 = -0.1223120$ $x_3 = 0.2365611$ $y_3 = -0.1772760$

$\lg z_1 = 0.1611397$ $z_1 = 1.4492380$ $\lg z_3 = 0.1739592$ $z_3 = 1.4926543$

$y_3 - y_1 = -0.0549640$ $\bar{2}.7400783\,(n)$

$x_3 - x_1 = 0.0958187$ $\bar{2}.9814502$ $\bar{1}.9382309$ $\bar{1}.0432193$ $\bar{1}.9688072$

$\lg \operatorname{tg} \gamma = \bar{1}.7586281\,(n)$ $\bar{2}.6376528$

$\gamma = 360° - 29°50'22''.9 =$ $\lg \operatorname{tg} j = \bar{1}.5944335$ $\lg c = \bar{1}.0744121$

$= 330\ 9'37''.1$ $c = 0.1186894_5$

$c - \sigma = 0.1186894 - 0.1193710 = -0.0006816.$

7) *Дифференціальныя формулы.*

Данныя:

$d_2 = 0.2399$; $r_2 = 1.4905$; $c_1 = 0.1104$; $c = 0.1187$; $\gamma = 330°9'.6$ $\gamma_2 = 321°30'$;
$h = 0.00009595$; $\sigma = 0.1194$; $n_1 = 10.45$; $n_3 = 10.87$; $b_1 = 1.0588$ $b_3 = 0.9478$;

$$\delta d_2 = \delta\rho_2 \cdot \cos 145°7'.6 = -0.8204 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta\gamma_2 = \frac{1}{0.2399} \cdot \sin 145°7'.6 \cdot \delta\rho_2 = \frac{0.5716}{0.2399} \cdot \delta\rho_2 = 2.382\delta\rho_2$$

$$\delta z_2 = 1.839 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta r_2 = \frac{1}{1.490}[-0.2399 \cdot 0.8204 + 1.839 \cdot 1.471] = 1.685 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta f = -2 \cdot \frac{0.000596}{1.490} \cdot 1.685 \cdot \delta\rho_2 = -0.001335 \cdot \delta\rho_2;$$

$$\delta h = \left(-\frac{0.000096}{0.2399} \cdot 0.8204 - 3 \cdot \frac{0.000096}{1.490} \cdot 1.685\right)\delta\rho_2 = -0.000654;$$

$$\delta\rho_1 = [1.0588 - 10.45 \cdot 0.000654 \cdot 0.6518 + 10.45 \cdot 0.000096 \cdot 2.382 \cdot (-0.7581)] \cdot \delta\rho_2 = 1.0525 \cdot \delta\rho_2;$$

$$\delta\rho_3 = [0.9478 - 10.87 \cdot 0.000654 \cdot 0.4992 + 10.87 \cdot 0{,}000096 \cdot 2.382 \cdot (-0.8770)] \cdot \delta\rho_2 = 0.9421 \cdot \delta\rho_2;$$

$$\delta c_1 = (-1.0525 \cdot \cos 158°46'.8 + 0.9421 \cdot \cos 147°57'.7)\,\delta\rho_2 = (0.98125 - 0.79862)\,\delta\rho_2 = +0.1826_3\,\delta\rho_2;$$

$$\delta(z_3 - z_1) = (0.9421 \cdot \operatorname{tg}\beta_3 - 1.0525 \cdot \operatorname{tg}\beta_1) \cdot \delta\rho_2 = (1.8543 - 1.8061)\,\delta\rho_2 = 0.0482 \cdot \delta\rho_2;$$

$$\delta c = \frac{1}{0.1187}[0.1104 \cdot 0.1826 + 0.0434 \cdot 0.0482] \cdot \delta\rho_2 = \frac{0.02217}{0.1187} \cdot \delta\rho_2 = 0.1868\,\delta\rho_2;$$

$$\delta(SP) = 1.685 \cdot \delta\rho_2 \qquad \lg\frac{1}{4\tau_3^2} = 1.3718$$

$$\delta\sigma = -0.0674 \cdot \delta\rho_2 \qquad 3\lg\sigma = \bar{3}.2306$$

$$\lg 1.685 = 0.2266$$

$$\delta(c - \sigma) = +0.2542 \cdot \delta\rho_2 \qquad \bar{2}.8290$$

Значитъ

$$\delta\rho_2 = +\frac{0.0006816}{0.2542} = 0.002681 \qquad \lg 0.0006816 = \bar{4}.83353$$

$$\lg 0.2542 = \bar{1}.40518$$

$$\lg\delta\rho_2 = \bar{3}.42835$$

II

Второе приближеніе: $\rho_2 = \mathbf{0.802681}$.

$\rho_2 = \mathbf{0.802681}$.

8) *Вычисленіе поправокъ и исправленныхъ величинъ:*

$\lg\delta\rho_1 = \bar{3}.45057$	$\rho_1 =$	$0.8445417 + 0.0028221 = 0.8473638$
$\lg\delta\rho_3 = \bar{3}.40245$	$\rho_3 =$	$0.7583886 + 0.0025261 = 0.7609147$
$\lg\delta x_1 = \bar{3}.44564\,(n)$	$x_1 =$	$0.1407424 - 0.0027903 = 0.1379521$
$\lg\delta y_1 = \bar{4}.62630$	$y_1 =$	$-0.1223120 + 0.0004230 = -0.1218890$
$\lg\delta z_1 = \bar{3}.68509$	$z_1 =$	$1.4492380 + 0.0048428 = 1.4540808$
$\lg\delta x_2 = \bar{3}.42748\,(n)$	$x_2 =$	$0.1877718 - 0.0026760 = 0.1850958$
$\lg\delta y_2 = \bar{4}.22852$	$y_2 =$	$-0.1493037 + 0.0001692 = -0.1491345$
$\lg\delta z_2 = \bar{3}.69290$	$z_2 =$	$1.4710990 + 0.0049305 = 1.4760295$
$\lg\delta x_3 = \bar{3}.40213\,(n)$	$x_3 =$	$0.2365611 - 0.0025242 = 0.2340369$
$\lg\delta y_3 = \bar{5}.98627\,(n)$	$y_3 =$	$-0.1772760 - 0.0000969 = -0.1773729$
$\lg\delta z_3 = \bar{3}.69652$	$z_3 =$	$1.4926543 + 0.0049719 = 1.4976262$

9) *Вычисленіе длины хорды c.*

$y_3 - y_1 = -0.0554839$	$\bar{2}.7441670\,(n)$	$\bar{1}.6990246$		
$x_3 - x_1 = 0.0960848$	$\bar{2}.9826548$	$\bar{1}.9375124$	$\bar{1}.0451424$	$\bar{1}.9688919$
$z_3 - z_1 = 0.0435454$	$\bar{1}.7615122\,(n)$		$\bar{2}.6389423$	
	$\gamma = 360° - 30°0'15''$		$\lg \operatorname{tg} i = \bar{1}.5937999$	$\lg c = \bar{1}.0762505$
	$= 329°\,59'45''$		$i = 21°25'41''.6$	$c = \mathbf{0.1191929.}$

По разностямъ получается:

$$\delta c = 0.0005009$$
$$c' = 0.1186894$$
$$c = 0.1191903.$$

10) *Вычисленіе r_2 по координатамъ $x_2\, y_2\, z_2$.*

$\lg y_2 = \bar{1}.1735781\,(n)$	$\bar{1}.7975478$			
$\lg x_2 = \bar{1}.2673966$	$\bar{1}.8913663$	$\bar{1}.3760303$		
$\lg \operatorname{tg} \lambda_2 = \bar{1}.9061815\,(n)$		0.1690952	$\bar{1}.9944402$	
$\lambda_2 = 360° - 38°51'32''.1$		$\lg \operatorname{cotg} \theta_2\ \ \bar{1}.2069351$		$\lg r_2 = 0.1746550$
$321°8'27''.9$		$\theta_2 = 80°51'5''.8$		$r_2 = \mathbf{1.495048.}$

По разностямъ получается:

$$\delta r_2 = 0.004519$$
$$r_2' = 1.490539$$
$$r_2 = 1.495058.$$

11) *Вычисленіе угла ω между хордою и среднимъ радіусомъ векторомъ.*

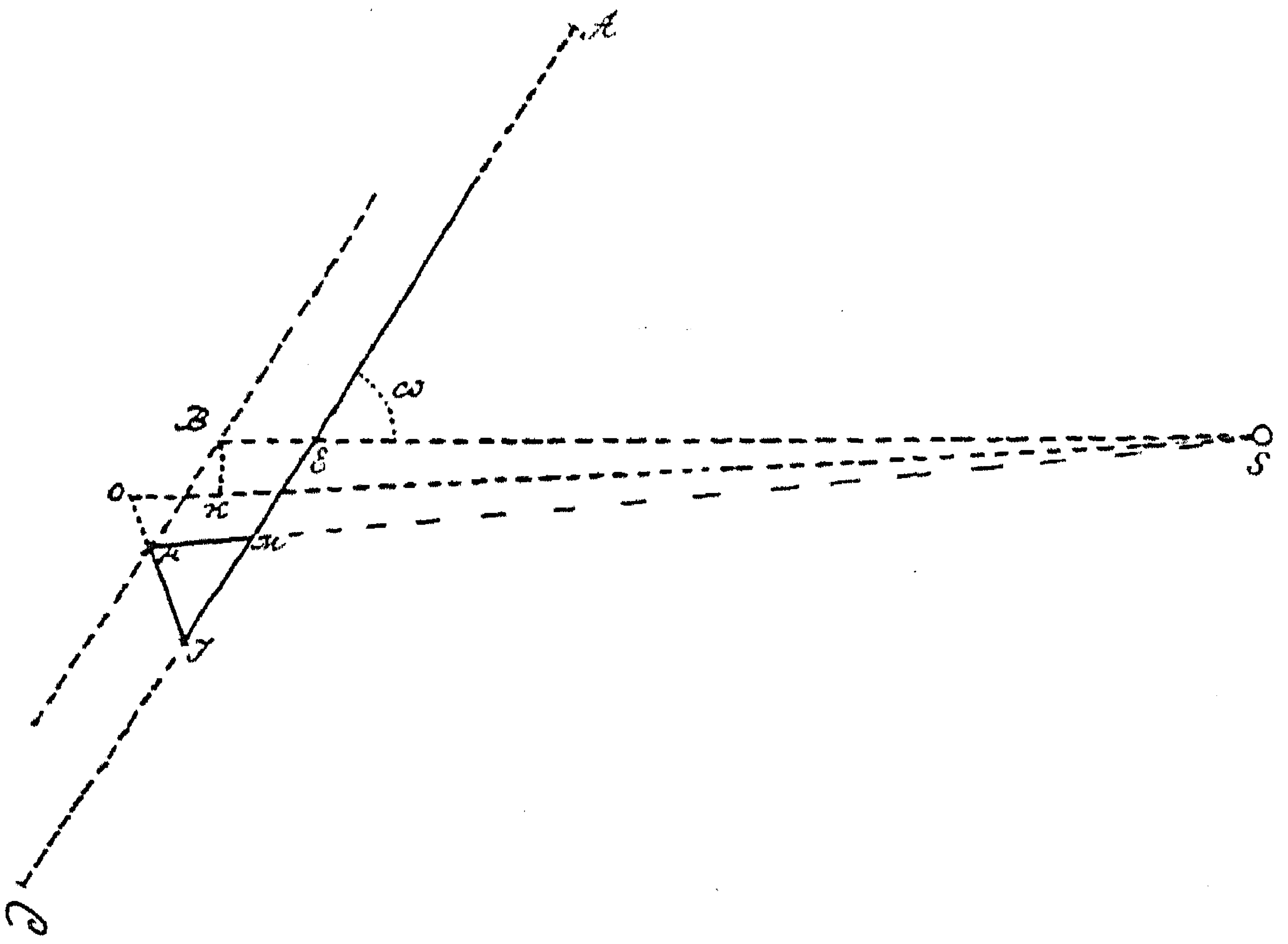
$$\cos\omega = \sin\theta_2 \sin i + \cos\theta_2 \cos i \cos(\gamma - \lambda_2) = \frac{\sin\theta_2 \sin(i+\varphi)}{\cos\varphi};\quad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\theta_2 \cos(\gamma - \lambda_2)$$

$\theta_2 = 80°51'.1$	$\lg \operatorname{cotg}\ \ \bar{1}.10243$	$\lg \sin\ \ \bar{1}.99444$	$\lg c = \bar{1}.0762505$
$\gamma - \gamma_2 = 8\ \ 7.3$	$\lg \cos\ \ \bar{1}.99562$	$\lg \sin(\varphi + i)\ \ \bar{1}.67965$	$\lg \frac{\tau_2}{\tau_3} = \bar{1}.7075753$
	$\lg \operatorname{tg}\varphi\ \ \bar{1}.09805$	$\lg \sec\varphi\ \ 0.00338$	$\lg EC = \bar{2}.7838258$
	$\varphi = 7°\ 8'.6$	$\lg \cos\omega\ \ \bar{1}.67747$	$EC = 0.06078910$
	$i = 21\ 25.7$	$\omega = 61°35'.1$	$AE = 0.0584038$
	$\varphi + i = 28°34'.3$		$2IE = 0.0023853$
			$IE = 0.001192.$

12) *Схема построенія Ньютоновыхъ поправокъ въ плоскости орбиты:*

$$B\mu = -2f\cdot\cos\omega + EI = -2\cdot 0.0005962\cdot 0.4784 + 0.001192 = 0.001192 - 0.000570 = 0.000622$$
$$S\mu = r_2 + B\mu\cdot\cos\omega = r_2 + 0.000294$$
$$SP = r_2 + 0.000689$$

Черт. 9.



$$r_2 = 1.495048$$
$$\underline{689}$$
$$SP = 1.495737$$
$$\lg SP = 0.1748552$$
$$\frac{1}{2}\lg SP = 0.0874276$$
$$\underline{\lg \sqrt{2}\,\tau_3 = \bar{1}.1635921}$$
$$\lg \sigma = \bar{1}.0761645$$
$$\sigma = 0.1191696.$$

Итакъ при $\rho_2 = 0.802681$ будетъ

$$c - \sigma = 0.1191929 - 0.1191696 = + 0.0000233.$$

Слѣдовательно:

$$\delta\rho_2 = -\frac{0.0000233}{0.2542} = -0.0000916$$

и окончательно будетъ

$$\rho_2 = \mathbf{0.8025894.}$$

$$\rho_1 = 0.8473638 - 0.0000963 = 0.8472675$$
$$\rho_3 = 0.7609147 - 0.0000863 = 0.7608284$$
$$c = \sigma = \mathbf{0.1191758.}$$

По этимъ значеніямъ вычисляемъ r_1 и r_2 и повѣряемъ величину хорды по формулѣ Эйлера.

При $\rho_2 = 0.8025894$ имѣемъ:

$$x_1 = 0.1379521 + 0.0000953 = 0.1380474$$
$$y_1 = -0.1218890 - 145 = -0.1219035$$
$$z_1 = 1.4540808 - 1653 = 1.4539155$$
$$x_3 = 0.2340369 + 862 = 0.2341231$$
$$y_2 = -0.1773729 + 33 = -0.1773696$$
$$z_3 = 1.4976262 - 1699 = 1.4974563.$$

Вычисленіе r_1 и r_3.

$\lg y_1 = \bar{1}.0860161\,(n)$	$\bar{1}.8208038$			
$\lg x_1 = \bar{1}.1400282$	$\bar{1}.8748159$	$\bar{1}.2652123$		
$\lg \operatorname{tg} \lambda_1 = \bar{1}.9459879\,(n)$		0.1625391	$\bar{1}.9965434$	
$\lambda_1 = 360° - 41°26'46''.6$		$\lg \operatorname{cotg} \theta_1 = \bar{1}.1026732$		$\lg r_1 = 0.1659957$
$= 318\ 33'13''.4$		$\theta_1 = 82°46'50''.9$		$r_3 = 1.465534$

$\lg y_3 = \bar{1}.2488792\,(n)$	$\bar{1}.7809404$			
$\lg x_3 = \bar{1}.3694442$	$\bar{1}.9015054$	$\bar{1}.4679388$		
$\lg \operatorname{tg} \lambda_3 = \bar{1}.8794350\,(n)$		0.1753541	$\bar{1}.9918020$	
$\lambda_3 = 360° - 37°8'50''.1$	$\lg \operatorname{cotg} \theta_3 =$	$\bar{1}.2925847$		$\lg r_3 = 0.1835521$
$= 322\ 51'9''.9$	$\theta_3 =$	$78°54'8''.3$		$r_3 = 1.529992$

$r_1 = 1.465534$	$\lg (r_1 + r_3) =$	0.4758926	$\bar{1}.2861611$	
$r_3 = 1.525992$		0.2379463	$\bar{1}.3141071$	
$r_1 + r_3 = 2.991526$		0.7138389	$\bar{2}.6002682$	0.039835
			287	
			0.4758926	
			$\bar{1}.0761895$	
		$\sigma =$	$\mathbf{0.1191762.}$	

По формулѣ Ньютона было $\sigma = 0.1191758$ т. е. согласіе вполнѣ удовлетворительное.

Итакъ окончательно имѣемъ:

$r_1 = 1.465534$	$\lambda_1 = 318°33'13''.4$	$\theta_1 = 82°46'50''.9$
$r_3 = 1.525992$	$\lambda_3 = 322\ 51\ \ 9.9$	$\theta_3 = 78\ 54\ \ 8.3$
$c = 0.119176.$		

По этимъ величинамъ и вычисляемъ элементы орбиты.

Вычисленіе элементовъ орбиты:

$\theta_1 = 82°46'50''.9$	$\lambda_1 = 318°33'13''.4$	$\lg \sin (\theta_1 + \theta_3) = \bar{1}.4973060$
$\theta_3 = 78\ 54\ \ 8.3$	$\lambda_3 = 322\ 51\ \ 9.9$	$\lg \operatorname{cosec} (\theta_1 - \theta_3) = 1.1697905$
$\theta_1 + \theta_3 = 161°40'59''.2$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3) = 320°42'11''.6$	$\lg \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = \bar{2}.5744215\,(n)$
$\theta_1 - \theta_3 = 3\ 52\ 42.6$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3) = -\ 2°8'58''.25$	$\lg \operatorname{tg} \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} - N\right] = \bar{1}.2415180\,(n)$
		$\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N = -9°53'32''.1$
		$N_1 = 330\ \ 35\ 43.7$

Долгота восх. узла: $N = \mathbf{150\ \ 35\ 43.7}$

$\lambda_1 = 318°33'13''.4$			$\lambda_3 = 322°51'\ 9''.9$		
$N = 150\ \ 35\ 43.7$			$N = 150\ \ 35\ 43.7$		
$\lambda_1 - N = 167°57'29''.7$	$\lg \operatorname{cosec}$	0.6806349	$\lambda_3 - N = 172°15'26''.2$	$\lg \operatorname{cosec}$	0.8705516
	$\lg \operatorname{tg} \theta_1$	0.8973268		$\lg \operatorname{tg} \theta_3$	0.7074153
	$\lg \operatorname{tg} i =$	1.5779617	Среднее: 1.5779643	$\lg \operatorname{tg} i =$	1.5779669

Наклонность: $i = \mathbf{88°29'10''.1,}$

$$\lg\cos\theta_1 = \bar{1}.0992164 \qquad \lg\cos\theta_3 = \bar{1}.2843912$$

$$\lg(\lambda_1 - N) = \bar{1}.9903370\,(n) \qquad \lg\cos(\lambda_3 - N) = \bar{1}.9960225\,(n)$$

$$\lg\cos u_1 = \bar{1}.0895434\,(n) \qquad \lg\cos u_3 = \bar{1}.2804137\,(n)$$

$$u_1 = 180^\circ - 82^\circ56'26''.3 \qquad u_3 = 180^\circ - 79^\circ0'17''.1$$

$$= 97^\circ3'33''.7 \qquad = 100^\circ59'42''.9$$

$$u_3 - u_1 = 3^\circ56'9''.2.$$

$c = 0.119176$	$s - r_1 = 0.089817$	$\lg$	$\bar{2}.9533585$
$r_1 = 1.465534$	$s - r_3 = 0.029359$	$\lg$	$\bar{2}.4677413$
$r_3 = 1.525992$		$\lg r_1 r_3$	$\bar{1}.6504532$
$2s = 3.110702$		$\lg\sin^2\dfrac{v_3 - v_1}{2}$	$\bar{3}.0715530$
$s = 1.555351$		$\lg\sin\dfrac{v_3 - v_1}{2}$	$\bar{2}.5357765$

$$\frac{v_3 - v_1}{2} = 1^\circ58'4''.1$$

$v_3 - v_1 = 3^\circ56'8''.2$ т. к. $v_3 - v_1$ должно равняться $u_3 - u_1$ то беру среднее: $3^\circ56'8''.6$.

$\frac{1}{2}\lg r_3 = 0.0917766$	$\sqrt{r_3} = 1.2353120$	$\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1} = 0.0247197$	$\lg$	$\bar{2}.3930434$
$\frac{1}{2}\lg r_1 = 0.0829979$	$\sqrt{r_1} = 1.2105923$	$\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} = 2.4459043$	$\lg'$	$\bar{1}.6115395$
		$\frac{1}{4}(v_3 - v_1) = 0^\circ59'2''.15$	$\lg\operatorname{cotg}$	1.7651165
			$\lg\operatorname{tg}\dfrac{v_3 + v_1}{4}$	$\bar{1}.7696992$

$$\frac{v_3 + v_1}{4} = 30^\circ28'26''.7$$

$$\frac{1}{2}(v_3 - v_1) = 1^\circ58'\ 4''.3$$

$$\frac{1}{2}(v_3 + v_1) = 60\ \ 56\ \ 53.7$$

$$v_1 = 58^\circ58'49''.4 \qquad v_3 = 62^\circ54'58''.0.$$

Арг. шир. перигелія

$$\left.\begin{aligned} \omega = u_1 - v_1 &= 38^\circ4'44''.3 \\ = u_2 - v_2 &= 38\ \ 4\ 43''.5 \end{aligned}\right\}\ \text{Среднее: } \boldsymbol{\omega = 38^\circ4'43''.9}$$

$\frac{1}{2}v_1 = 29^\circ29'24''.7$	$\lg\cos$	$\bar{1}.9397388$	$\frac{1}{2}v_3 = 31^\circ27'29''.0$	$\lg\cos$	$\bar{1}.9309605$
	$\lg\sqrt{r_1}$	0.0829979		$\lg\sqrt{r_3}$	0.0917766
	$\lg\sqrt{q}$	0.0227377		$\lg\sqrt{q}$	$= 0.0227371$

Среднее $\qquad \lg\sqrt{q} = 0.0227374$

Разстояніе до перигелія: $\qquad \lg q = 0.0454748$

$$\frac{3}{2}\lg q = 0.0682122$$

$v_1 = 58°58'49''.4$

$$\begin{array}{rl} \lg m & 1.7113986 \\ \frac{3}{2}\lg q & 0.0682122 \\ \hline \lg(t_1 - t_0) = & 1.7796108 \\ t_1 - t_0 = & 60.2020 \\ t_1 = & 251.4226 \\ \hline t_0 = & 191.2206 \end{array}$$

$v_3 = 62°54'58''.0$

$$\begin{array}{rl} \lg m & 1.7526003 \\ \frac{3}{2}\lg q & 0.0682122 \\ \hline \lg(t_3 - t_0) = & 1.8208125 \\ t_3 - t_0 = & 66.1931 \\ t_3 = & 257.4135 \\ \hline t_0 = & 191.2204 \end{array}$$

Среднее $t_0 = 191.2205$

Время прохожденія перигелія:

$t_0 = 1896$ г. Іюля 9.2205.

Итакъ элементы орбиты:

$$\begin{aligned} N &= 150°35'43''.7 \\ i &= 88\ 29\ 10.1 \\ \omega &= 38\ \ 4\ 43.9 \\ \lg q &= 0.0454748 \end{aligned}$$

$t_0 = 1896$ г. 191.2205 дня $= 1896$ г. Іюля 9.2205.

Bauschinger въ Bahnbestimmung вычисляя по методѣ Ольберса получаетъ:

$$\begin{aligned} N &= 150°33'\ 7'' \\ i &= 88°29\ 28'' \\ \omega &= 37\ 46\ 25'' \\ \lg q &= 0.044192 \end{aligned}$$

$t_0 = 1896$ г. Іюля 9.0423.

Для провѣрки нашихъ элементовъ вычислимъ геоцентрическое мѣсто при *вторыхъ* наблюденіяхъ, которымъ при вычисленіи элементовъ не пользовались и сличимъ съ наблюденными.

Вычисленіе мѣста при 2-хъ наблюденіяхъ.

$$\begin{array}{rl} t_0 = & 191.2205 \\ t_2 = & 254.3581 \\ \hline t_2 - t_0 = & 63.1376 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lg(t_2 - t_0) = & 1.8002880 \\ \frac{3}{2}\lg q = & 0.0682122 \\ \hline \lg m = & 1.7320758 \ \ldots\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{rl} v_2 = & 60°56'55''.2 \\ \omega = & 38\ \ 4\ 43.9 \\ u_2 = & 99\ \ 1'39.1 \end{array}$$

$$\frac{1}{2}v_2 = 30°28'27''.6 \qquad \begin{array}{rl} \lg\cos & \bar{1}.9354350 \\ \frac{1}{2}\lg q & 0.0227374 \\ \hline \lg\sqrt{r_2} & 0.0873024 \\ \lg r_2 = & 0.1746048 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \lg\sin u_2 = & \bar{1}.9945868 \\ \lg\cos u_2 = & \bar{1}.1956478\ (n) \\ \lg r_2\cos u_2 = & \bar{1}.3702526\ (n)\ \ldots -0.2345592 \\ \lg r_2\sin u_2 = & 0.1691916 \end{array}$$

$$L_2 = 348°32'48''.8$$
$$N = 150\ 35\ 43.7$$
$$L_2 - N = 197\ 57\ 5.1$$

$\lg R_2$	0.0026900	$\lg R_2$	0.0026900
$\lg \sin$	$\bar{1}.4888473$	$\lg \cos$	$\bar{1}.9783259\,(n)$
$\lg R_2 \sin(L_2 - N)$	$\bar{1}.4915373\,(n)$		$1.9810159\,(n)$

$$R_2 \sin(L_2 - N) = -0.3101254 \quad R_2 \cos(L_2 - N) = -0.9572291$$

$i = 88°29'10''.1$ $\lg \sin$	$\bar{1}.9998484$	$\lg \sin$	$\bar{1}.9998484$	$\lg \cos i$	$\bar{2}.4218841$
$\lg \sin u_2$	$\bar{1}.9945868$	$\lg r_2 \sin u_2$	0.1691916	$\lg r_2 \sin u_2$	0.1691916
$\lg \sin \theta_2$	$\bar{1}.9944352$	$\lg z_2$	0.1690400		$\bar{2}.5910757$
				$r_2 \sin u_2 \cos i$	0.0390000
$r_2 \cos u_2 =$	-0.2345592			$-R_2 \sin(L_2 - N)$	$+0.3101254$
$-R_2 \cos(L_2 - N) =$	$+0.9572291$			$\rho_2 \sin(\alpha_2 - N) =$	0.3491254
$\rho_2 \cos(\alpha_2 - N) =$	$+0.7226699$				
$\rho_2 \sin(\alpha_2 - N) =$	0.3491254				

$$\bar{1}.8589400 \quad \bar{1}.9544499$$
$$\bar{1}.5429814$$
$$\lg \operatorname{tg}(\alpha_2 - N) = \bar{1}.6840414 \quad \lg \rho_2 = \bar{1}.9044901$$
$$\alpha_2 - N = 25°47'\ 7''.5$$
$$N = 150\ 35\ 43.7$$
$$\alpha_2 = 176°22'51''.2 \quad \text{Набл. } \alpha_2 = 176°22'51''.9$$

$$\lg z_2 = 0.1690400$$
$$\lg \rho_2 = \bar{1}.9044901$$
$$\lg \operatorname{tg} \beta_2 = 0.2645499$$
$$\beta_2 = 61°27'43''.4 \quad \text{Набл. } \beta_2 = 61°27'43''.8$$

Такимъ образомъ

$$\alpha_2 \text{ выч.} - \alpha_2 \text{ наб.} = -0''.7$$
$$\beta_2 \text{ выч.} - \beta_2 \text{ наб.} = -0.4.$$

Согласіе вполнѣ удовлетворительное.

Элементы Bauschinger'а даютъ разницы

$$\alpha \text{ выч.} - \alpha \text{ наб.} = -1''.7$$
$$\beta \text{ выч.} - \beta \text{ наб.} = +0.2.$$

Обратимъ вниманіе на полное согласіе величины хорды расчисляемой по формулѣ Ньютона, приводя всѣ поправки къ плоскости орбиты, и по теоремѣ Эйлера, что съ полною ясностью указываетъ равносильность обѣихъ теоремъ, причемъ пользованіе ими обѣими доставляетъ превосходный контроль вычисленію.

Вычисленіе и было произведено на семь знаковъ, чтобы показать это согласіе, т. к. въ остальномъ такая точность имѣетъ лишь чисто условное значеніе, ибо не приняты во вниманіе нѣкоторыя поправки, оказывающія вліяніе не только на седьмой, но на шестой и даже на пятый знаки.

Въ самомъ дѣлѣ, седьмой знакъ послѣ запятой въ величинѣ разстоянія, причемъ за 1 принято среднее разстояніе отъ земли до солнца, соотвѣтствуетъ величинѣ въ 14 верстъ, но т. к. наблюденія произведены съ поверхности земли, а радіусы векторы ея орбиты даны для ея центра, то координаты точки пересѣченія луча идущаго на комету съ плоскостью эклиптики, не совпадаютъ съ соотвѣтствующими мѣстами центра земли а отличаются отъ нихъ на величины порядка радіуса земли, иными словами координаты ξ, η, ζ, требуютъ соотвѣтствующихъ поправокъ, которые будутъ порядка $\frac{6.000}{140.000.000} = 0.00004$ т. е. скажутся въ пятомъ знакѣ.

Само собою разумѣется, что не трудно вывести формулы для этихъ поправокъ, а т. к. величины ρ_1 и ρ_3 находятся въ *линейной* зависимости отъ ξ_1, η_1, ξ_3 η_3, то поправки присовкупятся просто помноженными на постоянные множители.

Точно также необходимо-бы принять во вниманіе „аберрацію“, иными словами, время въ теченіе котораго свѣтъ пробѣгаетъ отъ кометы до глаза наблюдателя, ибо лучъ пришедшій въ глазъ, такъ сказать, покинулъ комету на этотъ промежутокъ времени ранѣе.

Это обстоятельство вводитъ нѣкоторую поправку въ величины промежутковъ τ_1, τ_2, причемъ эта поправка расчисляется тотчасъ-же, зная что длина $a = 1$ пробѣгается свѣтомъ въ 497 секундъ.

Эту поправку можно было бы вводить, какъ только сдѣланъ первый чертежъ, мы этого не дѣлали, чтобы получить результаты сравнимые съ приведенными у Bauschinger'a.

Эта поправка при промежуткахъ близкихъ къ равенству, и при разстояніяхъ ρ_1 и ρ_3, почти одинаковыхъ между собою, оказываетъ ничтожное вліяніе на элементы орбиты, войдя простымъ слогаемымъ во время прохожденія черезъ перигелій.

Мы не будемъ по этому поводу вдаваться въ дальнѣйшія подробности ограничиваясь этими замѣчаніями, ибо выводъ соотвѣтствующихъ формулъ не представляетъ затрудненій.

Въ заключеніе примѣра приведены элементы расчисленные Bauschinger'омъ.

Какъ видно, наши элементы разнятся чувствительно отъ этихъ; тѣмъ не менѣе и тѣ и другіе представляютъ мѣста кометы съ точностью до десятыхъ долей секунды дуги, что объясняется тѣмъ, что наклонность орбиты близка къ 90°, геліоцентрическая широта кометы около 80°, разница-же въ элементахъ относится къ долготѣ узла и къ аргументу широты перигелія.

§ 17. При изложеніи методы Ольберса мы увидимъ, что эта метода непосредственно непримѣнима, когда всѣ три видимыхъ мѣста кометы лежатъ на одномъ и томъ-же большомъ кругѣ, проходящемъ черезъ мѣсто солнца при второмъ наблюденіи.

Ясно, что этотъ критерій не очевиденъ и чтобы убѣдиться, что такое исключительное обстоятельство имѣетъ мѣсто, надо произвести нѣкоторое вычисленіе, которое и будетъ указано въ своемъ мѣстѣ.

Этотъ исключительный случай требуетъ въ методѣ Ольберса особливаго разсмотрѣнія и болѣе сложныхъ вычисленій нежели обычный случай.

Для методы Ньютона этотъ случай не только не представляетъ затрудненій, но напротивъ является особенно благопріятнымъ, ибо при такомъ расположеніи свѣтилъ проекція хорды на плоскость эклиптики будетъ приблизительно перпендикулярна линіи средней долготы, и пересѣченія линій долготъ съ проекціей хорды будутъ происходить подъ углами близкими къ равенству и близкими къ прямому, что способствуетъ точности графическаго построенія.

Исключительнымъ случаемъ для методы Ньютона является тотъ, когда *видимое движеніе кометы по долготѣ ничтожно мало,* т. е. когда всѣ три линіи долготъ, или по крайней мѣрѣ двѣ крайнихъ, почти паралельны между собою.

Ясно, что этотъ критерій очевиденъ и не требуетъ никакихъ вычисленій.

Мы и дадимъ еще *два* примѣра: — одинъ являющійся исключительнымъ для методы Ольберса и особенно благопріятнымъ, или не представляющимъ никакихъ особенностей для методы Ньютона, другой исключительный для этой методы.

§ 18. Какъ исключительный для методы Ольберса, мы возьмемъ приведенную въ § 121 Bahnbestim. Bauschinger'а комету 1869 года III, взятую для такого примѣра Oppolzer'омъ.

Упомянутое условіе здѣсь выполнено почти въ точности и отклоненія сказанныхъ четырехъ точекъ (три мѣста кометы и солнце) отъ общаго большого круга составляютъ всего нѣсколько минутъ дуги, и тотъ множитель, который въ методѣ Ольберса представляетъ отношеніе $\frac{\rho_3}{\rho_1}$ принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, иными словами, ничтожная погрѣшность въ наблюденіяхъ, или неизбѣжная отъ вычисленія по логариѳмамъ, привела бы къ совершенно невѣрному результату.

Въ примѣрѣ 2-омъ приведено полное вычисленіе по методѣ Ньютона, причемъ, чтобы дать образецъ непосредственнаго пользованія фор. (3 и 4), оно произведено по этимъ формуламъ, не преобразовывая ихъ къ виду (39).

Примѣръ 2-ой.

Комета 1869 г. III. Bauschinger Bahnbest. стр. 373 § 121.

№	t. Nov. 1869	α ☄	β ☄	L ♁	$\lg R$
1	29.41785	351°46′20″	+20°25′10″	67°44′45″	$\bar{1}$.993829
2	34.42403	0 41 17.4	19 48 38	72 49 40	993509
3	39.42904	10 8 37	18 38 59	77 54 55	993228

№	$\lg \cos \alpha$	$\lg \sin \alpha$	$\lg \operatorname{tg} \beta$	$(\lg t_{i+1} - t_i)$	$\lg \tau$
1	$\bar{1}$.995507	$\bar{1}$.155666 (n)	$\bar{1}$.570873	0.699493	$\bar{2}$.935074
2	$\bar{1}$.999969	$\bar{2}$.079560	$\bar{1}$.556580	0.699404	$\bar{2}$.934985
3	$\bar{1}$.993158	$\bar{1}$.245799	$\bar{1}$.528278	1.000485	$\bar{1}$.236066

Вычисленіе координатъ земли.

№	$\lg \cos L$	$\lg \sin L$	$\lg \xi$	$\lg \eta$	ξ	η
1	$\bar{1}$.578314	$\bar{1}$.966382	$\bar{1}$.572143	$\bar{1}$.960211	0.373373	0.912454
2	$\bar{1}$.470182	$\bar{1}$.980195	$\bar{1}$.463691	$\bar{1}$.973704	0.290865	0.941248
3	$\bar{1}$.320889	$\bar{1}$.990267	$\bar{1}$.314117	$\bar{1}$.983495	0.206119	0.962710

Координаты кометы при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1.00$.

№	$\rho \cos \alpha$	$\rho \sin \alpha$	x	y	z
1	0.9897	−0.1431	1.3631	0.7693	0.3723
2	0.9999	0.0120	1.2908	0.9533	0.3602
3	0.9844	0.1761	1.1905	1.1388	0.3375

Координаты точекъ для составленія чертежа.

Масштабъ $a = 200$ mm.

Мѣста земли mm.

№	ξ	η
1	74.7	182.5
2	58.2	188.2
3	41.2	192.5

Мѣста кометы ($\rho = 1.00$) mm.

№	x	y
1	272.6	153.8
2	258.1	190.6
3	238.1	227.8

При $\rho_2 = 1.00.$

Чертежъ даетъ:

$$c_1 = 84.5 \text{ mm.} = 0.422 \qquad \sqrt{2}\,\tau_3 = 0.2435$$

$$d_2 = 321 \text{ mm.} = 1.605$$

$$z_3 - z_1 = 0.035; \qquad z_2 = 0.360; \qquad r_2 = (2.580 + 0.130)^{\frac{1}{2}} = 1.646$$

$$c = (0.1782 + 0.0012)^{\frac{1}{2}} = 0.4235$$

$$\sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.646}} = 0.1900.$$

Такъ какъ c почти равно c_1, то надо взять ρ_2 такъ, чтобы c_1 уменьшилось приблизительно вдвое; прикладывая масштабную линейку видимъ, что это будетъ при ρ_2 близко къ 0.30, почему и беремъ:

$$\rho_2 = 0.30.$$

Чертежъ даетъ:

$$c_1 = 40.8 \text{ mm.} = 0.204$$

$$d_2 = 223 \text{ mm.} = 1.115$$

$$z_3 - z_1 = 0.010; \qquad z_2 = 0.108; \qquad r_2 = (1.245 + 0.011)^{\frac{1}{2}} = 1.12; \qquad \sigma = 0.230$$

$$c = (0.0417 + 0.0001)^{\frac{1}{2}} = 0.204$$

$$c - \sigma = 0.204 - 0.230 = -0.026 \quad \text{значитъ } \rho_2 > 0.30.$$

Дѣлаю

$$\rho_2 = 0.40.$$

Чертежъ даетъ:

$$c_1 = 47.0 \text{ mm.} = 0.235$$

$$d_2 = 234 \text{ mm.} = 1.17$$

$$r_2 = 1.175; \qquad c = 0.235; \qquad \sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.175}} = 0.225$$

$$c - \sigma = 0.235 - 0.225 = +0.010 \quad \text{значитъ } \rho_2 < 0.40.$$

Чтобы опредѣлить болѣе точные предѣлы для ρ_2, составляю чертежъ въ бóльшемъ масштабѣ для участка отъ $\rho_2 = 0.30$ до $\rho_2 = 0.40$. Чтобы помѣщалось на листѣ бумаги обыкновеннаго формата, беру масштабъ $a = 1000$ mm.

Вычисляю $h = \frac{1}{8} \tau_3^2 \cdot \frac{d_2}{r_2^3} = 0.00287$ т. е. въ масштабѣ чертежа 2.9 mm.

Координаты точекъ для составленія чертежа.

(Масштабъ: $a = 1000$ mm.).

Мѣста кометы.

№	$\rho = 0.40$		$\rho = 0.30$	
	x	y	x	y
1	0.7693	0.8552	0.6703	0.8695
2	0.6908	0.9461	0.5908	0.9449
3	0.5999	1.0331	0.5014	1.0155

Начало координатъ на чертежѣ беру въ точкѣ $x = 0.500$, $y = 0.800$, тогда для составленія чертежа и болѣе точнаго построенія линій долготъ имѣю:

Мѣста кометы (отъ вспомогат. начала) (mm.).

№	$\rho = 0.50$		$\rho = 0.40$		$\rho = 0.30$		$\rho = 0.20$	
	x'	y'	x'	y'	x'	y'	x'	y'
1	368.1	40.9	269.2	55.2	170.3	69.5	71.3	83.8
2	291.5	147.2	190.8	146.0	90.1	144.8	— 9.9	143.6
3	198.4	250.8	99.9	233.2	1.4	215.5	—97.0	197.9

При $\rho_2 = 0.30$. (Масштабъ $a = 1.000$ mm.).

Чертежъ даетъ:

$$c_1 = 0.2225; \qquad \rho_1 = 0.3040; \qquad \rho_3 = 0.3015$$

$$r_2 = (0.590^2 + 0.945^2 + 0.108^2)^{\frac{1}{2}} = (0.349 + 0.895 + 0.012)^{\frac{1}{2}} = 1.120$$

$$c = (0.2225^2 + 0.0105^2)^{\frac{1}{2}} = (0.0509 + 0.0001)^{\frac{1}{2}} = 0.2257$$

$$\sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.120}} = 0.2302$$

$$c - \sigma = 0.2257 - 0.2302 = -0.0045 \qquad (\rho_2 > 0.30)$$

беру $\rho_2 = 0.32$.

При $\rho_2 = 0.32$.

Чертежъ даетъ: $c_1 = 0.2325$ слѣдов. $c = 0.2327$

приращеніе d_2 есть 0.013, значитъ $r_2 = 1.120 + 0.013 = 1.133$

$$\sigma = \frac{0.2435}{\sqrt{1.133}} = 0.2290$$

$$c - \sigma = 0.2327 - 0.2290 = +0.0037.$$

Итакъ:

$$\text{при} \quad \rho_2 = 0.30 \qquad c - \sigma = -0.0045$$

$$\rho_2 = 0.32 \qquad c - \sigma = +0.0037.$$

Слѣдовательно:

$$\delta\rho_2 = +0.02 \cdot \frac{45}{82} = 0.011$$

и надо брать

$$\rho_2 = 0.300 + 0.011 = 0.311$$

съ этого значенія ρ_2 и начинаемъ вычисленіе для опредѣленія дальнѣйшихъ приближеній.

I. Предположеніе: $\rho_2 = 0.311 \qquad \lg \rho_2 = \bar{1}.492760.$

1) *Вычисленіе:* x_2, y_2, z_2.

$\lg \rho_2 \cos \alpha_2 = \bar{1}.492729$	$\rho_2 \cos \alpha_2 = 0.310978$	$x_2 = 0.601843$
$\lg \rho_2 \sin \alpha_2 = \bar{3}.572320$	$\rho_2 \sin \alpha_2 = 0.003735$	$y_2 = 0.944983$
$\lg \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 = \bar{1}.049340$		$\lg z_2 = \bar{1}.049340.$

2) *Вычисленіе:* l_1 *и* l_2.

$\xi_3 - \xi_1 = -0.167254$	lg	$\bar{1}.223376\,(n)$	$\lg a = \bar{1}.724824\,(n)$
$\eta_3 - \eta_1 = +0.050256$	lg	$\bar{2}.701188$	$\lg b = \bar{1}.202636$
$\alpha_3 - \alpha_1 = 18°22'17''$	lg sin	$\bar{1}.498552$	

$\lg a \sin \alpha_3 = \bar{2}.970623\,(n) \ldots\ldots -0.093460 \qquad \lg a \sin \alpha_1 = \bar{2}.880490 \ldots\ldots +0.075943$

$\lg(-b \cos \alpha_3) = \bar{1}.195794\,(n) \ldots\ldots -0.156962 \qquad \lg(-b \cos \alpha_1) = \bar{1}.198143\,(n) \quad -0.157813$

$l_1 = -0.250422 \qquad l_3 = -0.081870$

3) *Вычисленіе:* ρ_1' *и* ρ_3'.

$\lg \frac{\tau_3}{\tau_2} = 0.301081$	$\lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.300992$
$\lg \operatorname{cosec}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.501448$	$\lg \operatorname{cosec}(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.501448$
$\lg n_1 = 0.802529$	$\lg n_3 = 0.802440$

$\lg n_1 \sin \alpha_3 = 0.048328 \quad \lg n_1 \cos \alpha_3 = 0.795687 \quad \lg n_3 \sin \alpha_1 = \bar{1}.958106\,(n) \quad \lg n_3 \cos \alpha_1 = 0.797947$

$x_2 - \xi_3 =$	0.395724	lg	$\bar{1}.597392$	$\bar{1}.645720$	$n_1(x_2 - \xi_3)\sin \alpha_3 = 0.442303$
$y_2 - \eta_3 =$	-0.017727 (*)	lg	$\bar{2}.248635$	$\bar{1}.044322$	$-n_1(y_2 - \eta_3)\cos x_3 = 0.110745$
					$l_1 = -0.250422$
			$\lg \rho_1' = \bar{1}.480906$		$\rho_1' = 0.302626$

$x_2-\xi_1=$	0.228470	lg	$\bar{1}.358829$	$\bar{1}.316935$	$n_3(x_2-\xi_1)\sin\alpha_1=$	0.207460
$y_2-\eta_1=$	0.032529 (*)	lg	$\bar{2}.512271$	$\bar{1}.310218$	$-n_3(y_2-\eta_1)\cos\alpha_1=$	0.204277
					$l_3=$	-0.081870
			$\lg\rho_3'=\bar{1}.518339$		$\rho_3'=$	0.329867

4) *Повѣрка найденныхъ величинъ.*

$\lg\rho_1'\cos\alpha_1=\bar{1}.476413$	0.299511	$x_1'=0.672844$
$\lg\rho_1'\sin\alpha_1=\bar{2}.636572\,(n)$	-0.043308	$y_1'=0.869146$
$\lg\rho_3'\cos\alpha_3=\bar{1}.511497$	0.324711	$x_3'=0.530830$
$\lg\rho_3'\sin\alpha_3=\bar{2}.764138$	0.058095	$y_3'=1.020805$

$x_1'-x_3'=0.142054$	lg $\bar{1}.152453$	$y_3'-y_1'=0.151659$	lg $\bar{1}.180868$
$x_2-x_1'=0.071041$	lg $\bar{2}.851509$	$y_2-y_1'=0.075837$	lg 2.879881
	0.300944		0.300987

$$\lg\frac{\tau_3}{\tau_1}=0.300992.$$

Разница могла произойти отъ накопленія погрѣшностей при вычисленіи по логариѳмамъ, ибо какъ ρ_1' такъ и ρ_3' заключаютъ числа, имѣющія 6 знаковъ, но происшедшія отъ пяти-значныхъ чиселъ, помѣченныхъ (*), въ свою очередь являющихся разностью двухъ шести значныхъ чиселъ и, слѣдовательно такихъ, въ которыхъ послѣдній знакъ сомнителенъ.

5) *Вычисленіе:* r_2, f *и* h.

$\lg x_2=\bar{1}.779483$ $\quad\bar{1}.730126$

$\lg y_2=\bar{1}.975424$ $\quad\bar{1}.926067$ $\qquad 0.049357$ $\quad\bar{1}.997839$

$\lg\operatorname{tg}\gamma_2=0.195941$ $\qquad \lg z_2=\bar{1}.049340$

$\gamma_2=57^\circ30'28''$ $\qquad \bar{2}.999983$ $\qquad \lg r_2=0.051518$

$r_2=1.12595$

$$\lg\frac{1}{8}\tau_3^2=\bar{3}.56904 \qquad \lg f=\bar{3}.46602$$

$$2\lg' r_2=\bar{1}.89698 \qquad \lg\frac{d_2}{r_2}=\bar{1}.99784$$

$$\lg f=\bar{3}.46602 \qquad \lg h=\bar{3}.46386$$

$$f=0.002924 \qquad h=0.002910.$$

6) *Вычисленіе поправокъ:* $\delta\rho_1'$, $\delta\rho_3'$, ρ_1 *и* ρ_3.

$\gamma_2=57^\circ30'28''$			$\gamma_2=$ $57^\circ30'28''$		
$\alpha_3=10\ \ 8\ 37$	$\lg n_1h=$	$\bar{2}.26639$	$\alpha_1=-\ 8\ 13'\,40$	$\lg(-n_3h)=$	$\bar{2}.26630(n)$
$\gamma_2-\alpha_3=47^\circ21'31''$	$\lg\sin=$	$\bar{1}.86664$	$\gamma_2-\alpha_1=$ $65^\circ44'08''$	$\lg\sin=$	$\bar{1}.95983$
	$\lg\delta\rho_1'=$	$\bar{2}.13303$		$\lg\delta\rho_3'=$	$\bar{2}.22613\,(n)$

$$\delta\rho_1' = +0.013584 \qquad \qquad \delta\rho_3' = -0.016832$$
$$\rho_1' = 0.302626 \qquad \qquad \rho_3' = 0.329867$$
$$\rho_1 = 0.316210 \qquad \qquad \rho_3 = 0.313035.$$

7) *Вычисленіе координатъ:* $x_1, y_1, z_1, x_3, y_3, z_3$.

$$\begin{array}{ll}
\lg \delta x_1' = \bar{2}.12854 & x_1 = x_1' + 0.013444 = 0.686328 \\
\lg \delta y_1' = \bar{3}.28870(n) & y_1 = y_1' - 0.001944 = 0.867202 \\
\lg z_1 = \bar{1}.070846 & z_1 = 0.117719 \\
\lg \delta x_3' = \bar{2}.21929(n) & x_3 = x_3' - 0.016569 = 0.514261 \\
\lg \delta y_3' = \bar{3}.47193(n) & y_3 = y_3' - 0.002964 = 1.017841 \\
\lg z_3 = \bar{1}.023871 & z_3 = 0.105650.
\end{array}$$

8) *Вычисленіе хорды* c.

$$\begin{array}{lllll}
x_3 - x_1 = -0.172067 & \lg \bar{1}.235696(n) & \bar{1}.876449 & & \\
y_3 - y_1 = 0.150639 & \lg \bar{1}.177937 & \bar{1}.818690 & \bar{1}.359247\ \bar{1}.999396 & c_1 = 0.228690 \\
z_3 - z_1 = -0.012069 & \lg \operatorname{tg}\gamma\ \bar{1}.942241(n) & & \bar{2}.081671 & \\
\gamma = 180^\circ - 41^\circ 12' 04'' = & & \lg \operatorname{tg} i & \bar{2}.722424 & \lg c = \bar{1}.359851 \\
= 138\ 47' 56'' & & & i = 3^\circ 1' & c = 0.229008
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\lg \dfrac{\tau_3}{\tau_1} = 0.300992 & \lg \dfrac{\tau_3}{\tau_2} = 0.301081 & \\
\lg c_1 = \bar{1}.359247 & \lg c_1 = \bar{1}.359247 & \\
\lg AE = \bar{1}.058255 & \lg CE = \bar{1}.058166 & 2EI = 0.000022 \\
AE = 0.114355 & CE = 0.114333 & EI = 0.000011 \text{ отъ } E \text{ къ } A.
\end{array}$$

Такъ какъ и наклонъ хорды и наклонъ радіуса вектора SB къ плоскости эклиптики весьма малы, то составляю Ньютоновъ чертежъ, въ проекціи на плоскость эклиптики. Масштабъ этого чертежа беру $a = 50000$ mm. и расчисляю хорду σ.

Черт. 10.

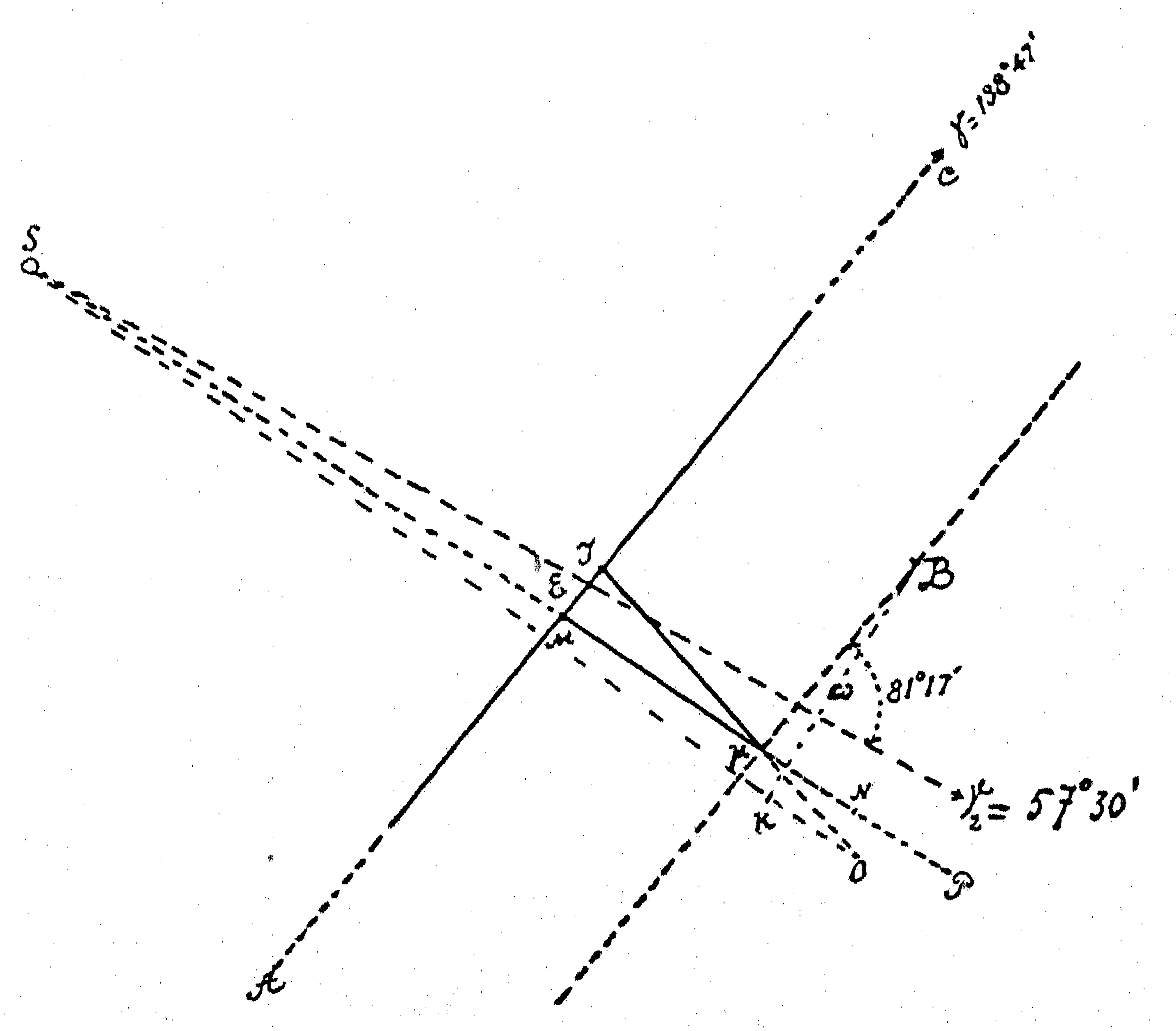


Схема Ньютонова чертежа:

$$BE = h = 0.002940$$
$$EI = 0.000011$$
$$B\mu = EI + 2h \cdot \cos(\gamma - \gamma_2)$$
$$= 0.000011 + 0.005820 \cdot 0.167$$
$$= 0.000011 + 0.000975 = 0.000986$$
$$S\mu = r_2 - B\mu \cdot \cos(\gamma - \gamma_2)$$
$$= r_2 - 0.000165$$
$$Bk = B\mu \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) + \frac{1}{2} h \cdot \sin(\gamma - \gamma_2) \cdot \cos(\gamma - \gamma_2)$$
$$= 0.000973 + 0.000240 = 0.001213$$
$$k = \frac{0.001213}{r_2}$$

$$g = EE' = \frac{2}{3}\,\frac{k\cdot h}{\sin(\gamma-\gamma_2)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{0.001213}{1.126}\cdot\frac{0.002910}{0.987} = 0.0000024 \text{ по направленію } \gamma$$

$$SP = S\mu + \frac{2}{3}f = r_2 - 0.00017 + 0.00195 = r_2 + 0.00178 = 1.12773.$$

Величина f должна быть разсчитываема по формулѣ $\frac{1}{8}\tau^2{}_3\cdot\frac{1}{SN^2}$

$$SN = \quad r_2 - 0.000165 + \frac{1}{3}f = 1.12595 + 0.00097 - 0.00017 = 1.12675$$

$$\delta h = -2\cdot\frac{0.00291\cdot 0.00080}{1.126} = -0.000005.$$

Этому измѣненію величины h соотвѣтствуютъ:

$$\delta\rho_1 = -0.000023$$

$$\delta\rho_3 = +0.000030.$$

Перемѣщенію точки E соотвѣтствуютъ измѣненія:

$$\delta\rho_1 = -n_1\cdot g\sin 128°40' = -6.35\cdot 0.79\cdot g = -0.000012$$

$$\delta\rho_3 = \quad n_3\;g\sin 147°02' = +6.35\cdot 0.54\cdot g = +0.000008$$

Всего же будетъ:

$$\delta\rho_1 = -0.000037$$

$$\delta\rho_3 = +0.000038$$

$$\delta c_1 = -\delta\rho_1\cos(\gamma-\alpha_1) + \delta\rho_3\cos(\gamma-\alpha_3) = -0.000032 - 0.000024 = -0.000056$$

$$\delta c = -0.000061.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= \quad 0.311000 \\
\rho_1 &= \quad 0.316173 \\
\rho_3 &= \quad 0.313073 \\
c_1 &= \quad 0.228947 \\
\sigma &= \quad 0.229349 \\
c-\sigma &= -0.000402.
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\lg\sqrt{2}\,\tau_3 &= \bar{1}.386581 \\
\frac{1}{2}\lg SP &= \underline{0.026103} \\
\lg\sigma &= \bar{1}.360478 \\
\sigma &= 0.229349
\end{aligned}$$

Для дальнѣйшихъ приближеній будемъ пользоваться дифференціальными формулами.

Дифференціальныя формулы:

Данныя:

$$d_2 = 1.1208;\qquad r_2 = 1.1259;\qquad \gamma_2 = 57°30';\qquad h = 0.002905$$

$$c_1 = 0.22869;\qquad c = 0.22895;\qquad z_1 - z_3 = 0.0121;\qquad \gamma = 138°48'$$

$$\sigma = 0.2293;\qquad n_1 = 6.346;\qquad n_3 = 6.345$$

$\delta d_2 = 0.5471 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta\gamma_2 = -0.747 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta z_2 = 0.360 \cdot \delta\rho_2$

$$\delta r_2 = \frac{1}{1.126}[1.120 \cdot 0.547 + 0.360 \cdot 0.360] \cdot \delta\rho_2 = 0.660 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta h = \left[\frac{0.00290}{1.120} \cdot 0.547 - \frac{0.00871}{1.126} \cdot 0.660\right] \cdot \delta\rho_2 = -0.00372 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta\rho_1 = 6.346\,[\quad 0.1645 - 0.00372 \cdot 0.735 - 0.678 \cdot 0.747 \cdot 0.00290] \cdot \delta\rho_2 = 1.027 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta\rho_3 = 6.345\,[-0.1550 - 0.00372 \cdot 0.911 - 0.4107 \cdot 0.747 \cdot 0.00290] \cdot \delta\rho_2 + 1.011 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta c_1 = [-1.027 \cdot (-0.839) + 1.011 \cdot (-0.625)] \cdot \delta\rho_2 = 0.238 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta c = \frac{1}{0.229}[0.238 \cdot 0.229 + (-0.012)(-0.042)] = 0.240 \cdot \delta\rho_2$$

$$\lg \frac{1}{4\tau_3{}^2} = 0.9258$$

$$\delta(SP) = \quad 0.658 \cdot \delta\rho_2 \qquad 3 \lg \sigma = \bar{2}.0814$$

$$\delta\tau = -0.0669 \cdot \delta\rho_2 \qquad \lg 0.658 = \bar{1}.8182$$

$$\bar{2}.8254$$

$$\delta(c - \sigma) = \quad 0.307 \cdot \delta\rho_2$$

Такъ какъ при $\rho = 0.311$ разность $c - \sigma$ оказалась равной -0.000402, то для слѣдующаго приближенія надо брать:

$$\delta\rho_2 = +\frac{0.000402}{0.307} = 0.001308.$$

Соотвѣтственно чему будетъ:

II Приближеніе $\rho_2 = \mathbf{0.312308}$

$\delta\rho_1 = +0.001345$	$\rho_1 = 0.316173 + 0.001345 = 0.317518$
$\delta\rho_3 = +0.001323$	$\rho_3 = 0.313073 + 0.001323 = 0.314396$
$\delta c \ = +0.000314$	$c \ = 0.228947 + 0.000314 = 0.229261$
$\delta\varkappa \ = -0.000088$	$\sigma \ = 0.229349 - 0.000088 = 0.229261$

$x_1 = \quad 0.001295 + 0.686328 = 0.687623$	$x_3 = 0.001339 + 0.514261 = 0.515600$
$y_1 = -0.000185 + 0.867202 = 0.867017$	$y_3 = 0.000239 + 1.017841 = 1.018080$
$z_1 = \quad 0.000487 + 0.117719 = 0.118206$	$z_3 = 0.000460 + 0.105650 = 0.106110.$

По этимъ координатамъ расчисляемъ величины r_1, r_3 и хорду σ по формулѣ Эйлера.

Вычисленіе: r_1, r_3, c *и* σ.

а) *Вычисленіе* c *по координатамъ:*

$x_3 - x_1 = -0.172023$	$\lg \bar{1}.235586$	$\bar{1}.875872$		
$y_3 - y_1 = \quad 0.151063$	$\lg \bar{1}.179158$	$\bar{1}.819444$	$\bar{1}.359714$	$\bar{1}.999395$
$z_3 - z_1 = -0.012096$	$\bar{1}.943572$		$\bar{2}.082642$	
			$\bar{2}.722928$	$\lg c = \bar{1}.360319$
				$c = 0.229256.$

По разностямъ получается $c = 0.229261$.

б) *Вычисленіе: r_1 и r_3.*

$\lg x_1$	$\bar{1}.837350$	$\bar{1}.793362$		
$\lg y_1$	$\bar{1}.938028$	$\bar{1}.894040$	0.0433888	$\bar{1}.997536$
$\lg \operatorname{tg} \lambda_1$	0.100678	$\lg z_1 = \bar{1}.072640$		
	$\lambda_1 = 51°34'57''.0$	$\lg \operatorname{tg} \theta_1 = \bar{1}.028652$		$\lg r_1 = 0.046452$
		$\theta_1 = 6°5'50''.0$		$r_1 = 1.11289$

в)

$\lg x_3$	$\bar{1}.712313$			
$\lg y_3$	0.007782	$\bar{1}.950410$	0.057372	$\bar{1}.998130$
$\lg \operatorname{tg} \lambda_3$	0.295469	$\lg z_2$ $\bar{1}.025756$		
	$\lambda_3 = 63°8'25''.5$	$\lg \operatorname{tg} \theta_3$ $\bar{2}.968384$		$\lg r_3 = 0.059242$
		$\theta_3 = 5°18'43''.3$		$r_3 = 1.14615$

г) *Вычисленіе хорды σ по формулѣ Эйлера:*

$r_1 = 1.11289$	$\lg(r_1 + r_3) = 0.353924$	$\bar{1}.469114$	
$r_3 = 1.14615$	$\frac{1}{2}\lg$ 0.176962	$\bar{1}.537096$	
$r_1 + r_3 = 2.25904$	0.530886	$\bar{1}.006210$	0.1015
		187 (Таб. Энке)	
		0.353924	
		$\lg \sigma$ 0.360321	
		$\sigma = 0.229257.$	

Согласіе вполнѣ удовлетворительное.

Итакъ окончательно имѣемъ:

$$\rho_2 = 0.312308$$

$r_1 = 1.11289$	$\lambda_1 = 51°34'57''.0$	$\theta_1 = 6°\ 5'50''.0$
$r_3 = 1.14615$	$\lambda_3 = 63\ \ 8\ 25\ 5$	$\theta_3 = 5\ 18\ 43\ 3$

$$c = 0.229257.$$

По этимъ значеніямъ и находимъ элементы орбиты.

Вычисленіе элементовъ орбиты.

а) *Наклонность и долгота узла.*

$\theta_1 = 6°\ 5'50''.0$	$\lambda_1 = 51°34'57''.0$	$\lg \sin(\theta_1 + \theta_3) = 1.296261$
$\theta_3 = 5\ 18\ 43\ 3$	$\lambda_3 = 63\ \ 8\ 25\ 5$	$\lg \operatorname{cosec}(\theta_1 - \theta_3) = 1.863159$
$\theta_1 + \theta_3 = 11\ 24\ 33\ 3$	$\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} = 57\ 21\ 41\ 3$	$\lg \operatorname{tg} \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = \bar{1}.005204\,(n)$
$\theta_1 - \theta_3 = 0\ 47\ \ 6\ 7$	$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} = -\ 5\ 46\ 44\ 3$	$\lg \operatorname{tg}\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N_1\right] = 0.164624\,n$
		$\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N_1 = -\ 55°58'29''.5$
		$N_1 = 112\ 58\ 10\ 8$
		$N = $ **292°58′10″8**

$\lambda_1 = 51°34'57''.0$ | $\lambda_3 = 63°\ 8'25''.5$

$N_1 = 112\ 58\ 10\ 8$ $\quad$ $\lg \operatorname{tg} \theta_1 = \bar{1}.028652$ | $N_1 = 112\ 58\ 10\ 8$ $\quad$ $\lg \operatorname{tg} \theta_3 = 2.968384$

$N_1 - \lambda_1 = 61\ 23\ 13\ 8$ $\quad$ $\lg \operatorname{cosec} = 0.056567$ | $N_1 - \lambda_3 = 49\ 49\ 45\ 3$ $\quad$ $\lg \operatorname{cosec} = 0.116836$

$\lg \operatorname{tg} i = \bar{1}.085219$ | $\lg \operatorname{tg} i = \bar{1}.085220$

$i =$ **6°56′15″6.**

б) *Долгота перигелія и параметръ:*

$N = 292°58'11''$ | $N = 292°58'11''$

$\lambda_1 = 51\ 34\ 57$ $\quad$ $\lg \cos \theta_1$ $\quad$ $\bar{1}.997536$ | $\lambda_3 = 63\ \ 8\ 25\ 5$ $\quad$ $\lg \cos \theta_2$ $\quad$ $\bar{1}.998130$

$\lambda_1 - N = 118\ 36\ 46$ $\quad$ $\lg \cos$ $\quad$ $\bar{1}.680234\,(n)$ | $\lambda_3 - N = 130\ 10\ 14\ 5$ $\quad$ $\lg \cos$ $\quad$ $\bar{1}.809605\,(n)$

$\lg \cos u_1 = \bar{1}.677770$ | $\lg \cos u_3$ $\quad$ $\bar{1}.807735\,(n)$

$u_1 = 180° - 61°33'50''$ | $u_3 = 180° - 50°2'12''.4$

$= 118°26'10''$ | $= 129°57'47''.6$

$u_3 - u_1 = 11°31'37''.6$ | $\frac{1}{2}(u_3 - u_1) = 5°45'48''.8$

$c = 0.22926$	$s - r_3 = 0.09800$	$\bar{2}.991226$
$r_3 = 1.14615$	$s - r_1 = 0.13126$	$\bar{1}.118132$
$r_1 = 1.11289$	$\lg r_1 r_3$	$\bar{1}.894306$
$2s = 2.48830$	$\lg \sin^2 \frac{v_3 - v_1}{2}$	$\bar{2}.003664$
$s = 1.24415$	$\lg \sin \frac{1}{2}(v_3 - v_1)$	$\bar{1}.001832$

$$\frac{v_3 - v_1}{2} = 5°45'48''.6$$

$\frac{1}{2}\lg r_3 = 0.029621$ $\quad$ $\sqrt{r_3} = 1.070587$ $\quad$ $\sqrt{r_3} - \sqrt{r_1} = 0.015650$ $\quad$ $\lg$ $\quad$ $\bar{2}.194514$

$\frac{1}{2}\lg r_1 = 0.023226$ $\quad$ $\sqrt{r_1} = 1.054937$ $\quad$ $\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} = 2.125524$ $\quad$ $\lg$ $\quad$ $\bar{1}.672534$

$\frac{v_3 - v_1}{4} = 2°52'54''.35$ $\quad$ $\lg \operatorname{cotg}$ $\quad$ 1.298098

$\lg \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_3}{4}$ $\quad$ 1.165146

$\frac{1}{2}(v_3 - v_1) = 5°45'48''.7$ | $\frac{1}{4}(v_3 + v_1) = 8°19'17''.3$

$\frac{1}{2}(v_3 + v_1) = 16\ 38\ 34\ 6$

$v_1 = 10\ 52\ 45\ 9$ $\qquad$ $v_3 = 22°24'23''.3$

$\omega = u_1 - v_1 = 107°33'24''.1$

$= u_3 - v_3 = 107°33'24''.3$ $\qquad$ *Среднее:* $\omega = 107°33'24''.2$.

$\frac{1}{2}v_1 = 5°26'23''$	$\lg \cos$	$\bar{1}.998039$	$\frac{1}{2}v_3 = 11°12'11''.7$	$\lg \cos$	$\bar{1}.991644$
	$\lg \sqrt{r_1}$	0.023226		$\lg \sqrt{r_3}$	0.029621
	$\frac{1}{2}\lg q$	0.021265		$\frac{1}{2}\lg q$	0.021265
	$\lg q$	0.042530		$\lg q$	0.042530

$\lg q =$ **0.042530.**

Время прохожденія черезъ перигелій.

$$v_1 = 10^\circ 52' 45''.9 \qquad \begin{aligned} \lg m &= 0.895005 \\ \tfrac{3}{2}\lg q &= \underline{0.063795} \\ \lg t_1 - t_0 &= 0.958800 \\ t_1 - t_0 &= 9.09495 \\ t_1 &= 29.41785 \text{ Nov.} \\ t_0 &= 20.32290 \text{ Nov.} \end{aligned}$$

$$v_3 = 22^\circ 24' 23''.3 \qquad \begin{aligned} \lg m &= 1.217381 \\ \tfrac{3}{2}\lg q &= \underline{0.063795} \\ \lg t_3 - t_0 &\quad 1.281176 \\ t_3 - t_0 &= 19.10627 \\ t_3 &= 39.42904 \text{ Nov.} \\ t_0 &= 20.32277 \text{ Nov.} \end{aligned}$$

Среднее: $t_0 =$ Nov. **20.32284.** 1869 г.

Такимъ образомъ элементы кометы 1869 года III.

$$\begin{aligned} N &= 292^\circ 58' 11'' \\ i &= 6^\circ 56' 15''.6 \\ \omega &= 107^\circ 33' 24''2 \\ \lg q &= 0.042530 \\ t_0 &= \text{Nov.: } 20.32284 \text{ (Среднее Берлинъ) 1869 года.} \end{aligned}$$

Вычисленіе мѣста при вторыхъ наблюденіяхъ по элементамъ.

$$\begin{aligned} t_2 &= 34.42403 \\ t_0 &= 20.32284 \\ t_2 - t_0 &= 14.10119 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg(t_2 - t_0) &= 1.149256 \\ \tfrac{3}{2}\lg q &= 0.063795 \\ \lg m &= 1.085561 \\ m &= 12.17760 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 16^\circ 43' 56''.7 \\ \omega &= 107\ \ 33\ \ 24\,2 \\ u_2 = v_2 + \omega &= 124\ \ 17\ \ 20\,9 \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2} v_2 = 8^\circ 21' 58''.4 \qquad \begin{aligned} \lg\cos &\quad \bar{1}.995354 \\ \tfrac{1}{2}\lg q &= 0.021265 \\ \tfrac{1}{2}\lg r_2 &= 0.025911 \\ \lg r_2 &= 0.051822 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg\cos u_2 &= \bar{1}.750793 \\ \lg\sin u_2 &= \bar{1}.917088 \\ \lg r_2 \cos u_2 &= 1.802615\,(n) \;.\;.\;. -0.634767 \\ \lg r_2 \sin u_2 &= \bar{1}.968910 \end{aligned}$$

$$i = 6^\circ 56' 15''.6 \qquad \lg\sin i = \bar{1}.082028 \qquad \lg\cos i \quad \bar{1}.996808$$

$$\lg r_2 \sin u_2 \sin i = \bar{1}.050938 = \lg z_2 \qquad \lg r_2 \sin u_2 \cos i = \bar{1}.965736\,(n) \quad 0.924098$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= 72^\circ 49' 40'' \\ N &= 292\ \ 58\ \ 11 \\ \lambda_2 - N &= 139\ \ 51\ \ 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg R_2 &= \bar{1}.993509 \\ \lg\sin &= \bar{1}.809347 \\ \lg R_2 \sin(\lambda_2 - N) &= \bar{1}.802856 \\ R_2 \sin(\lambda_2 - N) &= 0.635120 \\ r_2 \sin u_2 \cos i &= 0.924098 \\ r_2 \sin u_2 \cos i - R_2 \sin(\lambda_2 - N) &= 0.288978 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg R_2 &= \bar{1}.993509 \\ \lg\cos &= \bar{1}.883349\,(n) \\ \lg R_2 \cos(\lambda_2 - N) &= \bar{1}.876858\,(n) \\ R_2 \cos(\lambda_2 - N) &= -0.753110 \\ r_2 \cos u_2 &= -0.634767 \\ r_2 \cos u_2 - R_2 \cos(\lambda_2 - N) &= 0.118343 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rlr}
\rho_2 \sin(\alpha_2 - N) = 0.288978 & \lg\ \bar{1}.460864 & \\
\rho_2 \cos(\alpha_2 - N) = 0.118343 & \lg\ \bar{1}.073133 & 1.966334 \\
\lg \operatorname{tg}(\alpha_2 - N) & 0.387731 & \lg \rho_2 = \bar{1}.494530 \\
\alpha_2 - N = & 67^\circ 43' 49'' & \\
N = & 292\ 58\ 11 & \\
\alpha_2 = & 0\ 42\ 00 & \\
\alpha_2 \text{ наблюд.} \dots & 0\ 41\ 17.4 & \\
\hline
\alpha_2 \text{ выч.} - \alpha_2 \text{ наб.} = + & 0^\circ\ 0'\ 42''.6 & \\
\lg z_2 = & \bar{1}.050938 & \\
\lg \rho_2 = & \bar{1}.494530 & \\
\lg \operatorname{tg} \beta_2 = & \bar{1}.556408 & \\
\beta_2 = & 19^\circ 48' 12'' & \\
\beta_2 \text{ наб.} = & 19\ 48\ 38 & \\
\beta_2 \text{ выч.} - \beta_2 \text{ наб.} = - & 0\ \ 0\ 26.0. &
\end{array}
$$

При вычисленіи на 6 знаковъ можно бы требовать лучшаго согласія, но необходимо обратить вниманіе на то обстоятельство, что разстояніе кометы до земли составляло во время наблюденій около 0.30, чему соотвѣтствуетъ поралаксъ приблизительно въ 30″; геоцентрическая широта кометы была около 20°, наблюденія взяты Берлинскіе, значитъ разстояніе точки пересѣченія луча съ плоскостью эклиптики отъ центра земли составляло около $2^1/_2$ земныхъ радіусовъ, что скажется въ пятомъ знакѣ величинъ ρ_1' и ρ_3' нѣсколькими единицами.

Все это и объясняетъ происхожденіе вышеуказанныхъ разностей между наблюденнымъ и вычисленнымъ мѣстомъ.

Въ сочиненіи J. G. Galle, Verzeichniss der Elemente der bisher berechneter Cometenbahnen показаны слѣдующіе элементы этой кометы по вычисленію Oppolzer'a:

$$
\begin{aligned}
N &= 292^\circ 55' 57'' \\
i &= \ \ 6\ 56\ 10 \\
\omega &= 107\ 40\ 40 \\
\lg q &= 0.04252 \\
t_0 &= 1869, \text{Nov. } 20.3514 \text{ (Paris)} = 1869, \text{Nov. } 20.3821 \text{ Berlin.}
\end{aligned}
$$

Какъ видно наши элементы весьма близки къ элементамъ Oppolzer'a.

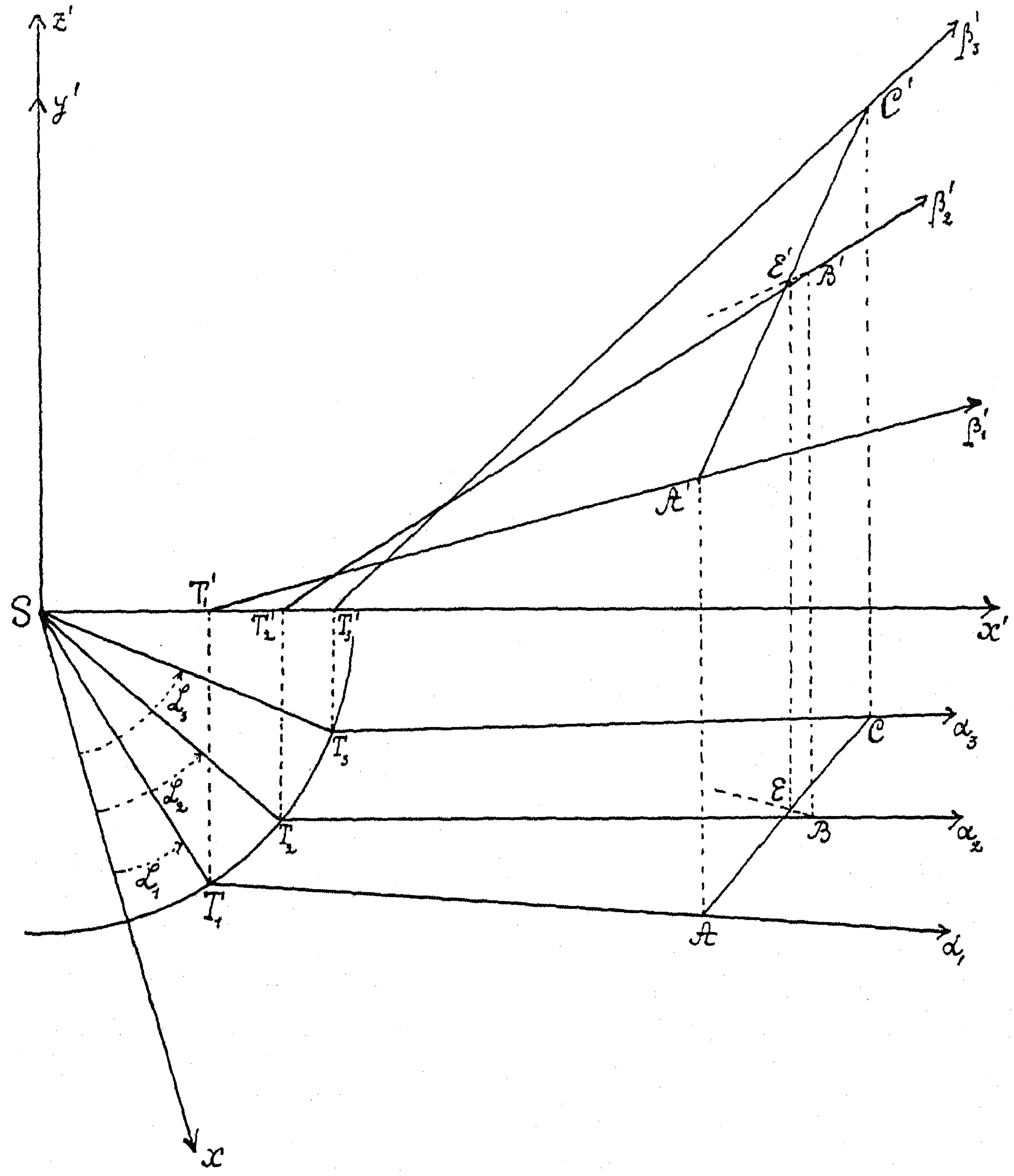
§ 19. Legendre въ своемъ мемуарѣ: „Nouvelles methodes pour la determination des orbites des comètes“ изданномъ въ 1806 г. даетъ вычисленіе орбиты кометы 1781 года по слѣдующимъ даннымъ:

№	t Nov. 1781	α ☄	β ☄	L ♁	lg R
1	14д 8ч 29м 44с	307°14′45″	+55°17′ 9″	52°54′ 2″	$\bar{1}$.994864
2	19 8 29 44	306 51 26	39 14 48	57 57 4	$\bar{1}$.994426
3	29 8 29 44	306 42 20	31 4 52	63 0 41	1.994028

Какъ видно въ этомъ примѣрѣ движенiе кометы по долготѣ составляетъ всего 32′ 25″; очевидно, что построенiе въ проекцiи на плоскости эклиптики невыполнимо.

Но не трудно видѣть, что нѣтъ никакой надобности выполнять Ньютоново построенiе непремѣнно на плоскости эклиптики, оно останется въ силѣ (строя поправки въ плоскости орбиты) для любой плоскости проекцiй.

Черт. 11.



Въ нашемъ случаѣ возьмемъ за горизонтальную плоскость проекцiй плоскость эклиптики, за вертикальную-же плоскость проекцiй—плоскость, проведенную черезъ центръ солнца параллельно плоскости долготы при второмъ наблюденiи и все Ньютоново построенiе и формулы изъ него слѣдующiя будемъ выполнять въ нашей вертикальной плоскости проекцiй.

Очевидно, что обозначая разстоянiя $T_1'A'$, $T_2'B'$, $T_3'C'$ соотвѣтственно черезъ ρ'_1 ρ'_2 и ρ'_3 (черт. 11) мы можемъ брать всѣ формулы § 10, замѣнивъ въ нихъ углы α_1 α_2 и α_3 соотвѣтственно черезъ

$$\alpha_1' = \alpha_2 + \beta_1', \qquad \alpha_2' = \alpha_2 + \beta_2', \qquad \alpha_3 = \alpha_2 + \beta_3'$$

Но наши формулы будутъ проще, если мы примемъ направленіе оси проекцій т. е. $S\alpha_2$ за направленіе оси x-овъ, вмѣсто-же оси y-ковъ возьмемъ совмѣщенное положеніе оси z-овъ т. е. будемъ вездѣ въ фор. § 10 писать вмѣсто буквы y букву z, вмѣсто буквы η букву ζ и на оборотъ, помѣчая ихъ для отличія значками.

Такимъ образомъ получимъ въ нашихъ новыхъ координатныхъ осяхъ:

1) Мѣста земли: T_1, T_2, T_3

$$\begin{aligned}
&\xi_1' = R_1 \cos(L_1 - \alpha_2); \quad \eta_1' = R_1 \sin(L_1 - \alpha_2); \quad \zeta_1' = 0 \\
&\xi_2' = R_2 \cos(L_2 - \alpha_2); \quad \eta_2' = R_2 \sin(L_2 - \alpha_2); \quad \zeta_2' = 0 \quad \ldots \quad (1) \\
&\xi_3' = R_3 \cos(L_3 - \alpha_3); \quad \eta_3' = R_3 \sin(L_3 - \alpha_3); \quad \zeta_3' = 0
\end{aligned}$$

Для нахожденія мѣстъ кометы имѣемъ во первыхъ:

$$\operatorname{tg}\beta_1' = \operatorname{tg}\beta_1 \sec(\alpha_1 - \alpha_2); \quad \operatorname{tg}\beta_3' = \operatorname{tg}\beta_3 \sec(\alpha_3 - \alpha_2) \quad \ldots \quad (2)$$

Затѣмъ:

$$\begin{aligned}
&x_1' = \xi_1' + \rho_1' \cos\beta_1'; \quad z_1' = \rho_1' \sin\beta_1'; \quad y_1' = \eta_1' + \rho_1' \cos\beta_1' \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \\
&x_2' = \xi_2' + \rho_2' \cos\beta_2; \quad z_2' = \rho_2' \sin\beta_2; \quad y_2' = \eta_2' \quad . \ (3) \\
&x_3' = \xi_3' + \rho_3' \cos\beta_3'; \quad z_3' = \rho_3' \sin\beta_3'; \quad y_3' = \eta_3' + \rho_3' \cos\beta_3' \operatorname{tg}(\alpha_3 - \alpha_2)
\end{aligned}$$

Всѣ остальныя формулы сохраняются, дѣлая лишь упомянутую выше замѣну буквъ.

Для ясности приводимъ полное вычисленіе примѣра Legendre'а по нашимъ формуламъ, причемъ для наглядности пользуемся прямо фор. (3 и 4) § 10 не преобразовывая ихъ къ виду (39).

Примѣръ 3-ій.

Комета 1781 года (Legendre. Nouv. meth. pour la determination des orbites des comètes стр. 33).

№	t Nov. 1781	α ☄	β ☄	L ♁	lg R	lg τ
1	14ᵈ 8ч 29м 44с	307°14′45″	+55°17′ 9″	52°54′ 2″	$\bar{1}$.994864	$\bar{2}$.9345514
2	19 D°	306 51 26	39 14 48	57 57 4	994426	$\bar{2}$.9345514
3	29 D°	306 42 20	31 4 52	63 0 41	994028	$\bar{1}$.2355814

Вычисленіе мѣстъ земли.

№	$L-\alpha_2$	lg cos $(L-\alpha_2)$	lg sin $(L-\alpha_2)$	lg ξ'	lg η'	ξ'	η'
1	106°02′36″	$\bar{1}$.441482 (n)	$\bar{1}$.982747	$\bar{1}$.436346 (n)	$\bar{1}$.977611	—0.273115	0.949754
2	111 05 38	$\bar{1}$.556178 (n)	$\bar{1}$.969878	$\bar{1}$.550604 (n)	$\bar{1}$.964304	—0.355307	0.921094
3	116 09 15	$\bar{1}$.644230 (n)	$\bar{1}$.953088	$\bar{1}$.638258 (n)	$\bar{1}$.947118	—0.434768	0.885356

2) Вычисленіе „приведенныхъ широтъ“ β_1' и β_3'.

$\alpha_1-\alpha_2=$ 0°23′19″ lg sec 0.0000100 $\alpha_3-\alpha_2=-$ 0°9′ 6″ lg sec 0.0000015

$\beta_1=$ 55 17 9 lg tg 0.1593929 $\beta_3=$ 31 4 52 lg tg $\bar{1}$.7801653

lg tg $\beta_1'=0.1594029$ lg tg $\beta_3'=\bar{1}.7801668$

$\beta_1'=55°17'11''$ $\beta_3'=31°04'52''$

№	β'	lg cos β'	lg sin β'	cos β'	sin β'
1	55°17′11″	$\bar{1}$.755474	$\bar{1}$.914877	0.5695	0.8220
2	39 14 48	$\bar{1}$.888981	$\bar{1}$.801171	0.7744	0.6327
3	31 4 52	$\bar{1}$.932695	$\bar{1}$.712862	0.8564	0.5163

Координаты вертикальныхъ проекцій кометы при $\rho_1'=\rho_2'=\rho_3'=1.00$.

№	x'	z'	lg ρ' cos β' tg $(\alpha_i-\alpha_2)$	ρ' cos β' tg $(\alpha_i-\alpha_2)$	y'
1	0.29636	0.82201	$\bar{3}$.58687	+0.00386	0.95342
2	0.41912	0.63266	—	0.00000	0.92109
3	0.42167	0.51625	$\bar{3}$.36547 (n)	—0.00232	0.88324

По этимъ даннымъ составляемъ чертежъ въ масштабѣ $a=200$ mm. и замѣтивъ что приближенно:

$$\sigma=\frac{\sqrt{2}\,\tau_3}{\sqrt{r_2}}=\frac{0.2433}{\sqrt{r_2}}$$

и при $r_2 = 1.00$, $\sigma = 0.243$. Прикладывая линейку видимъ, что надо брать ρ_2 близко къ 0.60, тогда c_1 приблизительно равно 0.3 и близко къ σ, поэтому беремъ за исходное $\rho_2 = 0.60$ и строимъ хорду

1) Беремъ

$$\rho_2 = 0.60.$$

Чертежъ даетъ

$$c = 63 \text{ mm.} = 0.315$$

$$r_2 = 1.00 \qquad \sigma = 0.243.$$

2) Беремъ

$$\rho_2 = 0.50.$$

Чертежъ даетъ:

$$c = 47 \text{ mm.} = 0.235$$

$$r_2 = 194.5 \text{ mm.} = 0.972 \qquad \sigma = \frac{0.243}{\sqrt{0.972}} = 0.247$$

Итакъ:

$$\text{при } \rho_2 = 0.60 \qquad c - \sigma = +0.072$$

$$\rho_2 = 0.50 \qquad c - \sigma = -0.012$$

поэтому будетъ въ круглыхъ числахъ $\rho_2 = 0.52$ съ каковаго значенія и начинаемъ вычисленіе.

I Предположеніе: $\rho_2 = 0.520$.

$$\lg \rho_2 = \bar{1}.716003.$$

1) *Вычисленіе* x_2' и z_2'.

$$\lg \rho_2 \cos \beta_2 = \bar{1}.604984 \ldots 0.402702 \qquad x_2 = 0.047395$$

$$\lg \rho_2 \sin \beta_2 = \bar{1}.517174 \qquad z_2 = 0.328983.$$

2) *Вычисленіе* l_1 и l_3.

$$l_2 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \cdot \sin \beta_3' \qquad l_3 = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \cdot \sin \beta_1'$$

$\xi_3 - \xi_1 = -0.161653$	$\lg\ \bar{1}.208584(n)$	$\lg l_1 = \bar{1}.308654$	$l_1 = 0.203542$
$\beta_3' - \beta_1' = -24°12'19''$	$\lg \sin\ \bar{1}.612792(n)$	$\lg l_3 = \bar{1}.510669$	$l_3 = 0.324093$
	$\bar{1}.595792.$		

3) *Вычисленіе* ρ_1' и ρ_3'.

$$\rho_1' = l_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \frac{(x_2 - \xi_3)\sin \beta_3' - \zeta_2 \cos \beta_3'}{\sin(\beta_3' - \beta_1')} \qquad \rho_3' = l_3 - \frac{\tau_3}{\tau_1} \cdot \frac{(x_2 - \xi_1)\sin \beta_1' - \zeta_2 \cos \beta_1'}{\sin(\beta_3' - \beta_1')}$$

$$\lg \frac{\tau_3}{\tau_2} = \lg \frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.301030$$

$$\lg n_1 = \lg n_3 = \lg \frac{\tau_3}{\tau_2} \cdot \operatorname{cosec}(\beta_3' - \beta_1') = 0.688238(n) \qquad n_1 = n_3 = -4.878$$

$$\lg n_1 \sin \beta_3' = 0.401100(n) \qquad \lg(-n_1 \cos \beta_3') = 0.620933;$$

$$\lg(-n_3 \sin \beta_1') = 0.603115; \qquad \lg n_3 \cos \beta_1' = 0.443712(n)$$

$x_2 - \xi_3 = 0.482163$	$\lg\ \bar{1}.683196$	$0.084296(n)$	$n_1(x_2 - \zeta_3)\sin\beta_3' = -1.214220$
	$\lg \zeta_2\ \bar{1}.517174$	0.138107	$-n_1\zeta_2\cos\beta_3' = +1.374380$
			$l_1 = +0.203542$
			$\rho_1' = \mathbf{0.363702}$
$x_2 - \xi_1 = 0.320510$	$\lg\ \bar{1}.505842$	0.108957	$-n_3(x_2 - \xi_1)\sin\beta_1' = +1.285160$
	$\lg \zeta_2\ \bar{1}.517174$	$\bar{1}.960886(n)$	$n_1\zeta_2\cos\beta_1' = -0.913874$
			$l_3 = +0.324093$
			$\rho_3' = \mathbf{0.695379}$

4) *Вычисленіе координатъ* x_1', z_1' и x_3', z_3'.

$\lg\rho_1' = \bar{1}.560745$ $\qquad\qquad$ $\lg\rho_3' = \bar{1}.842222$

$\lg\rho'\cos\beta_1'\ \bar{1}.316219;\ 0.207119\quad x_1' = -0.065996\quad \lg\rho_3'\cos\beta_3'\ \bar{1}.774917.0.595549\quad x_3' = 0.160781$

$\lg\rho'\sin\beta_1'\ \bar{1}.475622\quad z_1' = 0.298966\quad \lg\rho_3'\sin\beta_3'\ \bar{1}.555084\quad z_3' = 0.358992$

5) *Повѣрка:*

$x_3' - x_1' = 0.226777 \qquad z_3' - z_1' = 0.060026$

$x_2 - x' = 0.113391 \qquad z_2' - z_1' = 0.030017$

Отношенія $\dfrac{x_3' - x_1'}{x_2 - x_1'} = \dfrac{z_3' - z_1'}{z_2 - z_1'}$ должны равняться 2, что и имѣетъ мѣсто съ возможною при вычисленіи на 6 знаковъ точностью.

6) *Вычисленіе* r_2 и h.

$$r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \qquad f_0 = \frac{1}{8}\frac{\tau_3^2}{r_2^2} \qquad f = \frac{1}{8}\frac{\tau_3^2}{\left(r_2 + \frac{1}{3}f_0\right)^2} \qquad h = f\cdot\frac{d_2}{r_2}$$

$\lg x_2 = \bar{2}.675733$			$\lg\frac{1}{8}\tau_3^2 = \bar{3}.56807$
$\lg z_2 = \bar{1}.517174\ \ \bar{1}.995539$	$\bar{1}.521635$		$2\lg r_2 = \bar{1}.98177$
$\lg\operatorname{tg}\gamma_2\ \ 0.841441$	$\lg\gamma_2\ \ \bar{1}.964304\ \ \bar{1}.973419$		$\lg f_0\ \ \bar{3}.58630$
$\gamma_2 = 81°48'08''$	$\bar{1}.557331$	$\lg r_2 = \bar{1}.990885$	$f_0 = 0.003857$
		$r_2 = 0.979230$	
		$\frac{1}{3}f_0 = 0.001286$	
$\lg\frac{1}{8}\tau_3^3 = \bar{3}.56807$	$\lg f = \bar{3}.58517$	$0.980516\ldots\bar{1}.99145$	
$\bar{1}.98290$	$\lg\frac{d_2}{r_2} = 1.53075$		
$\lg f\ \ \bar{3}.58517$	$\lg h = \bar{3}.11592$		
$f = 0.003847$	$h = 0.001306.$		

7) *Вычисленіе* $\delta\rho_1'$ и $\delta\rho_3'$.

$$\delta\rho_1' = +n_1 h.\sin(\gamma_2 - \beta_3') \qquad \delta\rho_3' = -n_3 h.\sin(\gamma_2 - \beta_1')$$

$\gamma_2 = 81°48'08'' \qquad\qquad \gamma_2 = 81°48'08''$

$\beta_3' = 31\ \ 4\ \ 52 \quad \lg n_1 h = \bar{3}.80416(n)$

$\gamma_2 - \beta_3' = 50\ 43\ 16 \quad \lg \sin = \bar{1}.88878$

$\lg \delta\rho_1' = \bar{3}.69294(n)$

$\delta\rho_1' = -0.004931$

$\rho_1 = 0.363702 + \delta\rho_1' = \mathbf{0.358771}$

$\lg \rho_1 = \bar{1}.554817$

$\beta_1' = 55\ 17\ 11 \quad \lg(-nh) = \bar{3}.80416$

$\gamma_2 - \beta_1' = 26\ 40\ 57 \quad \lg \sin = \bar{1}.65229$

$\mathrm{ld}\ \delta\rho_3' = \bar{3}.45645$

$\delta\rho_3' = 0.002861$

$\rho_3 = 0.695379 + \delta\rho_3' = \mathbf{0.698240.}$

$\lg \rho_3 = \bar{1}.844005.$

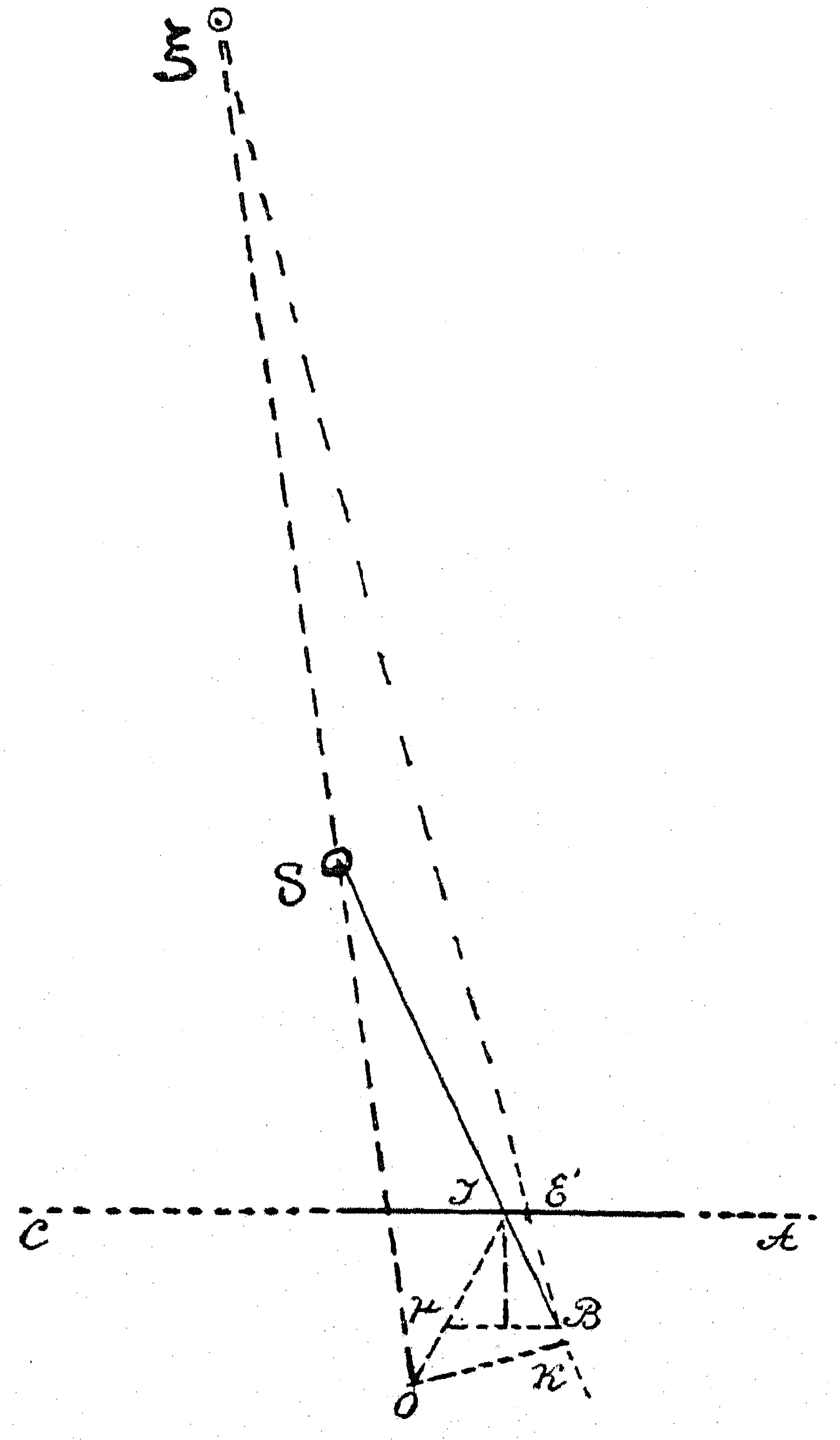
$\lg \delta x_1' = \bar{3}.44841(n)$	$x_1 = -0.065996 - 0.002808 = -0.068804$
$\lg \delta z_1' = \bar{3}.60782(n)$	$z_1 = 0.298966 - 0.004053 = 0.294913$
$\lg \rho_1 \cos \beta_1' \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \bar{3}.14169(n)$	$y_1 = 0.949754 + 0.001386 = 0.951140$
$\lg \delta x_3' = \bar{3}.38914$	$x_3 = 0.160781 + 0.002450 = 0.163231$
$\lg \delta z_3' = \bar{3}.16931$	$z_3 = 0.358992 + 0.001477 = 0.360469$
$\lg \rho_3 \cos \beta_3' \operatorname{tg}(\alpha_3 - \alpha_2) = \bar{3}.20947(n)$	$y_3 = 0.885356 - 0.001620 = 0.883736.$

8) *Вычисленіе хорды с.*

$x_3 - x_1 =$	0.232035	$\lg$	$\bar{1}.365553$	$\bar{1}.483324$	
$z_3 - z_1 =$	0.065556	$\lg$	$\bar{2}.816612$	$\bar{1}.382229$	$\bar{1}.983665$
$y_3 - y_1 =$	-0.067404	$\lg \operatorname{tg}\gamma$	$\bar{1}.451059$	$\bar{2}.828686$	
				1.446457	$\lg c = \bar{1}.398564$

$c = 0.250360.$

Черт. 12.



9) Для составленія Ньютонова чертежа поправокъ въ плоскости орбиты, снимаемъ съ чертежа величины r_1 и r_3 и строимъ въ масштабѣ $a = 200$ mm. треугольникъ ASC и затѣмъ вычерчиваемъ въ увеличенномъ масштабѣ часть, прилегающую къ срединѣ хорды.

Для перваго построенія имѣемъ:

$AC = 49.7$ mm. $\quad AS = 199$ mm. $\quad CS = 194.6$ mm.

Для второго построенія беремъ масштабъ $a = 20000$ mm.

Схема этого чертежа такая: (черт. 12).

Масштабъ $a = 20000$ mm.

$ok = 15$ mm. $\quad Bk = 37$ mm.

$S\mu = SB - 0.5$ mm. $\quad Bk = 0.00185 = 37$ mm.

$S\mu = SB - 0.000025 = 0.979205$

$BIA = 86°$

$$k = 0.00075 \cdot \frac{1}{0.981} = 0.000765$$

$$EE' = \frac{2}{3} k \cdot \frac{f}{\sin 86^\circ} = 0.00051 \cdot 0.0038 = 0.0000019 = g$$

переносъ точки E по направленію къ A, т. е. по углу $\gamma = 195^\circ 46'$.

Поправки:

$$\delta\rho_1' = -0.000002$$

$$\delta\rho_3' = +0.000006$$

$$\delta c = +0.000007$$

и слѣдовательно будетъ

$$c = 0.250367.$$

$$SP = r_2 + \frac{2}{3} f - 0.000025 = 0.979230 + 0.002565 - 0.000025 = 0{\cdot}981770$$

$$\lg SP = \bar{1}.992010 \qquad \frac{1}{2} \lg SP = \bar{1}.996005$$

$$\lg \sqrt{2}\, \tau_3 = \bar{1}.386096$$

$$\lg \sigma = \bar{1}.390091$$

$$\sigma = 0.245522$$

Итакъ при

$$\rho_2 = 0.52$$

будетъ:

$$c - \sigma = +\mathbf{0.004845.}$$

Дальнѣйшія приближенія опредѣляемъ по дифференціальнымъ формуламъ.

10) Дифференціальныя формулы.

Данныя:

$d_2 = 0.332$; $r_2 = 0.979$; $\gamma_2 = 81^\circ 48'$ $h = 0.00131$; $n_1 = n_3 - 4.878$;

$\gamma = 15^\circ 46'.5$; $z_2 = 0.329$; $c_1 = 0.241$; $c = 0.250$

$$\delta d_2 = \delta\rho_2 \cdot \cos(42^\circ 35') = 0.736 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta\gamma_2 = \delta\rho_2 \cdot \frac{\sin(\beta_2 - \gamma_2)}{d_2} = -2.035 \cdot \delta\rho_2; \quad \delta z_2 = 0.817 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta r_2 = 0.00131\,[2.216 - 0.766] = -0.00190 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta\rho_1 = -4.878\,[-0.1421 - 0.0014 - 0.0013 \cdot 0.64 \cdot 2.03] = +0.708 . \delta\rho_2$$

$$\delta\rho_3 = +4.878\,[0.2761 - 0.0008 - 0.0013 \cdot 0.09 \cdot 2.03] = +1.360 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta c_1 = [-0.708 \cdot 0.772 + 1.360 \cdot 0.965] \cdot \delta\rho_2 = +0.765 \cdot \delta\rho_2$$

$$\delta f = -\frac{0.0076}{0.979} \cdot 0.249 \cdot \delta\rho_2 = -0.019 \cdot \delta\rho_2 \qquad \lg \frac{1}{4\tau_3^2} = 0.9267$$

$$\delta(SP) = \delta r_2 + \frac{2}{3} \delta f = 0.249 \cdot \delta\rho_2 \qquad 3 \lg \sigma = \bar{2}.1701$$

$$\delta\sigma = -\frac{1}{4} \frac{\sigma^3}{\tau_3^2} \cdot \delta(SP) = -0.0311\, \delta\rho_2 \qquad \lg 0.249 = \bar{1}.3962$$

$$\bar{2}.4930$$

$$\delta(c - \sigma) = +0.765 \cdot \delta\rho_2$$

т. к. $\delta(c - \sigma)$ было равно $+0.004845$, то надо взять

$$\delta\rho_2 = -\frac{0.004845}{0.765} = -0.006383 \qquad \lg 0.004845 = \bar{3}.68529$$

$$\lg 0.765 = 0.11634$$

$$\lg \delta\rho_2 = \bar{3}.80163$$

Такимъ образомъ будетъ:

II Приближенiе $\rho_2 = \mathbf{0.513667}$.

$$\begin{array}{rlr}
\rho_1 = 0.358769 - 0.004484 = 0.354285 & & \lg SP = \bar{1}.991311 \\
\rho_3 = 0.698246 - 0.008610 = 0.689636 & & \frac{1}{2}\lg SP = \bar{1}.995656 \\
c = 0.250367 - 0.004643 = 0.245724 & & \lg \sqrt{2}\,\tau_3 = \bar{1}.386096 \\
\sigma = 0.245522 + 0.000202 = 0.245724 & & \lg \sigma = \bar{1}.390440 \\
SP = 0.981770 - 0.001577 = 0.980193 & & \sigma = \mathbf{0.245720.}
\end{array}$$

Въ виду значительной величины $\delta\rho_2$, т. е. что вторыя степени приращенiй могутъ оказывать влiянiе на шестой знакъ, вычисляемъ величины r_2 и c непосредственно, чтобы ихъ исправить.

Имѣемъ:

$$\begin{array}{lll}
\lg \delta\rho_1 = \bar{3}.65186\,(n) & \lg \delta\rho_2 = \bar{3}.80163\,(n) & \lg \delta\rho_3 = \bar{3}.93470
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lg \delta x_1 = \bar{3}.65186\,(n) & x_1 = -0.068804 - 0.002555 = -0.071359 \\
\lg \delta x_2 = \bar{3}.69061\,(n) & x_2 = +0.047395 - 0.004905 = 0.042490 \\
\lg \delta x_3 = \bar{3}.86739\,(n) & x_3 = 0.163231 - 0.007369 = 0.155862 \\
\lg \delta z_1 = \bar{3}.56674\,(n) & z_1 = 0.294913 - 0.003688 = 0.291225 \\
\lg \delta z_2 = \bar{3}.60280\,(n) & z_2 = 0.328983 - 0.004007 = 0.324976 \\
\lg \delta z_3 = \bar{3}.64756\,(n) & z_3 = 0.360469 - 0.004442 = 0.356027 \\
\lg \delta y_1 = \bar{5}.2387\,(n) & y_1 = 0.951130 - 0.000017 = 0.951113 \\
\lg \delta y_3 = \bar{5}.3000 & y_3 = 0.883736 + 0.000020 = 0.883756
\end{array}$$

$$r_2 = 0.979230 - 0.001580 = 0.977650$$

$$f = 0.003847 + 0.000012 = 0.003859$$

$$SP = 0.977650 + 0.002573 - 0.000025 = 0.980198 \qquad \sigma = \mathbf{0.245718.}$$

$$\begin{array}{lllll}
\lg x_2 = 2.628287 & & & & \\
\lg z_2 = \underline{\bar{1}.511851} & \bar{1}.996319 & \bar{1}.515532 & & \\
\bar{1}.116436 & & \lg y_2\,\underline{\bar{1}.964304} & \bar{1}.974114 & \\
 & & \bar{1}.551228 & & \lg r_2 \quad \bar{1}.990190 \\
 & & & & r_2 = \mathit{0.977665}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
x_3 - x_1 = 0.227221 & \lg \bar{1}.356448 & \bar{1}.983019 & & \\
z_3 - z_1 = \underline{0.064802} & \lg \underline{\bar{2}.811588} & & \bar{1}.373429 & \bar{1}.983034 \\
y_3 - y_1 = 0.067357 & \bar{1}.455140 & & \underline{\bar{2}.828383} & \\
 & & & \bar{1}.454954 & \lg c = \bar{1}.390395 \\
 & & & & c = \mathbf{0.245694}
\end{array}$$

Такимъ образомъ при $\rho_2 = 0.513667$

$$c - \sigma = -0.000024.$$

Этому соотвѣтствуетъ

$$\delta\rho_2 = +\frac{0.000024}{0.765} = +0.000031$$

и слѣдовательно окончательно будетъ

$$\rho_2 = 0.513698$$

и

$$c = \sigma = \mathbf{0.245719.}$$

11) Для провѣрки вычисляемъ r_1 и r_3 и хорду σ по формулѣ Эйлера

$$\begin{array}{llllll}
\lg x_1 = \bar{2}.853370 & & & & & \\
\lg z_1 = \bar{1}.464258 & \bar{1}.987345 & & \bar{1}.476913 & & \\
\bar{1}.389112 & & \lg y_1 & \bar{1}.178232 & \bar{1}.979423 & \\
 & & & \bar{1}.498681 & & \lg r_1 = \bar{1}.998809 \\
 & & & & & r_1 = 0.997260 \\
\lg x_3 = \bar{1}.192843 & & & & & \\
\lg z_3 = \bar{1}.551508 & \bar{1}.961911 & & \bar{1}.589597 & & \\
\bar{1}.641335 & & \lg y_3 & \bar{1}.946332 & \bar{1}.961600 & \\
 & & & \bar{1}.643265 & & \lg r_3 = \bar{1}.984732 \\
 & & & & & r_3 = 0.965457
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
r_1 + r_3 = 1.962717 & \bar{1}.560685 & \\
\lg = 0.292877 & \bar{1}.536611 & \\
\frac{1}{2}\lg = 0.146438 & 0.097296 \;.\;.\;.\;.\; 0.12511 & \\
0.439315 & 284 \text{ (таб. Энке)} & \\
 & 0.292877 & \\
 & \lg \sigma = 0.390457 & \\
 & \sigma = 0.245730 &
\end{array}$$

12) Чтобы исправить величины r_1 и r_3 такъ чтобы теорема Эйлера удовлетворялась въ точности вычисляемъ δr_1 и δr_3 по формуламъ:

$$\delta r_1 = \frac{1}{r_1}(x_1\,\delta x_1 + y_1\,\delta y_1 + z_1\,\delta z_1) \quad \text{и} \quad \delta r_3 = \frac{1}{r_3}(x_3\,\delta x_3 + y_3\,\delta y_3 + z_3\,\delta z_3)$$

взявъ $\delta\rho_2 = 0.006333$, для котораго имѣются готовые $\delta x_1, \delta y_1, \ldots \delta z_3$.

Имѣемъ:

$$\begin{array}{ll}
x_1\,\delta x_1 = -0.000181 & x_3\,\delta x_3 = 0.001205 \\
z_1\,\delta z_1 = +0.001073 & z_3\,\delta z_3 = 0.001570 \\
y_1\,\delta y_1 = \quad 0\ldots.. & y_3\,\delta y_3 = \quad 0\ldots.. \\
\hline
\; 0.000892 & 0.002775 \\
\delta r_1 = \quad 0.141\,\delta\rho_2 & \delta r_2 = 0.454\,\delta\rho_2
\end{array}$$

$$c - \sigma = -0.000012$$
$$\delta\rho_2 = +0.000016$$
$$\delta r_1 = +0.000002$$
$$\delta r_3 = +0.000007$$

и слѣдовательно окончательно будетъ:

$$
\begin{array}{lll}
c = 0.245730 & x_1 = -0.071340 & x_3 = 0.155917 \\
r_1 = 0.997262 & z_1 = 0.291255 & z_3 = 0.356058 \\
r_3 = 0.965464 & y_1 = 0.951113 & y_3 = 0.883756.
\end{array}
$$

Получивъ такимъ образомъ два мѣста кометы въ пространствѣ и вычисляемъ по нимъ элементы орбиты:

Вычисленіе элементовъ орбиты.

1) Геліоцентрическія координаты (широта и долгота)

$$\sin\theta_1 = \frac{z_1}{r_1}; \quad \operatorname{tg}(\lambda_1 - \alpha_2) = \frac{y_1}{x_1}; \qquad \sin\theta_3 = \frac{z_3}{r_3}; \quad \operatorname{tg}(\lambda_3 - \alpha_2) = \frac{y_3}{x_3}$$

$$
\begin{array}{rl|rl}
\lg z_1 = & \bar{1}.464273 & \lg z_3 = & \bar{1}.551521 \\
\lg r = & 0.001191 & \lg r_1 = & 0.015264 \\
\lg\sin\theta_1 = & \bar{1}.465464 & \lg\sin\theta_3 = & \bar{1}.566785 \\
\theta_1 = & 16^\circ 58' 51''.6 & \theta_3 = & 21^\circ 38' 29''.0 \\
\lg y_1 = & \bar{1}.978232 & \lg y_3 = & \bar{1}.946332 \\
\lg x_1 = & \bar{2}.853333\,(n) & \lg x_3 = & \bar{1}.192894 \\
\lg\operatorname{tg}(\lambda_1 - \alpha_2) & \bar{1}.124899\,n & \lg\operatorname{tg}(\lambda_3 - \alpha_2) = & 0.753438
\end{array}
$$

$$\lambda_1 - \alpha_2 = 180^\circ - 85^\circ 42' 37''.6 = 94^\circ 17' 22''.4 \qquad \lambda_3 - \alpha_2 = 79^\circ 59' 40''.3$$

$$
\begin{array}{rl|rl}
\alpha_2 = & 306\ 51\ 26 & \alpha_2 = & 306\ 51\ 26 \\
\lambda_1 = & 41\ \ 8\ 48\,4 & \lambda_3 = & 26\ 51\ \ 63
\end{array}
$$

а) *Наклонность i и долгота узла N*

$$
\begin{array}{rl|ll}
\theta_1 + \theta_3 = & 38^\circ 37' 20''.6 & \lg\sin & \bar{1}.795313 \\
\theta_1 - \theta_3 = & -\ 4\ 39\ 37\,4 & \lg\operatorname{cosec} & 1.090180\,(n) \\
\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_3) = & 7\ \ 8\ 51 & \lg\operatorname{tg} & \bar{1}.098292
\end{array}
$$

$$\lg\operatorname{tg}\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N\right] \quad \bar{1}.981785\,(n)$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3) - N = -43^\circ 55' 50''.6 \qquad \mathbf{N = 77^\circ 55' 47''.9}$$

$$
\begin{array}{ll|ll}
N - \lambda_1 = 36^\circ 46' 59''.5 & \lg\operatorname{cosec}\ 0.222726 & N - \lambda_3 = 51^\circ 04' 41''.6 & \lg\operatorname{cosec}\ \ 0.109018 \\
& \lg\operatorname{tg}\theta_1\ \bar{1}.484824 & & \lg\operatorname{tg}\theta_3\ \ \bar{1}.598532 \\
& \lg\operatorname{tg} i\ \bar{1}.707550 & & \lg\operatorname{tg} i = \bar{1}.707550
\end{array}
$$

$$\mathbf{i = 27^\circ 01' 14''.}$$

б) *Положеніе перигелія и параметръ:*

$$
\begin{array}{rll|rll}
\theta_1 = & 16^\circ 58' 51''.6 & \lg\cos\ \ \bar{1}.980640 & \theta_3 = & 21^\circ 38' 29''.0 & \lg\cos\ \ \bar{1}.968253 \\
N - \lambda_1 = & 36\ 46\ 59\,5 & \lg\cos\ \ \bar{1}.903582 & N - \lambda_3 = & 51\ 04\ 41\,6 & \lg\cos\ \ \bar{1}.798139 \\
& & \lg\cos u_1\ \ \bar{1}.884222 & & & \lg\cos u_3\ \ \bar{1}.766392 \\
& & u_1 = 40^\circ 0' 18''.0 & & & u_3 = 54^\circ 16' 10''.6
\end{array}
$$

$$u_3 - u_1 = 14^\circ 15' 52''.6.$$

$$c = 0.245730 \qquad s - r_1 = 0.106966 \qquad \lg \quad \bar{1}.029245$$

$$r_1 = 0.997262 \qquad s - r_3 = 0.138764 \qquad \lg \quad \bar{1}.142277$$

$$r_3 = 0.965464 \qquad \lg r_1 r_3 \quad 0.016455$$

$$2s = 2.208456 \qquad \bar{2}.187977$$

$$s = 1.104228 \qquad \lg \sin \frac{v_1 - v_3}{2} = \bar{1}.093988$$

$$\frac{1}{2} v_1 - v_2 = 7°7'56''.5$$

$$\frac{1}{2} \lg r_1 = \bar{1}.993405 \qquad \sqrt{r_1} = 0.998630 \qquad \sqrt{r_1} - \sqrt{r_3} = 0.016050 \qquad \lg \quad \bar{2}.205475$$

$$\frac{1}{2} \lg r_3 = \bar{1}.992368 \qquad \sqrt{r_3} = 0.982580 \qquad \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} = 1.981210 \qquad \lg \quad 1.703070$$

$$\frac{1}{4}(v_3 - v_1) = 3°33'58''.2 \qquad \lg \operatorname{cotg} \quad 1.205360$$

$$\frac{1}{2}(v_1 - v_3) = 7°\ 7'56''.5 \qquad \lg \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_3}{4} \quad \bar{1}.113905$$

$$\frac{1}{2}(v_1 + v_3) = 14°48'45\ 2 \qquad \frac{1}{4}(v_1 + v_3) = 7°24'22''.6$$

$$v_1 = 21°56'41''.7; \qquad v_3 = 7°40'48''.7$$

$$\omega = u_1 + v_1 = 61°56'59''.7$$

$$= u_3 + v_3 = 61\ 56\ 59\ 3$$

Среднее: $\omega = \mathbf{61°56'59''.5}$

$$\frac{1}{2} v_1 = 10°58'21'' \qquad \lg\cos \bar{1}.991987 \qquad \frac{1}{2} v_3 = 3°50'24'' \qquad \lg\cos \quad \bar{1}.990024$$

$$\lg \sqrt{r_1}\ \bar{1}.999405 \qquad \lg \sqrt{r_3} \quad 1.992368$$

$$\frac{1}{2}\lg q\ \bar{1}.991392 \qquad \lg \sqrt{q} = \bar{1}.991392$$

$$\lg q\ 1.982784 \qquad \lg q = 1.982784$$

$$\lg q = \mathbf{\bar{1}.982784} \quad (q = 0.961126)$$

$$v_1 = 21°56'41''.7 \qquad \lg m = \ 1.207878 \qquad v_3 = 7°40'48''.7 \qquad \lg m = \ 0.742455$$

$$\frac{3}{2}\lg q = \ 1.974176 \qquad \frac{3}{2}\lg q = \ 1.974176$$

$$\lg t_0 - t_1 = \ 1.182054 \qquad \lg t_0 - t_3 = \ 0.716631$$

$$t_0 - t_1 = 15.2074 \qquad t_0 - t_3 = \ 5.2075$$

$$t_1 = 14.3540 \qquad t_3 = 24.3540$$

$t_0 = 29.5614$ Nov. 1781. $\qquad t_0 = 29.5615$ Nov. 1781.

Среднее: $t_0 =$ *1781 г. Nov. 29.56145 =*

= 1781 г. Nov. 29ᵈ 13ᶣ 28ᵐ 29ᶜ.

Такимъ образомъ имѣемъ слѣдующіе элементы:

Комета 1781 года.

$N = 77°55'48''$

$i = 27\ 01\ 14$

$\omega = 61\ 57\ 00 \qquad (N - \omega) = 15°58'48''$

$\lg q = \bar{1}.982784 \qquad (q = 0.961135)$

$t_0 = 1781$ г. Nov. $29.56145 = 1781$ г. Nov.: $29^{д}\,13^{ч}\,28^{м}\,29^{с}$

Движеніе: *попятное.*

Метода Legendre'а составляетъ какъ бы развитіе методы Laplace'а, которая будетъ изложена ниже и сводится въ сущности къ составленію интерполяціонныхъ формулъ представляющихъ зависимость широтъ и долготъ кометы отъ времени, и опредѣленія затѣмъ мѣста при среднемъ наблюденіи и скорости кометы въ этотъ моментъ, послѣ чего и находятся элементы орбиты какъ бы по начальнымъ (для момента t_2) обстоятельствамъ ея движенія.

Legendre приводитъ въ упомянутомъ сочиненіи двѣ серіи элементовъ:

Элем.:	Предварительные	Окончательные
N	77°55′ 7″	77°22′55″
i	26 59 44	27 12 4
$N-\omega$	15 51 46	16 3 7
q	0.960449	0.960995
t_0	Nov.: 29ᵈ 16ᶣ 18ᵐ3	29ᵈ 12ᶣ 42ᵐ8

Оказывается что и тѣ и другіе элементы оставляютъ погрѣшности и по вычисленію самого Legendre'а, разности вычисленныхъ и наблюденныхъ мѣстъ слѣдующія:

№	Предварит. элем.		Окончат. элем.	
	α выч. — α наб.	β выч. — β наб.	α выч. — α наб.	β выч. — β наб.
1	+61″	+226″	+194″	—115″
2	+ 1	+ 1	+100	— 55
3	—21	— 62	+ 28	+ 92

Для сличенія вычислимъ координаты мѣста при второмъ наблюденіи по нашимъ элементамъ. Мѣстъ при первомъ и третьемъ наблюденіяхъ вычислять нѣтъ надобности, ибо они послужили для нахожденія элементовъ и значитъ обратнымъ разсчетомъ получатся съ точностью до десятыхъ долей секунды, причемъ и эти разности произойдутъ отъ накопленія неизбѣжныхъ при вычисленіи по логариѳмамъ погрѣшностей.

Итакъ имѣемъ:

$$t_0 = 29.56145 \qquad \lg(t_2 - t_0) = 1.008917$$

$$t_2 = 19.35400 \qquad \frac{3}{2}\lg q = \bar{1}.974176$$

$$t_2 - t_0 = 10.20745 \qquad \lg m = 1.034741$$

$$m = 10.8328\ .\ .\ .\ v_2 = 14°55'42''.5$$

$v_2 = 14°55'42''.5$

$\omega = 61\ 56\ 59\ 5$ $\qquad \lg \sin u_2 = \bar{1}.864278$ $\qquad \lg \cos u_2 = \bar{1}.833609$

$u_2 = 47\ 01\ 17$ $\qquad \lg \sin i = \bar{1}.657352$ $\qquad \lg \cos \theta_2 = \bar{1}.974579$

$\lg \sin \theta_2 = \bar{1}.521630$ $\qquad \lg \cos (N - \lambda_2) = \bar{1}.859030$

$\theta_2 = 19°24'48''$ $\qquad N - \lambda_2 = 43°42'44''$

$\lambda_2 = 34\ 13\ 04$

$\frac{1}{2} v_2 = 7°27'51''$ $\qquad \lg \cos = \bar{1}.996304$

$\lg \sqrt{q} = \bar{1}.991392$

$\lg \sqrt{r_2} = \bar{1}.995088$

$\lg r_2 = \bar{1}.990176$

$\lg r_2 = \bar{1}.990176$	$\lg r_2 = \bar{1}.990176$	$\lg r_2 = \bar{1}.990176$
$\lg \sin \theta_2 = \bar{1}.521630$	$\lg \cos \theta_2 = \bar{1}.974579$	$\lg \cos \theta_2 = \bar{1}.974579$
$\lg z_2 = \bar{1}.511806$	$\lg \cos \lambda_2 = \bar{1}.917455$	$\lg \sin \lambda_2 = \bar{1}.749999$
	$\lg x_2 = \bar{1}.882210$	$\lg y_2 = \bar{1}.714754$
	$x_2 = 0.762448$	$y_2 = 0.518507$

$\lg R_2 =$	$\bar{1}.994426$	$\lg R_2 =$	$\bar{1}.994426$
$\lg \cos L_2 =$	$\bar{1}.724802$	$\lg \sin L_2 =$	$\bar{1}.928188$
$\lg \xi_2 =$	$\bar{1}.719228$	$\lg \eta_2 =$	$\bar{1}.922614$
$\xi_2 =$	0.523876	$\eta_2 =$	0.836783
$x_2 =$	0.762448	$y_2 =$	0.518507
$x - \xi_2 =$	$+0.238572$	$y - \eta_2 =$	-0.318276
$\lg (x - \xi_2) =$	$\bar{1}.377619$	$\bar{1}.778992$	
$\lg (y - \eta_2) =$	$\bar{1}.502804\ (n)$	$\bar{1}.903177\ (n)$	
$\lg \mathrm{tg}\, \alpha_2 =$	$0.125185\ (n)$	$\lg \rho_2 =$	$\bar{1}.599627$
$\alpha_2 =$	$360° - 53°8'45''$	$\lg z_2 =$	$\bar{1}.511806$
$=$	$306\ 51'15''$	$\lg \mathrm{tg}\, \beta_2 =$	0.912179
α_2 наб. $=$	$306\ 51\ 26$	$\beta_2 =$	$39°14'47''$
α_2 выч. — α_2 наб. $= -$	**0° 0′ 11″**	β_2 наб. $=$	$39\ 14\ 48$
		β_2 выч. — β_1 наб. $= -$	**0° 0′ 1″**

Это сличеніе показываетъ насколько ближе наши элементы воспроизводятъ наблюденія нежели опредѣленные по методѣ Legendre'а.

Повидимому этою методою теперь не пользуются, а такъ какъ выкладки для ея установленія довольно сложныя, то мы въ нашихъ бесѣдахъ этой методы излагать не будемъ и ограничимся изложеніемъ методы Laplace'а, въ виду изящества ея теоріи.

Разсмотрѣніе этихъ вычисленій показываетъ, что исключительная особенность этого примѣра не только не ведетъ къ усложненію, но даже къ упрощенію вычисленій, т. к. выраженія l_1, l_3, ρ'_1 и ρ'_3 проще нежели въ общемъ случаѣ.

§ 20. Показавъ на трехъ предыдущихъ примѣрахъ, взятыхъ нарочно такъ чтобы они были типичными, способъ производства вычисленій по методѣ Ньютона, и ту точность которую можно достичь т. е. какую угодно, мы перейдемъ къ послѣднему примѣру именно кометѣ 1680 года, послужившей какъ уже сказано и самому Ньютону.

Я долженъ сознаться, это анализъ этого примѣра потребовалъ порядочнаго труда: — я перечислилъ этотъ примѣръ полностью трижды, вычисляя каждую величину для контроля двумя совершенно различными манерами, напр.: хорду c по формулѣ

$$c^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2$$

и по формуламъ:

$$c^2 = c_1^{\,2} + (z_3 - z_1)^2$$

$$c_1^{\,2} = f_1^{\,2} + f_3^{\,2} - 2 f_1 f_3 \cdot \cos(\alpha_3 - \alpha_1)$$

причемъ

$$f_1 = \rho_1 - l_1 \quad \text{и} \quad f_2 = \rho_3 - l_3$$

и т. под. Произошло это потому, что я сперва не получалъ тѣхъ чиселъ, которые показаны у Ньютона, хотя и получалъ числа весьма къ нимъ близкія, а такъ какъ въ числахъ приводимыхъ у Ньютона ошибки быть не можетъ, то и надо было доискаться до того способа, какимъ образомъ онъ свои числа получилъ.

Такъ какъ, приводя данныя послужившія ему для построенія, Ньютонъ даетъ только одинъ радіусъ векторъ земной орбиты $ST_2 = 0{,}98421$, то это заставило думать, что онъ принимаетъ часть орбиты земли между первымъ и третьимъ наблюденіями за дугу круга описанную этимъ радіусомъ. Составивъ въ этомъ предположеніи формулы — въ точности воспроизводящія всѣ указанныя у Ньютона построенія, и сдѣлавъ разсчетъ я получилъ числа отличающіяся отъ показанныхъ у Ньютона въ третьемъ знакѣ, а т. к. у него показано пять и четыре знака, то ясно, что Ньютонъ поступалъ какъ нибудь иначе.

Тогда я взялъ таблицы Leverrier (Annales de l'Observatoire de Paris t. IV) и по нимъ разсчиталъ долготы солнца и радіусы векторы земли, чтобы такимъ образомъ принять дѣйствительную орбиту земли за основаніе разсчета. Я считалъ, что несравненно проще сдѣлать выборку изъ этихъ таблицъ бывшихъ у меня подъ руками, нежели разыскивать по библіотекамъ, тѣ таблицы 1680-хъ годовъ, которыми могъ пользоваться Ньютонъ въ 1686 году.

Получилось слѣдующее:

Среднее Гринвич. время.	Долготы ☉ по таб. Leverrier.	Долготы ☉ показанныя у Ньютона.	R по таблицѣ Leverrier.
1680 г. Дек. $21^д\,6^ч\,36^м\,59^с$	281°06′43″	281°06′44″	0.9831845
1681 „ Янв. 5 6 01 38	296 22 9	296 22 18	0.9840353
1681 „ „ 25 7 58 42	316 45 17	316 45 36	0.9868510

причемъ дѣлая выборку я не дѣлалъ поправокъ на возмущенія.

Если взять по таб. Леверрье радіусъ векторъ на средній моментъ между крайними наблюденіями то получится 0.9842882 т. е. число разнящееся лишь въ пятомъ знакѣ отъ показаннаго у Ньютона.

Тогда взявъ долготы солнца показанныя у Ньютона, а радіусы векторы R по таблицамъ Леверрье я произвелъ вновь разсчетъ, опять таки воспроизводя буквально всѣ указанія Ньютона, получилъ болѣе близкое согласіе но всетаки не полное.

Послѣ этого я ввелъ поправку на отстояніе точки B (проекціи второго мѣста кометы на плоскость эклиптики) до касательной къ вершинѣ, воспроизводя вмѣстѣ съ тѣмъ формулами не приближенное построеніе описываемое Ньютономъ, а *точное* вытекающее изъ его теоремъ, но считая условно что и въ *проекціи длины* $I\mu = \mu M$ иными словами, *что и въ проекціи точка* S *остается фокусомъ параболы;* тогда я и получилъ въ точности числа Ньютона.

Продолжая разсчетъ далѣе и получивъ величины радіусовъ векторовъ, соотвѣтствующихъ полученнымъ укороченнымъ разстояніямъ, я повѣрилъ длину хорды по теоремѣ Эйлера, — оказалась разница превышающая погрѣшность накопляющуюся отъ вычисленія по логариѳмамъ, между тѣмъ равносильность теоремы Эйлера и теоремы Ньютона очевидна, и между длинами хордъ должно бы быть такое-же полное согласіе какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ.

Единственную причину этого несогласія я усмотрѣлъ лишь въ сдѣланномъ Ньютономъ для упрощенія построенія допущеніи — равенства проекцій длинъ $I\mu$ и $M\mu$, хотя направленія ихъ различны, и *для проекціи орбиты солнце никогда фокусомъ служить не будетъ.*

Тогда я передѣлалъ построеніе Ньютона выполняя его *въ плоскости орбиты,* а не въ проекціи и притомъ не приближенно а *точно* согласно теоремамъ X и XI, послѣ чего я и для примѣра кометы 1680 года получилъ полное согласіе длины хорды расчисляемой по теоремѣ Ньютона и по теоремѣ Эйлера; но зато получились иные укороченныя разстоянія и нѣсколько иные элементы орбиты нежели приведены въ Principia, но тутъ причина этой разницы была уяснена, и не могла быть отнесена къ недостаточно тщательному или недостаточно внимательному изученію текста Ньютона.

Послѣ этихъ объясненій приведемъ самый примѣръ Ньютона т. е. вычисленіе орбиты кометы 1680 года, производя это вычисленіе совершенно также какъ и для другихъ примѣровъ, но пользуясь лишь пятизначными логариѳмами какъ болѣе соотвѣтствующими точности старинныхъ наблюденій.

Примѣръ 4-ый.

Комета 1680 года.

Данныя по Ньютону.

№	Среднее Гринвич. время (по старому стилю).	Долгота солнца $(180^\circ + L)$	Долгота кометы α	Широта кометы β (N)	Радіусъ вектора земли.
1	1680 г. Дек. $21^{д}\,6^{ч}\,36^{м}\,59^{с}$	281°06′44″	305°08′12″	21°42′13″	
2	1681 „ Янв. 5 6 01 38	296 22 18	8 48 53	26 15 07	0.98421
3	1681 „ „ 25 7 58 42	316 45 36	39 35 00	17 56 30	

Различныя постоянныя въ вычисленіи.

№	Промежутки t	$\lg t$	$\lg \tau = \lg t + 2.2355814$	$\lg \cos \alpha$	$\lg \sin \alpha$	$\lg \operatorname{tg} \beta$
1	$14^{д}.975450$	1.1753798	$\bar{1}.4109612$	$\bar{1}.76006$	$\bar{1}.91264n$	$\bar{1}.59991$
2	20.081297	1.3027918	$\bar{1}.5383732$	$\bar{1}.99484$	$\bar{1}.18537$	$\bar{1}.69301$
3	35.056747	1.5447717	$\bar{1}.7803531$	$\bar{1}.88688$	$\bar{1}.80428$	$\bar{1}.51027$

Геліоцентрическія координаты земли по таблицѣ Леверрье.

№	L	R	$\lg R$	$\lg \cos L$	$\lg \sin L$	$\lg \xi$	$\lg \eta$
1	101°06′43″	0.9831845	$\bar{1}.99263$	$\bar{1}.28494n$	$\bar{1}.99178$	$\bar{1}.27757n$	$\bar{1}.98441$
2	116 22 9	0.9840353	$\bar{1}.99301$	$\bar{1}.64753n$	$\bar{1}.95228$	$\bar{1}.64054n$	$\bar{1}.94529$
3	136 45 17	0.9868510	$\bar{1}.99425$	$\bar{1}.86239n$	$\bar{1}.83577$	$\bar{1}.85664n$	$\bar{1}.83002$

$\xi_1 = -0.18948$ $\quad\quad$ $\eta_1 = 0.96474$

$\xi_2 = -0.43706$ $\quad\quad$ $\eta_2 = 0.88164$

$\xi_3 = -0.71885$ $\quad\quad$ $\eta_3 = 0.67612$

Примѣчаніе. Разчисленныя по таб. Леверрье долготы земли какъ видно нѣсколько разнятся отъ показанныхъ у Ньютона, а именно на 1″, 9″ и 19″; но такъ какъ я не имѣлъ подъ руками старинныхъ таблицъ движенія солнца, то я и взялъ таблицы Леверрье, чтобы выбрать изъ нихъ радіусы векторы земли, не приведенные у Ньютона, кромѣ средняго. По табл. Леверрье радіусъ векторъ на средній моментъ оказывается 0.9842882.

Возмущенія не приняты во вниманіе.

I Предположеніе.

$\rho_2 = 0.56570 \qquad \lg \rho_2 = \bar{1}.75759$

1) *Вычисленіе величинъ:* $x_2, y_2, z_2, r_2, d_2, \gamma_2$

Формулы:

$$x_2 = \xi_2 + \rho_2 \cos\alpha_2; \qquad y_2 = \eta_2 + \rho_2 \sin\alpha_2; \qquad z_2 = \rho_2 \operatorname{tg}\beta_2$$

$$d_2^2 = x_2^2 + y_2^2; \qquad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{y_2}{x_2}; \qquad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$\lg \rho_2 \cos\alpha_2 = \bar{1}.74743 \qquad \rho_2 \cos\alpha_2 = 0.55903 \qquad x_2 = 0.12197$

$\lg \rho_2 \sin\alpha_2 = \bar{2}.93796 \qquad \rho_2 \sin\alpha_2 = 0.08668_9 \qquad y_2 = 0.96833$

$\lg \rho_2 \operatorname{tg}\beta_2 = \bar{1}.44552 = \lg z_2 \qquad z_2 = 0.27895$

$\lg x_2 = \bar{1}.08625 \quad \bar{1}.09681 \qquad\qquad \lg z_2 = \bar{1}.44552 \quad \bar{1}.43903$

$\lg y_2 = \bar{1}.98602 \quad \bar{1}.99658 \qquad\qquad \lg d_2 = \bar{1}.98944 \quad \bar{1}.98295$

$\lg \operatorname{tg}\gamma_2 = 0.89977 \quad \lg d_2 = \bar{1}.98944 \qquad \lg \operatorname{tg} n = \bar{1}.45608 \quad \lg r_2 = 0.00649$

$\gamma_2 = 82°49'15'' \quad d_2 = 0.97598 \qquad n = 15°57'03'' \quad r_2 = 1.01510$

2) *Вычисленіе величинъ:* l_1 и l_3

Формулы:

$$l_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = (\xi_3 - \xi_1)\sin\alpha_3 - (\eta_3 - \eta_1)\cos\alpha_3$$

$$l_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) = (\xi_3 - \xi_1)\sin\alpha_1 - (\eta_3 - \eta_1)\cos\alpha_1$$

$\xi_3 - \xi_1 = -0.52937 \quad \bar{1}.72376\,n \qquad \lg \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = \bar{1}.72507\,n = \lg a$

$\eta_3 - \eta_1 = -0.28862 \quad \bar{1}.46033\,n \qquad \lg \frac{\eta_3 - \eta_1}{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)} = \bar{1}.46164\,n = \lg b$

$\alpha_3 - \alpha_1 = 94°26'48'' \quad \bar{1}.99869$

$\lg a \cdot \sin\alpha_3 = \bar{1}.52935\,n \quad -0.33834 \qquad \lg a \cdot \sin\alpha_1 = \bar{1}.63773 \quad 0.43424$

$\lg b \cdot \cos\alpha_3 = \bar{1}.34852 \quad +0.22311 \qquad \lg b \cdot \cos\alpha_1 = \bar{1}.22170 \quad 0.16661$

$l_1 = -0.11523 \qquad\qquad l_3 = 0.60085$

3) *Вычисленіе величинъ:* ρ_1' и ρ_3'.

Формулы:

$$\rho_1' = l_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{(x_2-\xi_3)\sin\alpha_3-(y_2-\eta_3)\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; \quad \rho_3 = l_3 - \frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{(x_2-\xi_1)\sin\alpha_1-(y_2-\eta_1)\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}$$

$x_2-\xi_3 = 0.84082$ $\quad \bar{1}.92470$ $\quad \lg\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.04757$ $\quad \bar{1}.97227$ $\quad +0.93815$

$y_2-\eta_3 = 0.29221$ $\quad \bar{1}.46570$ $\quad \lg\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.13017$ $\quad \bar{1}.59587$ $\quad -0.39434$

$l_1 = -0.11523$

$\rho_1' =$ **0.42858**

$x_2=\xi_1 = 0.31145$ $\quad \bar{1}.49339$ $\quad \lg\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.28334\,n$ $\quad \bar{1}.77673\,n$ $\quad +0.59804$

$y_2=\eta_1 = 0.00359$ $\quad \bar{3}.55509$ $\quad \lg\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.13076$ $\quad \bar{3}.68585$ $\quad +0.00485$

$l_3 = 0.60085$

$\rho_3' = 1.20374$

4) *Вычисленіе координатъ:* x_1' y_1', x_3' y_3'.

$$x_1' = \xi_1 + \rho_1'\cos\alpha_1 \qquad y_1' = \eta_1 + \rho_1'\sin\alpha_1; \qquad x_3' = \xi_3 + \rho_3'\cos\alpha_3 \qquad y_3' = \eta_3 + \rho_3'\sin\alpha_3$$

$\lg\rho_1' = \bar{1}.63203$ $\qquad \lg\rho_3' = 0.08053$

$\lg\rho_1'\cos\alpha_1 = \bar{1}.39209$	0.24666	$x_1' = 0.05718$
$\lg\rho_1'\sin\alpha_1 = \bar{1}.54467\,n$	-0.35049	$y_1' = 0.61425$
$\lg\rho_3'\cos\alpha_3 = \bar{1}.96741$	0.92771	$x_3' = 0.20886$
$\lg\rho_3'\sin\alpha_3 = \bar{1}.88481$	0.76703	$y_3' = 1.44315.$

5) *Повѣрка произведенныхъ вычисленій.*

Должно быть:

$$\frac{x_3'-x_1'}{x_2-x_1'} = \frac{y_3'-y_1'}{y_2-y_1'} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \qquad \lg\frac{\tau_3}{\tau_1} = 0.36939$$

$x_3'-x_1' = 0.15168$ $\quad \bar{1}.18093$ $\qquad y_3'-y_1' = 0.82890$ $\quad \bar{1}.91850$

$x_2-x_1' = 0.06479$ $\quad \bar{1}.81151$ $\qquad y_2-y_1' = 0.35408$ $\quad \bar{1}.54910$

0.36942 $\qquad$ 0.30940

6) *Вычисленіе поправокъ:* h, $\delta\rho_1'$, $\delta\rho_3'$ и величинъ ρ_1 и ρ_3.

Формулы:

$$h = \frac{1}{8}\,\frac{\tau_3^2}{r_2^2}\cos n \qquad \delta\rho_1' = \frac{\tau_3}{\tau_2}h\cdot\frac{\sin(\gamma_2-\alpha_3)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}; \qquad \delta\rho_3' = -\frac{\tau_3}{\tau_1}h\cdot\frac{\sin(\gamma_2-\alpha_1)}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)}$$

(h считается съ $+$ по направленію къ солнцу, направленіе $(+h)$ есть $180° + \gamma_2$)

$$\rho_1 = \rho_1' + \delta\rho_1' \qquad \rho_3 = \rho_3' + \delta\rho_3'$$

$$\lg\frac{\tau_3}{\tau_2}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.24329 \qquad \lg\frac{\tau_3}{\tau_1}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha_3-\alpha_1)} = 0.37070$$

$\lg \frac{1}{8} = \bar{1}.09691$ $\quad \gamma_2 - \alpha_3 = \ \ 43\ 14'\,15''$ $\quad \lg\sin\ \bar{1}.83570\quad 0.07899$

$2\lg\tau_3 = \bar{1}.56070$ $\quad \gamma_2 - \alpha_1 = 137\ 41\ 03''$ $\quad \lg\sin\ \bar{1}.82815\quad 0.19885$

$\lg \delta\rho_1' = \bar{2}.70657 \qquad \delta\rho_1' = +0.05088$

$\lg \delta\rho_3' = \bar{2}.82643 \qquad \delta\rho_3' = -0.06705$

$2\lg r_2 = \bar{1}.98702$		
$\lg\cos n = \bar{1}.98295$	$\rho_1' = \ \ 0.42858$	$\rho_3' = \ \ 1.20374$
$\lg h = \bar{2}.62758$	$\delta\rho_1' = +0.05088$	$\delta\rho_3' = -0.06705$
$h = 0.04242$	$\rho_1 = \ \ 0.47946$	$\rho_3 = \ \ 1.13669$
	$\lg\rho_1 = \ \ \bar{1}.68075$	$\lg\rho_3 = \ \ 0.05564$

7) *Вычисленіе координатъ* $x_1\ y_1$, $x_3\ y_3$ и проекціи хорды c_1

Формулы:

$$\delta x_1' = \delta\rho_1' \cos\alpha_1;\quad \delta y_1' = \delta\rho_1' \sin\alpha_1;\quad \delta x_3 = \delta\rho_3' \cos\alpha_3;\quad \delta y_3 = \delta\rho_3' \cdot \sin\alpha_3$$

$$x_1 = x_1' + \delta x_1';\quad y_1 = y_1' + \delta y_1';\quad x_3 = x_3' + \delta x_3';\quad y_3 = y_3' + \delta y_3'$$

$$c_1^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$

$\lg\delta x_1' = \bar{2}.46663$	$\delta x_1' = \ \ 0.02928$	$x_1 = 0.08646$
$\lg\delta y_1' = 2.61921\,n$	$\delta y_1' = -0.04161$	$y_1 = 0.57264$
$\lg\delta x_3' = \bar{2}.71331$	$\delta x_3' = -0.05168$	$x_3 = 0.15718$
$\lg\delta y_3' = \bar{1}.63071$	$\delta y_3' = -0.04273$	$y_3 = 1.40042$

$x_3 - x_1 = 0.07072$	$\bar{2}.84954$	$\bar{2}.93005$	$\bar{1}.91949$
$y_3 - y_1 = 0.82778$	$\bar{1}.91791$	$\bar{1}.99842$	$\bar{1}.91949$
	$\lg\operatorname{tg}\gamma = 1.06837$		$\lg c_1 = \bar{1}.91949$
	$\gamma = 85°07'08''$		$c_1 = 0.83079$

8) *Вычисленіе координатъ* z_1 *и* z_3, *длины хорды* c *и наклона ея* j

$$z_1 = \rho_1 \operatorname{tg}\beta_1;\quad z_3 = \rho_3 \operatorname{tg}\beta_3;\quad c^2 = (z_3 - z_1)^2 + c_1^2;\quad \operatorname{tg} j = \frac{z_3 - z_1}{c_1}$$

$\lg z_3 = \bar{1}.56591$	$z_3 = 0.36805$	$\lg(z_3 - z_1) = \bar{1}.24849$	$\bar{1}.31934$
$\lg z_1 = \bar{1}.28066$	$z_1 = 0.19084$	$\lg c_1 = \bar{1}.91949$	$\bar{1}.99034$
	$z_3 - z_1 = 0.17721$	$\lg\operatorname{tg} j = \bar{1}.32900$	$\lg c = \bar{1}.92915$
		$j = 12°02'28''$	$c = 0.84947.$

9) *Элементы паралелограма поправокъ и приведеніе его въ плоскость орбиты.*

Формулы:

$$\sin^2\frac{\Omega}{2} = \sin^2\frac{n-j}{2} + \cos n\,\cos j\,\sin^2\frac{\omega_2}{2}$$

$$AE = \frac{\tau_1}{\tau_3}c;\quad EC = \frac{\tau_2}{\tau_3}c;\quad AI = CI = \frac{1}{2}c;\quad EI = EC - CI$$

$\gamma = 85°07'\,08''$ $\quad \gamma_2 = 82°49'\,15''$ $\quad \omega_2 = \gamma - \gamma_2 = 2°17'\,53''$ $\quad SB = r_2 = 1.01510$

$n = 15\ 57\ 03$ $\quad j = 12\ 02\ 28$ $\quad n - j = 3\ 54\ 35$

$$\lg\sin\frac{\omega_2}{2}=\bar{2}.30218 \qquad 2\lg\sin\frac{\omega_2}{2}=\bar{4}.60436 \qquad 2\lg\sin\frac{n-j}{2}=\bar{3}.06582=\lg \mathrm{II}$$

$$\lg\sin\frac{n-j}{2}=\bar{2}.53291 \qquad \lg\cos\gamma=\bar{1}.99034 \qquad \mathrm{II}=0.00116365$$

$$\lg\cos n=\bar{1}.98295 \qquad \mathrm{I}=0.00037814$$

$$\lg \mathrm{I}=\bar{4}.57765 \qquad \mathrm{I}+\mathrm{II}=0.00154179$$

$$\lg c=\bar{1}.92915 \qquad \bar{3}.18802$$

$$\lg AE=\bar{1}.55979 \qquad AE=0.36288 \qquad \lg\sin\frac{\Omega}{2}=\bar{2}.59401$$

$$\lg EC=\bar{1}.68717 \qquad EC=0.48660 \qquad \frac{1}{2}\Omega=2^\circ 15'\,01''$$

$$2\,EI=0.12372 \qquad \Omega=4\ 30\ 02$$

$$EI=0.06186$$

10) *Параллелограмъ поправокъ.*

$$BE=\frac{h_0}{\cos n}=h_1$$

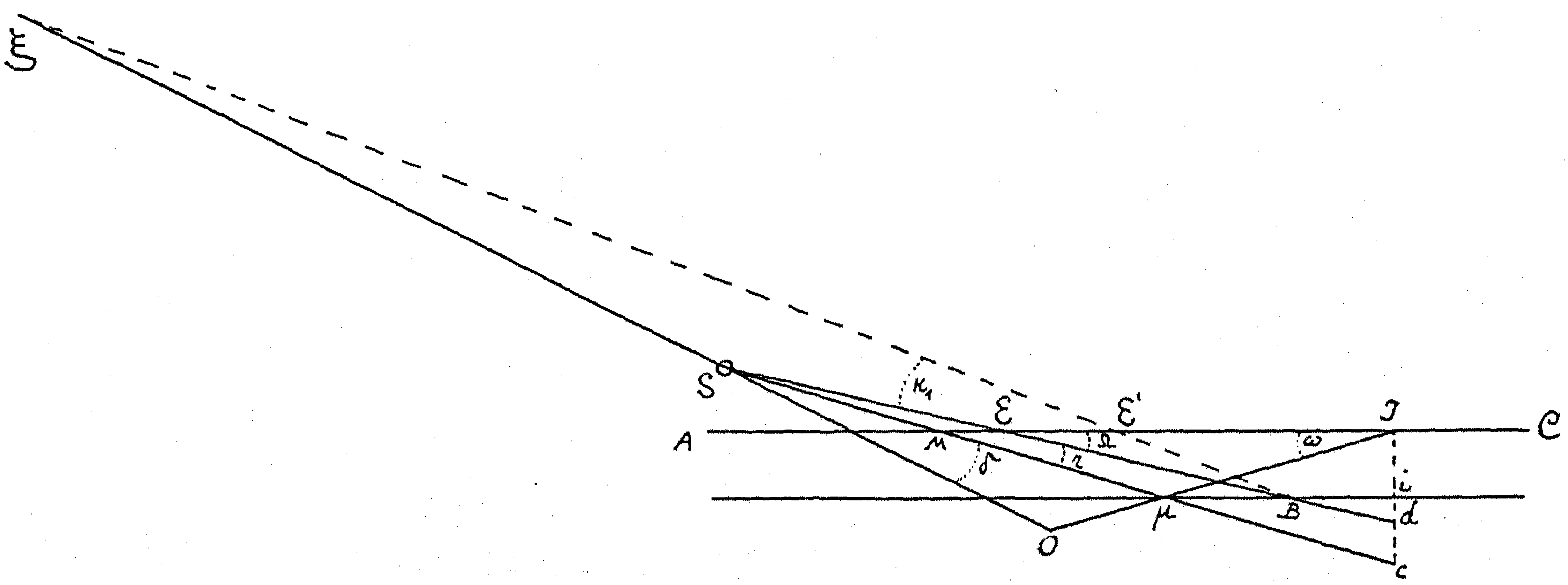
$$B\mu=EI-h_1\cos\Omega-I\mu\cos\omega$$

$$Ii=ic=h_1\sin\Omega$$

$$id=Bi\cdot\mathrm{tg}\,\Omega$$

$$cd=Ii-id;\quad Bd=Bi\cdot\sec\Omega;\quad Sd=BS+Bd$$

Черт. 13.



$$\eta=\frac{cd\cdot\cos\Omega}{Sd};\qquad \omega=\Omega+\eta$$

$$I\mu=h_1\cdot\frac{\Omega}{\omega}=h_1-\frac{h_1\cdot\eta}{\Omega+\eta}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

$$Bi=EI-h_1\cdot\cos\Omega;\qquad S\mu=SB+B\mu\cdot\cos\Omega;\qquad SO=S\mu-\frac{1}{2}I\mu\cdot\cos 2\omega$$

$$\delta=\frac{1}{2}\frac{I\mu\cdot\sin 2\omega}{SO}=\frac{I\mu\cdot\sin\omega}{SO}=\frac{I\mu}{SO}\cdot\omega$$

$$k_1=(\delta+\eta)\frac{2SO}{2SO+SB};\qquad \omega_1=\Omega+k_1;$$

$$I\mu=\frac{1}{3}\tau_3{}^2\cdot\frac{1}{\left(S\mu+\frac{1}{3}I\mu\right)^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (**)$$

Обратимъ вниманіе на вычисленіе поправокъ по этимъ формуламъ, какъ видно величина $I\mu$ получается двумя манерами сперва по формулѣ (*) по приближенному значенію h, затѣмъ по формулѣ (**) по промежутку τ_3 и по разстоянію до вершинѣ μ сегмента согласно леммѣ XI. Это вычисленіе надо продѣлать нѣсколько разъ пока послѣдованымъ приближеніемъ не получится полнаго согласія общихъ значеній.

$$h_0 = 0.04242; \quad \lg h_1 = \bar{2},64463; \quad h_1 = 0.04412: \quad EI = 0.06186$$

$$\cos\Omega = 1 - 0.00308; \quad \sin\Omega = 0.07847; \quad \operatorname{tg}\Omega = 0.07871.$$

$$Bi = 0.06186 - 0.04412\,(1 - 0.00308) = 0.06199 - 0.04412 = 0.01787.$$

$$id = 0{,}01787 \cdot 0.0787 = 0.001405$$

$$Bd = 0.01787 + 0.00005 = 0.01792$$

$$cd = 0.04412 \cdot 0.0785 - 0.00141 = 0.003463 - 0.001405 = 0.002058$$

$$\eta = \frac{0.002052}{1.0330} = 0.001985 = 6'\,50'' = 410''$$

$$\omega = \Omega + \eta = 4^\circ\,30'\,02'' + 6'\,50'' = 4^\circ\,36'\,52'' = 16612''.$$

$$I\mu = 0.04412 - 0.004412 \cdot \frac{410}{16612} = 0.04412 - 0.000109 = 0.04303$$

$$B\mu = 0.06199 - 0.04412 - 0.04303 + 0.00013 = 0.06212 - 0.08715 = -0.02503$$

$$S\mu = 1.01510 - 0.02503 + 0.00008 = 1.01518 - 0.02503 = 0.99015.$$

$$SN = 0.99015 + 0{,}01471 = 1.00486; \quad \lg SN = 0.00211.$$

$$\lg\frac{1}{8}\tau_3^2 = \bar{2}.65762; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65340; \quad I\mu = 0.04502.$$

Беру

$$I\mu = 0.04502 \quad h_1 = I\mu + 0.00109 = 0.04621$$

$$B\mu = 0.06212 - 0.09123 = -0.02911$$

$$S\mu = 1.01518 - 0.02911 = 0.98607; \quad SN = 0.98607 + 0.01541 = 1.00148$$

$$\lg SN = 0.00064; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65638; \quad I\mu = 0.04533.$$

Беру

$$I\mu = 0.04540; \quad h_1 = 0.04649$$

$$B\mu = -0.02977; \quad S\mu = 0.98541. \quad SN = 1.00091; \quad \lg SN = \bar{0}.00036$$

$$\lg I\mu = \bar{2}.65682; \quad I\mu = 0.04538.$$

Беру

$$I\mu = 0.04538 \quad h_1 = 0.04647.$$

$$B\mu = 0.06212 - 0.09185 = -0{,}02973; \quad S\mu = 0.095545; \quad SN = 1.0094$$

$$\lg SN = 0.00041; \quad \lg I\mu = \bar{2}.65680; \quad I\mu = 0.04538.$$

Дѣлаю поправку на разстояніе точки B до касательной въ вершинѣ

$$\mu m = \frac{(0.02973)^2}{4 \cdot 0.985} = 0.00023$$

Слѣдовательно:

$$Im = 0.04538; \qquad I\mu = 0.04515; \qquad h_1 = 0.04624$$

$$Bm = 0.06212 - 0.04624 - 0.04538 = -0.02950$$

$$Sm = 0.98568; \quad SN = 1.00081; \quad \lg SN = 0.00035; \quad \lg Im = \bar{2}.65692; \quad Im = 0.045386$$

$$\begin{array}{rcl} 2\lg SN = 0.00070 & \lg\sqrt{2}\,\tau_3 = \bar{1}.93087 & 2\lg\sigma = 1.85478 \\ \lg' Sm = 0.00626 & \frac{1}{2}\lg SP = 0.00348 & \lg' Sm = 0.00626 \\ \hline \lg SP = 0.00696 & \lg\sigma = \bar{1}.92739 & \lg' 16 = \bar{2}.79588 \\ & & \lg Im = \bar{2}.65692. \end{array}$$

$$SO = 0.98545 - 0.02269\,(1 - 0.01232) = 0.96303; \qquad 2\,SO = 1.826; \qquad SB = 1.015$$

$$\delta = 16202'' \cdot \frac{0.04538}{0.96295} = 764'' \qquad \delta + \eta = 1174''$$

$$\varkappa_1 = 1174 \cdot \frac{1.826}{2.841} = 755'' = 12'\,35''$$

$$\omega_1 = 4^\circ\,30'\,10'' + 12'\,35'' = 4^\circ\,42'\,45''$$

$$EE' = h - h\frac{\Omega}{\omega_1} = h \cdot \frac{\varkappa_1}{\omega_1} = 0.04624 \cdot \frac{755}{16965} = 0.002054.$$

Въ проекціи на плоскость эклиптики будетъ:

$$EE' \cdot \cos 12^\circ\,02' = 0.002009; \qquad h_0 = 0.04624 \cdot \cos n = 0.04446$$

$$\varkappa_1 = 8273'' \cdot \frac{0.002009}{0.04446 - 0.00201} = 408'' = 6'\,48'' = 0.00198.$$

11) При $h_0 = 0.04242$ были вычислены ρ_1, ρ_3 и пр. Новое значеніе h_0 есть 0.04446 и его направленіе есть $\gamma_2 - k_1 = \varphi$.

$$\delta h = +0.00204 \qquad \delta\varphi = -0.00198$$

$$\begin{aligned} \delta\rho_1 &= 1.20\,\delta h + 0.056\,\delta\varphi = +0.00245 - 0.00011 = +0.00234 \\ \delta\rho_3 &= -1.58\,\delta h + 0.077\,\delta\varphi = -0.00322 - 0.00015 = -0.00337 \\ \delta z_1 &= 0.398\,\delta\rho_1 = +0.00093 \\ \delta z_3 &= 0.324\,\delta\rho_3 = -0.00109 \end{aligned}$$

$$\delta(z_3 - z_1) = -0.00212$$

$$\begin{aligned} \delta c_1 &= 0.766\,\delta\rho_1 + 0.7005\,\delta\rho_3 = +0.00179 - 0.00236 = -0.00057 \\ \delta\gamma &= 0.774\,\delta\rho_1 - 0.859\,\delta\rho_3 = +0.00181 + 0.00290 = +0.00471 = +0^\circ 16'\,13'' \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccc} z_3 - z_1 = 0.17721 - 0.00212 = 0.17509 & \lg & \bar{1}.24326 & \bar{1}.31462 \\ c = 0.83079 - 0.00057 = 0.83022 & \lg & \bar{1}.91919 & \bar{1}.99055 \\ \hline & & \bar{1}.32407 & \lg c = \bar{1}.92864 \\ & & j = 11^\circ 54^\circ 33'' & c = 0.84848. \end{array}$$

12) $\omega_2 = 2^\circ 34'\,06'' \qquad n = 15^\circ 57'\,13'' \qquad j = 11^\circ 54'\,33'' \qquad n - j = 4^\circ 3' 40''$

$\frac{1}{2}\omega_2 = 1°17'03''$ $\lg\sin = \bar{2}.35046$ $\lg\sin\frac{n-j}{2} = \bar{2}.54940_4$ $\frac{n-j}{2} = 2°1'50''$

$2\lg\sin\frac{\omega_2}{2} = \bar{4}.70092$ $2\lg\sin\frac{n-j}{2} = \bar{3}.09881$

$\bar{1}.98295$ $I = 0.00125550$ $\bar{3}.23755$

$\bar{1}.99055$ $II = 0.00047252$ $\bar{2}.61877 = \lg\sin\frac{\Omega}{2}$

$\bar{4}.67442$ 0.00172802 $\frac{\Omega}{2} = 2°22'56''.5;$ $\Omega = 4°45'53''$

$$Bi = 0.06181 - 0.04647\,(1 - 0.0344) = 0.06195 - 0.04647 = 0.01548$$

$$id = 0.01550 \cdot 0.0833 = 0.001290; \quad Ii = 0.04647 \cdot 0.0830 = 0.003855$$

$$cd = 0.003855 - 0.001290 = 0.002565; \quad Bd = 0.01548 + 0.00005 = 0.01553$$

$$\eta = \frac{0.002557}{1.0306} = 0.00248 = 8'30'' = 510''$$

$$\Omega + \eta = 17663''$$

$$I\mu = h - h \cdot \frac{\eta}{\Omega + \eta} = 0.04647 - 0.04647 \cdot \frac{510}{17663} = 0.04647 - 0.00134.$$

Слѣдовательно:

$$h = Im + 0.00134 = Im + 0.00111.$$

Беру

$Im = 0.04550$ $h = 0.04661$

$Bm = 0.06207 - 0.09211 = -0.03004;$ $Sm = 0.98514;$ $S\mu = 1.00031$ $\lg SN = 0.00013$

$\lg Im = \bar{2}.65736;$ $Im = 0.045433.$

Беру

$Im = 0.04542$ $h = 0.04653$

$Bm = -0.02988;$ $Sm = 0.98530$ $SN = 1.00044;$ $\lg SN = 0.00019$

$\lg Im = \bar{2}.65724;$ $Im = 0.04542$

$2\lg SN = 0.00038$ $\bar{1}.93087$

$\lg'\delta m = 0.00643$ 0.00341

$\lg SP = 0.00681$ $\bar{1}.92746 = \lg\sigma$

$\sigma = 0.84618.$

13) Итакъ при

$$\rho_2 = 0.56570$$

будетъ:

$$h = 0.4653; \quad h_0 = 0.04474$$

слѣдовательно

$$\delta h_0 = 0.04474 - 0.04242 = 0.00234 \qquad \lg 0.04653 = \bar{2}.66773$$

$$\lg\cos n = \bar{1}.98295$$

$$\lg h_0 = \bar{2}.65068$$

измѣненія же были разсчитаны въ п. 11 для $\delta h = 0.00204$ слѣдовательно къ тѣмъ надо присовокупить измѣненія на $\delta h = 0.00030$, и тогда будетъ:

$$\delta\rho_1 = +0.00234 + 0.00036 = \quad 0.00270$$

$$\delta\rho_2 = -0.00337 - 0.00047 = -0.00384$$

$$\delta c = -0.391\, i\delta h = -0.00030 \cdot 0.391 = -0.00012$$

и будетъ:

$$\rho_1 = 0.47946 + 0.00270 = \quad 0.48216$$
$$\rho_3 = 1.13669 - 0.00384 = \quad 1.13285$$
$$c = 0.84848 - 0.00012 = \quad 0.84836$$
$$c - \sigma = 0.84836 - 0.84618 = + 0.00217 = f(\rho_2).$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\delta z_1 = + 0.00093 + 0.00014 = + 0.00107$$
$$\delta z_3 = - 0.00109 - 0.00015 = - 0.00124$$
$$\delta (z_3 - z_1) = - 0.00231$$
$$z_3 - z_1 = \quad 0.17721 - 0.00231 = \quad 0.17490 \qquad \lg z_3 - z_1 = \bar{1}.24279 \quad \bar{1}.31421 \quad \bar{1}.92858$$
$$\delta c_1 = - 0.00057 - 0.00008 = - 0.00065 \qquad \lg c_1 = \bar{1}.91915 \quad \bar{1}.99057 \quad \bar{1}.92858$$
$$c_1 = \quad 0.83079 - 0.00065 = \quad 0.83014 \qquad \lg \operatorname{tg} j = \bar{1}.32364$$
$$\delta \gamma = \quad 0.00546 \quad = 0^\circ 18' 46'' \qquad j = 11^\circ 53' 51'' \qquad c = 0.84836$$

Вмѣсто разсчета по дифференціальнымъ формуламъ, который приведенъ въ предыдущихъ примѣрахъ сдѣлаемъ, слѣдуя Ньютону:

II Предположеніе $\rho_2 = 0.56570 - 0.00200 = 0.56370.$

$$\delta \rho_2 = - 0.00200$$
$$\delta d_2 = \quad 0.275\, \delta \rho_2 = - 0.00055 \qquad \lg \rho_2 = \bar{1}.75105$$
$$\delta \gamma_2 = - 0.985\, \delta \rho_2 = + 0.00197 = + 0^\circ 6' 46''. \qquad \lg z_2 = \bar{1}.44398$$
$$d_2 = \quad 0.97598 - 0.00055 = 0.97543$$
$$\lg z_2 = \quad \bar{1}.44406 \qquad \bar{1}.43790 \qquad \lg r_2 = 0.00616$$
$$\lg d_2 = \quad \bar{1}.98920 \qquad \bar{1}.98304 \qquad r_2 = SB = 1.01426$$
$$\lg \operatorname{tg} n = \quad \bar{1}.45486$$
$$n = \quad 15^\circ 54' 30''.$$

При

$$h_0 = 0.04474 \quad \text{и} \quad \delta \varphi = \delta \gamma_2 = + 0^\circ 19' 0''$$

будетъ:

$$\delta \rho_1 = 0.896 \ \ \delta \rho_2 + 0.058 \ \ \delta \varphi \ = - 0.00173 + 0.00011 = - 0.00162$$
$$\delta \rho_3 = 2.1046\, \delta \rho_2 + 0.078 \ \ \delta \varphi \ = - 0.00421 - 0.00015 = - 0.00436$$
$$\delta c_1 = 0.766 \ \ \delta \rho_1 + 0.7005\, \delta \rho_3 = - 0.00124 - 0.00310 = - 0.00434$$
$$\delta (z_3 - z_1) = 0.324 \ \ \delta \rho_3 - 0.398 \ \ \delta \rho_1 = - 0.00141 + 0.00065 = - 0.00076$$
$$c_1 = 0.83014 - 0.00434 = 0.82580 \qquad \lg \bar{1}.91687 \qquad \bar{1}.99055$$
$$z_3 - z_1 = 0.17490 - 0.00076 = 0.17414 \qquad \lg \bar{1}.24090 \qquad \bar{1}.31458$$
$$c = 0.84396 \qquad \bar{1}.32403 \qquad \lg c = \bar{1}.92632$$
$$= 11^\circ 54' 29'' \qquad c = 0.84396$$

$$\lg AE = \bar{1}.63053 \qquad AE = 0.36052$$
$$\lg EC = \bar{1}.75794 \qquad EC = 0.48344$$
$$2EI = 0.12292$$
$$EI = 0.06146.$$

Беру

$$Im = 0.04560 \qquad h = 0.04673 \qquad EI = 0.06146 \qquad SB = 1.01426$$
$$Bm = 0.06173 - 0.09233 = -0.03060; \quad Sm = 0.98366; \quad SN = 0.99887; \quad \lg SN = \bar{1}.99951.$$
$$\lg Im = \bar{2}.65860; \qquad Im = 0.04556.$$

Беру

$$Im = 0.04556 \qquad h = 0.04667.$$
$$Bm = -0.03050; \quad Sm = 0.98376 + 0.00009 = 0.98385; \quad SN = 0.98904 \quad \lg SN = \bar{1}.99958$$
$$\lg Im = \bar{2}.65846 \qquad Im = 0.045547.$$

Беру

$$Im = 0.04555 \qquad h = 0.04666 \qquad 2\lg SN = \bar{1}.99917$$
$$Bm = -0.03048: \quad Sm = 0.98387; \quad SN = 0.99905; \quad \lg SN = \bar{1}.99958_7 \qquad \lg Sm = \bar{1}.99294$$
$$\lg Im = \bar{2}.65845; \qquad Im = 0.045546. \qquad \lg SP = 0.00623$$

Итакъ при

$$\rho_2 = 0.56370$$

будетъ:

$$Im = 0.04555; \qquad h = 0.04666.$$

$$\lg h = \bar{2}.66894$$
$$\lg \cos n = \bar{1}.98305$$
$$\lg h_0 = \bar{1}.65199$$
$$h_0 = 0.04487. \qquad \delta h_0 = +0.00013.$$

$$\lg \sqrt{2}\,\tau_3 = \bar{1}.93087$$
$$\frac{1}{2}\lg SP = 0.00312$$
$$\lg \sigma = \bar{1}.92775$$
$$\sigma = \mathbf{0{,}84674}.$$

Измѣненію $\delta h = 0.00013$ соотвѣтствуютъ измѣненія:

$$\delta\rho_1 = 1.20 \quad \delta h = 0.00016$$
$$\delta\rho_3 = -1.58 \quad \delta h = -0.00021$$
$$\delta c = -0.391 \quad \delta h = -0.00005$$
$$\delta c_1 = -0.188 \quad \delta h = -0.00003$$

слѣдовательно при

$$\rho_2 = 0.56370$$

будетъ:

$$\rho_1 = 0.48216 - 0.00162 + 0.00016 = 0.48070$$
$$\rho_3 = 1.13285 - 0.00436 - 0.00021 = 1.12828$$
$$c = 0.84396 - 0.00005 = 0.84391$$
$$\sigma = 0.84674$$
$$f(\rho_2) = c - \sigma = 0.84391 - 0.84674 = -0.00283$$

Значитъ при измѣненіи ρ_2 на -0.00200 съ $\rho_2 = 0.56570$ на $\rho_2 = 0.56370$, $f(\rho_2)$ измѣняется съ $+0.00217$ на -0.00283 т. е. на -0.00500, слѣдовательно надо взять:

$$\delta\rho_2 = -0.00200 \cdot \frac{217}{500} = -0.00087.$$

соотвѣтственно чему будетъ:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 0.56483 \\ \rho_1 &= 0.48216 - 0.00065 = 0.48151 \\ \rho_3 &= 1.13285 - 0.00202 = 1.13083 \\ c = \sigma &= 0.84836 - 0.00198 = 0.84638 \end{aligned}$$

Прежде всего надлежитъ провѣрить значеніе величины c, для чего расчисляемъ:

$$\delta c_1 = 0.766 \cdot \delta\rho_1 + 0.7005 \quad \delta\rho_3 = -0.00050 - 0.00141 = -0.00191$$

$$\delta(z_3 - z_1) = 0.324 \quad \delta\rho_3 - 0.398 \quad \delta\rho_1 = -0.00065 + 0.00026 = -0.00039$$

$$\begin{array}{lll} c_1 = 0.83014 - 0.00191 = 0.82823 & \lg \bar{1}.91815 & \bar{1}.99057 \\ z_3 - z_1 = 0.17490 - 0.00039 = 0.17451 & \lg \bar{1}.24182 & \bar{1}.31424 \\ & \overline{}\ \bar{1}.32367 & \lg c = \bar{1}.92758 \\ & & c = 0.84641. \end{array}$$

Значитъ надо взять $\delta\rho_2 = -0.00200 \cdot \frac{3}{445} = -0.000013$; $\delta\rho_1 = -0.00001$; $\delta\rho_3 = -0.00003$ такъ что будетъ:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.48150 \\ \rho_3 &= 1.13080 \\ c = \sigma &= 0.84638. \end{aligned}$$

Полученный результатъ надо провѣрить по формулѣ Эйлера-Ламберта. Прежде всего вычисляемъ хорду непосредственно.

Вычисленіе хорды c:

$$c_1^2 = f_1^2 + f_3^2 - 2f_1 f_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1); \qquad f_1 = \rho_1 - l_1; \qquad f_3 = \rho_3 - l_3$$

$$\begin{array}{lllll} f_1 = 0.59673 & \lg f_1 = \bar{1}.77577_8 & \bar{1}.55155 & 0.35608 & \\ f_3 = 0.52995 & \lg f_3 = \bar{1}.72423_5 & \bar{1}.44847 & 0.28085 & \\ & \lg 2\cos(f_1 f_3) = \bar{1}.19051. & & 0.04904 & \\ & \bar{2}.69052 & & 0.68597 & \bar{1}.83630 \\ & & & 0.03045 & \bar{1}.91815 = \lg c_1; \quad c_1 = \mathbf{0.82823} \\ & & & 0.71642 & \bar{1}.85516 \\ & & & \bar{1}.92758 = \lg c & \\ & & & c = 0.84641. & \end{array}$$

Слѣдовательно надо взять поправку въ $\rho_2 = -0.00001_3$ т. е. брать

$$\rho_1 = 0.48149 \qquad \lg\rho_1 = \bar{1},68256_7 \qquad \rho_3 = 1.13077 \qquad \lg\rho_3 = 0.05337_4$$

и тогда хорда c будетъ $c = 0.84638$, и въ самомъ дѣлѣ получаемъ:

$f_1 = 0.59672$	$\lg f_1 = \bar{1}.77577$	$\bar{1}.55154$	0.35607		
$f_3 = 0.52992$	$\lg f_3 = \bar{1}.72421$	$\bar{1}.44842$	0.28081		
	$\bar{1}.19051$		0.04903		
	$\bar{2},69049$		$0.68591 = c_1^2$;		$2 \lg c_1 = \bar{1}.83626_7$.
$\lg z_1 = \bar{1}.28250$	$\bar{2}.56500$	$0.03673 = z_1^2$	3044		$\lg c_1 = \bar{1}.91813$.
$\lg z_1 = \bar{1}.56364$	$\bar{1}.12728$	$0.13406 = z_3^2$	0.71635	$\bar{1}.85512_5$	
$z_1 = 0.19165$	$\bar{1}.24174_5 = \lg(z_3 - z_1)$		$c = \mathbf{0.84638}$.	$\bar{1}.92756_5 = \lg c$.	
$z_3 = 0.36613$	$\bar{2}.48349 = \lg(z_3 - z_1)^2$				
$z_3 - z_1 = 0.17448$					

Вычисленіе r_1, r_3 *и хорды* σ по формулѣ Эйлера

$\lg R_1 = \bar{1}.99263._5$	$\bar{1}.98527$	0.96665	$\bar{1}.99425$	$\bar{1}.98850$	0.97387
$\lg \rho_1 = \bar{1}.68258._7$	$\bar{1}.36517$	0.23183	0.05337	0.10675	1.27865
$\lg 2\cos(\rho_1 R_1) = 0.26168n$		1.19848	$\bar{1}.39737n$		2.25252
$\bar{1}.93690$		-0.86477	$\bar{1}.44499$		-0.27861
		0.33371			1.97391
		0.03673			0.13406

$2 \lg r_1 = \bar{1}.56872$	$r_1^2 = 0.37044$	$2 \lg r_3 = 0.32386_4$	$r_3^2 = 2.10797$
$\lg r_1 = \bar{1}.78436$	$r_1 = 0.60864$	$\lg r_3 = 0.16193_2$	$r_3 = 1.45190$
			$r_1 = 0.60864$

$\bar{1}.61041$	$r_1 + r_3 = 2.06054$	0.31398
0.00317 (таб. Энке)		0.15699
0.31398	$\frac{3}{2} \lg(r_1 + r_3) =$	0.47097
$\bar{\mathbf{1}}\mathbf{.92756} = \lg \sigma$		$\bar{1}.52903$
$\sigma = \mathbf{0.84638}$.	$\lg 2\tau_3 =$	0.08138
		$\bar{1}.61041$
		0.4078.

Такъ какъ при измѣненіи ρ_2 на 0.00002 величина σ измѣняется менѣе 1 единицы 5-го знака, то видно что теорема Эйлера удовлетворена полученными значеніями радіусовъ векторовъ и хорды со всею точностью доступной вычисленію по 5-ти значнымъ таблицамъ.

По двумъ радіусамъ векторамъ и хордѣ, разчисляемъ элементы орбиты, а именно: наклонность и долготу узловъ и долготу перигелія, параметръ или разстояніе до перигелія и время прохожденія черезъ перигелій.

1) *Вычисленіе геліоцентрическихъ координатъ:*

$\lg \rho_1 = \bar{1}.68258_7$	$\lg z_1 = \bar{1}.28250$	$\lg \rho_3 = 0.05337$	$\lg z_3 = \bar{1}.56364$
$\lg \rho_1 \cos\alpha_1 = \bar{1}.44265$	$\rho_1 \cos\alpha_1 = 0.27711$	$\lg \rho_3 \cos\alpha_3 = \bar{1}.94025$	$\rho_3 \cos\alpha_3 = 0.87147$
$\lg \rho_1 \sin\alpha_1 = \bar{1}.59523\,(n)$	$\rho_1 \sin\alpha_1 = -0.39376$	$\lg \rho_3 \sin\alpha_3 = \bar{1}.85765$	$\rho_3 \sin\alpha_3 = 0.72053$
$x_1 = 0.08763$	$\lg x_1 = \bar{2}.94265$	$x_3 = 0.15262$	$\lg x_3 = \bar{1}.18361$
$y_1 = 0.57098$	$\lg y_1 = \bar{1}.75662$	$y_3 = 1.39665$	$\lg y_3 = 0.14509$
	$\lg \operatorname{tg}\lambda_1 = 0.81397$		$\lg \operatorname{tg}\lambda_3 = 0.96148$
	$\lambda_1 = 81°16'29''$		$\lambda_3 = 83°45'50''$

$\lg z_1 = \bar{1}.28250$	$\lg z_3 = \bar{1}.56364$
$\lg r_1 = \bar{1}.78436$	$\lg r_3 = 0.16194$
$\lg \sin\theta_1 = \bar{1}.49814$	$\lg \sin\theta_3 = \bar{1}.40170$
$\theta_1 = 18°21'13''$	$\theta_3 = 14°36'22''$

2) Вычисленіе долготы узла N и наклонности i по формуламъ:

$$\operatorname{tg} i \cos(\lambda_1 - N) = \frac{\operatorname{tg}\theta_3 - \operatorname{tg}\theta_1 \cdot \cos(\lambda_3 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

$$\operatorname{tg} i \sin(\lambda_1 - N) = \operatorname{tg}\theta_1$$

$\lg \operatorname{tg}\theta_1 =$	$\bar{1}.52082$		$\bar{1}.52082$	$\bar{1}.29959$	0.22123
$\lg \cos(\lambda_3 - \lambda_1) =$	$\bar{1}.99959$		$0.21243\,(n)$	$\bar{1}.99120$	0.22123
	$\bar{1}.52041$		$\bar{1}.30839\,(n)$		$\lg \operatorname{tg} i = 0.22123$
$\lg \operatorname{tg}\theta_3 =$	$\bar{1}.41597$	$\lambda_1 - N = -$	$11°29'54''$		$i = \mathbf{59°0'0''}$
	0.10444	$\lambda_1 =$	$81\ 16\ 29$		
$g \cdot \lg \text{sub}$	$\bar{1}.32981$	$N_1 =$	$92°46'17''$		
	$\bar{1}.52041$	$N =$	$\mathbf{272\ 46\ 17}$		
$\lg \operatorname{cosec}(\lambda_3 - \lambda_1) =$	1.36221				
	0.21243				

Совершенно также переставляя значки 1 и 3:

$\lg \operatorname{tg}\theta_3 =$	$\bar{1}.41597$		$\bar{1}.41597$	$\bar{1}.19464$	$\left.\begin{matrix} 0.22133 \\ 0.22133 \end{matrix}\right\} = \lg \operatorname{tg} i$
	$\bar{1}.99959$		$0.21594\,n$	$\bar{1}.99461$	
	$\bar{1}.41556$		$\bar{1}.20003$		
0.10526	$\bar{1}.52082$	$\lambda_3 - N = -$	$9°\ 0'23''$		$i = \mathbf{59°0'22''}$
	$\bar{1}.33291$	$\lambda_3 =$	$83\ 45\ 50$		
	1.36221	$N_1 =$	$92°46'13''$		
	$0.21594\,(n)$	$N =$	$\mathbf{272\ 46\ 13}$		

Среднее: $N = 272°46'15''$

$\quad\quad\quad\;\; \boldsymbol{i} = 59\ \ 0\ 11$

Вычисленіе истинныхъ аномалій v_1 и v_3, разстоянія до перигелія, времени прохожденія черезъ перигелій.

Формулы:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}(v_3 - v_1) = \frac{(p-r_1)(p-r_3)}{p(p-c)}; \qquad \operatorname{tg}\frac{v_1+v_3}{4} = \frac{\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{v_2-v_1}{4}$$

$$2p = c + r_1 + r_3$$

$$\sqrt{q} = \sqrt{r_1}\cdot\cos\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{r_3}\cdot\cos\frac{1}{2}v_3$$

$t_1 - t_0 = q^{\frac{3}{2}}\cdot m_1;\qquad t_3 - t_0 = q^{\frac{3}{2}}\cdot m_3;\qquad m_1$ и m_3 по табл. Barker'a.

$c = 0.84638$			
$r_1 = 0.60864$	$\lg r_1 = \bar{1}.78436$	$\lg\sqrt{r_1} = \bar{1}.89218$	$\sqrt{r_1} = 0.78015$
$r_3 = 1.45190$	$\lg r_3 = 0.16194$	$\lg\sqrt{r_3} = 0.08097$	$\sqrt{r_3} = 1.20495$
$2p = 2.90692$			$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3} = 1.98510$
			$\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1} = 0.42480$
$p = 1.45346$	$\lg p = \bar{1}.83760$		
$p - r_1 = 0.94482$	$\lg = \bar{1}.92676$	$\bar{2}.44361$	$\frac{\gamma - v_3}{2} = 1^\circ 35' 27''$
$p - r_3 = 0.00156$	$\lg = \bar{3}.19312$	1.17725	$\frac{\gamma - v_1}{2} = 86\ 11\ 45.5$
$p - c = 0.60708$	$\lg = \bar{1}.78325$	$\bar{2}.58712$	$\frac{v_3 - v_1}{2} = 2\ 12\ 47\ 5$
	$\bar{4}.74073$		
	$\bar{2}.37037$		

$\frac{v_3 - v_1}{4} = 1^\circ 6' 23''.8$	$\lg\operatorname{cotg} = 1.71407$	$\frac{v_3 - v_1}{2} = 2^\circ 12' 48''$	
	$\lg(\sqrt{r_3}-\sqrt{r_1}) = \bar{1}.62818$	$\frac{v_3 + v_1}{2} = 169\ 41\ 02$	
	$\lg(\sqrt{r_3}+\sqrt{r_1}) = \bar{1}.70222$	$v_3 = 171^\circ 53' 50''$	$\frac{1}{2}v_3 = 85^\circ 56' 55''$
	$\lg\operatorname{tg}\frac{v_3+v_1}{4} = 1.04447$	$v_1 = 167\ 28\ 14$	$\frac{1}{2}v_1 = 83\ 44\ 07$
	$\frac{v_1+v_3}{4} = 84^\circ 50' 31''$	$\lg m_3 = 4.89369$ (Oppolzer, Bahnbestim.)	
	$\frac{v_1+v_3}{2} = 169\ 41\ 02$	$\lg m_1 = 4.33168$	
	$\frac{1}{2}\lg r_1 = \bar{1}.89218$	$\frac{1}{2}\lg r_3 = 0.08097$	
	$\lg\cos\frac{1}{2}v_1 = \bar{1}.03791$	$\lg\cos\frac{v_3}{2} = \bar{2}.84912$	
	$\lg\sqrt{q} = \bar{2}.93009$	$\lg\sqrt{q} = \bar{2}.93009$	
	$\lg q = \bar{3}.86018$		
	$\frac{3}{2}\lg q = \bar{4}.79027$	$\frac{3}{2}\lg q = \bar{4}.79027$	
	$\lg m_1 = 4.33168$	$\lg m_3 = 4.89369$	
	1.12195	1.68396	

$$t_1 - t_0 = 13.242 \qquad t_3 - t_0 = 48.301$$
$$= 13^{д}\,5^{ч}\,49^{м} \qquad = 48^{д}\,7^{ч}\,14$$
$$t_1 = 21\ \ 6\ \ 37\ \text{Дек.} \qquad t_3\ \text{Дек.} = 56\ \ 7\ \ 58.7$$
$$t_0 = \ 8\ \ 0^{ч}\,48^{м}\text{Дек.} \qquad \text{Дек.} = \ 8\ \ 0\ \ 44.7.$$

Прохожденіе черезъ перигелій

$$t_0 = 8\ \text{Дек. 0 ч. 46 минутъ}$$
$$= 8.0319$$

Долгота перигелія.

$$N = 272°46\ 15'' \qquad N = 272°46'\,15''$$
$$\lambda_1 = \ 81\ 16\ 29 \qquad \lambda_3 = \ 83\ 45\ 50$$
$$\lambda_1 - N = 169\ 30\ 14 \quad \lg\cos = \bar{1}.9911987\,(n) \qquad \lambda_3 - N = 170°59'\,35 \quad \lg\cos = \bar{1}.9946116$$
$$\theta_1 = \ 18\ 21\ 13 \quad \lg\cos = \bar{1}.9773263 \qquad \theta_3 = \ 14\ 36\ 22 \quad \lg\cos = \bar{1}.9857328$$
$$\lg\cos u_1 = \bar{1}.9685250\,(n) \qquad \lg\cos u_3 = \bar{1}.9803444$$
$$u_1 = 158°26'56''\ ^{*)} \qquad u_3 = 162°53'30''$$

*) *Примѣчаніе.* Здѣсь выгоднѣе вычислять u_1 и u_2 по формуламъ

$$\operatorname{tg} u_1 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1 - N)}{\cos i} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} u_3 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_3 - N)}{\cos i}$$

$$v_1 = 167\ \ 28\,14 \qquad v_3 = 171\ \ 53\,50$$
$$\omega = u_1 - v_1 = 350\ \ 58\,42 \qquad \omega = u_3 - v_3 = 350\ \ 59\,40$$
$$\text{Среднее:}\quad \omega = 350\ \ 59\,41.$$

Итакъ элементы кометы 1680 года получаются слѣдующіе

$$N = 272°46'\,15''$$
$$i = \ 59\ \ 0\ \ 11$$
$$\omega = 350\ \ 59\ \ 41$$
$$\lg q = \bar{3}.86018$$
$$t_0 = 1680\ \text{года Декабря 8-го}\ 0^{ч}\ 46^{м}.\ \text{(Гринич. старый стиль).}$$

Ньютонъ въ Principia даетъ слѣдующіе элементы:

$$N = 271°53'\ \ 0''$$
$$i = \ 61\ \ 20\ \ 20$$
$$\omega = 351\ \ 22\ \ \ 0$$
$$\lg q = \bar{3}.7723$$
$$t_0 = 1680.\ \text{Декабря 8-го}\ 0^{ч}\ 3^{м}.\ \text{(Griничъ старый стиль).}$$

Эйлеръ даетъ такіе эллиптическія элементы:

$$N = 272°59'\ \ 9''$$
$$i = \ 58\ \ 39\ \ 50$$
$$\omega = 350\ \ 27\ \ 39$$
$$\lg q = \bar{3}.817203$$
$$e = 0.9997867$$
$$t_0 = 1680.\ \text{Декабря 7-го}\ 20^{ч}\ 47^{м}.$$

Отсюда явствуетъ, что эти старинныя наблюденія по своей сравнительно малой точности и не могутъ доставить болѣе согласныхъ результатовъ.

Въ заключеніе вычислимъ мѣсто кометы при вторыхъ наблюденіяхъ по нашимъ элементамъ.

Имѣемъ

$$t_0 = \text{Дек. } 8.0320$$
$$t_2 = 36.2511$$
$$t_2 - t_0 = 28.2191 \qquad \lg(t_2 - t_0) = 1.45055$$
$$\frac{3}{2}\lg q = \bar{4}.79027$$
$$\lg m = 4.66028$$
$$v_2 = 170°17'32''$$
$$\omega = 350\ 59\ 41$$
$$u_2 = 161°17'13''$$

$$\frac{1}{2}v_2 = 85°8'46'' \qquad \lg\cos = \bar{2}.92745 \qquad \lg\cos u_2 = \bar{1}.97641\,(n)$$
$$\frac{1}{2}\lg q = 2.93009 \qquad \lg\sin u_2 = \bar{1}.50627$$
$$\frac{1}{2}\lg r_2 = 0.00264 \qquad \lg r_2\cos u_2 = \bar{1}.98169$$
$$\lg r_2 = 0.00528 \qquad \lg r_2\sin u_2 = \bar{1}.51155$$

$$i = 59°0'11'' \qquad \lg\sin i = \bar{1}.93308 \qquad \lg\cos i = \bar{1}.71180$$
$$\lg z_2 = \lg r_2\sin u_2\sin i = \bar{1}.44463 \qquad \lg r_2\sin u_2\cos i = \bar{1}.22335$$
$$\lg\sin\theta_2 = \bar{1}.43935 \qquad \lg\cos\theta_2 = \bar{1}.98293$$
$$\theta_2 = 15°57'35'' \qquad \lg\cos u_2 = \bar{1}.97641\,(n)$$
$$\lg\cos(\lambda_2 - N) = \bar{1}.99348\,(n)$$
$$\lambda_2 - N = 170°06'$$
$$\lambda_2 = 82\ 52$$

$$\lg\cos\lambda_2 = \bar{1}.09405 \qquad \lg\sin\lambda_2 = \bar{1}.99663$$
$$\lg r_2\cos\theta_2 = \bar{1}.98821 \qquad \lg r_2\cos\theta_2 = \bar{1}.98821$$
$$\lg x_2 = \bar{1}.08226 \qquad \lg y_2 = \bar{1}.98484$$
$$x_2 = 0.12085 \qquad y_2 = 0.96570$$
$$\xi_2 = -0.43706 \qquad \eta_2 = 0.88164$$
$$x_2 - \xi_2 = 0.55791 \qquad y_2 - \eta_2 = 0.08406$$

$$\lg x_2 - \xi_2 = \bar{1}.74656 \quad \bar{1}.99513$$
$$\lg y_2 - \eta_2 = \bar{2}.92459$$
$$\lg\operatorname{tg}\alpha_2 = \bar{1}.17803 \qquad \lg\rho_2 = \bar{1}.75143 \qquad 0.5642$$
$$\alpha_2 = 8°34'07'' \qquad \lg z_2 = \bar{1}.44482$$
$$\alpha_2\ \text{наб.} = 8\ 48\ 53 \qquad \lg\operatorname{tg}\beta_2 = \bar{1}.69239$$
$$\alpha_2\ \text{выч.} - \alpha_2\ \text{наб.} = -0\ 14\ 46 \qquad \beta_2 = 26\ 13\ 10''$$
$$\beta_2\ \text{наб.} = 26\ 15\ 7$$
$$\beta_2\ \text{выч.} - \beta_2\ \text{наб.} = 0\ 1\ 57.$$

Какъ видно мѣсто при вторыхъ наблюденіяхъ не представляется съ тою точностью какую можно-бы ожидать.

§ 21. Всѣ эти примѣры и подробное ихъ развитіе показываютъ, что данная Ньютономъ метода опредѣленія параболической кометной орбиты есть метода абсолютно точная, полная и въ равной мѣрѣ совершенная со всѣми остальными твореніями этого величайшаго генія, но его творенія требуютъ и достодолжнаго вниманія и тщательности при изученіи, не упуская изъ вида ни единой буквы, ни единой цифры.

Кромѣ этой методы Ньютонъ въ своемъ сочиненіи: „De systemate mundi" излагаетъ другую методу, которую можно считать за первообразъ методы Лапласа, подобно тому какъ вышеизложенная есть первообразъ методы Ольберса.

Но здѣсь по сжатости и краткости изложенія Ньютонъ можно сказать превосходитъ самого себя — все изложено на трехъ послѣднихъ страницахъ названнаго сочиненія и примѣрами не пояснено.

Давъ вамъ образчикъ того какъ слѣдуетъ изучать Ньютона, рекомендую вамъ какъ поучительную тему для работы изученіе этихъ трехъ страничекъ.

Бесѣда 2.

Метода Лапласа.

§ 1. Въ первой бесѣдѣ нашей мы изучали методу Ньютона опредѣленія параболическихъ орбитъ кометъ и видѣли, что эта метода чисто геометрическая, установлена Ньютономъ, какъ и большая часть всего заключающагося въ Principia синтетическимъ путемъ; въ этой бесѣдѣ мы займемся чисто аналитическою методою данной Лапласомъ, которая пригодна не только для параболическихъ орбитъ кометъ, но и для эллиптическихъ орбитъ малыхъ планетъ.

Въ настоящее время эта метода для практическаго вычисленія орбитъ не примѣняется, ибо методы Ольберса и Гаусса болѣе совершенны, но рѣшеніе Лапласа замѣчательно естественностью хода его анализа и можетъ служить образцомъ того, какъ слѣдуетъ задачу аналитической механики доводить до конца т. е. до дѣйствительной возможности полученія изъ наблюденій надлежащихъ данныхъ и дѣйствительнаго вычисленія положенія движущагося тѣла въ любой моментъ времени.

§ 2. Примемъ по прежнему за начало координатъ центръ тяжести солнца, массу коего обозначимъ черезъ M, и за плоскость xy примемъ плоскость эклиптики какъ и раньше (см. черт. 1) направивъ ось x-овъ къ точкѣ весенняго равноденствія. Тогда уравненія движенія свѣтила коего масса m, если пренебречь дѣйствіемъ на него всѣхъ прочихъ тѣлъ солнечной системы напишутся такъ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{x}{r^3}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{y}{r^3}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k\frac{z}{r^3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

причемъ

$$k = (M + m)f$$

гдѣ f есть „Ньютонова постоянная притяженія“, r — разстояніе свѣтила до солнца.

Если принять за 1 длины среднее разстояніе отъ земли до солнца (большую полуось земной орбиты) за 1 массъ — массу солнца и замѣтить, что массы всѣхъ кометъ и астероидовъ неизмѣримо малы, по сравненію съ массою солнца, то въ предыдущихъ уравненіяхъ будетъ

$$k = K^2 = (0{,}01720\ldots.)^2$$

гдѣ K есть Гауссова постоянная, вмѣстѣ съ тѣмъ центръ тяжести солнца можно будетъ считать неподвижнымъ.

Для уравненій (1) можемъ написать слѣдующіе первые интегралы

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_1;\quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = c_2;\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c_3 \;\ldots\ldots (2)$$

$$V^2 - V_0^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

есть квадратъ скорости свѣтила въ моментъ t, V_0 и r_0 — начальная скорость и начальное разстояніе т. е. скорость и разстояніе въ нѣкоторый заданный моментъ t_0.

Изъ уравненій (2) слѣдуетъ

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

что показываетъ, что орбита свѣтила лежитъ въ плоскости проходящей черезъ начало координатъ т. е. черезъ центръ солнца.

Если-бы эту плоскость принять за новую координатную плоскость XY направивъ новую ось X по линіи узловъ $S\Omega$ то, относя движеніе свѣтила къ этимъ координатамъ, получили-бы

$$X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt} = c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \;\ldots\ldots\ldots (5)$$

или въ полярныхъ координатахъ

$$r^2\frac{du}{dt} = c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

уравненіе же (3) приняло-бы видъ

$$\frac{dr^2 + r^2\,du^2}{dt^2} = k\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r_0}\right) + V_0^2 \;\ldots\ldots\ldots (7)$$

Изъ уравненія (6) слѣдуетъ

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2\,du = \frac{c}{2}(t - t_0) \;\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

въ которомъ черезъ S обозначена площадь описанная радіусомъ векторомъ въ продолженіе промежутка $t - t_0$.

Изъ уравненій (6) и (7) имѣемъ

$$\frac{dr^2 + r^2 du^2}{r^4 du^2} = \frac{2k}{c^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{c^2}\left(V_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right)$$

или иначе

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{du}\right)^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{2k}{c^2}\cdot\frac{1}{r} + h$$

причемъ

$$h = \frac{1}{c^2}\left(V_0^2 - \frac{2k}{r_0}\right).$$

Положимъ

$$\frac{1}{r} = \lambda$$

и пусть при $t = t_0$ будетъ $r = r_0$ и $u = u_0$, предыдущее уравненіе напишется такъ

$$\lambda'^2 + \lambda^2 = \frac{2k}{c^2}\lambda + h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (*)$$

дифференцируя по u получаемъ

$$\lambda'' + \lambda = \frac{k}{c^2}.$$

Общій интегралъ этого уравненія есть

$$\lambda = \frac{k}{c^2} + C_1 \cos(u - \omega)$$

гдѣ C_1 и ω произвольныя постоянныя, для опредѣленія коихъ имѣемъ условія

$$\text{при } u = u_0 \text{ должно быть } \lambda = \frac{1}{r_0} \text{ и } \lambda'^2 = \lambda_0'^2$$

величина же $\lambda_0'^2$ опредѣляется изъ уравненія (*)

$$\lambda_0'^2 = h - \lambda_0^2 + \frac{2k}{c^2}\lambda_0 = h - \frac{1}{r_0^2} + \frac{2k}{c^2}\cdot\frac{1}{r_0}$$

$$= \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{1}{r_0^2}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r_0}-\frac{k}{c^2}&=C_1\cos(u_0-\omega)\\ \frac{V_0^2}{c^2}-\frac{1}{r_0^2}&=C_1^2\sin^2(u_0-\omega)\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Откуда слѣдуетъ:

$$C_1^2=\frac{V_0^2}{c^2}-\frac{2k}{c_0^2}\cdot\frac{1}{r_0}+\frac{k^2}{c^4}$$

и

$$\frac{1}{r}=\frac{k}{c^2}+\sqrt{\frac{V_0^2}{c^2}-\frac{2k}{c^2}\cdot\frac{1}{r_0}+\frac{k^2}{c^4}}\cos(u-\omega)$$

Или иначе:

$$r=\frac{\frac{c^2}{k}}{1+\sqrt{1-\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{r_0}-V_0^2\right)}\cos(u-\omega)}$$

Полагая

$$\frac{c^2}{k}=p$$

и

$$1-e^2=\frac{c^2}{k^2}\left(\frac{2k}{r_0}-V_0^2\right) \qquad (10)$$

получимъ

$$r=\frac{p}{1+e\cos(u-\omega)} \qquad (11)$$

что и показываетъ что траекторія есть коническое сѣченіе, уравненія-же (10) выражаютъ связь между его элементами и начальными обстоятельствами движенія.

Параметръ p, эксцентриситетъ e и большая полуось связаны соотношеніемъ:

$$p=a(1-e^2)$$

откуда въ силу уравненій (10) слѣдуетъ:

$$1-e^2=\frac{a(1-e^2)}{k}\left(\frac{2k}{r_0}-V_0^2\right)$$

Или иначе:

$$V_0^2=k\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a}\right) \qquad (12)$$

и въ силу уравненія (3):

$$V^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12')$$

§ 2. Выведенныя выше соотношенія показываютъ, что если извѣстно положеніе и скорость свѣтила въ какой либо моментъ, то элементы его орбиты опредѣляются. Само собою разумѣется что скорость должна быть извѣстна по величинѣ и по направленію.

Въ самомъ дѣлѣ: соотношеніе

$$V_0^2 = k\left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

даетъ большую полуось a

Такъ какъ скорость извѣстна по величинѣ и направленію, то, опредѣливъ ея проекціи на оси координатъ т. е. величины $x'_0 y'_0 z'_0$, найдемъ по формуламъ:

$$y_0 z'_0 - z_0 y'_0 = c_1$$

$$z_0 x'_0 - x_0 z'_0 = c_2$$

$$x_0 y'_0 - y_0 x'_0 = c_3$$

„постоянныя площадей" c_1, c_2 и c_3; по нимъ

$$c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

и затѣмъ по формулѣ:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{c^2}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

параметръ p и эксцентриситетъ e.

Если въ уравненіи плоскости орбиты:

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

выразить коефиціенты черезъ наклонность i и долготу узла N, то это уравненіе напишется такъ:

$$z \cos i - y \sin i \cos N + x \sin i \sin N = 0$$

Откуда слѣдуетъ:

$$c_1 = c \cos i; \quad c_2 = -c \sin i \cos N; \quad c_3 = c \sin i \sin N$$

Эти уравненія доставятъ i и N.

Уравненіе (10) даетъ:

$$1+e\cos(u_0-\omega)=\frac{p}{r_0}$$

съ другой стороны, обозначая черезъ λ_0 геліоцентрическую долготу планеты въ моментъ t_0, имѣемъ:

$$\operatorname{tg}\lambda_0=\frac{y_0}{x_0}$$

$$\cos i=\frac{\operatorname{tg}(\lambda_0-N)}{\operatorname{tg}u_0}$$

откуда найдутся u_0 и ω, и по нимъ долгота перигелія и долгота эпохи.

Наконецъ чтобы найти время прохожденія T черезъ перигелій надо воспользоваться для эллиптической орбиты уравненіемъ Кэплера

$$n(t_0-T)=\varepsilon_0-e\sin\varepsilon_0$$

причемъ

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon_0=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_0$$

$$n=Ka^{-\frac{2}{3}}$$

для параболической уравненіемъ

$$\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v_0}{2}=\frac{K(t_0-T)}{\sqrt{2q^3}}$$

гдѣ

$$q=\frac{1}{2}p.$$

Такимъ образомъ все дѣло сводится къ тому, чтобы найти положеніе и скорость свѣтила въ какой либо моментъ. Метода Лапласа и состоитъ въ томъ, чтобы, воспользовавшись наблюденіями геоцентрическихъ долготъ и широтъ свѣтила, опредѣлить его геліоцентрическія координаты въ нѣкоторый моментъ а также величину и направленіе его скорости въ этотъ моментъ, послѣ чего элементы орбиты свѣтила и найдутся какъ показано выше.

§ 3. Для упрощенія выкладокъ Лапласъ вводитъ вмѣсто среднихъ солнечныхъ сутокъ другую единицу времени, такую чтобы уравненія движенія писались въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt_1^2} = -\frac{x}{r^3} \text{ и т. д.}$$

для этого стоитъ только за новую единицу времени принять такую, чтобы было:

$$t_1 = \sqrt{k}\, t \quad \text{т. е.} \quad t = \frac{1}{\sqrt{k}}\, t_1$$

и слѣдовательно новая единица есть

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{K} = \frac{1}{0.01720\ldots} = 58,1344 \text{ сутокъ.}$$

Принявъ эту единицу и написавъ опять букву t вмѣсто t_1 будемъ имѣть уравненія движенія свѣтила въ такомъ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r_3} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Пусть α и β суть геоцентрическія долгота и широта свѣтила, ξ, η геліоцентрическія координаты земли, R — радіусъ векторъ ея, L ея долгота, тогда имѣемъ слѣдующія равенства:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \rho\cos\alpha; \quad y = \eta + \rho\sin\alpha; \quad z = \rho\, tg\, \beta \\ \xi &= R\cos L; \quad \eta = R\sin L \end{aligned} \quad \ldots\ldots (14)$$

причемъ ρ есть „укороченное разстояніе“ отъ земли до свѣтила т. е. проекція истиннаго разстоянія на плоскость эклиптики.

Дефференцируя равенства (14) дважды, получимъ:

$$\begin{aligned} x' &= \xi' + \rho'\cos\alpha - \rho\sin\alpha\cdot\alpha' \\ y' &= \eta' + \rho'\sin\alpha + \rho\cos\alpha\cdot\alpha' \\ z' &= \rho'\operatorname{tg}\beta + \frac{\rho}{\cos^2\beta}\cdot\beta' \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

и

$$\begin{aligned} x'' &= \xi'' + \rho''\cos\alpha - 2\alpha'\rho'\sin\alpha - \alpha'^2\rho\cos\alpha - \alpha''\rho\sin\alpha \\ y'' &= \eta'' + \rho''\sin\alpha + 2\alpha'\rho'\cos\alpha - \alpha'^2\rho\sin\alpha + \alpha''\rho\cos\alpha \\ z'' &= \rho''\operatorname{tg}\beta + 2\rho'\beta'\cdot\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{\rho\beta''}{\cos^2\beta} + 2\rho\beta'^2\cdot\frac{\sin\beta}{\cos^3\beta} \end{aligned} \quad \ldots (15')$$

Для земли имѣютъ мѣсто уравненія подобныя уравненіямъ (1) т. е.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\xi}{R^3}=0;\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\eta}{R^3}=0;\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{\zeta}{R^3}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (16)$$

поэтому замѣняя въ предыдущихъ уравненіяхъ x'' и y'' ихъ величинами $-\frac{x}{r^3}$ и $-\frac{y}{r^3}$ и ξ'' и η'' ихъ величинами $-\frac{\xi}{R^3}$ и $-\frac{\eta}{R^3}$ и исключая ρ'' изъ первыхъ двухъ уравненій системы (15′) получимъ:

$$\frac{1}{r^3}(y\cos\alpha-x\sin\alpha)=\frac{1}{R^3}(\eta\cos\alpha-\xi\sin\alpha)-2\alpha'\rho'-\rho\alpha''$$

Но

$$y\cos\alpha-x\sin\alpha=\eta\cos\alpha-\xi\sin\alpha=R\sin(L-\alpha)$$

и предыдущее уравненіе напишется такъ:

$$\rho'=\frac{R\sin(L-\alpha)}{2\alpha'}\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)-\frac{\rho\alpha''}{2\alpha'}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (\mathrm{I})$$

Исключеніе ρ'' изъ трехъ уравненій (15′) доставитъ еще и второе уравненіе независимое отъ (I), оно получится умноживъ первое уравненіе на $\operatorname{tg}\beta\cos\alpha$ второе — на $\operatorname{tg}\beta\sin\alpha$ и третье на -1 и сложивъ всѣ три уравненія, а именно будетъ:

$$-\frac{1}{r^3}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\operatorname{tg}\beta+\frac{z}{r^3}$$
$$=-\frac{1}{R^3}(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)\operatorname{tg}\beta-2\rho'\beta'\frac{1}{\cos^2\beta}-\rho\alpha'^2\operatorname{tg}\beta-\frac{\rho\beta''}{\cos^2\beta}+\frac{2\rho\beta'^2\sin\beta}{\cos^3\beta}$$

но въ силу уравненій (14) будетъ:

$$-\frac{1}{r^3}(x\cos\alpha+y\sin\alpha)\operatorname{tg}\beta+\frac{z}{r^3}=-(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha+\rho)\frac{1}{r^3}\operatorname{tg}\beta+\frac{\rho\operatorname{tg}\beta}{r^3}$$
$$=-\frac{1}{r^3}\operatorname{tg}\beta(\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha)$$
$$=-\frac{R}{r^3}\operatorname{tg}\beta\cos(L-\alpha)$$

и предыдущее уравненіе напишется такъ:

$$R\operatorname{tg}\beta\cos(L-\alpha)\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{2\rho'\beta'}{\cos^2\beta}-\rho\alpha'^2\operatorname{tg}\beta-\frac{\rho\beta''}{\cos^2\beta}+\frac{2\rho\sin\beta}{\beta^3}\beta'^2$$

Откуда слѣдуетъ:

$$\rho' = -\frac{1}{2\rho}\left[\frac{\beta''}{\beta'} + 2\beta'\operatorname{tg}\beta + \sin\beta\cos\beta\cdot\frac{\alpha'^2}{\beta'^2}\right] + \frac{R\sin\beta\cos\beta\cos(L-\alpha)}{2\beta'}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right). \quad \text{II}$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій величину ρ' получимъ уравненіе:

$$\rho = \frac{1}{h}\cdot R\left[\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III}$$

гдѣ

$$h = \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' + 2\alpha'\beta'^2\operatorname{tg}\beta + \alpha'^3\sin\beta\cos\beta}{\alpha'\sin\beta\cos\beta\cos(L-\alpha) + \beta'\sin(L-\alpha)} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{III}')$$

Изъ уравненій (14) слѣдуетъ:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\rho(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) + \frac{\rho^2}{\cos^2\beta}$$

иначе:

$$r^2 = R^2 + 2R\rho\cos(L-\alpha) + \frac{\rho^2}{\cos^2\beta}\,.$$

Написавъ же уравненіе (III) въ такомъ видѣ:

$$r^3(1 + h\rho R^2) = R^3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\text{III}'')$$

и исключая изъ этого уравненія и предыдущаго r имѣемъ:

$$\left[\frac{\rho^2}{\cos^2\theta} + 2R\rho\cos(L-\alpha) + R^2\right]^3 [h\rho R^2 + 1]^2 = R^6 \; . \; . \; . \; . \quad (\text{IV})$$

т. е. алгебраическое уравненіе 7-ой степени для опредѣленія ρ.

По поводу уравненія III$''$ Лапласъ дѣлаетъ такое замѣчаніе: такъ какъ величина ρ положительная, то разстояніе r отъ свѣтила до солнца больше или меньше разстоянія R смотря то тому h отрицательное или положительное.

Итакъ, найдя изъ уравненія IV величину ρ, по уравненію III получимъ r, затѣмъ уравненіе I даетъ ρ', уравненія (15) доставятъ x', y', z' а значитъ и всѣ необходимыя данныя для опредѣленія элементовъ орбиты.

Такимъ образомъ все свелось къ вычисленію величины h т. е. къ нахожденію величинъ

$$\alpha, \beta; \quad \alpha', \beta'; \quad \alpha'', \beta''.$$

§ 4. Непосредственныя наблюденія даютъ α и β, чтобы найти ихъ производныя Лапласъ прибѣгаетъ къ интерполяціоннымъ формуламъ и поступаетъ такъ: пусть имѣется рядъ наблюденныхъ долготъ и широтъ свѣтила въ моменты

$$t_1, \quad t_2, \quad t_3, \cdots$$

такъ что соотвѣтствующіе координаты суть

$$\alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3, \beta_3 \cdots$$

Возьмемъ одинъ изъ этихъ моментовъ (ближайшій къ среднему) за начальный t_0 и назовемъ черезъ: a_1, a_2, $a_3, \cdots$ разности

$$t_1 - t_0, \quad t_2 - t_0, \quad t_3 - t_0, \cdots$$

тогда по строкѣ Маклорена получимъ:

$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{a_n}{1} \cdot \alpha'_0 + \frac{a^2_n}{1 \cdot 2} \alpha''_0 + \frac{a^3_n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha'''_0 + \cdots$$

$$(n = 1, 2, 3 \cdots) \,. \, (*)$$

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{a_n}{1} \cdot \beta'_0 + \frac{a^2_n}{1 \cdot 2} \beta''_0 + \frac{a^3_n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \beta'''_0 + \cdots$$

Стоитъ только эти уравненія рѣшить относительно $\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0; \beta_0, \beta'_0, \beta''_0$ и мы получимъ всѣ необходимыя намъ величины.

Лапласъ не рѣшаетъ на самомъ дѣлѣ уравненій (*) а составляетъ такую функцію $F(s)$, которая была бы вида:

$$F(s) = A_0 + (s - a_1) A_1 + (s - a_1)(s - a_2) A_2 + (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3) A_3 + \cdots$$

и которая принимала бы соотвѣтственно значенія α_1, α_2, $\alpha_3, \cdots$ когда s ровно t_1, t_2, $t_3 \cdots$

Задача о составленіи такой функціи поставлена и рѣшена Ньютономъ въ третьей книгѣ Principia, lemma V, въ такой формѣ: invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit, т. е. найти кривую линію параболическаго рода проходящую черезъ какія либо заданныя точки. Рѣшеніе этого вопроса нужно Ньютону для вопроса поставленнаго въ леммѣ VI — по нѣсколькимъ наблюденнымъ мѣстамъ кометы найти ея мѣсто для какого либо промежуточнаго момента.

Рѣшеніе Ньютона, будучи выражено алгебраически, слѣдующее: составимъ количества:

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a_2 - a_1} = \delta\alpha_1, \quad \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{a_3 - a_2} = \delta\alpha_2, \quad \frac{\alpha_4 - \alpha_3}{a_4 - a_3} = \delta\alpha_3 \cdots$$

$$\frac{\delta\alpha_2 - \delta\alpha_1}{a_3 - a_1} = \delta^2 \alpha_1, \quad \frac{\delta\alpha_3 - \delta\alpha_2}{a_4 - a_2} = \delta^2 \alpha_2 \cdots$$

$$\frac{\delta^2 \alpha_2 - \delta^2 \alpha_1}{a_4 - a_1} = \delta^3 \alpha_1 \cdots$$

и т. д

тогда искомая функція есть:

$$F(s)=\alpha_1+(s-a_1)\,\delta\alpha_1+(s-a_1)(s-a_2)\,\delta^2\alpha_1+(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)\,\delta^3\alpha_1+\cdots$$

Съ другой стороны по теоремѣ Маклорена, таже функція $F(s)$ можетъ быть написана такъ:

$$F(s)=\alpha_0+\frac{s}{1}\cdot\alpha'_0+\frac{s^2}{1\cdot 2}\cdot\alpha''_0+\cdots$$

Сличая коеффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ s получимъ:

$$\alpha_0=\alpha_1-a_1\,\delta\alpha_1+a_1a_2\,\delta^2\alpha_1-a_1a_2a_3\,\delta^3\alpha_1+\cdots$$

$$\alpha'_0=\delta\alpha_1-(a_1+a_2)\,\delta^2\alpha_1+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)\,\delta^3\alpha_1+\cdots$$

$$\frac{1}{2}\alpha''_0=\delta^2\alpha_1-(a_1+a_2+a_3)\,\delta^3\alpha_1+\text{и т. д}\cdots$$

Совершенно также составятся выраженія для β_0, β'_0 и β''_0. Подставивъ величины α_0, α'_0, α''_0, β_0, β'_0 и β''_0 въ выраженіе h, и получимъ все необходимое для вычисленія орбиты.

§ 5. Чтобы вывести свою формулу Ньютонъ поступаетъ такъ [1]: пусть будетъ:

$$u=F(s)=A+Bs+Cs^2+Ds^3+\cdots$$

положимъ что при значеніяхъ s:

$$a_1\quad a_2\quad a_3\cdots$$

соотвѣтствующія значенія u суть:

$$u_1\quad u_2\quad u_3\cdots$$

тогда мы получимъ для опредѣленія коеффиціентовъ A, B, C, $D\cdots$ слѣдующій рядъ уравненій:

$$u_1=A+Ba_1+Ca_1^2+Da_1^3+\cdots$$

$$u_2=A+Ba_2+Ca_2^2+Da_2^3+\cdots$$

$$u_3=A+Ba_3+Ca_3^2+Da_3^3+\cdots$$

$$u_4=A+Ba_4+Ca_4^2+Da_4^3+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[1]) Isaaci Newtoni Opuscula. T. I. стр. 273.

Вычитая первое уравненіе изъ второго, второе изъ третьяго, третье изъ четвертаго и т. д. и замѣчая, что первое изъ получаемыхъ такимъ образомъ уравненій дѣлится на $a_2 - a_1$, второе на $a_3 - a_2$ и т. д. мы получимъ уравненія:

$$\frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = \delta u_1 = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + \cdots$$

$$\frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = \delta u_2 = B + C(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + \cdots$$

$$\frac{u_4 - u_3}{a_4 - a_3} = \delta u_3 = B + C(a_4 + a_2) + D(a_4 + a_4 a_3 + a_3^2) + \cdots$$

. . . .

Поступая съ этими уравненіями такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{\delta u_2 - \delta u_1}{a_3 - a_1} = \delta^2 u_1 = C + D(a_3 + a_2 + a_1) + \cdots$$

$$\frac{\delta u_3 - \delta u_2}{a_4 - a_2} = \delta^2 u_2 = C + D(a_4 + a_3 + a_2) + \cdots$$

Поступивъ съ этими уравненіями также, получимъ, по раздѣленіи на $a_4 - a_1$:

$$\frac{\delta^2 u_2 - \delta^2 u_1}{a_4 - a_1} = \delta^3 u_1 = D + \cdots$$

Отсюда порядокъ выкладокъ ясенъ; если бы было желательно функцію $F(s)$ имѣть лишь третьей степени, то изъ предыдущихъ уравненій, мы бы получили:

$$D = \delta^3 u_1$$

$$C = \delta^2 u_1 - (a_3 + a_2 + a_1)$$

$$B = \delta u_1 - (a_2 + a_1)\,\delta^2 u + (a_3 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_1)\,\delta^3 u_1$$

$$A = u_1 - a_1 \delta u_1 + a_1 a_2 \delta^2 u_1 - a_3 a_2 a_1 \delta^3 u_1$$

и подставляя эти величины имѣли бы:

$$u = u_1 + (s - a_1)\,\delta u_1 + [s^2 - (a_2 + a_1)\,s + a_2 a_1]\,\delta^2 u_1 +$$
$$[s^3 - (a_3 + a_2 + a_1)\,s^2 + (a_3 a_1 + a_3 a_2 + a_1 a_2)\,s - a_3 a_2 a_1]\,\delta^3 u$$

или разлагая стоящія въ [ ] величины на множителей будемъ имѣть:

$$u = u_1 + (s - a_1)\,\delta u_1 + (s - a_1)(s - a_2)\,\delta^2 u_1 + (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)\,\delta^3 u_1$$

Совершенно также поступили-бы и для функціи $F(s)$ любой степени относительно s.

§ 6. Я не буду приводить дальнѣйшихъ подробностей относительно методы Лапласа, ни тѣхъ упрощеній, которыя получаются для параболическихъ орбитъ кометъ, вслѣдствіи того что для нихъ $\frac{1}{a}=0$ и $e=1$, ни изслѣдованія того сколько и при какихъ условіяхъ уравненіе (IV) имѣетъ вещественныхъ корней, ни того какъ распорядиться имѣющимися наблюденіями, чтобы погрѣшности въ нихъ сказывались наименьшимъ образомъ на опредѣляемые по нимъ элементы, отсылая къ главѣ IV второй книги Небесной Механики Лапласа. Эта глава можетъ быть прочитана независимо отъ другихъ, но при пользованіи разнаго рода постоянными тамъ приводимыми, надо имѣть въ виду, что Лапласъ вездѣ придерживается сотеннаго дѣленія окружности.

Legendre въ своемъ сочиненіи: Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des comètes, 1806 г., видоизмѣняетъ методу Лапласа, чтобы упростить выкладки и избавиться отъ необходимости прибѣгать къ формуламъ интерполяціи, которыя, какъ извѣстно, хорошо примѣнимы когда надо ихъ интегрировать, и гораздо хуже поддаются дифференцированію; а именно этому-то дѣйствію и притомъ два раза подрядъ повторенному, и приходится въ сущности подвергать формулы выражающія α и β черезъ t.

Приведенный въ первой бесѣдѣ нашей примѣръ показываетъ, что даже метода Legendre'a, въ примѣненіи къ кометѣ 1781 года по точности далеко уступаетъ методѣ Ньютона, ясно, что то-же обстоятельство будетъ имѣть мѣсто и для методы Лапласа, поэтому полученныя по этимъ методамъ элементы приходится разсматривать какъ первыя приближенія и исправлять ихъ, пользуясь всею совокупностью имѣющихся наблюденій, примѣняя для опредѣленія поправокъ элементовъ методу наименьшихъ квадратовъ, которая и была впервые опубликована именно въ вышеуказанномъ сочиненіи Лежандра.

Мы уже упоминали въ концѣ первой бесѣды нашей о тѣсной связи, въ которой находятся вторая метода Ньютона и метода Лапласа, установленіе этой связи и разъясненіе всѣхъ деталей ея можетъ служить темою для весьма интересной и поучительной самостоятельной работы.

Бесѣда 3.

Метода Ольберса для опредѣленія параболическихъ орбитъ кометъ.

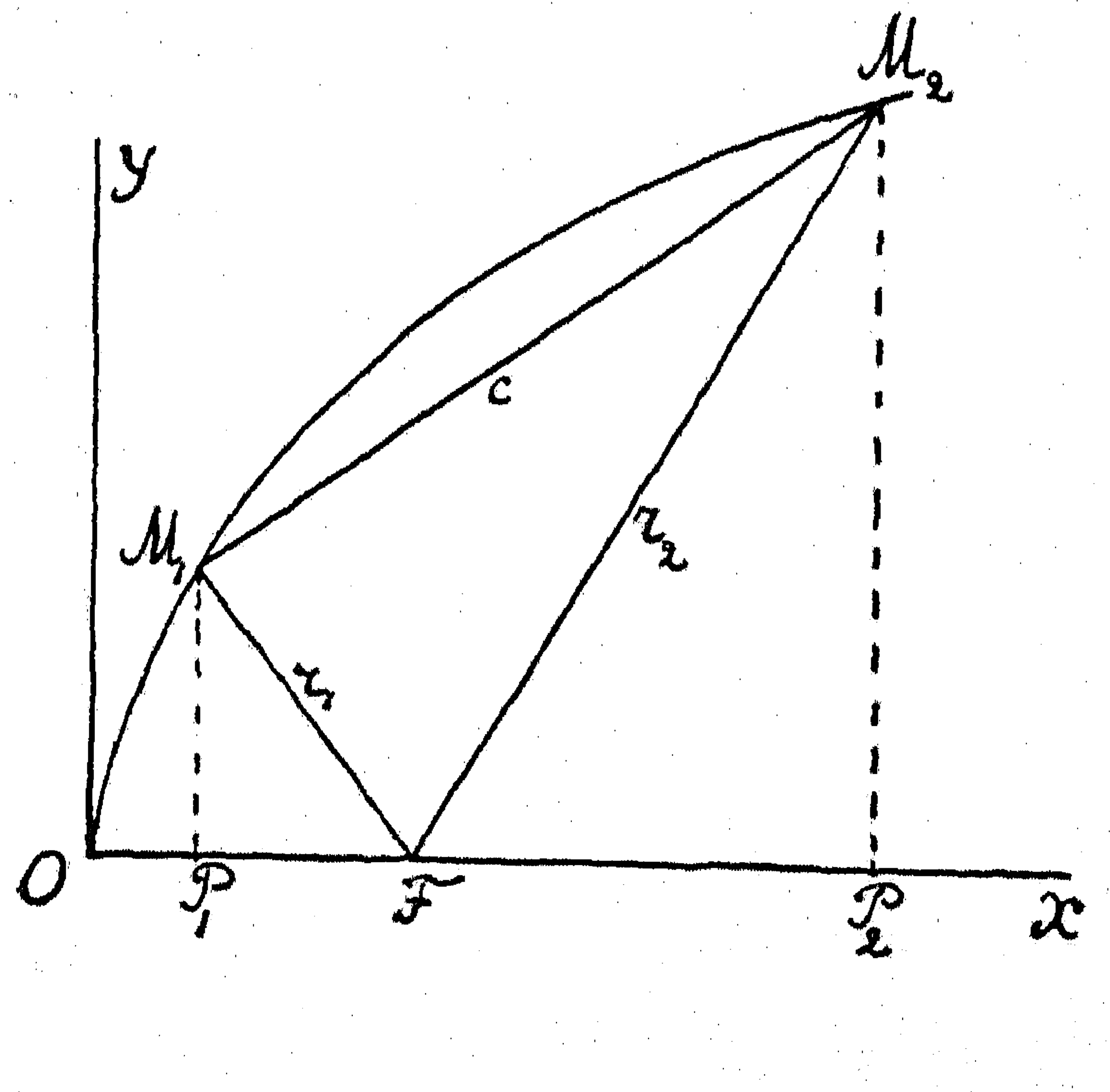
§ 1. Прежде чѣмъ излагать методу Ольберса, являющуюся теперь наиболѣе употребительной для опредѣленія параболическихъ орбитъ кометъ, выведемъ нѣкоторыя теоремы, которыми мы уже пользовались и которыя понадобятся намъ и при дальнѣйшемъ изложеніи.

Теорема 1-ая представляетъ слѣдующее выраженіе данное Эйлеромъ, а затѣмъ вновь найденное Ламбертомъ, для площади параболическаго сектора въ функціи двухъ радіусовъ векторовъ ограничивающихъ секторъ и хорды соединяющей концы ихъ, именно:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{q}\left[\left(\frac{r_1+r_2+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\mp\left(\frac{r_1+r_2-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

причемъ S есть сказанная площадь, q полупараметръ параболы, r_1 и r_2 радіусы векторы c — хорда, знакъ — берется когда разность истинныхъ аномалій соотвѣтствующихъ радіусамъ r_1 и r_2 меньше $180°$ и знакъ $+$ когда эта разность больше $180°$.

Черт. 14.



Чтобы вывести эту теорему разсмотримъ параболу (черт. 14) коей уравненіе есть

$$y^2=4qx$$

и возьмемъ на ней точки M_1 $(x_1\ y_1)$ и M_2 $(x_2\ y_2)$ по одну сторону отъ оси x, такъ что уголъ $M_1\ F\ M_2<180°$, тогда площадь сектора $M_1\ FM_2$ равная S выразится такъ:

$$S=OM_2P_2-OM_1P_1-M_1P_1F-M_2FP_2$$

По свойству же параболы имѣемъ:

$$O M_2 P_2 = \frac{2}{3} x_2 y_2; \quad O M_1 P_1 = \frac{2}{3} x_1 y_1$$

и для треугольниковъ $M_1 F P$ и $M_2 F P_2$:

$$M_1 F P_1 = \frac{1}{2} (q - x_1) y_1; \quad M_2 F P_2 = \frac{1}{2} (x_2 - q) \cdot y_2$$

Подставляя получаемъ:

$$S = \frac{1}{6} (x_2 y_2 - x_1 y_1) + \frac{1}{2} q (y_2 - y_1)$$

Замѣнивъ въ этомъ равенствѣ y_1 и y_2 ихъ величинами

$$y_1 = 2\sqrt{q x_1}; \quad y_2 = 2\sqrt{q x_2}$$

получаемъ:

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{q} \, [x_2^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{3}{2}}] + q^{\frac{3}{2}} (x^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{q} \, (x^{\frac{1}{2}} - x_1^{\frac{1}{2}}) (x_2 + x_1 + \sqrt{x_2 x_1} + 3q)$$

По свойству параболы:

$$x_2 + q = r_2; \qquad x_1 + q = r_1$$

такъ что

$$x_2 + x_1 + 2q = r_2 + r_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

Съ другой стороны хорда $M_1 M_2 = c$ выражается такъ:

$$c = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + 4q (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 =$$

$$= (x_2 + x_1)^2 - 4 x_1 x_2 + 4q (x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_2 x_1}) =$$

$$= (x_2 + x_1)^2 + 4q (x_2 + x_1) + 4q^2 - 4 (q^2 + x_1 x_2 + 2q\sqrt{x_2 x_1}) =$$

$$= (x_2 + x_1 + 2q)^2 - 4 (q + \sqrt{x_2 x_1})^2 =$$

$$= (r_1 + r_2)^2 - 4 (q + \sqrt{x_2 x_1})^2$$

Слѣдовательно:

$$4 (q + \sqrt{x_2 x_1})^2 = (r_1 + r_2 + c)(r_1 + r_2 - c) \quad \ldots\ldots (**)$$

Сдѣлаемъ на время:

$$r_1+r_2+c=2l;\quad r_1+r_2-c=2\lambda$$

такъ что будетъ

$$r_1+r_2=l+\lambda=x_1+x_2+2q;\quad q+\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{l\lambda}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$x_1+x_2-2\sqrt{x_2x_1}=l+\lambda-2\sqrt{l\lambda}\quad \text{или}\quad \sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\sqrt{l}-\sqrt{\lambda}$$

$$x_1+x_2+\sqrt{x_2x_1}=l+\lambda+\sqrt{l\lambda}-3q$$

Подставляя эти величины въ выраженіе S имѣемъ:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{q}\,(\sqrt{l}-\sqrt{\lambda})\,(l+\lambda+\sqrt{l\lambda})$$

или

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{q}\,[l^{\frac{3}{2}}-\lambda^{\frac{3}{2}}]$$

иначе:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{q}\left[\left(\frac{r_1+r_3+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{r_1+r_3-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\quad \ldots\ldots \mathrm{I}$$

Когда масса свѣтила m ничтожно мала по сравненію съ массою солнца, то какъ мы видѣли

$$\sqrt{p}=\frac{C}{K}=\frac{2S}{t_2-t_1}\cdot\frac{1}{K}$$

гдѣ C есть удвоенная площадь описываемая въ единицу времени, значитъ

$$\sqrt{q}=\sqrt{\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{2}S}{t_2-t_1}\cdot\frac{1}{K}$$

подставляя въ формулу I получимъ:

$$6K(t_2-t_1)=(r_1+r_2+c)^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_2-c)^{\frac{3}{2}}\quad \ldots\ldots \mathrm{II}$$

Это и есть формула Эйлера связывающая два радіуса вектора, хорду и промежутокъ времени описанія соотвѣтствующей дуги параболы, *независимо* отъ параметра или иныхъ элементовъ орбиты.

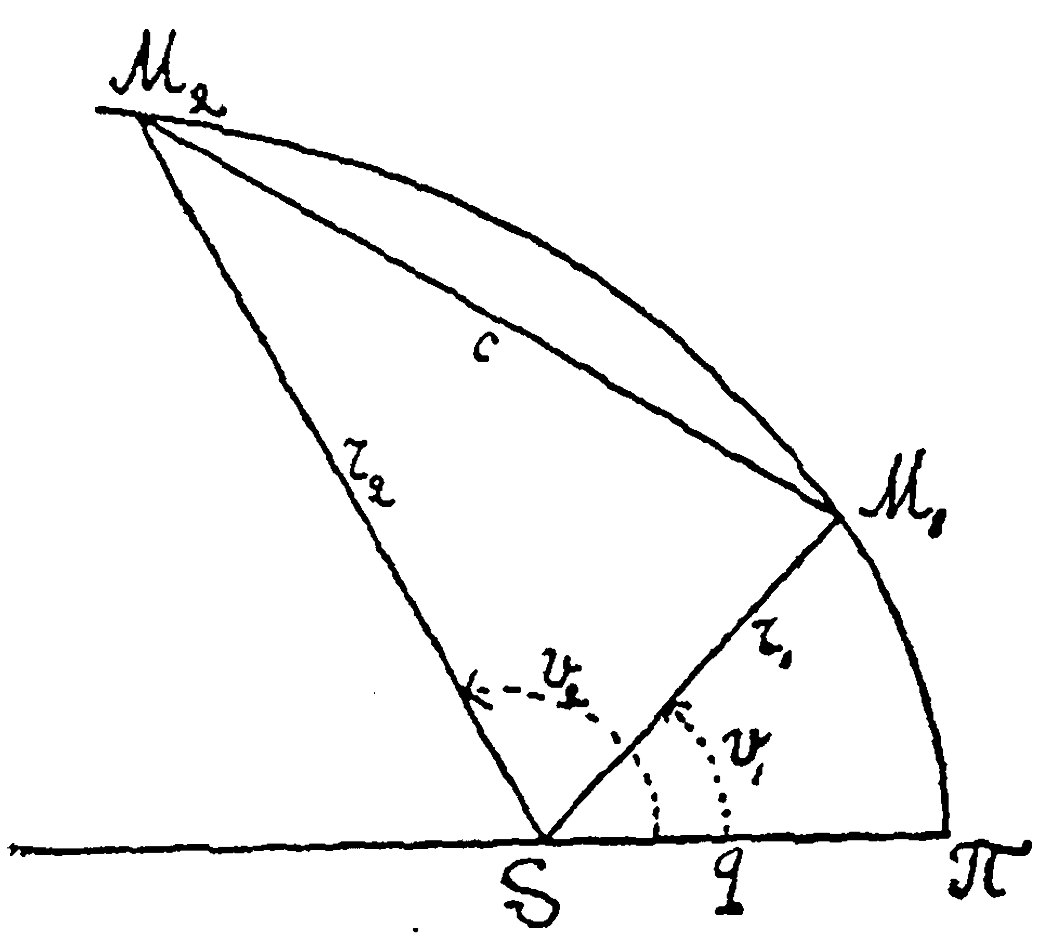
Обыкновенно разность истинныхъ аномалій меньше 180° такъ что въ формулѣ Эйлера передъ вторымъ членомъ надо брать знакъ —. Составивъ чертежъ и повторивъ предыдущій выводъ для того случая, когда разность аномалій болѣе 180°, мы увидимъ, что передъ вторымъ членомъ надо брать знакъ +.

Мы видѣли при изложеніи методы Ньютона то значеніе, которое имѣетъ эта формула для разысканія параболическихъ орбитъ.

§ 2. Ньютонъ привелъ нахожденіе элементовъ параболической орбиты кометы къ опредѣленію двухъ радіусовъ векторовъ и хорды между ними и далъ геометрическія построенія элементовъ по этимъ даннымъ, покажемъ какимъ образомъ эти элементы вычислить по тѣмъ-же даннымъ т. е. выведемъ всѣ тѣ формулы, которыми мы пользовались въ § 13 первой бесѣды нашей.

Итакъ даны r_1, r_2 и хорда c между ними, надо найти: 1°) истинныя аномаліи v_1 и v_2, 2°) разстояніе до перигелія q, 3°) время прохожденія черезъ перигелій.

Черт. 15.



Уравненіе параболы

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{1}{2} v}$$

даетъ слѣдующія соотношенія:

$$\cos \frac{1}{2} v_1 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r_1}}; \quad \cos \frac{1}{2} v_2 = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{r_2}} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{\cos \frac{1}{2} v_1 - \cos \frac{1}{2} v_2}{\cos \frac{1}{2} v_1 + \cos \frac{1}{2} v_2} = \operatorname{tg} \frac{v_2 - v_1}{4} \operatorname{tg} \frac{v_1 + v_2}{4} = \frac{\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}}{\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}} \quad \ldots (2)$$

съ другой стороны въ треугольникѣ $M_1 F M_2$ извѣстны три стороны, уголъ-же при фокусѣ F есть $v_2 - v_1$, очевидно, что этотъ уголъ найдется по одной изъ формулъ полупериметра, напримѣръ

$$\sin^2 \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{(c + r_1 + r_2)(c + r_2 - r_1)}{4 r_1 r_2} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

а такъ какъ формула (2) при извѣстномъ $v_2 - v_1$ доставитъ $v_1 + v_2$ то оба угла v_1 и v_2 опредѣлятся, послѣ чего изъ уравненій (1) найдется q.

Чтобы найти время прохожденія черезъ перигелій стоитъ только опредѣлить время въ теченіе котораго комета проходитъ путь πM_1 или

πM_2, исчисливъ для этого площади соотвѣтствующихъ секторовъ, именно будетъ:

$$2S_1 = \int_0^{v_1} r^2\,dv = q^2 \int_0^{v_1} \frac{dv}{\cos^4 \frac{1}{2} v} = 2q^2 \int_0^{v_1} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} v\right) d \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} v\right)$$

$$= 2q^2 \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v_1\right).$$

Съ другой стороны

$$2S = K\sqrt{2q}\,(t_1 - t_0)$$

такимъ образомъ получаемъ уравненіе:

$$\frac{1}{2} K \sqrt{\frac{2}{q^3}}\,(t_1 - t_0) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v_1 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Совершенно также положеніе M_2 даетъ соотношеніе:

$$\frac{1}{2} K \sqrt{\frac{2}{q^3}}\,(t_2 - t_0) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v_2 \quad \ldots\ldots \quad (4')$$

Для облегченія вычисленій по формуламъ (4) и (4′) въ особенности когда надо, по данной лѣвой части этихъ уравненій, найти v_1 или v_2, составлены особыя таблицы, называемыя таблицами Barker'а. Эта таблица даетъ по аргументу v величину

$$75\left[\operatorname{tg} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} v\right] = m$$

или логариѳмъ этой величины. Умноживъ обѣ части равенства (4) на 75 имѣемъ:

$$\frac{75K}{\sqrt{2}} q^{-\frac{3}{2}} (t_1 - t_0) = m_1.$$

Постоянный множитель $\frac{75K}{\sqrt{2}}$ вычисляется разъ на всегда, его логариѳмъ есть:

$$\lg \frac{75K}{\sqrt{2}} = \bar{1},9601277 = \lg n.$$

Уравненія (4) и (4') при такомъ обозначеніи напишутся

$$\left.\begin{aligned} nq^{-\frac{3}{2}}(t_1 - t_0) = m_1 \\ nq^{-\frac{3}{2}}(t_2 - t_0) = m_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4'')$$

и сейчасъ-же доставятъ величину t_0.

Въ таблицѣ Barker'а приложенной къ сочиненію Oppolzer'a Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten, показаны прямо логариѳмы величинъ $\frac{m}{n}$, что дѣлаетъ вычисленіе еще проще.

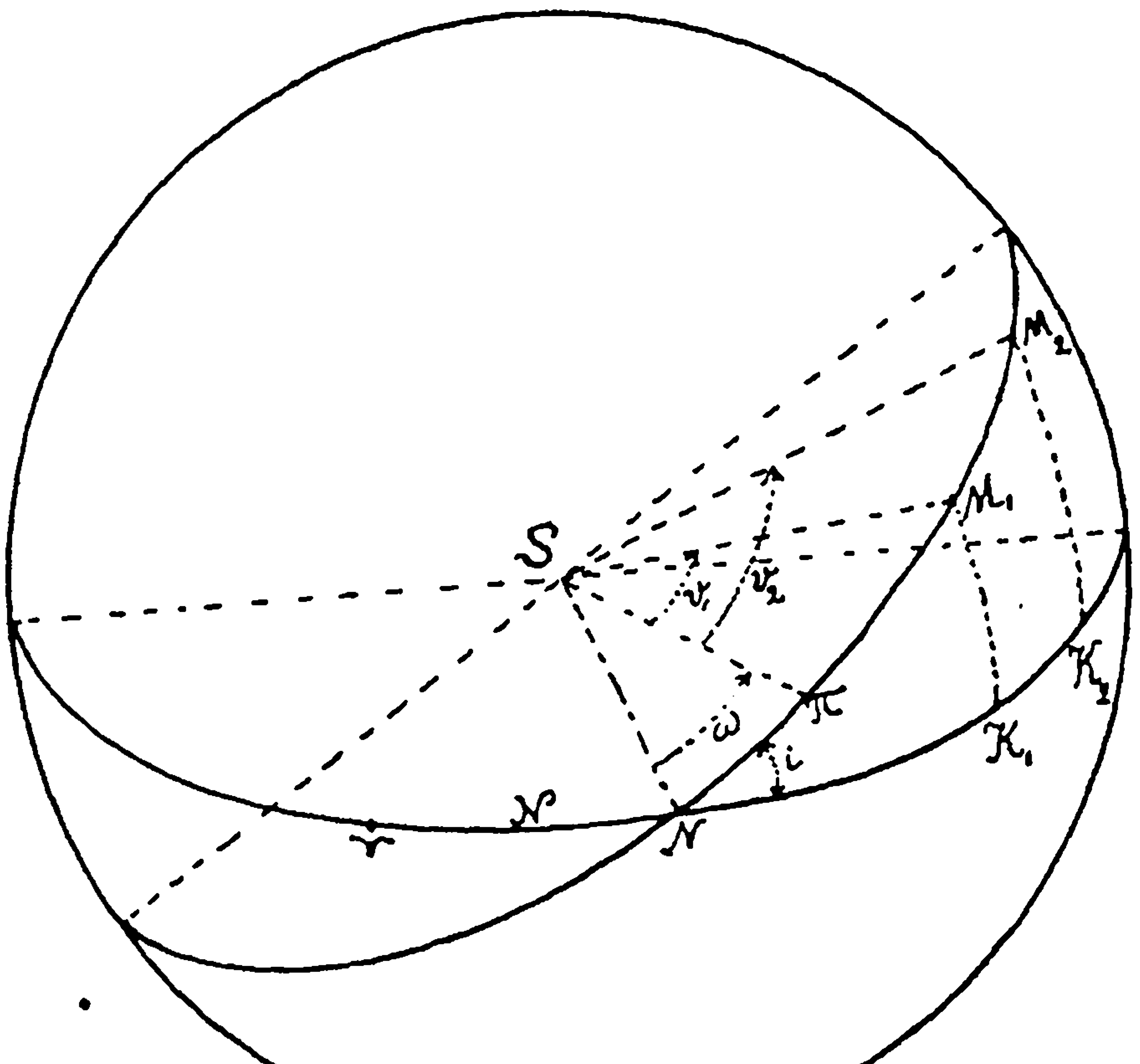
Сокращеніе Oppolzer'овой таблицы при иномъ ея расположеніи приведено въ таблицахъ Bauschinger'a Tafeln zur theoretischen Astronomie.

Чтобы найти наклонность i, долготу узла N и долготу перигелія $N + \omega$, или аргументъ широты перигелія ω, надо сперва вычислить, какъ показано въ первой бесѣдѣ, геліоцентрическія широты θ_1 и θ_2 и геліоцентрическія долготы λ_1 и λ_2 обоихъ крайнихъ мѣстъ кометы M_1 и M_2, тогда получимъ изъ разсмотрѣнія чертежа 16 слѣдующія формулы:

Сдѣлаемъ:

$$NM_1 = u_1; \quad NM_2 = u_2$$

Черт. 16.



и замѣтивъ что

$$\gamma K_1 = \lambda_1; \quad \gamma K_2 = \lambda_2$$

$$K_1 M_1 = \theta_1; \quad K_2 M_2 = \theta_2$$

$$M_1 N K_1 = i; \quad \gamma N = N$$

имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(\lambda_1 - N) = \operatorname{tg}\theta_1, \\ \operatorname{tg} i \sin(\lambda_2 - N) = \operatorname{tg}\theta_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{\sin(\lambda_1 - N)}{\sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2}$$

или

$$\frac{\sin(\lambda_1 - N) + \sin(\lambda_2 - N)}{\sin(\lambda_1 - N) - \sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2}{\operatorname{tg}\theta_1 - \operatorname{tg}\theta_2}$$

что по упрощеніи даетъ:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - N\right) = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) \quad \ldots \ldots (6)$$

и послужитъ для опредѣленія N, послѣ чего по фор. (5) найдется i.

Чтобы найти ω найдемъ сперва u_1 и u_2 по формуламъ:

$$\cos u_1 = \cos\theta_1 \cos(\lambda_1 - N) \quad \text{и} \quad \cos u_2 = \cos\theta_2 \cos(\lambda_2 - N) \quad \ldots \quad (7)$$

или когда u_1 и u_2 малые по формуламъ:

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg}(\lambda_1 - N)\sec i \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} u_2 = \operatorname{tg}(\lambda_2 - N)\sec i \quad \ldots \quad (7')$$

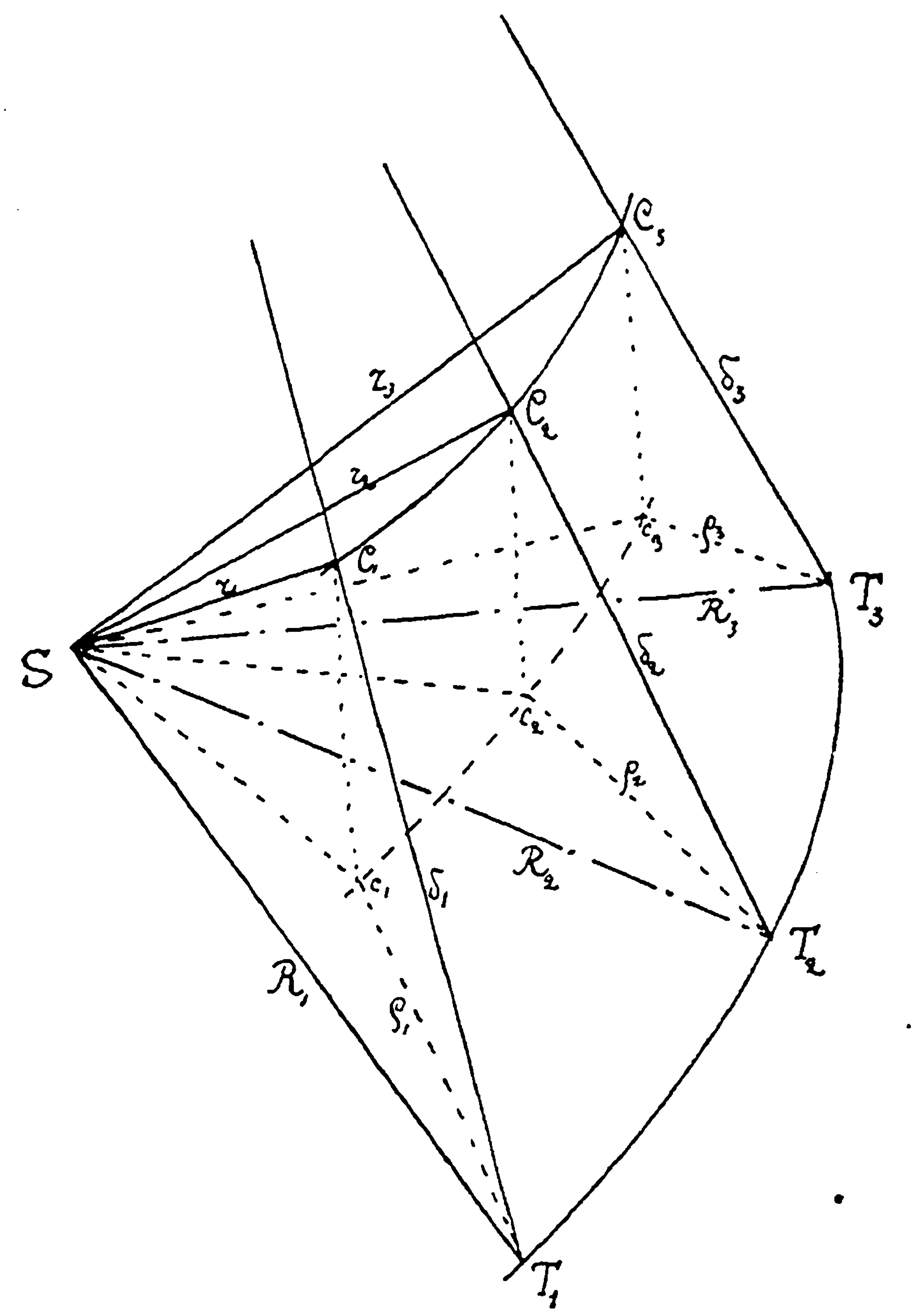
тогда

$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

что вмѣстѣ съ тѣмъ составляетъ и повѣрку вычисленія.

§ 3. Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній перейдемъ къ изложенію самой методы Ольберса.

Черт. 17.



Сущность этой методы состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть T_1, T_2, T_3 суть мѣста земли въ моменты наблюденій t_1, t_2, t_3; C_1, C_2, C_3 соотвѣтствующіе мѣста кометы; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ разстоянія кометы до земли; ρ_1, ρ_2, ρ_3 проекціи этихъ разстояній на плоскость эклиптики; r_1, r_2, r_3 радіусы векторы кометы въ моментъ наблюденій; c хорда $C_1 C_3$ между крайними положеніями кометы.

Оказывается что можно составить *четыре* независимыхъ уравненія между неизвѣстными ρ_1, r_1, r_3 и c, изъ которыхъ эти величины опредѣляются, послѣ чего, какъ показано выше, найдутся и элементы орбиты.

Сущность методы Ольберса и состоитъ въ составленіи и въ рѣшеніи этихъ четырехъ уравненій.

Первое уравненіе доставляется теоремою Эйлера, оно будетъ:

$$6K(t_3 - t_1) = (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_3 - c)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (I)$$

ибо обыкновенно комета наблюдается по одну сторону перигелія.

Второе уравненіе слѣдуетъ изъ разсмотрѣнія плоскаго треугольника $ST_1 C_1$ и его проекціи на плоскость эклиптики, въ самомъ дѣлѣ имѣемъ:

$$SC_1^2 = Sc_1^2 + C_1 c_1^2; \qquad C_1 c_1 = \rho_1 \operatorname{tg}\beta_1$$

$$Sc_1^2 = ST_1^2 + T_1 c_1^2 - 2ST_1 \cdot T_1 c_1 \cos ST_1 c_1$$

но

$$ST_1 = R_1 \quad \text{и} \quad ST_1 c_1 = 180^\circ - (\alpha_1 - L_1)$$

гдѣ R_1 есть радіусъ векторъ земли въ моментъ t_1, L_1 долгота ея. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$r_1^2 = R_1^2 + 2R_1 \rho_1 \cos(\alpha_1 - L_1) + \rho_1^2 \sec^2 \beta_1 \quad \ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Это уравненіе мы уже имѣли въ методѣ Лапласа.

Третье уравненіе, самое существенное въ методѣ Ольберса, получается изъ тѣхъ условій: 1°) что точки C_1, C_2, C_3 лежатъ въ одной плоскости *проходящей черезъ центръ солнца* S. 2°) что площади секторовъ C_1SC_2, C_2SC_3, C_1SC_3 пропорціональны соотвѣтствующимъ промежуткамъ времени $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_3 - t_1$.

Обозначая координаты точекъ C_1, C_2, C_3 соотвѣтственно черезъ

$$x_1\ y_1\ z_1 \qquad x_2\ y_2\ z_2 \qquad x_3\ y_3\ z_3$$

видимъ, что условіе, чтобы онѣ лежали въ одной плоскости проходящей черезъ S, выражается такъ:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Разлагая этотъ опредѣлитель по элементамъ перваго столбца имѣемъ:

$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - z_1y_2) = 0.$$

Замѣтивъ, что величины $(y_2z_3 - y_3z_2)$, $(y_1z_3 - y_3z_1)$, $(y_1z_2 - z_1y_2)$ представляютъ проекціи удвоенныхъ площадей *треугольниковъ* C_2SC_3, C_1SC_3, C_1SC_2 на плоскость zoy, видимъ что если обозначить эти площади соотвѣтственно черезъ Δ_{23}, Δ_{13}, Δ_{12}, то предыдущее уравненіе напишется такъ:

$$x_1\Delta_{23} - x_2\Delta_{13} + x_3\Delta_{12} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Совершенно также, располагая опредѣлитель (*) по элементамъ второго и третьяго столбцовъ, получимъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} y_1\Delta_{23} - y_2\Delta_{13} + y_3\Delta_{12} = 0 \\ z_1\Delta_{23} - z_2\Delta_{13} + z_3\Delta_{12} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9')$$

Но мы видѣли что

$$x_i = R_i \cos L_i + \rho_i \cos \alpha_i$$
$$y_i = R_i \sin L_i + \rho_i \sin \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$z_i = \rho_i \operatorname{tg} \beta_i.$$

Подставляя эти величины въ уравненія (9), получимъ по раздѣленіи на Δ_{12}

$$\rho_3 \operatorname{tg} \beta_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 = 0$$

$$\rho_3 \cos \alpha_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \cos \alpha_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \cos \alpha_1 = -R_3 \cos L_3 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} R_2 \cos L_2 - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} R_1 \cos L_1$$

$$\rho_3 \sin \alpha_3 - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \sin \alpha_2 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \rho_1 \sin \alpha_1 = -R_3 \sin L_3 + \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} R_2 \sin L_2 - \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} R_1 \sin L_1.$$

Въ этихъ уравненіяхъ отношенія площадей треугольниковъ также *неизвѣстны*, но отношеніе $\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}$ приблизительно равно отношенію площадей соотвѣтствующихъ секторовъ, а значитъ и соотвѣтствующихъ промежутковъ времени $\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$, причемъ это равенство тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ промежутки времени меньше и ближе другъ къ другу.

Такимъ образомъ принявъ приближенное равенство:

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

мы изъ предыдущихъ трехъ уравненій исключимъ величины $\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}}$ и $\frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2$ и получимъ одно уравненіе, связывающее ρ_3 и ρ_1, это и будетъ требуемое *третье* уравненіе въ методѣ Ольберса.

Чтобы выполнить сказанное исключеніе, умножимъ третье уравненіе на $-\cos L_2$, второе на $\sin L_2$ и складываемъ ихъ, получаемъ:

$$\rho_3 \sin(\alpha_3 - L_2) - \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}} \rho_2 \sin(\alpha_2 - L_2) + \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \rho_1 \sin(\alpha_1 - L_2)$$
$$= -\left[R_3 \sin(L_3 - L_2) - \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} R_1 \sin(L_2 - L_1) \right].$$

Нетрудно видѣть что выраженія $R_2 R_3 \sin(L_3 - L_2)$ и $R_1 R_2 \sin(L_2 - L_1)$ суть удвоенныя площади треугольниковъ $T_2 S T_3$ и $T_1 S T_2$, которыя съ еще бо́льшею степенью точности можно считать пропорціональными соотвѣтствующимъ промежуткамъ времени нежели площади треугольниковъ

C_2SC_3 и C_1SC_2. Значитъ въ предыдущемъ уравненіи можно положить вторую часть равной 0, тогда, умноживъ его на $-\operatorname{tg}\beta_2$ и придавъ къ первому умноженному на $\sin(\alpha_2-L_2)$ получимъ:

$$\rho_3\,[\operatorname{tg}\beta_3\sin(\alpha_2-L_2)-\operatorname{tg}\beta_2\sin(\alpha_3-L_3)]$$
$$=-\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\rho_1\,[\operatorname{tg}\beta_1\sin(\alpha_2-L_2)-\operatorname{tg}\beta_2\sin(\alpha_1-L_2)]$$

откуда слѣдуетъ:

$$\rho_3=h\rho_1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(*)$$

причемъ

$$h=\frac{t_3-t_2}{t_2-t_1}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta_2\sin(\alpha_1-L_2)-\operatorname{tg}\beta_1\sin(\alpha_2-L_2)}{\operatorname{tg}\beta_3\sin(\alpha_2-L_2)-\operatorname{tg}\beta_2\sin(\alpha_3-L_2)}\;.\;.\;.\;.\;(**)$$

Написавъ уравненіе:

$$r_3^2=R_3^2+2R_3\rho_3\cos(\alpha_3-L_3)+\rho_3^2\sec^2\beta_3$$

и замѣнивъ въ немъ ρ_3 его величиною и получимъ искомое *третье* уравненіе а именно:

$$r_3^2=R_3^2+2hR_3\rho_1\cos(\alpha_3-L_3)+h^2\rho_1^2\sec^2\beta_3\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathrm{III}$$

Четвертое уравненіе есть не что иное, какъ преобразованное, пользуясь соотношеніемъ (*), выраженіе длины хорды c

$$c^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2$$

которое по подстановкѣ вмѣсто $x_1\,y_1\,z_1$ и $x_3\,y_3\,z_3$ выраженій:

$$x_1=R_1\cos L_1+\rho_1\cos\alpha_1 \qquad x_3=R_3\cos L_3+h\rho_1\cos\alpha_3$$
$$y_1=R_1\sin L_1+\rho_1\sin\alpha_1 \qquad y_3=R_3\sin L_3+h\rho_1\sin\alpha_3$$
$$z_1=\rho_1\operatorname{tg}\beta_1 \qquad z_3=h\rho_1\operatorname{tg}\beta_3$$

даетъ:

$$c^2=r_1^2+r_3^2-2R_1R_3\cos(L_3-L_1)-2h\rho_1^2\,[\cos(\alpha_3-\alpha_1)+\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\beta_3]$$
$$-2hR_1\rho_1\cos(\alpha_3-L_1)-2R_3\rho_1\cos(L_3-\alpha_1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathrm{IV}$$

Это и есть *четвертое* уравненіе.

Какъ видно если въ этомъ уравненіи замѣнить r_1^2 и r_3^2 ихъ выраженіями, то оно будетъ вида

$$c^2=A\rho_1^2+B\rho_1+C\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathrm{IV}'$$

причемъ A, B и C неизвѣстныхъ не содержатъ.

§ 4. Итакъ для опредѣленія величинъ r_1, r_3, c и ρ_1 мы имѣемъ систему уравненій слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= A_1\rho_1^2 + B_1\rho_1 + C_1 = 0 \\ r_3^2 &= A_3\rho_1^2 + B_3\rho_1 + C_3 = 0 \\ c^2 &= A\,\rho_1^2 + B\,\rho_1 + C = 0 \\ (r_1+r_3+c)^{\frac{3}{2}} &- (r_1+r_3-c)^{\frac{3}{2}} - C_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V)$$

Рѣшеніе этихъ уравненій можно производить двояко или 1) задаваясь величиною ρ_1 вычислять соотвѣтствующія значенія r_1, r_3 и c и подставлять въ послѣднее уравненіе, и, вычисливъ значеніе первой его части, послѣдовательнымъ приближеніемъ искать истинное значеніе ρ_1 или 2) задаваясь величиною r_1+r_3 изъ уравненія Эйлера находить величину c, по ней величину ρ_1, по ρ_1 величины r_1 и r_3 и, сличая ихъ сумму съ тою которою задавались, составлять послѣдовательныя приближенія.

Для облегченія вычисленія величины c по уравненію

$$6K(t_3-t_1) = (r_1+r_3+c)^{\frac{3}{2}} - (r_1+r_3-c)^{\frac{3}{2}}$$

Энке составилъ вспомогательныя таблицы слѣдующимъ образомъ: раздѣливъ обѣ части предыдущаго равенства на $3(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}$ и положивъ

$$\frac{c}{r_1+r_3} = \beta$$

онъ разлагаетъ вторую часть въ рядъ по степенямъ β, тогда получится:

$$\frac{2K(t_3-t_1)}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}} = \beta - \frac{1}{24}\beta^3 - \frac{1}{128}\beta^5 - \ldots$$

положивъ затѣмъ:

$$\frac{2K(t_3-t_1)}{(r_1+r_3)^{\frac{3}{2}}} = \eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Энке обращаетъ предыдущій рядъ т. е. получаетъ разложеніе β по степенямъ буквы η.

$$\beta = \frac{c}{r_1+r_3} = \eta\left[1 + \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{5}{384}\eta^4 + \frac{59}{9216}\eta^6 + \ldots\right] = \eta\cdot\varepsilon$$

и составляетъ таблицу въ которой по аргументу η даны логариѳмы величинъ ε; такимъ образомъ, пользуясь его таблицею, вычисленіе хорды производится такъ: сперва по формулѣ (9) вычисляютъ величину η, и подъискавъ по таблицѣ $\log \varepsilon$, получаютъ хорду по формулѣ:

$$c = \eta \cdot (r_1 + r_3) \cdot \varepsilon \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10')$$

Пользуясь таблицею Энке ведутъ приближенія для рѣшенія системы (V) такъ; берутъ сперва $r_1 + r_3 = 2$, вычисляютъ хорду c, затѣмъ ρ_1 и r_1 и r_3, если ихъ сумма окажется равной 2, то дѣло кончено, если же нѣтъ, а окажется напримѣръ $r_1 + r_3 = 1{,}77$, то, принявъ $r_1 + r_3 = 1{,}77$, вычисляютъ хорду c и повторяютъ предыдущій процессъ, пока не получится требуемаго согласія.

Послѣ того какъ величины r_1, r_3 и c вычислены, то опредѣляютъ и элементы орбиты, какъ показано выше.

§ 5. При выводѣ III уравненія, мы оставили безъ доказательства предположеніе, что

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

такъ что не было показано какова степень его точности. Чтобы это пополнить вообразимъ, что, принимая моментъ t_2 за исходный, мы разложимъ координаты свѣтила въ моменты t_3 и t_2 по ряду Тейлора, причемъ, чтобы не имѣть дѣла съ постоянно повторяющимся множителемъ K, выразимъ время въ „астрономической единицѣ" и положимъ:

$$K(t_2 - t_1) = \tau_1; \quad K(t_3 - t_2) = \tau_2 \quad \text{и} \quad K(t_3 - t_1) = \tau_3$$

тогда получимъ:

$$z_1 - z_2 = -\frac{\tau_1}{1} \cdot z_2' + \frac{\tau_1^2}{1 \cdot 2} z_2'' - \frac{\tau_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_2''' + \cdots$$

$$z_3 - z_2 = \frac{\tau_2}{1} z_2' + \frac{\tau_2^2}{1 \cdot 2} z_2'' + \frac{\tau_2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_2''' + \cdots$$

Откуда исключая z' и замѣнивъ z_2'' черезъ $-\frac{z_2}{r_2^3}$ получимъ:

$$\frac{z_1 - z_2}{\tau_1} + \frac{z_3 - z_2}{\tau_2} = -\frac{\tau_3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{z_2}{r_2^3} + \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z_2''' + \cdots$$

Отсюда видно, что когда промежутки τ_2 и τ_1 равны между собою, то послѣдній членъ пропадаетъ и съ точностью до членовъ 3-го порядка относительно τ_1 и τ_2 имѣемъ:

$$\frac{z_1 - z_2}{\tau_1} + \frac{z_3 - z_2}{\tau_2} = -\frac{1}{2}\tau_3 \frac{z_2}{r_2^3}$$

точно также будетъ:

$$\frac{y_1 - y_2}{\tau_1} + \frac{y_3 - y_2}{\tau_2} = -\frac{1}{2}\tau_3 \frac{y_2}{r_2^3}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{\tau_1} + \frac{x_3 - x_2}{\tau_2} = -\frac{1}{2}\tau_3 \frac{x_2}{r_2^3}$$

Исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій $\frac{1}{r_2^3}$ получимъ:

$$\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{\tau_1} + \frac{y_3 x_2 - y_2 x_3}{\tau_2} = 0$$

или иначе:

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

что и показываетъ, что это соотношеніе вѣрно до членовъ *третьяго* порядка относительно промежутковъ τ_2 и τ_1, когда они между собою равны или близки къ равенству.

Когда промежутокъ $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ составляетъ около 6 сутокъ, то $\tau_1 = \tau_2$ приблизительно равно $\frac{1}{10}$, и значитъ отброшенные члены порядка $\frac{1}{1000}$; когда-же этотъ промежутокъ всего около 3 сутокъ, какъ для современныхъ наблюденій, то отброшенные члены порядка $\frac{1}{8000}$.

Формулою (11) мы пользовались при составленіи выраженія h показывающаго отношеніе ρ_3 къ ρ_1, нетрудно послѣ того, какъ получено первое приближеніе это выраженіе исправить, стоитъ только вычислить величины отношеній площадей треугольниковъ къ площадямъ соотвѣтствующихъ секторовъ; пусть эти отношенія будутъ:

$$\frac{\Delta_{23}}{S_{23}} = n_{23} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta_{12}}{S_{12}} = n_{12}$$

тогда получимъ:

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} \cdot \frac{S_{12}}{S_{23}} = \frac{n_{23}}{n_{12}}$$

но

$$\frac{S_{12}}{S_{23}} = \frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_2}$$

слѣдовательно будетъ:

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}} = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{n_{23}}{n_{12}} \ldots .$$

исправивъ такимъ образомъ h повторяемъ вычисленіе величинъ r_1, r_3, с которое и явится окончательнымъ.

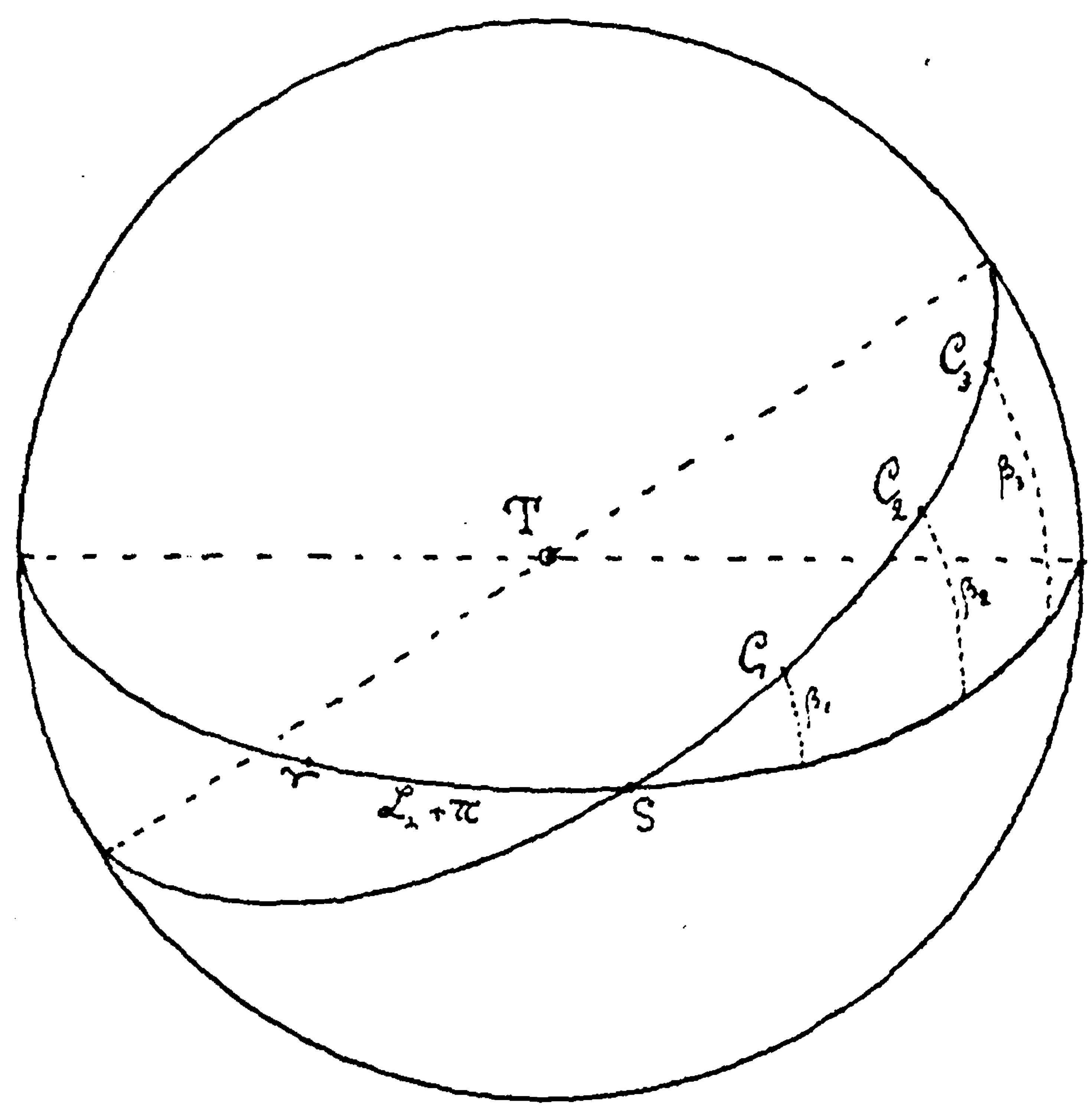
§ 6. То-же выраженіе h содержитъ множитель

$$\frac{\operatorname{tg}\beta_2 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_2 - L_2)}{\operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_2 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\alpha_3 - L_2)}$$

можетъ оказаться, что этотъ множитель принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$, или вообще что въ немъ числитель и знаменатель весьма малы, тогда погрѣшности въ данныхъ скажутся весьма значительно на величинѣ этого множителя, эта величина не будетъ заслуживать никакого довѣрія и изложенная метода становится непримѣнимою.

Такой исключительный случай имѣетъ мѣсто при слѣдующемъ относительномъ расположеніи видимыхъ мѣстъ свѣтила и солнца на сферѣ небесной.

Черт. 18.



Пусть T (черт. 18) есть земля принимаемая неподвижной, γ точка весенняго равноденствія, S видимое мѣсто солнца при вторыхъ наблюденіяхъ, C_1, C_2, C_3 видимыя мѣста кометы при первомъ, второмъ и третьемъ наблюденіи. Нетрудно видѣть, что числитель и знаменатель выраженія h обращаются въ ноль, когда расположеніе видимыхъ мѣстъ кометы и солнца такое, какъ на нашемъ чертежѣ, т. е., когда всѣ эти четыре точки лежатъ на *одномъ и томъ же большомъ кругѣ.*

Мы не будемъ вдаваться въ подробный анализъ того, какъ видоизмѣнить методу Ольберса, чтобы сдѣлать ее приложимой и для этого случая, скажемъ только, что тогда она еще ближе становится къ методѣ Ньютона, для которой, какъ показано во второмъ примѣрѣ нашей первой бесѣды, этотъ случай не только не представляетъ затрудненій, но даже особенно благопріятный.

§ 7. Любопытно ближе сопоставить обѣ методы Ньютона и Ольберса, само собою разумѣется по ихъ сущности и идеѣ, а не по деталямъ выкладокъ и численныхъ вычисленій, которыя можно выполнять на множество различныхъ манеръ.

Сущность методы Ньютона состоитъ въ томъ, что сперва онъ находитъ положенія кометы при двухъ крайнихъ наблюденіяхъ, и по этимъ положеніямъ вычисляетъ элементы орбиты.

Тоже самое дѣлается и въ методѣ Ольберса.

Обращаясь затѣмъ къ самымъ деталямъ разсчета видимъ, что по методѣ Ньютона:

1) Задается ρ_2 — укороченное разстояніе при вторыхъ наблюденіяхъ.

2) Изъ условія что хорда подраздѣляется точкою E, построеніе которой Ньютонъ даетъ, на отрѣзки пропорціональные промежуткамъ времени, слѣдуютъ между укороченными разстояніями ρ_1 ρ_2 и ρ_3 такія соотношенія

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 &= a_1 + b_1 \rho_2 \\ \rho_3 &= a_3 + b_3 \rho_2\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

причемъ a_1 и a_2 величины малыя. Полученныя по этимъ соотношеніямъ величины ρ_1 и ρ_2 исправляются опредѣленнымъ образомъ, дабы получить возможно точное подраздѣленіе хорды на отрѣзки пропорціональные временамъ.

Въ методѣ Ольберса, вмѣсто Ньютонова построенія точки E берется ея исходное у Ньютона положеніе т. е. на радіусѣ векторѣ, идущемъ ко второму мѣсту кометы. Величины a_1 и a_3 тогда оказывается возможно принять равными нулю и вмѣсто формулъ (12) Ольберсъ получаетъ формулу

$$\rho_3 = h\rho_1$$

3) Для провѣрки и составленія ложныхъ положеній Ньютонъ вычисляетъ длину хорды σ въ зависимости отъ r_2 по формулѣ

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}\,K \cdot (t_3 - t_1)}{\sqrt{SP}}$$

гдѣ $SP = f\,(r_2)$ и не зависитъ отъ элементовъ орбиты.

Ольберсъ для этой цѣли пользуется формулою Эйлера:

$$6\,K(t_3 - t_1) = (r_1 + r_2 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}}$$

и въ нашихъ примѣрахъ мы показали равносильность обоихъ формулъ.

Но надо замѣтить, что лишь благодаря таблицамъ Энке вычисленіе хорды по формулѣ Эйлера приведено къ той-же степени простоты, какъ и по формулѣ Ньютона.

4) Во всемъ остальномъ никакой разницы между обѣими методами нѣтъ, ибо всѣ остальныя формулы суть не что иное, какъ *геометрическія*

соотношенія между r_1, r_3, c, ρ_1 и ρ_3, слѣдующія изъ тѣхъ-же самыхъ треугольниковъ.

Изъ этого сопоставленія видно, что метода Ольберса цѣликомъ заключается въ методѣ Ньютона, но Ньютонъ, которому приходилось, въ виду малой точности тогдашнихъ наблюденій, брать гораздо большіе промежутки времени, не ограничился замѣною секторовъ треугольниками *даже для перваго приближенія*, а лишь для исходнаго, которое онъ рекомендуетъ дѣлать „graphice, opere celeri et rudi", для перваго-же приближенія онъ далъ то изумительное, по точности, остроумію и изяществу, построеніе, которое составляетъ лемму VIII третьей книги Principia, когда-же промежутки времени малы, то и исходное Ньютоново приближеніе достаточно точно. Этимъ обстоятельствомъ и воспользовался Ольберсъ, приведя вмѣстѣ съ тѣмъ и всѣ нужныя формулы къ удобному для вычисленій виду.

§ 8. При изложеніи методы Ольберса мы слѣдовали за H. Faye въ его Cours d'Astronomie de l'Ecole Polytechnique, ибо въ этомъ изложеніи на первый планъ выступаетъ самая сущность дѣла и идея способа, а не детали его практическаго приложенія.

Faye въ своемъ Cours d'Astronomie даетъ и примѣръ вычисленія орбиты кометы по выведеннымъ въ предыдущихъ §§ формуламъ, не приводя ихъ предварительно къ наиболѣе простому и удобному виду, для вычисленій, ибо тогда эти формулы утрачиваютъ свою непосредственную наглядность.

Faye беретъ комету 1769 года, мы приводимъ этотъ примѣръ въ томъ видѣ, какъ онъ данъ въ указанномъ сочиненіи, согласовавъ лишь обозначенія съ принятыми въ нашемъ изложеніи.

Примѣръ.

Вычисленіе орбиты кометы 1769 года по методѣ Ольберса.

Данныя.

№	Время t	Для кометы		Для земли	
		Долгота α	Широта β	Долгота L	Рад. вектора $\lg R$
1	Sep. 4 14^h0^m	80°56′11″	—17°51′39″	342°42′ 5″	0.003132
2	8 14 0	101 0 54	—22 5 2	346 35 31	0.002665
3	12 14 0	124 19 22	—23 43 55	350 29 20	0.002184

Вычисленіе h.

$\lg \operatorname{tg} \beta_2$	$\bar{1}.60824\, n$	$\lg \operatorname{tg} \beta_1$	$\bar{1}.50817\, n$
$\lg \sin (\alpha_1 - L_2)$ . .	$\bar{1}.99875$	$\lg \sin (\alpha_2 - L_2)$ . .	$\bar{1}.95929$
	$\bar{1}.60699\, n$		$\bar{1}.46746\, n$
1-ый членъ . .	-0.404565	2-ой членъ . .	-0.293402
$\lg \operatorname{tg} \beta_3$	$\bar{1}.64309\, n$	$\lg \operatorname{tg} \beta_2$	$\bar{1}.60824\, n$
$\lg \sin (\alpha_2 - L_2)$ . .	$\bar{1}.95929$	$\lg \sin (\alpha_3 - L_2)$ . .	$\bar{1}.82777$
	$\bar{1}.60238\, n$		$\bar{1}.43601\, (n)$
3-ій членъ . .	-0.400295	4-ый членъ .	-0.272900

Числитель	$= -0.111163$	lg	$\bar{1}.04596\, n$
Знаменатель	$= -0.127395$	lg	$\bar{1}.10595\, n$
			$\lg h = \bar{1}.94081$

Вычисленіе радіусовъ векторовъ.

$\lg R_1^2 = 0.006264$	$\lg R_3^2 = 0.004368$
$C_1 = R_1^2 = 1.01453$	$C_3 = R_3^2 = 1.01011$
$\lg 2R_1 = 0.30416$	$\lg 2R_3 = 0.30321$
$\lg \cos (\alpha_1 - L_1)$ . . $\bar{1}.15604$	$\lg \cos (\alpha_3 - L_3)$ . . $\bar{1}.84048$
$\lg B_1 = \bar{1}.46021$	$\lg h$ $\bar{1}.94081$
$B_1 = 0.28854$	$\lg B_3$ 0.08450
	$B_3 = 1.21478$
$\lg \sec \beta_1 = 0.02145$	$\lg \sec^2 \beta_3 = 0.07674$
$\lg \sec^2 \beta_1 = 0.04290 = \lg A_1$	$\lg h^2 = \bar{1}.88162$
	$\lg A_3 = \bar{1}.95836$
	$A_3 = 0.90857$

$$r_1^2 = 1.01453 - [\bar{1}.46021]\, \rho_1 + [0.04290]\, \rho_1^2 \text{ . . . . } \quad (\mathrm{I})$$

$$r_3^2 = 1.01011 - [0.08450]\, \rho_1 + [\bar{1}.95836]\, \rho_1^2 \text{ . . . . } \quad (\mathrm{III})$$

Вычисленіе хорды.

$\lg 2R_1$ . .	0.30416	$\lg 2R_3 =$	0.30321	$\lg 2h$.	0.24184
$\lg R_3$ . .	0.00218	$\lg \cos (\alpha_1 - L_3) =$	$\bar{3}.89267\, (n)$	$\lg \cos (L_3 - L_1)$ . .	$\bar{1}.86138$
$\lg \cos (L_3 - L_1)$ . .	$\bar{1}.99598$		$\bar{2}.19588\, (n)$		0.10322
	0.30232		-0.01570		1.26828
	2.00596				

$$
\begin{array}{rl}
\lg 2R_1 \ldots & 0.30416 \\
\lg\cos(\alpha_3 - L_1) \ldots & \bar{1}.89427\,n \\
\lg h \ldots & \bar{1}.94081 \\ \hline
& 0.13924\,n \\
& -1.37799 \\
& -2.00596 \\
& \\
& \\
r_1^2 + r_3^2 \ldots\ldots & +2.02464 \\
c^2 = \ldots\ldots & 0.01868
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\ \\
+0.01570 \\
+1.37799 \\ \hline
+1.39368 \\
-1.50332 \\ \hline
-0.10964\,\rho_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lg 2h \ldots & 0.24184 \\
\lg\operatorname{tg}\beta_1 \ldots & \bar{1}.50817\,(n) \\
\lg\operatorname{tg}\beta_3 \ldots & \bar{1}.64309\;\;n \\ \hline
& \bar{1}.39310 \\
& 0.24723 \\
& -1.26828 \\
& -0.24723 \\ \hline
& -1.51551 \\
& 2.01240 \\ \hline
& 0.49689\,\rho_1^2
\end{array}
$$

Такимъ образомъ уравненія задачи суть:

$$r_1^2 = 1.01453 - [\bar{1}.46021]\,\rho_1 + [0.04290]\,\rho_1^2$$

$$r_3^2 = 1.01011 - [0.08450]\,\rho_1 + [\bar{1}.95836]\,\rho_1^2$$

$$c^2 = 0.01868 - [\bar{1}.03997]\,\rho_1 + [\bar{1}.69626]\,\rho_1^3$$

и уравненіе Эйлера:

$$C_4 = (r_1 + r_3 + c)^{\frac{3}{2}} - (r_1 + r_2 - c)^{\frac{3}{2}}$$

причемъ величина C_4 есть: $6K\cdot(t_3 - t_1)$.

Но для вычисленія по таблицамъ Энке надо величину

$$\frac{1}{3}\,C_4 = 2K\cdot(t_3 - t_1); \qquad t_3 - t_1 = 8.$$

$$\lg 2K = \bar{2}.53661$$

$$\lg 8 = 0.90309$$

$$\lg 2K(t_3 - t_1) = \bar{1}.43970 = \lg\frac{1}{3}\,C_4.$$

Послѣдовательныя приближенія.

За исходное значеніе $r_1 + r_3$ беремъ 1.8 и, пользуясь таблицею Энке, расчисляемъ длину хорды c соотвѣтствующей при такой суммѣ промежутку $t_3 - t_1 = 8.00$ сутокъ. Это вычисленіе дѣлается такъ: $r_1 + r_3 = 1.8$

$$
\begin{array}{rl}
\lg r_1 + r_3 = & 0.25527 \\
\frac{1}{2}\lg(r_1 + r_3) = & 0.12764 \\ \hline
\lg(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}} = & 0.38291 \\
\lg\frac{1}{3}\,C_4 = & \bar{1}.43970 \\ \hline
\lg\eta = & \bar{1}.05679 \\
\eta = & 0.11397 \\
\lg\varepsilon = & 0.000236.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\lg\varepsilon = & 0.00024 \\
\lg\frac{1}{3}\,C_4 = & \bar{1}.43970 \\
\frac{1}{2}\lg(r_1 + r_3)^{-1} = & \bar{1}.87236 \\ \hline
\lg c = & \bar{1}.31230 \\
\lg c^2 = & \bar{2}.62460 \\
c^2 = & 0.042133
\end{array}
$$

Уравненіе (3) будетъ при этомъ значеніи c^2

$$0 = -0.023453 - [\bar{1}.03997]\,\rho_1 + [\bar{1}.69626]\,\rho_1^2.$$

Для рѣшенія этого уравненія поступимъ такъ, пусть данное уравненіе есть

$$a\rho^2 - b\rho - c = 0$$

такъ что

$$\rho = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{b\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4ac}{b^2}}\right)}{2a}$$

ибо намъ надо только бо́льшій положительный корень.

Дѣлаемъ

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4ac}{b^2}$$

тогда

$$\rho = \frac{b\cdot(1 + \sec\varphi)}{2a} = \frac{b}{a}\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\begin{array}{rlrl}
\lg 4 &= 0.60206 & \lg b &= \bar{1}.03997 \\
\lg a &= \bar{1}.69626 & \lg \frac{1}{a} &= 0.30374 \\
\lg c &= \bar{2}.37020 & \lg\cos^2\frac{1}{2}\varphi &= \bar{1}.86118 \\
\lg \frac{1}{b^2} &= \underline{1.92006} & \lg\sec\varphi &= \underline{0.34411} \\
2\lg\operatorname{tg}\varphi &= 0.58858 & \lg\rho_1 &= 1.54900 \\
\lg\operatorname{tg}\varphi &= 0.29429 & & \\
\varphi &= 63^\circ\ 4'\,40'' & & \\
\frac{1}{2}\varphi &= 31\ \ 32\ \ 20 & &
\end{array}$$

По этой величинѣ ρ_1 вычисляемъ по фор. (I) (III)

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1.02504 \\
r_3 &= \underline{1.83307} \\
r_1 + r_3 &= 1.85811.
\end{aligned}$$

Это значеніе $r_1 + r_3 = 1.85811$ и принимаемъ за 2-ое предположеніе

$$2) \qquad r_1 + r_3 = 1.85811.$$

Продѣлавъ вновь выше указанное вычисленіе съ этимъ значеніемъ $r_1 + r_3$, Faye получаетъ:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1.02373 \\
r_3 &= \underline{0.83494} \\
r_1 + r_3 &= 1.85867
\end{aligned}$$

Если принять эту величину и надъ нею повторить вычисленіе, то получится вновь таже самая сумма, поэтому окончательно Faye полагаетъ:

$$r_1 = 1.023716$$
$$r_3 = 0.83496$$
$$c = 0.201983$$
$$\lg \rho_1 = \bar{1}.54210.$$

Послѣ чего онъ вычисляетъ элементы орбиты по тѣмъ формуламъ, которыя уже неоднократно примѣнены въ первой бесѣдѣ нашей и получаетъ такіе элементы:

Комета 1769 года.

Время прохожд. черезъ перигелій: . .	1769 г. Окт. 7-го 10^h
Разстояніе перигелія	$q = 0.11736$
Долгота перигелія	145°17′
Долгота узла	175°19′
Наклонность	41°24′

Для сравненія онъ приводитъ элементы опредѣленные Лежандромъ по совокупности многихъ наблюденій.

Элементы Лежандра.

Время прохожд. перигелія	1769 г. Окт. 7-го $12^h 44^m$
Разстояніе перигелія	$q = 0.1230401$
Долгота перигелія	144°11′32″
Долгота восход. узла	175 3 40
Наклонность	40 47 56.

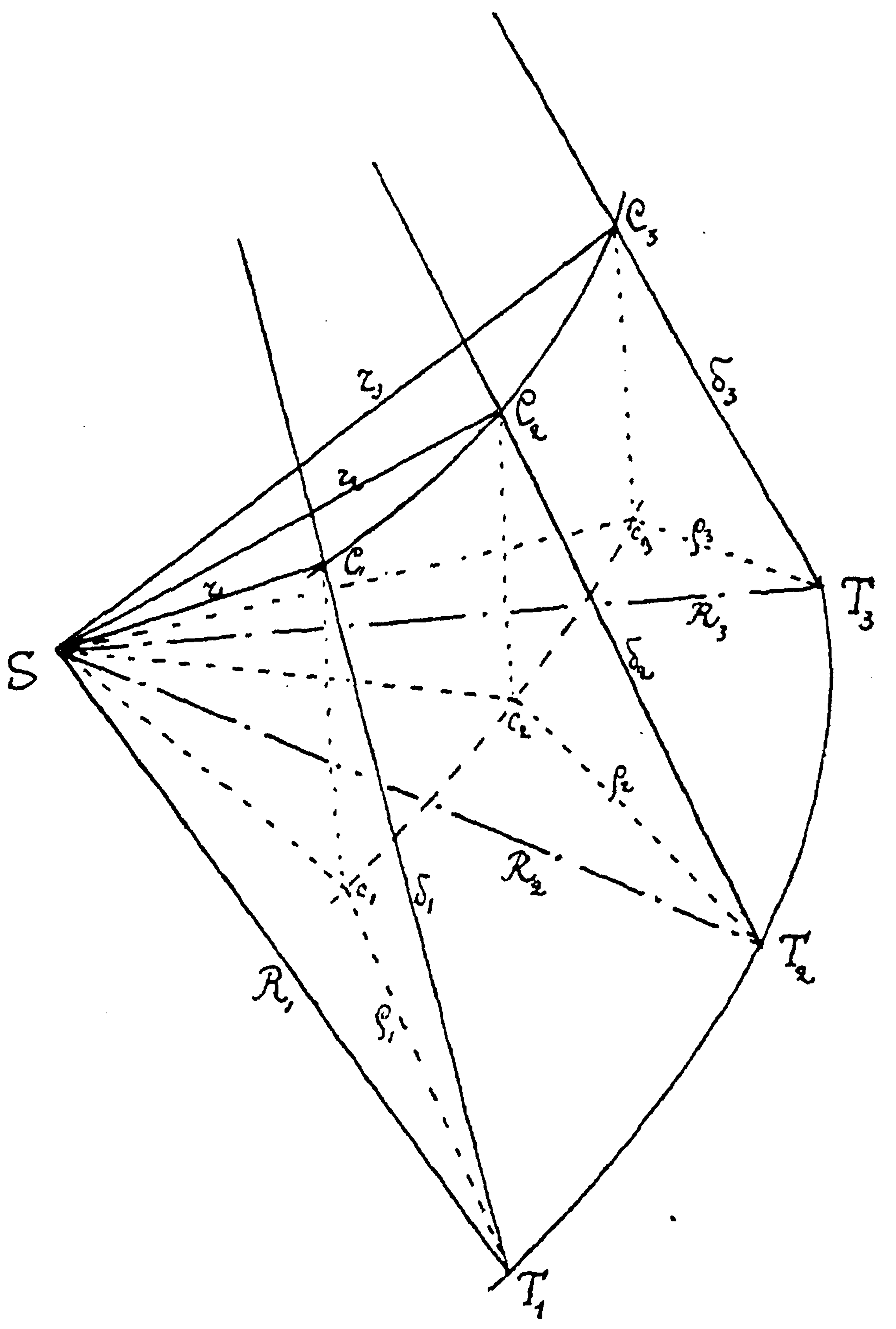
Обыкновенно для вычисленія орбиты по методѣ Ольберса исходя изъ тѣхъ-же уравненій развиваютъ иныя формулы болѣе удобныя для численныхъ вычисленій, о чемъ отсылаемъ къ сочиненію Bauschinger'a Bahnbestimmung, или къ сочиненію F. Tisserand. Leçons sur la determination des orbites.

Бесѣда 4.

Метода Гаусса опредѣленія эллиптической орбиты по тремъ наблюденіямъ.

§ 1. Опредѣленіе эллиптической орбиты, ни одинъ изъ элементовъ которой неизвѣстенъ, если почему либо нельзя воспользоваться методою Лапласа, представляетъ значительно бо́льшія трудности нежели орбиты параболической. Главная причина этого въ томъ, что число неизвѣстныхъ элементовъ *однимъ* больше, а вмѣстѣ съ тѣмъ, то уравненіе, которое связывало *независимо* отъ элементовъ хорду съ двумя радіусами векторами и временемъ (теорема Эйлера) или эту-же хорду съ среднимъ радіусомъ векторомъ (теорема Ньютона), *отпадаетъ*, между тѣмъ это уравненіе и въ методѣ Ольберса и въ методѣ Ньютона имѣло весьма существенное значеніе.

Черт. 19.



Чтобы яснѣе показать какимъ образомъ преодолѣлъ эти трудности Гауссъ, мы расчленимъ изложеніе его методы на рѣшеніе отдѣльныхъ вопросовъ изъ которыхъ она состоитъ.

Сохраняя тѣ-же обозначенія, которыя сдѣланы при изложеніи методы Ольберса, и, сдѣлавъ тотъ же самый чертежъ, мы видимъ что геометрически задача ставится такъ: надо пересѣчь прямыя T_1C_1, T_2C_2, T_3C_3, положеніе которыхъ въ пространствѣ задано, плоскостью проходящей черезъ центръ солнца S такъ, чтобы, проведя черезъ полученныя точки C_1, C_2, C_3 эллипсъ, коего фокусъ въ точкѣ S, получить такіе секторы

C_1SC_2, C_2SC_3 которые планета, двигаясь по сказанному эллипсу по законамъ Кеплера, проходитъ въ промежутки времени равныя наблюденнымъ.

При изложеніи методы Ольберса, мы видѣли, что условіе, чтобы три точки C_1, C_2, C_3 лежали въ одной плоскости съ солнцемъ даетъ между величинами ρ_1, ρ_2, ρ_3 *три* соотношенія содержащія кромѣ этихъ трехъ неизвѣстныхъ еще отношенія площадей треугольниковъ C_2SC_3 и C_1SC_3 къ C_1SC_2, эти отношенія также неизвѣстны.

1) Когда орбита параболическая, то можно было одно изъ этихъ отношеній замѣнить его приближеннымъ значеніемъ $\frac{t_2-t_1}{t_3-t_2}$, оказывается что здѣсь такая замѣна не ведетъ къ цѣли, а надо съ *самого начала ввести болѣе близкія къ истиннымъ значенія этихъ отношеній,* причемъ оказывается, что они выражаются черезъ промежутки времени и радіусъ векторъ r_2 при второмъ наблюденіи, такимъ образомъ для этихъ неизвѣстныхъ составится еще *два* уравненія. Наконецъ геометрическая связь между r_1, r_2, r_3 и ρ_1, ρ_2, ρ_3 доставляетъ еще *три* уравненія между этими величинами, такимъ образомъ между *восемью* неизвѣстными

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\quad r_1,\ r_2,\ r_3,\quad \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}},\quad \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{12}}$$

составится *восемь* уравненій. Найдя изъ этихъ уравненій величины r_1, r_2, r_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 получимъ и положеніе въ пространствѣ точекъ $C_1\,C_2\,C_3$, а когда эти положенія будутъ опредѣлены, то найдутся и элементы эллипса, черезъ эти точки проходящаго.

2) По второму закону Кеплера для планеты масса коей ничтожна мала, площадь описываемая въ теченіе времени t, выражается формулою

$$2S = K \cdot t \cdot \sqrt{p} = K \cdot t \cdot \sqrt{a(1-e^2)}$$

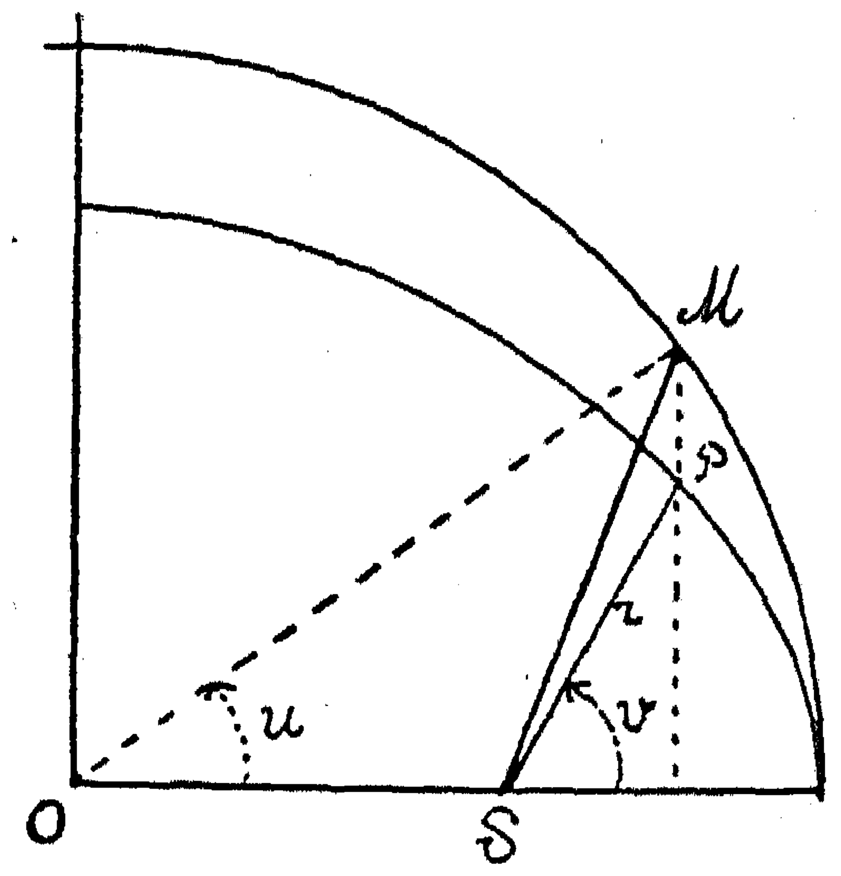
съ другой стороны въ эллиптическомъ движеніи таже площадь можетъ быть выражена черезъ эксцентрическую аномалію, если какъ площадь, такъ и время считать отъ момента прохожденія черезъ перигелій. Оказывается, что если извѣстно *два* положенія свѣтила и промежутокъ времени между ними, то элементы эллипса опредѣляются, т. е. находится положеніе перигелія и большая ось.

3) Для найденной эллиптической орбиты можно вычислить отношеніе площадей секторовъ къ площадямъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ и тогда, принявъ эти исправленныя значенія, продѣлать вычисленіе вновь для полученія болѣе точныхъ результатовъ.

§ 2. Мы начнемъ съ выясненія сказанного въ п. 2, подобно тому, какъ мы дѣлали и для параболической орбиты.

Припомнимъ сперва главнѣйшія формулы эллиптическаго движенія:

Черт. 20.



$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$r = a - ex = a - ae\cos u \quad \ldots \ldots (2)$$

$$r\cos v = a\cos u - ae \quad \ldots \ldots (3)$$

Изъ формулъ (2) и (3) слѣдуетъ:

$$r(1+\cos v) = a(1-e)(1+\cos u)$$

$$r(1-\cos v) = a(1+e)(1-\cos u)$$

или иначе:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{r}\cdot\cos\frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1-e)}\cos\frac{1}{2}u \\ \sqrt{r}\;\;\sin\frac{1}{2}v &= \sqrt{a(1+e)}\sin\frac{1}{2}u \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Наконецъ имѣемъ уравненіе Кеплера:

$$Ka^{-\frac{3}{2}}t = u - e\sin u \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Итакъ положимъ что дано *два* мѣста планеты т. е. извѣстны 1) радіусы векторы r_1 и r_2, 2) разность $v_2 - v_1 = 2f$ истинныхъ аномалій и 3) промежутокъ времени $t_2 - t_1$ а значитъ и $\tau_1 = K(t_2 - t_1)$, требуется опредѣлить элементы эллипса.

Обозначимъ черезъ s отношеніе площади сектора къ площади треугольника и примемъ за неизвѣстныя:

$$v_1 + v_2, \quad u_1 + u_2, \quad u_2 - u_1, \quad a, \quad e, \quad s,$$

ясно, что воспользовавшись уравненіемъ

$$v_2 - v_1 = 2f \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

мы какъ только будетъ найдено $v_1 + v_2$ найдемъ и v_1 и v_2.

Мы сейчасъ же можемъ написать слѣдующія уравненія:

$$sr_1r_2\sin 2f = \tau\sqrt{a(1-e^2)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

$$u_2 - u_1 - 2e \cdot \sin\frac{u_2 - u_1}{2} \cos\frac{u_2 + u_1}{2} = \tau a^{-\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\sqrt{r_1} \sin\frac{v_1}{2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1+e} \sin\frac{u_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\sqrt{r_1} \cos\frac{v_1}{2} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1-e} \cos\frac{u_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\sqrt{r_2} \sin\frac{v_2}{2} = \sqrt{a} \quad \sqrt{1+e} \sin\frac{u_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\sqrt{r_2} \cos\frac{v_2}{2} = \sqrt{a} \quad \sqrt{1-e} \cos\frac{u_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Какъ видно получается *семь* уравненій (7—13) съ семью неизвѣстными.

Рѣшеніе этихъ уравненій и составляетъ первую задачу.

Изъ послѣднихъ четырехъ уравненій сейчасъ-же слѣдуютъ такія:

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin f = a\sqrt{1-e^2} \sin\frac{u_2 - u_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos f = a \cos\frac{u_2 - u_1}{2} - ae\cos\frac{u_2 + u_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$r_1 + r_2 = 2a - 2ae\cos\frac{u_1 + u_2}{2} \cos\frac{u_2 - u_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Сдѣлавъ для краткости письма:

$$\frac{u_2 - u_1}{2} = g \qquad \frac{u_2 + u_1}{2} = G$$

получаемъ изъ уравненій (8) и (14)

$$1 = 2\frac{\sqrt{a}}{\tau} s \sqrt{r_1 r_2} \cos f \sin g \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Умноживъ уравненіе (15) на $2\cos\frac{u_2 - u_1}{2}$ и вычтя изъ (16) имѣемъ

$$r_1 + r_2 = 2a\sin^2 g + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos f \cos g \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Замѣнивъ въ уравненіи (9) $e\cos\frac{u_2 + u_1}{2}$ его величиною слѣдующею изъ уравненія (15) получимъ:

$$2g - \sin 2g + \frac{2}{a}\sqrt{r_1 r_2}\cos f \sin g = \frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

Пользуясь уравненіемъ (17), уравненіе (19) напишемъ такъ

$$2g - \sin 2g = \frac{\tau}{a^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{1}{s}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (19')$$

Въ силу того-же уравненія (17) имѣемъ:

$$\frac{\tau}{\sqrt{a}} = 2s\sqrt{r_1 r_2}\cos f \sin g$$

и слѣдовательно, исключая a изъ уравненія (19'), получимъ:

$$\tau^2 (2g - \sin 2g) = (2s\sqrt{r_1 r_2}\cos f \sin g)^3 \left(1 - \frac{1}{s}\right)$$

или иначе:

$$1 - \frac{1}{s} = \frac{\tau^2}{s^3 (2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)^3} \cdot \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \quad \ldots \ldots \ldots (20)$$

Совершенно также, воспользовавшись тѣмъ же уравненіемъ (17), изъ уравненія (18) имѣемъ:

$$r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f \cos g = \frac{1}{2}\,\frac{\tau^2}{s^2 r_1 r_2 \cos^2 f} \quad \ldots \ldots (21)$$

Уравненія (20) и (21) содержатъ только неизвѣстныя s и g. Эти уравненія можно написать такъ:

$$\frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = \frac{(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)^3}{\tau^2} \cdot (s^3 - s^2)$$

и

$$s^2 = \frac{\tau^2}{2 r_1 r_2 \cos^2 f (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\cos f \cdot \cos g)}.$$

Полагая затѣмъ для сокращенія:

$$\frac{\tau^2}{(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f)^3} = m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

и

$$\frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos f} - \frac{1}{2} = l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23)$$

приведемъ эти два уравненія къ слѣдующему виду:

$$s^3 - s^2 = m \cdot \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$s^2 = \frac{m}{l + \sin^2 \frac{g}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

въ которомъ ихъ и разсматриваетъ Гауссъ.

Не вдаваясь въ подробности рѣшенія этихъ двухъ уравненій, которое можно-бы производить и такъ — задаться величиною s, которая всегда близка къ 1, изъ уравненія (25) находимъ g, подставляемъ въ (24) находимъ s, по которому изъ (25) опять находимъ g и т. д. пока два полученныхъ значенія s и g не будутъ въ точности удовлетворять обоимъ уравненіямъ. Это вычисленіе ведется на 7 знаковъ.

Когда величины s и g будутъ найдены то уравненіе (17) даетъ a, уравненіе (14) даетъ $p = a\sqrt{1 - e^2}$ а слѣдовательно и e, уравненіе (15) даетъ G, послѣ чего найдутся u_1 и u_2, по нимъ, по уравненію (5), найдутся v_1 и v_2. Затѣмъ по уравненію (6), подставляя вмѣсто u его величину u_1 или u_2 найдемъ и время, протекшее отъ момента прохожденія черезъ перигелій до перваго или второго положенія планеты, а значитъ и моментъ прохожденія черезъ перигелій.

Такимъ образомъ уравненія (24) и (25) и рѣшаютъ первую задачу.

§ 3. Составимъ теперь выраженія *отношенія площадей секторовъ къ площадямъ треугольниковъ*, для чего поступимъ совершенно также какъ въ § 5 бесѣды третьей.

Итакъ положимъ:

$$K(t_2 - t_1) = \tau_1; \qquad K(t_3 - t_2) = \tau_2; \qquad K(t_3 - t_1) = \tau_3$$

и принимая астрономическую единицу времени, имѣемъ уравненія движенія

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}; \qquad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}; \qquad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}$$

считая время отъ момента t_2 имѣемъ для момента $t_1 = t_2 - \tau_1$ по Тейлорову ряду:

$$x_1 = x_2 - \tau_1 x_2' + \frac{\tau_1^2}{2} x_2'' - \frac{\tau_1^3}{6} x_2''' + \frac{\tau_1^4}{24} x_2^{IV} + \cdots$$

$$y_1 = y_2 - \tau_1 y_2' + \frac{\tau_1^2}{2} y_2'' - \frac{\tau_1^3}{6} y_2''' + \frac{\tau_1^4}{24} y_2^{IV} + \cdots$$

Совершенно также для момента $t_3 = t_2 + \tau_2$

$$x_3 = x_2 + \tau_2 x'_2 + \frac{\tau_2^2}{2} x_2'' + \frac{\tau_2^3}{6} x_3''' + \frac{\tau_2^4}{24} x_2^{IV} + \dots$$

$$y_3 = y_2 + \tau_2 y_2' + \frac{\tau_2}{2} y_2'' + \frac{\tau_2^3}{6} y_3''' + \frac{\tau^4}{24} y_2^{IV} + \dots$$

На основаніи уравненій движенія имѣемъ:

$$x_2'' = -\frac{x_2}{r_2^3} \qquad y_2'' = -\frac{y_2}{r_2^3}$$

$$x_2''' = -\frac{1}{r_2^3} x_2' + \frac{3x_2}{r_2^4} r_2' \qquad y_2''' = -\frac{1}{r_2^3} x_2' + \frac{3x_2}{r_2^4} r_2'$$

$$x_2^{IV} = \frac{6}{r_2^4} r_2' x_2' + \dots \qquad y_2^{IV} = \frac{6}{r_2^4} r_2' x_2' + \dots$$

Подставляя эти величины въ предыдущія уравненія получимъ

$$x_1 = a_1 x_2 - b_1 x_2' \qquad y_1 = a_1 y_2 - b_1 y_2'$$

$$x_3 = a_3 x_2 + b_3 x_2' \qquad y_3 = a_3 y_2 + b_3 y_2'$$

гдѣ

$$a_1 = 1 - \frac{\tau_1^2}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots$$

$$b_1 = \tau_1 - \frac{\tau_1^3}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^4}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} \; r_2' + \dots$$

$$a_3 = 1 - \frac{\tau_2^2}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^4} \; r_2' + \dots$$

$$b_3 = \tau_2 - \frac{\tau_2^3}{2} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^4}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} \cdot r_2' + \dots$$

Составляя выраженія проекцій площадей треугольниковъ на плоскость xy имѣемъ:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = b_1 (x_2 y_2' - x_2' y_2)$$

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = b_3 (x_2 y_2' - x_2' y_2)$$

$$x_1 y_3 - y_1 x_3 = (a_1 b_3 + b_1 a_3)(x_2 y_2' - x_2' y_2).$$

По закону площадей

$$x_2 y_2' - x_2' y_2 = \sqrt{p} \cdot \cos \overline{(nz)}$$

гдѣ n есть направленіе нормали къ плоскости орбитъ, вмѣстѣ съ тѣмъ

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \Delta_{12} \cos \widehat{(nz)}$$

и

$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = \Delta_{23} \cos \widehat{(nz)}$$

$$x_1 y_3 - y_1 x_3 = \Delta_{13} \cos \widehat{(nz)}$$

по подстановкѣ и сокращеніи имѣемъ:

$$\Delta_{12} = \tau_1 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_1^2}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} - \frac{\tau_1^3}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} r_2' \ldots \right]$$

$$\Delta_{23} = \tau_2 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_2^2}{6} \cdot \frac{1}{r_2^3} + \frac{\tau_2^3}{4} \; \frac{1}{r_2^4} r_2' + \ldots \right]$$

$$\Delta_{13} = \tau_3 \sqrt{p} \left[1 - \frac{\tau_3^2}{6} \cdot \frac{1}{r_3^2} + \frac{\tau_3^2 (\tau_2 - \tau_1)}{4} \cdot \frac{1}{r_2^4} r_2' + \ldots \right].$$

Откуда слѣдуетъ для отношеній:

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}} = \frac{\tau_2}{\tau_3} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_2^2}{r_2^3} + \frac{1}{4} \frac{\tau_1 (\tau_3 \tau_1 - \tau_2^2)}{r_2^4} r_2' + \ldots \right] \quad \ldots (26)$$

$$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}} = \frac{\tau_1}{\tau_3} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_2 (\tau_3 \tau_2 - \tau_1^2)}{r_2^4} r_2' + \ldots \right] \quad \ldots (26')$$

$$\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{23}} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{r_2^3} - \frac{1}{4} \frac{\tau_2^3 + \tau_1^3}{r_2^4} \cdot r_2' + \ldots \right] \quad \ldots (26'')$$

§ 4. Имѣя выраженія отношеній площадей треугольниковъ мы можемъ перейти къ п. 1 и составить окончательныя уравненія въ рѣшаемой задачѣ.

При изложеніи методы Ольберса мы получили слѣдующія уравненія:

$$n_3 \rho_3 \cos \alpha_3 - \rho_2 \cos \alpha_2 + n_1 \rho_1 \cos \alpha_1 = - n_3 R_3 \cos L_3 + R_2 \cos L_2 - n_1 R_1 \cos L_1$$

$$n_3 \rho_3 \sin \alpha_3 - \rho_2 \sin \alpha_2 + n_1 \rho_1 \sin \alpha_1 = - n_3 R_3 \sin L_3 + R_2 \sin L_2 - n_1 R_1 \sin L_1$$

$$n_3 \rho_3 \operatorname{tg} \beta_3 - \rho_2 \operatorname{tg} \beta_2 + n_1 \rho_1 \operatorname{tg} \beta_1 = 0$$

гдѣ положено:

$$n_3 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{13}} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{13}}.$$

Изъ этихъ уравненій слѣдуютъ такія:

$$n_1 \rho_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1)$$

$$= \rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - n_1 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) + R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - n_3 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3)$$

$$n_3 \rho_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) \qquad (27)$$

$$= \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + n_1 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) - R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3)$$

и

$$\rho_2 = a_2 + b_2 n_1 + c_2 n_3$$

причемъ:

$$\begin{aligned} N \cdot a_2 &= [\quad \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_2)]\, R_2 \\ N \quad b_2 &= [-\operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_1) + \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_1)]\, R_1 \\ N \quad b_3 &= [-\operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_3) + \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_3)]\, R_3 \end{aligned} \quad . \; . \; . \; (28)$$

и

$$N = \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Эти формулы показываютъ, что какъ только n_1 и n_3 будутъ опредѣлены, то найдется ρ_2 и ρ_1 и ρ_3.

Изъ фор. (26) слѣдуетъ, что, когда промежутки τ_1 и τ_2 близки къ равенству, то приближенно будетъ:

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad \text{и} \quad n_3 + n_1 = 1 + \frac{\tau_1 \tau_2}{2 r_2^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29)$$

Гауссъ полагаетъ

$$\frac{n_3}{n_1} = P \quad \text{и} \quad n_3 + n_1 = 1 + \frac{Q}{2 r_2^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

принимая P и Q за новыя неизвѣстныя, коихъ приближенныя значенія суть: $\frac{\tau_3}{\tau_1}$ и $\tau_1 \tau_3$.

Изъ фор. 30 слѣдуетъ

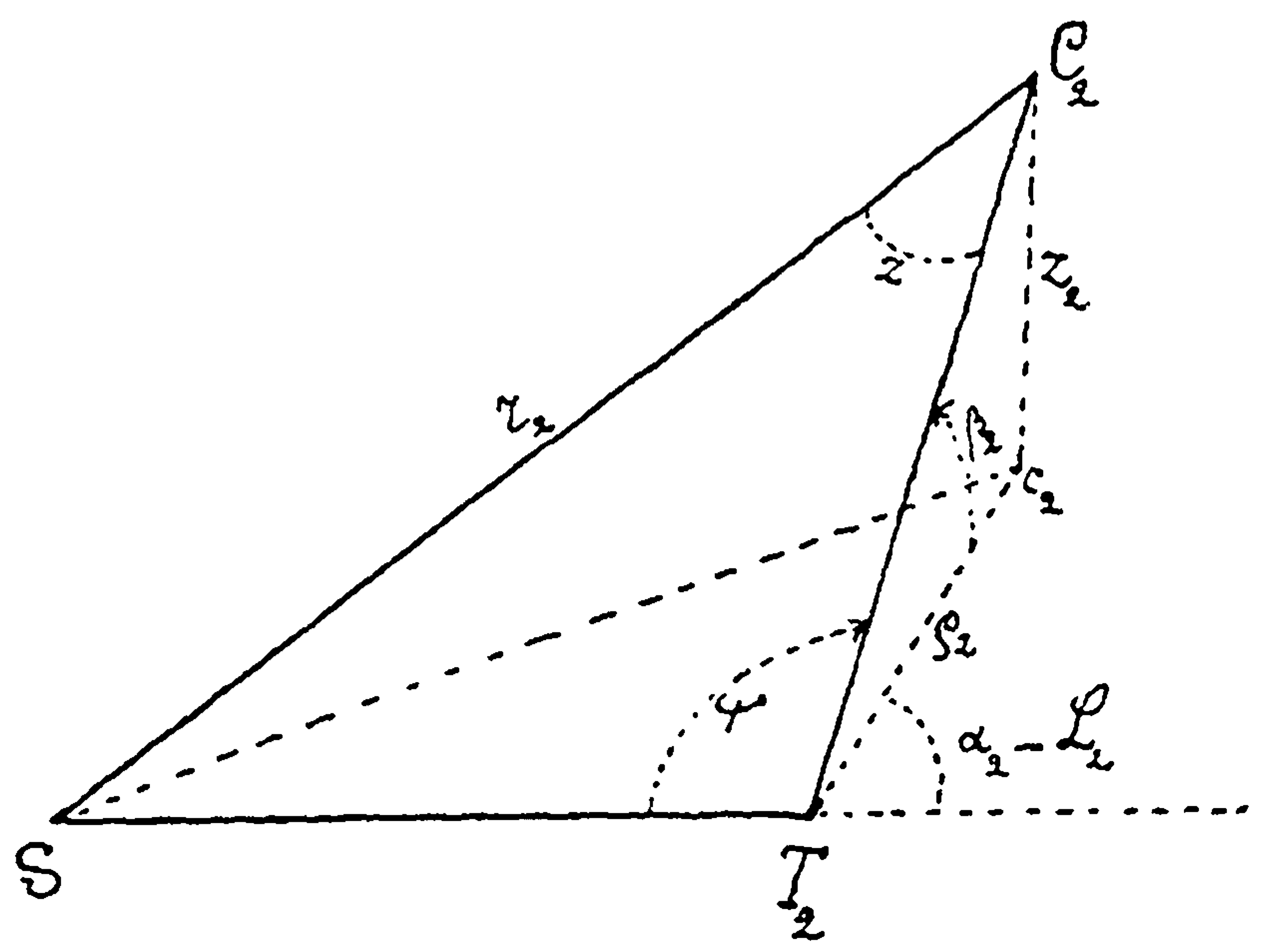
$$n_3 = n_1 P \quad \text{и} \quad n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right) : (1 + P)$$

и величина ρ_2 напишется такъ:

$$\rho_2 = a_2 + \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P}\left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right) = A + \frac{B}{r_2^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

Разсмотримъ теперь треугольникъ, коего вершины суть центръ солнца S, мѣсто земли и мѣсто планеты при второмъ наблюденіи, и проекцію этого треугольника на плоскость эклиптики, мы получимъ тогда соотношеніе:

Черт. 21.



$$r_2^2 = R_2^2 + 2R_2\,\rho_2 \cos(\alpha_2 - L_2) + \rho_2^2 \sec^2 \beta_2 \quad (32)$$

въ которое, если подставить вмѣсто ρ_2 его величину (31), то получится уравненіе 8-ой степени для опредѣленія r_2 а именно:

$$r_2^2 = R_2^2 + 2R_2\left(A + \frac{B}{r_2^3}\right)\cos(\alpha_2 - L_2) + \left(A + \frac{B}{r_2^3}\right)^2 \sec^2 \beta_2 \quad . \quad . \quad (33)$$

изъ этого уравненія, принявъ сперва для P и Q ихъ приближенныя величины, что дастъ и приближенныя величины A и B, найдется r_2, по нему по фор. (31) найдемъ ρ_2, по ρ_2 величины ρ_1 и ρ_3, по нимъ r_1 и r_3, по r_1 и r_3 и углу между ними элементы эллипса, по этимъ элементамъ вычислить площади секторовъ и, исправивъ такимъ образомъ величины n_1, n_2, n_3, надо вновь повторить весь разсчетъ и продолжать такое послѣдовательное приближеніе пока вычисляемыя по элементамъ мѣста планеты не совпадутъ въ точности съ наблюденными.

Какъ видно такой процессъ былъ бы чрезмѣрной длинноты и утомительности по тому громадному количеству вычисленій, которое бы потребовалось для его исполненія. Вотъ чтобы этотъ процессъ обойти и сократитить его до *одной* чрезвычайно изящной и простой формулы и нуженъ былъ математическій геній Гаусса.

§ 5. Прежде всего Гауссъ приводитъ уравненіе (33) къ формѣ несравненно болѣе удобной для рѣшенія, нежели та, которая получилась бы непосредственно. Онъ поступаетъ такъ: обозначивъ черезъ ψ уголъ T_2 въ треугольникѣ C_2ST_2 и черезъ z уголъ при вершинѣ C_2 имѣемъ во первыхъ:

$$r_2^2 = R_2^2 - 2R_2\,\rho_2 \sec\beta_2 \cos\psi + \rho_2 \sec^2 \beta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

что по сличенію съ фор. 33 даетъ

$$\cos\psi = -\cos(\alpha_2 - L_2)\cos\beta_2.$$

Изъ фор. 32 имѣемъ

$$\rho_2 \sec\beta_2 = R_2 \cos\psi \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2\psi}$$

и уравненіе (31) даетъ:

$$a_2 + \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P}\left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right) = (R_2 \cos\psi \pm \sqrt{r_2^2 - R_2^2 \sin^2\psi}) \cos\beta_2.$$

Тотъ же треугольникъ SC_2T даетъ:

$$r_2 = \frac{R_2 \sin\psi}{\sin z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Полагая

$$\frac{b_2 + c_2 P}{1 + P} = A_1$$

$$A_1 + a_2 = k_0 \cos\beta_2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} A_1 Q = l_0 \cos\beta_2 \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

получаемъ:

$$k_0 - l_0 \frac{\sin^3 z}{R_2^2 \sin^3\psi} = R_2 \cos\psi \pm \frac{R_2 \sin\psi \cos z}{\sin z}$$

или

$$(k_0 - R_2 \cos\psi) \sin z \pm R_2 \sin\psi \cos z = \frac{l_0 \sin^4 z}{R_2^3 \sin^3\psi}.$$

Полагая затѣмъ:

$$k_0 - R_2 \cos\psi = N_1 \cos q$$

$$R_2 \sin\psi = N_1 \sin q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35')$$

$$\frac{l_0}{N_1 R_2^3 \sin^3\psi} = M$$

получаемъ знаменитое уравненіе Гаусса:

$$M \sin^4 z = \sin(z \pm q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Найдя изъ этого уравненія z, по фор. (34) находимъ r_2, затѣмъ по фор. (31) ρ_2, по нему ρ_1 и ρ_3 по фор. (27).

Имѣя величины $\rho_1\ \rho_2\ \rho_3$ вычисляемъ геліоцентрическія координаты по формуламъ:

$$x_i = r_i \cos\theta_i \cos\lambda_i = \rho_i \cos\alpha_i + R_i \cos L_i$$

$$y_i = r_i \cos\theta_i \sin\lambda_i = \rho_i \sin\alpha_i + R_i \sin L_i \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

$$z_i = r_i \sin\theta_i = \rho_i \operatorname{tg}\beta_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Замѣтимъ что эти формулы можно написать и такъ:

$$x_i = r_i \cos\theta_i \cos(\lambda_i - L_i) = R_i + \rho_i \cos(\alpha_i - L_i)$$

$$y_i = r_i \sin\theta_i \sin(\lambda_i - L_i) = \rho_i \sin(\alpha_i - L_i) \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

$$z_i = r_i \sin\theta_i = \rho_i \operatorname{tg}\beta_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Имѣя геліоцентрическія координаты λ_i и θ_i находимъ по фор. (6) бесѣды 3-ей наклонность i и долготу узла N, а именно:

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\sin(\lambda_1 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_3}{\sin(\lambda_3 - N)}$$

и . . . (39)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} - N\right) = \operatorname{tg}\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2}\,\frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_3)}$$

Затѣмъ по формуламъ

$$\operatorname{tg} c_1 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_1 - N)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg} c_2 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_2 - N)}{\cos i}$$

$$\operatorname{tg} c_3 = \frac{\operatorname{tg}(\lambda_3 - N)}{\cos i}$$

находимъ аргументы широты $c_1\ c_2\ c_3$ послѣ чего имѣемъ

$$2f_1 = c_2 - c_1; \qquad 2f_2 = c_3 - c_2; \qquad 2f_3 = c_3 - c_1.$$

Зная r_1, r_2, r_3 могли бы согласно сказанному въ § 2 опредѣлить и остальные элементы.

Но Гауссъ даетъ формулы при помощи которыхъ непосредственно находятся исправленныя величины P и Q.

Обозначая черезъ s_1, s_2, s_3 отношенія площадей секторовъ къ соотвѣтствующимъ треугольникамъ, имѣемъ:

$$s_1\,\Delta_{12} = \tau_1\sqrt{p}; \qquad s_2\,\Delta_{23} = \tau_2\sqrt{p}; \qquad s_3\,\Delta_{13} = \tau_3\sqrt{p};$$

вычисливъ затѣмъ по ниже приведеннымъ формуламъ величины m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3

$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f_1)^3}; \qquad m_2 = \frac{\tau_2^2}{(2\sqrt{r_2 r_3}\cos f_2)^3}; \qquad m_3 = \frac{\tau_3^2}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f_3)^3}$$

$$l_1 = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos f_1} - \frac{1}{2}; \qquad l = \frac{r_2 + r_3}{4\sqrt{r_2 r_3}\cos f_2} - \frac{1}{2}; \qquad l_3 = \frac{r_1 + r_3}{4\sqrt{r_1 r_3}\cos f_3} - \frac{1}{2}$$

составляемъ уравненія

$$s_1^3 - s_1^2 = m_1\,\frac{2g_1 - \sin 2g_1}{\sin^3 g_1}$$

. . . . (40)

$$s_1^2 = \frac{m_1}{l_1 + \sin^2\frac{1}{2}g_1}$$

и другія двѣ пары подобныхъ уравненій для s_2 и s_3 и зная, что приближенныя значенія s_1, s_2 и s_3 суть

$$s_1 = 1 + \frac{\tau_1^2}{6r_2^3}; \qquad s_2 = 1 + \frac{\tau_2^2}{6r_2^3}; \qquad s_3 = 1 + \frac{\tau_3^2}{6r_2^3}$$

находимъ болѣе точныя значенія величинъ s_1, s_2, s_3 послѣ чего имѣемъ:

$$n_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3} \cdot \frac{s_3}{s_1} \quad \text{и} \quad n_1 = \frac{\tau_2}{\tau_3} \cdot \frac{s_3}{s_2}$$

$$P = \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot \frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Выраженіе для Q преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$Q = 2r_2^3\,[n_1 + n_3 - 1] = 2r_2^3\left[\frac{\tau_1}{\tau_3}\frac{s_3}{s_1} + \frac{\tau_2}{\tau_3}\frac{s_3}{s_2} - 1\right] = 2r_2^3 \cdot \frac{\tau_1\,\tau_2}{s_1\,s_2}\left[\frac{s_2\,s_3}{\tau_2\,\tau_3} + \frac{s_1\,s_3}{\tau_1\tau_3} - \frac{s_1\,s_2}{\tau_1\tau_2}\right]$$

$$= 2r_2^3 \cdot \frac{\tau_1\,\tau_2}{s_1\,s_2}\,p\left[\frac{1}{\Delta_{23}\Delta_{13}} + \frac{1}{\Delta_{12}\Delta_{13}} - \frac{1}{\Delta_{12}\Delta_{23}}\right] = 2p\,r_2^3\frac{\tau_1\,\tau_2}{s_1\,s_2}\left[\frac{\Delta_{12} + \Delta_{23} - \Delta_{13}}{\Delta_{12}\,\Delta_{23}\,\Delta_{13}}\right].$$

Съ другой стороны имѣемъ уравненія:

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e\cos(c_1 - \omega); \qquad \frac{p}{r_2} = 1 + e\cos(c_2 - \omega); \qquad \frac{p}{r_3} = 1 + e\cos(c_3 - \omega)$$

откуда въ силу извѣстнаго тожества:

$$\cos A \sin(B - C) + \cos B \sin(C - A) + \cos C \sin(A - B) = 0$$

слѣдуетъ:

$$\frac{p}{r_1}\sin(c_3 - c_2) - \frac{p}{r_2}\sin(c_3 - c_1) + \frac{p}{r_3}\sin(c_2 - c_1) =$$

$$= \sin(c_3 - c_2) - \sin(c_3 - c_1) + \sin(c_2 - c_1)$$

$$= \sin 2f_2 - \sin 2f_3 + \sin 2f_1 = \sin 2f_1 + \sin 2f_2 - \sin 2(f_1 + f_2)$$

$$= 2\sin(f_1 + f_2)\,[\cos(f_2 - f_1) - \cos(f_2 + f_1)] = 4\sin f_1 \cdot \sin f_2 \sin f_3$$

слѣдовательно

$$p = \frac{4r_1\,r_2\,r_3 \sin f_1 \sin f_2 \sin f_3}{r_1\,r_2 \sin(c_3 - c_1) - r_1\,r_3 \sin(c_3 - c_1) + r_2\,r_3 \sin(c_3 - c_2)}$$

$$= \frac{\Delta_{12}\,\Delta_{23}\,\Delta_{13}}{2(\Delta_{12} - \Delta_{13} + \Delta_{23})\,r_1\,r_2\,r_3 \cos f_1 \cos f_2 \cos f_3}.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$Q=\frac{\tau_1}{s_1}\frac{\tau_2}{s_2}\frac{r_2^2}{r_1 r_3}\cdot\frac{1}{\cos f_1 \cos f_3 \cos f_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

вмѣстѣ съ тѣмъ мы уже имѣли

$$P=\frac{\tau_1}{\tau_2}\frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

причемъ s_1 и s_2 опредѣляются уравненіемъ (40).

По этимъ значеніямъ P и Q и продѣлываютъ второе приближеніе, которое и бываетъ обыкновенно окончательнымъ.

§ 6. Гауссъ не ограничивается, какъ сдѣлано въ этомъ краткомъ очеркѣ его методы, составленіемъ необходимыхъ уравненій и указаніемъ ихъ рѣшенія, онъ прилагаетъ особенную заботу къ тому чтобы придать формуламъ не только удобнѣйшій для вычисленій видъ, но и такой, чтобы формула давала вычисляемую величину съ надлежащею точностью, чтобы вездѣ былъ контроль, и въ этомъ онъ достигаетъ такого совершенства и изящества, образчиками котораго служитъ выводъ величины Q (фор. 42) или знаменитаго уравненія (36).

Въ началѣ третьяго отдѣла Theoria Motus (§ 78) Гауссъ даетъ нѣкоторыя общія указанія для подобнаго рода преобразованій, а именно:

1) Тожества

$$\sin A \sin(C-B)+\sin B \sin(A-C)+\sin C \sin(B-A)=0$$

$$\cos A \sin(C-B)+\cos B \sin(A-C)+\cos C \sin(B-A)=0$$

Этими двумя тожествами приходится пользоваться при рѣшеніи уравненій и исключеніи неизвѣстныхъ.

2) Если величины p и P опредѣляются уравненіями

$$p \sin(A-P)=a$$

$$p \sin(B-P)=b,$$

то Гауссъ обращаетъ вниманіе, что во всякой формулѣ, содержащей различные углы, считаемые отъ какого либо общаго начала, можно это начало переносить на какой угодно уголъ, поэтому предыдущія формулы можно писать такъ

$$p \sin[(A-H)-(P-H)]=a$$

$$p \sin[(B-H)-(P-H)]=b$$

и тогда изъ нихъ слѣдуютъ такія:

$$p \sin(B-A)\sin(P-H) = b\sin(A-H) - a\sin(B-H)$$
$$p \sin(B-A)\cos(P-H) = b\cos(A-H) - a\cos(B-H)$$

гдѣ H какой угодно уголъ, по этимъ формуламъ и находятся p и P, причемъ для простоты вычисленія выгодно брать или $H=A$ или $H=B$ или $H=\frac{1}{2}(A+B)$, для всѣхъ этихъ случаевъ Гауссъ приводитъ и окончательныя удобнѣйшія для логариѳмическаго вычисленія формулы.

3) Совершенно также для нахожденія p и P опредѣляемыхъ уравненіями:

$$p\cos(A-P) = a$$
$$p\cos(B-P) = b.$$

Гауссъ рекомендуетъ формулы

$$p\sin(B-A)\sin(H-P) = -b\cos(H-A) + a\cos(H-B)$$
$$p\sin(B-A)\cos(H-P) = \quad b\sin(H-A) - a\sin(H-B)$$

причемъ опять таки удобно брать или $H=A$ или $H=B$ или $H=\frac{1}{2}(A+B)$.

§ 7. Не входя въ подробности этихъ преобразованій и не приводя формулъ къ удобнѣйшему для вычисленій по логариѳмамъ виду, сведемъ ихъ въ той послѣдовательности какъ ими пришлось бы пользоваться.

а) Непосредственныя наблюденія доставляютъ обыкновенно склоненіе и прямое восхожденіе планеты.

По извѣстнымъ формуламъ сферической астрономіи вычисляютъ широты и долготы планеты въ моменты наблюденій, относя ихъ къ положенію точки весенняго равноденствія соотвѣтствующему началу года.

Такимъ образомъ данными служатъ:

1) Моменты наблюденій: t_1, t_2, t_3;
2) Долготы планеты: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;
3) Широты планеты: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;
4) Долготы земли: L_1, L_2, L_3;
5) Радіусы векторы земли: R_1, R_2, R_3;
6) Промежутки: $\tau_1 = K(t_2 - t_1)$; $\tau_2 = K(t_3 - t_2)$; $\tau_3 = K(t_3 - t_1)$.

б) Для исходнаго приближенія берутъ:

$$P = \frac{\tau_3}{\tau_1} \quad \text{и} \quad Q = \tau_1\tau_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

и вычисляютъ величины: N, a_2, b_2, c_2 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} Na_2 &= [\operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_2) - \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_2)]\, R_2 \\ Nb_2 &= [\operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_1) - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_1)]\, R_1 \\ Nc_2 &= [\operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - L_3) - \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_1 - L_3)]\, R_3 \\ N &= \operatorname{tg}\beta_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - \operatorname{tg}\beta_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) + \operatorname{tg}\beta_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (28)$$

Затѣмъ величины: ψ, A_1, k_0, l_0, N_1, M, q по формуламъ:

$$\cos\psi = -\cos\beta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - L_2)$$

$$A_1 = \frac{b_2 + c_2 P}{1 + P}; \quad A_1 + a_2 = k_0 \cos\beta_2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} A_1 Q = l_0 \cos\beta_2 \quad \ldots (35)$$

$$k_0 - R_2 \cos\psi = N_1 \cos q; \qquad R_2 \sin\psi = N_1 \sin q$$

$$\frac{l_0}{N_1 R_2^3 \sin^3\psi} = M$$

в) Составляется уравненіе

$$M \sin^4 z = \sin(z \pm q) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

которое и рѣшается методою послѣдовательныхъ приближеній.

Изъ корней уравненія z надо взять тотъ, гдѣ $z < 180° - \psi$ и не болѣе 180°, ибо въ треугольникѣ всякій уголъ меньше внѣшняго угла съ нимъ не смежнаго и меньше 180°.

г) Найдя z, по формулѣ:

$$r_2 = R_2 \frac{\sin\psi}{\sin z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

вычисляется r_2, — затѣмъ ρ_2 по формулѣ:

$$\rho_2 = a_2 + A_1 + \frac{1}{2} \frac{A_1 Q}{r_2^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

и

$$n_1 = \left(1 + \frac{Q}{2 r_2^3}\right) : (1 + P) \quad \text{и} \quad n_3 = n_1 P \quad \ldots\ldots (30)$$

послѣ чего находятся ρ_1 и ρ_3 по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} n_1 \rho_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \rho_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - n_1 R_1 \sin(\alpha_3 - L_1) \\ &\quad + R_2 \sin(\alpha_3 - L_2) - n_3 R_3 \sin(\alpha_3 - L_3) \\ n_3 \rho_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_1) &= \rho_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + n_1 R_1 \sin(\alpha_1 - L_1) \\ &\quad - R_2 \sin(\alpha_1 - L_2) + n_3 R_3 \sin(\alpha_1 - L_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (27)$$

д) Опредѣливъ ρ_1, ρ_2, ρ_3, находятъ геліоцентрическія координаты по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= r_i \cos\theta_i \cos\lambda_i = \rho_i \cos\alpha_i + R_i \cos L_i \\ y_i &= r_i \cos\theta_i \sin\lambda_i = \rho_i \sin\alpha_i + R_i \sin L_i \\ z_i &= r_i \sin\theta_i = \rho_i \operatorname{tg}\beta_i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37) \quad (i = 1, 2, 3)$$

и по нимъ наклонность i и долготу узла N по формуламъ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} i &= \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\sin(\lambda_1 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_2}{\sin(\lambda_2 - N)} = \frac{\operatorname{tg}\theta_3}{\sin(\lambda_3 - N)} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} - N\right) &= \operatorname{tg}\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \cdot \frac{\sin(\theta_1 + \theta_3)}{\sin(\theta_1 - \theta_3)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (39)$$

и аргументы широты c_1, c_2, c_3 по формуламъ:

$$\operatorname{tg} c_1 = \operatorname{tg}(\lambda_1 - N) \cdot \sec i$$

$$\operatorname{tg} c_2 = \operatorname{tg}(\lambda_2 - N) \cdot \sec i$$

$$\operatorname{tg} c_3 = \operatorname{tg}(\lambda_3 - N) \cdot \sec i$$

а значитъ и углы между радіусами векторами:

$$2f_1 = c_2 - c_1; \qquad 2f_2 = c_3 - c_2; \qquad 2f_3 = c_3 - c_1.$$

е) По найденнымъ разстояніямъ $\rho_1 \sec\beta_1$, $\rho_2 \sec\beta_2$, $\rho_3 \sec\beta_3$ исправляютъ моменты наблюденій временемъ прохожденія свѣта, и исчисляютъ исправленные промежутки между наблюденіями (см. § 8).

ж) Вычисливъ величины: $m_1, m_2, m_3, l_1, l_2, l_3$ по формуламъ:

$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{(2\sqrt{r_1 r_2}\cos f_1)^3}; \qquad m_2 = \frac{\tau_2^2}{(2\sqrt{r_2 r_3}\cos f_2)^3}; \qquad m_3 = \frac{\tau_3^2}{(2\sqrt{r_1 r_3}\cos f_3)^3}$$

$$l_1 = \frac{r_1 + r_2}{4\sqrt{r_1 r_2}\cos f_1} - \frac{1}{2}; \quad l_2 = \frac{r_2 + r_3}{4\sqrt{r_2 r_3}\cos f_2} - \frac{1}{2}; \quad l_3 = \frac{r_1 + r_3}{4\sqrt{r_1 r_3}\cos f_3} - \frac{1}{2}$$

составляютъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} s_i^3 - s_i^2 &= m_i \frac{2g_i - \sin 2g_1}{\sin^3 g_i} \\ s_i^2 &= \frac{m_i}{l_i + \sin^2\frac{1}{2} g_i} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (40) \quad i = 1, 2, 3$$

и опредѣляютъ s_1, s_2, s_3, и по нимъ:

$$n_3 = \frac{\tau_1}{\tau_3}\,\frac{s_3}{s_1}; \qquad n_1 = \frac{\tau_2}{\tau_3}\,\frac{s_3}{s_2}$$

$$P = \frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$Q = \frac{\tau_1\,\tau_2}{s_1\,s_2}\,\frac{r_2^{\,2}}{r_1\,r_3}\cdot\frac{1}{\cos f_1 \cos f_2 \cos f_3}.$$

з) Съ этими исправленными значеніями P и Q, производятъ вышеописанное вычисленіе вторично, а если получится чувствительная разница то и въ третій разъ.

и) Получивъ окончательныя величины:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\quad f_1,\ f_2,\ f_3; \qquad s_1,\ s_2,\ s_3,\quad g_1,\ g_2,\ g_3; \qquad i,\ N$$

беремъ два крайнихъ мѣста 1-ое и 3-ье и находимъ элементы орбитъ по формуламъ:

$$a = \frac{\tau^2}{4}\cdot\frac{1}{r_1\,r_3\cdot s^2\cdot\cos^2 f_3\cdot\sin^2 g_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$p = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{r_1\,r_3}\,\frac{\sin f_3}{\sin g_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$ae\cos G = a\cos g_3 - \sqrt{r_1\,r_3}\cos f_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{u_3-u_1}{2} = g_3; \qquad \frac{u_3+u_1}{2} = G$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_3 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_3; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_1 \quad \ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} K\cdot a^{-\frac{3}{2}}(t_1-t_0) &= u_1 - e\sin u_1 \\ K\cdot a^{-\frac{3}{2}}(t_3-t_0) &= u_3 - e\sin u_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\omega = u_1 - v_1 = u_3 - v_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Повторяемъ еще разъ, что здѣсь показана лишь послѣдовательность хода вычисленій, которое на практикѣ производится по уравненіямъ равносильнымъ написаннымъ, но предварительно преобразовавъ ихъ къ удобнѣйшему виду, но даже въ этомъ окончательномъ видѣ полное вычисленіе планетной орбиты занимаетъ въ книгѣ Tisserand, Determination des orbites, гдѣ оно для примѣра приведено со всею подробностью, 16 страницъ in 4^0 въ два и въ три столбца, требуя около 1200 шести и семизначныхъ логариѳмовъ.

§ 8. Мы не указывали при бѣгломъ нашемъ изложеніи какимъ образомъ принимать во вниманіе поправки на абберацію и паралаксъ, если орбита вычисляется съ большою точностью.

Чтобы принять во вниманіе абберацію примѣняется такой пріемъ: при первомъ приближеніи этой поправки не дѣлаютъ, а послѣ того какъ получены приближенныя разстоянія свѣтила до земли вычитаютъ изъ моментовъ наблюденій то время, которое требуется свѣту, чтобы достигнуть отъ свѣтила до глаза, зная что разстояніе отъ земли до солнца принимаемое за 1 проходится въ 497 секундъ, такимъ образомъ, моменты наблюденій приводятся какъ бы къ тѣмъ, когда лучъ, достигшій, глаза покинулъ свѣтило.

Чтобы принять во вниманіе паралаксъ воображаютъ, что лучъ, на которомъ свѣтило усматривалось, продолженъ до встрѣчи съ плоскостью эклиптики. Эту точку и берутъ вмѣсто мѣста земли, вводя соотвѣтствующую поправку въ величины R и L. Выраженій этихъ поправокъ выводить не будемъ, они получаются по самымъ элементарнымъ формуламъ аналитической геометріи и астрономіи.

§ 9. Въ заключеніе этихъ бесѣдъ считаю необходимымъ привести ту оцѣнку, которую самъ Гауссъ даетъ своей методѣ. Въ § 119 онъ говоритъ, что изъ шести соотношеній, связывающихъ данныя и искомыя величины, можно исключить *четыре* изъ этихъ искомыхъ, такъ что останется *двѣ* неизвѣстныхъ x и y и два уравненія между ними

$$X(x, y) = 0 \quad \text{и} \quad Y(x, y) = 0$$

при этомъ нѣтъ надобности, чтобы x и y были непремѣнно двумя элементами орбиты, достаточно чтобы онѣ были съ ними связаны такими соотношеніями чтобы когда x и y будутъ найдены, элементы легко бы вычислялись.

Затѣмъ въ §§ 124—129 Гауссъ перечисляетъ и характеризуетъ *десять* различныхъ комбинацій выбора величинъ x и y и въ § 130 говоритъ: „Чтобы считать, что поставленная задача рѣшена правильно, надо чтобы выборъ величинъ x и y удовлетворялъ слѣдующимъ условіямъ: во 1-хъ величины x и y должны быть выбираемы такъ, чтобы для нихъ можно было указать приближенныя значенія по самой сущности задачи во всѣхъ случаяхъ, когда геліоцентрическое движеніе свѣтила не слишкомъ велико, во 2-хъ необходимо, чтобы малыя измѣненія величинъ x и y

не вызывали соотвѣтствующихъ имъ большихъ измѣненій въ величинахъ по нимъ получаемымъ, ибо иначе погрѣшности, случайно допущенныя въ первыхъ не дозволятъ разсматривать вторыхъ, даже какъ приближенія, въ 3-хъ желательно, чтобы процессъ по которому по значеніямъ x и y вычисляются значенія $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ не былъ бы слишкомъ сложнымъ".

„Эти условія доставятъ критеріумъ совершенства методы, оно выясняется болѣе полно при болѣе частомъ ея примѣненіи: — способъ, который будетъ изложенъ и который составляетъ самую важную часть этого труда, *удовлетворяетъ этимъ условіямъ въ такой мѣрѣ, что, кажется, не остается желать ничего лучшаго*".

§ 10. Само собою разумѣется, что въ своихъ бесѣдахъ я старался дать лишь очеркъ каждой методы, характеризуя ее самыми существенными и главными ея чертами. Предметъ этотъ въ высшей степени обширенъ и можетъ доставить неисчерпаемый источникъ, какъ для изученія, такъ и для самостоятельныхъ изысканій и размышленій. Попробуйте, напримѣръ, хорошенько изучить §§ 124—129 Theoria Motus и уяснить, почему именно каждая изъ охарактеризованныхъ методъ хуже той на которой Гауссъ окончательно остановился, или напримѣръ, попробуйте разсмотрѣть такой вопросъ, если имѣется не *три*, а *четыре* наблюденія, то получится *два* лишнихъ уравненіями ими можно распорядиться такъ, чтобы проще рѣшать остальныя, напр. въ выраженіи отношеній секторовъ площадей треугольниковъ $\Delta_{12}:\Delta_{23}:\Delta_{34}$ можно въ первомъ приближеніи взять отношеніе $\tau_1:\tau_2:\tau_3$ въ особенности когда эти промежутки близки къ равенству, а такихъ отношеній какъ $\Delta_{12}:\Delta_{13}$ или $\Delta_{12}:\Delta_{24}$ т. е., гдѣ площади соотвѣтствуютъ неравнымъ промежуткамъ въ вычисленіе не вводить, тогда уравненіе для опредѣленія окончательной неизвѣстной можетъ быть приведено къ кубическому, а не къ уравненію 8-ой степени и т. д.

Цѣль этихъ бесѣдъ достигнута, если я съумѣлъ возбудить въ Васъ, передъ тѣмъ какъ Вы покинете нашу Академію, интересъ къ тому отдѣлу, который не входитъ въ Вашъ обязательный курсъ, но который по словамъ Гаусса „*составляетъ безъ сомнѣнія плодотворнѣйшую и прекраснѣйшую часть Теоретической Астрономіи*".

А. Крыловъ.