С. П. Виноградовъ.

КУРСЪ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРІИ.

Складъ изданія въ книжномъ магазинѣ «ОБРАЗОВАНІЕ»
(Москва, Кузнецкій мостъ, д. кн. Гагарина).

Цѣна 70 коп.

Типографія РУССКАГО ТОВАРИЩЕСТВА. Москва.
Чистые пруды, Мыльниковъ пер., соб. д.
1912.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

(Цифры указываютъ страницы).

ГЛАВА V.

Циклометрическія функціи.

ГЛАВА VI.

Теорема сложенія. Удвоеніе дуги. Дѣленіе дуги пополамъ. Преобразованія суммъ въ произведенія.

ГЛАВА VII.

О вычисленіи тригонометрическихъ функцій. Тригонометрическія таблицы.

ГЛАВА VIII.

Тригонометрическія уравненія.

ГЛАВА IX.

Соотношенія между сторонами и углами треугольника. Рѣшеніе треугольниковъ.

ГЛАВА X.

Комплексныя числа. Формула Moivre'а. Умноженіе и дѣленіе дугъ. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящій учебникъ тригонометріи отличается отъ наиболѣе распространенныхъ русскихъ руководствъ по этому предмету способомъ изложенія матеріала, составляющаго обычный курсъ тригонометріи въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Опредѣленія тригонометрическихъ функцій и выводы ихъ свойствъ даются сразу для произвольныхъ дугъ или угловъ.

Избирая этотъ методъ изложенія, я имѣлъ въ виду учащихся, уже прошедшихъ полный курсъ элементарной геометріи и почти полный курсъ алгебры и, слѣдовательно, имѣющихъ извѣстное математическое развитіе. Изложеніе тригонометріи указаннымъ способомъ не представляетъ затрудненій для такихъ учащихся и имѣетъ тѣ выгоды, что 1) устраняетъ опасность сдѣлать предметъ скучнымъ черезъ введеніе искусственныхъ „*доказательствъ общности*", которыя являются неизбѣжными, если опредѣленія тригонометрическихъ функцій и выводы ихъ свойствъ даются сначала только для остраго угла, и 2) дѣлаетъ возможнымъ съ самаго начала курса выдвинуть періодичность тригонометрическихъ функцій, какъ ихъ основное свойство.

Предполагая въ учащихся, приступающихъ къ изученію систематическаго курса тригонометріи, пріобрѣтенный въ курсѣ алгебры навыкъ въ вычисленіяхъ съ помощью логариѳмовъ, я не считалъ нужнымъ давать примѣры вычисленій тригонометрическихъ формулъ при помощи логариѳмовъ. Всѣ необходимыя для этихъ вычисленій указанія учащіеся могутъ найти въ объясненіяхъ, приложенныхъ къ тѣмъ таблицамъ, которыми они будутъ пользоваться.

Первая глава курса содержитъ краткія свѣдѣнія о функціяхъ и ихъ графикахъ [1]), а послѣдняя — элементы ученія о комплексныхъ числахъ.

---

[1]) Эта глава представляетъ нѣсколько измѣненную вторую главу моего курса: „*Краткій курсъ аналитической геометріи и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій*". Москва, 1912.

Образцами курсовъ, въ которыхъ принятъ избранный мною способъ изложенія, были для меня два слѣдующихъ:

C. Bourlet. *Leçons de Trigonométrie rectiligne.* Paris, 1905.

E. W. Hobson. *A treatise on Plane Trigonometry.* Cambridge, 1911 (third edition).

Кромѣ этихъ книгъ пособіями при составленіи курса служили извѣстные русскіе учебники, курсъ *Borel'я* (*Trigonométrie.* Paris, 1904) и курсъ *Lock and Child* (*A new Trigonometry for schooles and colleges.* London, 1911).

С. Виноградовъ.

Сентябрь, 1912 г.

ГЛАВА I.

Мѣра прямого отрѣзка. Координаты точки на прямой и плоскости. Понятіе о функціи. Графикъ функціи. Проекціи.

§ 1. **Мѣра прямолинейнаго отрѣзка.** *Общей мѣрой* двухъ прямыхъ отрѣзковъ называется такой отрѣзокъ, который содержится *цѣлое* число разъ въ каждомъ изъ данныхъ. Если A и B суть два отрѣзка и D ихъ общая мѣра, то $A=mD$, $B=nD$, гдѣ m и n суть *натуральныя* числа. Число m/n называется *отношеніемъ* отрѣзковъ A и B, которое обозначается однимъ изъ символовъ: A/B или $A:B$, такъ что

$$A/B=m/n.$$

То же число m/n выражаетъ *длину* или *мѣру* отрѣзка A, если отрѣзокъ B принятъ за *единицу длины*.

Два отрѣзка могутъ имѣть общую мѣру, но могутъ и не имѣть ея. Отрѣзки, имѣющіе общую мѣру, называются *соизмѣримыми*, а отрѣзки, не имѣющіе ея, называются *несоизмѣримыми*. Примѣромъ послѣднихъ служатъ *сторона* и *діагональ* квадрата.

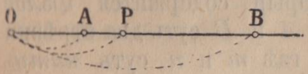
Отношеніе двухъ соизмѣримыхъ отрѣзковъ есть число *раціональное*, т.-е. *цѣлое* или *дробное*.

Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ отрѣзковъ есть число *ирраціональное*, для котораго всегда можно найти *приближенное* значеніе съ любой степенью точности. Поэтому результатъ измѣренія прямого отрѣзка посредствомъ произвольно выбранной единицы выражается *положительнымъ числомъ*, *раціональнымъ* или *ирраціональнымъ*.

Если при измѣреніи отрѣзковъ, нанесенныхъ на одну и ту же прямую или *ось*, нужно принять во вниманіе не только ихъ *длину*, но и *направленіе*, то на этой прямой одно направленіе принимается за *положительное*, а противоположное—за *отрицательное*. Къ числу, выражающему длину отрѣзка, присоединяется знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, съ положительнымъ или отрицательнымъ направленіемъ оси совпадаетъ направленіе измѣряемаго отрѣзка. Результатъ измѣренія отрѣзка можно назвать въ этомъ случаѣ *алгебраической мѣрой* отрѣзка.

Для опредѣленія отрѣзка достаточно знать его *начало* и его *конецъ*. Отрѣзокъ съ началомъ M и концомъ N обозначается черезъ MN; отрѣзокъ NM имѣетъ начало въ точкѣ N, а конецъ въ точкѣ M. Если a есть алгебраическая мѣра отрѣзка MN, то мѣра отрѣзка NM есть $-a$ и, слѣд., сумма этихъ отрѣзковъ равна *нулю*: $MN+NM=0$.

§ 2. **Координата точки на прямой.** Въ тѣсной связи съ понятіемъ объ алгебраической мѣрѣ отрѣзка стоитъ опредѣленіе положенія точки на прямой посредствомъ *числа* и точки на плоскости посредствомъ *пары чиселъ.* Пусть точка P лежитъ на данной прямой (черт. 1). Возьмемъ на этой прямой произвольную точку O, которую будемъ называть *началомъ* и условимся считать *положительными* отрѣзки этой прямой, откладываемые отъ точки O въ одну сторону (напр., *вправо*, если данная прямая горизонтальна и *вверхъ*, если она вертикальна), и *отрицательными* отрѣзки, откладываемые въ противоположномъ направленіи. Измѣривъ затѣмъ отрѣзокъ OP какой-нибудь *единицей длины* и приписавъ къ результату надлежащій знакъ, мы получимъ *число* (положительное или отрицательное), которое опредѣляетъ положеніе точки P на данной прямой. Это число называется *координатой* или *абсциссой* точки P, а прямая — *осью абсциссъ*.



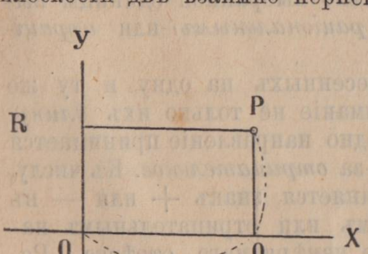
Черт. 1.

Каждой точкѣ оси соотвѣтствуетъ *единственное* число и, наоборотъ, каждому дѣйствительному числу соотвѣтствуетъ единственная точка оси, такъ что между точками прямой и дѣйствительными числами устанавливается *взаимное* и *однозначное* соотвѣтствіе.

Абсцисса точки обыкновенно обозначается буквой x, а точку P съ абсциссой x можно обозначать символомъ $P(x)$. Если точка P движется по оси, описывая отрѣзокъ AB, то абсцисса ея измѣняется и принимаетъ послѣдовательно *всѣ* значенія, начиная съ абсциссы a точки A и кончая абсциссой b точки B.

Число x, способное принимать различныя значенія, называется *перемѣннымъ*, а описанный выше способъ измѣненія перемѣннаго x отъ a до b называется *непрерывнымъ* измѣненіемъ въ интервалѣ (a,b).

§ 3. **Прямоугольныя координаты точки на плоскости.** Возьмемъ на плоскости двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ O (черт. 2). На каждой изъ нихъ укажемъ то направленіе, которое будемъ считать *положительнымъ*.



Черт. 2.

Пусть эти направленія суть Ox и Oy. Отрѣзки, откладываемые въ этихъ направленіяхъ, какъ на прямыхъ Ox и Oy, такъ и на прямыхъ, имъ параллельныхъ, принимаются за *положительные*, а откладываемые въ противоположныхъ направленіяхъ—за *отрицательные*.

Чтобы опредѣлить положеніе точки P плоскости, опустимъ изъ нея перпендикуляры PQ и PR соотвѣтственно на прямыя Ox и Oy. Отрѣзокъ RP есть разстояніе *отъ* прямой Oy *до* точки P, а отрѣзокъ QP—разстояніе *отъ* прямой Ox *до* точки P. Измѣривъ эти отрѣзки опредѣленной единицей длины и приписавъ къ результатамъ надлежащіе знаки, мы получимъ *пару* чиселъ, соотвѣтствующихъ точкѣ P. Эта пара чиселъ называется *координатами* точки P. Число, выражающее мѣру отрѣзка RP, параллельнаго прямой Ox, называется *абсциссой*, а число, выражающее мѣру отрѣзка QP, параллельнаго прямой Oy,—*ординатой* точки P. Абсцисса и ордината точки обозначаются соотвѣтственно буквами x и y. Прямыя Ox и Oy называются *осями* координатъ, Ox—осью x-овъ или *осью абсциссъ*, Oy—осью y-овъ или осью *ординатъ*.

Точка O есть *начало* координатъ. Точка P съ координатами $x=a$ и $y=b$ обозначается символомъ $P(a,b)$.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что каждой точкѣ плоскости соотвѣтствуетъ *единственная* пара чиселъ. Справедливо и обратное: *каждой парѣ чиселъ соотвѣтствуетъ единственная точка плоскости*. Если данная пара чиселъ есть (a, b) *), то точка, ей соотвѣтствующая лежитъ на пересѣченіи двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна параллельна оси y-овъ и отстоитъ отъ нея на разстояніи a, а другая параллельна оси x-овъ и отстоитъ отъ нея на разстояніи b.

Описанная въ настоящемъ § система осей координатъ называется *прямоугольной*, такъ какъ уголъ между осями—прямой.

§ 4. **Постоянныя и перемѣнныя величины.** Величина, способная принимать различныя значенія, называется *перемѣнной*, а величина, сохраняющая одно и то же значеніе, называется *постоянной*. Наприм., уголъ въ треугольникѣ есть перемѣнная величина, а сумма угловъ треугольника есть постоянная величина; діаметръ и окружность круга суть перемѣнныя величины, а отношеніе окружности къ діаметру есть постоянная величина.

§ 5. **Понятіе о функціи.** Измѣненія двухъ перемѣнныхъ величинъ могутъ находиться въ зависимости другъ отъ друга. Напр., измѣненіе радіуса круга вызываетъ опредѣленныя измѣненія его окружности и площади.

Изъ двухъ перемѣнныхъ величинъ, измѣненія которыхъ зависятъ другъ отъ друга, одна называется *независимой* перемѣнной, а другая ея *функціей*.

Наприм., окружность круга и его площадь суть функціи радіуса; многочленъ $2x+1$, въ которомъ x есть перемѣнное, есть функція x; $\log x$ есть функція x.

Функція перемѣннаго x обозначается символомъ $f(x)$, а существованіе функціональной зависимости между перемѣнными x и y, изъ которыхъ первое принимается за независимое перемѣнное, уравненіемъ: $y=f(x)$.

Буква f есть начальная буква слова *fonction* (функція).

§ 6. **Непрерывное измѣненіе перемѣннаго и функціи.** Пусть x есть перемѣнное, измѣняющееся отъ $x=a$ до $x=b$. Измѣненіе x въ интервалѣ (a, b) называется *прерывнымъ*, если x принимаетъ только нѣкоторыя значенія, содержащіяся между a и b; оно называется *непрерывнымъ*, если x принимаетъ *всѣ* значенія отъ a до b. Геометри-

---

*) Первое число пары обозначаетъ *абсциссу*, а второе—*ординату*.

ческій образъ непрерывнаго измѣненія перемѣннаго былъ указанъ въ § 2. Алгебраически непрерывное измѣненіе перемѣннаго x характеризуется тѣмъ, что разность двухъ значеній x_1 и x_2 перемѣннаго x, лежащихъ въ интервалѣ (a, b), можетъ сдѣлаться по абсолютной величинѣ меньше произвольнаго положительнаго числа ε:

$$| x_1 - x_2 | < \varepsilon \text{ *)}.$$

При *непрерывномъ* измѣненіи перемѣннаго функція его можетъ измѣняться *прерывно* и *непрерывно*.

Пусть (a, b) есть интервалъ измѣненія перемѣннаго x и x_1 одно изъ значеній его, содержащихся въ этомъ интервалѣ. Функцію этого перемѣннаго обозначимъ черезъ y, а ея значеніе при $x=x_1$ черезъ y_1. Давая x_1 приращеніе h, мы измѣнимъ и соотвѣтственное значеніе функціи. Пусть y_1+k будетъ измѣненное значеніе функціи, соотвѣтствующее значенію $x=x_1+h$ перемѣннаго x. Ясно, что k есть приращеніе функціи y, соотвѣтствующее приращенію h перемѣннаго x. Если можно сдѣлать h настолько малымъ по абсолютной величинѣ, чтобы абсолютная величина k оказалась меньше произвольнаго, заранѣе даннаго, малаго положительнаго числа ε, то функція y называется *непрерывной* при $x=x_1$.

Если же окажется, что функція y обладаетъ свойствомъ непрерывности для всѣхъ значеній перемѣннаго x, заключенныхъ въ интервалѣ (a, b), то она называется *непрерывной* въ этомъ интервалѣ.

Примѣръ 1. Покажемъ, что функція $y=2x-1$ непрерывна при $x=1$.

Для даннаго случая имѣемъ:

$$x_1=1;\ y_1=2.1-1=1;\ y_1+k=2(1+h)-1=1+2h,\ k=2h.$$

Для того, чтобы $|k|$ было меньше произвольно малаго положительнаго числа ε, достаточно взять $|h|$ меньше $\varepsilon/2$.

Легко видѣть, что данная функція непрерывна для всѣхъ значеній x.

Примѣръ 2. Показать, что функція $y=\frac{1}{4}x^2$ непрерывна при всякомъ значеніи x.

Такъ какъ

$$y=\frac{1}{4}x^2,\ y+k=\frac{1}{4}(x+h)^2,$$

то

$$k=\frac{1}{4}(2xh+h^2) \text{ и } |k|=\frac{1}{4}|2xh+h^2|.$$

Нужно показать, что надлежащимъ выборомъ h можно сдѣлать $|k|$ меньше произвольно малаго числа ε.

---

*) Абсолютная величина числа a обозначается знакомъ $| a |$. Напримѣръ, $| +5 | = 5$; $| -5 | = 5$.

Замѣтивъ, что дѣло идетъ о малыхъ измѣненіяхъ перемѣннаго, можно положить $|h|<1$ и, слѣд., $h^2<|h|$. Такъ какъ

$$|2xh+h^2|\leq 2|xh|+h^2<|h|\{2|x|+1\},$$

то при $|h|<4\varepsilon/\{2|x|+1\}$ приращеніе k функціи будетъ по абсолютной величинѣ меньше ε.

Примѣръ 3. Показать, что функція $y=1/x$ непрерывна при $x=1$. Въ этомъ случаѣ

$$x_1=1;\ y_1=1;\ y_1+k=1/(1+h);\ k=1/(1+h)-1=-h/(1+h).$$

Для того, чтобы $|k|<\varepsilon$, нужно найти значенія h, удовлетворяющія неравенству:

$$\left|\frac{h}{1+h}\right|<\varepsilon \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha)$$

Принимая, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, $|h|<1$ и замѣчая, что

$$|1+h|\geq 1-|h| \text{ и } \left|\frac{h}{1+h}\right|\leq\frac{|h|}{1-|h|},$$

заключаемъ, что значенія h удовлетворяющія неравенству

$$\frac{|h|}{1-|h|}<\varepsilon, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\beta)$$

удовлетворяютъ и неравенству (α). Рѣшая неравенство (β), находимъ:

$$|h|<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Указанное разсужденіе можно примѣнить при всѣхъ значеніяхъ x, *отличныхъ отъ нуля*. Слѣд., разсматриваемая функція непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x, отличныхъ отъ нуля.

Что же касается до значенія данной функціи при $x=0$, то нужно замѣтить, что значенія ея получаются дѣленіемъ единицы на значенія перемѣннаго. Такъ какъ дѣленіе на нуль невозможно, то значенія функціи при $x=0$ получить нельзя, но можно прослѣдить *измѣненіе* ея значеній при *приближеніи x къ нулю*, т.-е. при безгранично убывающихъ по абсолютной величинѣ значеніяхъ x (положительныхъ и отрицательныхъ).

Такъ, при $x=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ldots$ значенія функціи суть соотвѣтственно 10, 100, 1000,...; при $x=-0{,}1;-0{,}01;-0{,}001;\ldots$ ея значенія суть $-10, -100, -1000,\ldots$. Въ томъ и другомъ случаѣ эти значенія по *абсолютной величинѣ возрастаютъ* и при томъ, какъ легко убѣдиться, возрастаютъ *неограниченно*, т.-е. могутъ сдѣлаться *больше произвольнаго числа*. Такой способъ измѣненія кратко характеризуется словами: *функція стремится къ безконечности*. Итакъ, при приближеніи x къ нулю разсматриваемая функція стремится къ безконечности. То же самое выражается иногда короче: *при $x=0$ функція получаетъ безконечно большое значеніе* или еще короче: *при $x=0$ функція равна безконечности.*

При непрерывномъ измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0 функція имѣетъ *отрицательныя* значенія, безгранично возрастающія по абсолютной величинѣ, т.-е. стремится къ $-\infty$, а при измѣненіи x отъ $+\infty$ до 0 функція имѣетъ *положительныя* значенія, безгранично возрастающія, т.-е. стремится къ $+\infty$. Поэтому значеніе функціи при $x=0$ будетъ $-\infty$ или $+\infty$ въ зависимости отъ того, совершается ли приближеніе x къ значенію *нуль* черезъ *возрастаніе отрицательныхъ* значеній, или черезъ *убываніе положительныхъ*. При непрерывномъ измѣненіи перемѣннаго отъ $-\infty$ до $+\infty$ переходъ его черезъ нуль (т.-е. черезъ значеніе $x=0$) сопровождается перемѣной знака функціи, которая *скачкомъ* переходитъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$. Такимъ образомъ нарушается ея *непрерывность*; значеніе $x=0$ называется мѣстомъ *разрыва* функціи.

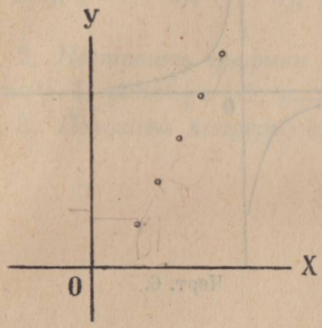
§ 7. **Изученіе совмѣстныхъ измѣненій перемѣннаго и функціи. Таблицы. Графикъ функціи.** Давая перемѣнному x различныя значенія и вычисляя соотвѣтственныя значенія функціи y, мы получаемъ два ряда соотвѣтственныхъ чиселъ, которыя можно расположить въ таблицахъ. Изученіе этихъ таблицъ позволитъ вывести нѣкоторыя заключенія о совмѣстныхъ измѣненіяхъ перемѣннаго и функціи для извѣстнаго интервала.

Вычислимъ, напр., значенія приведенныхъ въ предыдущемъ § функцій для $x=1$, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 и результаты расположимъ въ слѣдующихъ таблицахъ:

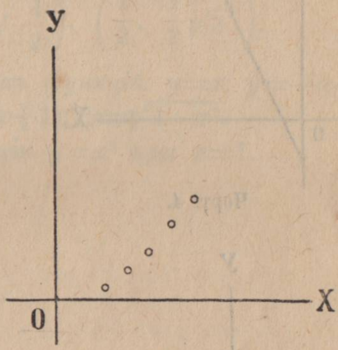
a) $y=2x-1$		b) $y=\frac{1}{4}x^2$		c) $y=1/x$	
Значенія x	Значенія y	Значенія x	Значенія y	Значенія x	Значенія y
1	1	1	$1/4$	1	1
$1\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	$9/16$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
2	3	2	1	2	$\frac{1}{2}$
$2\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	$1\,9/16$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
3	5	3	$2\,1/4$	3	$1/3$

Изученіе приведенныхъ таблицъ позволяетъ сдѣлать нѣкоторыя заключенія о характерѣ измѣненія разсматриваемыхъ функцій при возрастаніи перемѣннаго на $\frac{1}{2}$, начиная отъ $x=1$ и кончая $x=3$.

Таблица *a*) показываетъ, что функція $y=2x-1$ возрастаетъ вмѣстѣ съ x, при чемъ *одинаковымъ приращеніямъ перемѣннаго* (равнымъ

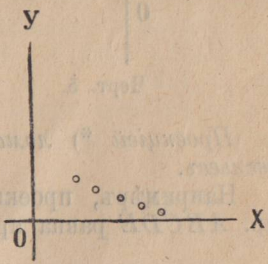


Черт. 3a.



Черт. 3b.

въ разсматриваемомъ случаѣ $^1/_2$) соотвѣтствуютъ *одинаковыя приращенія функціи* (равныя 1); таблица *b*) показываетъ, что функція $y={}^1/_4x^2$ также возрастаетъ вмѣстѣ съ x, но *равнымъ* приращеніямъ x соотвѣтствуютъ *неравныя* приращенія y; таблица *c*) показываетъ, что функція $1/x$ убываетъ съ возрастаніемъ x и что *равнымъ* положительнымъ приращеніямъ перемѣннаго x соотвѣтствуютъ *неравныя* отрицательныя приращенія x.

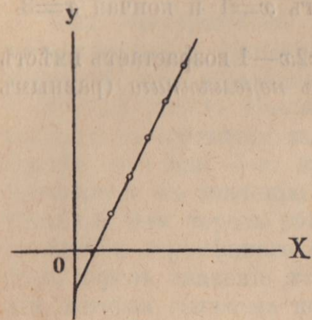


Черт. 3c.

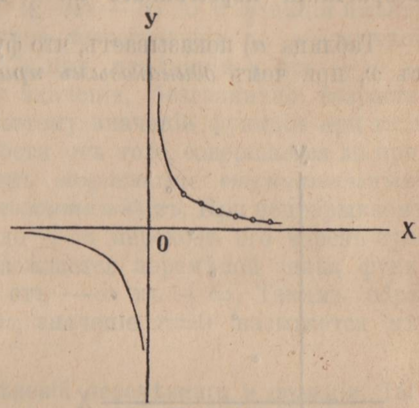
Принимая x и y за прямоугольныя координаты точки на плоскости, можно при помощи этихъ таблицъ для каждой функціи построить по 5 точекъ, взаимное расположеніе которыхъ иллюстрируетъ предыдущія заключенія (черт. 3*a*, *b*, *c*).

Уменьшая скачекъ при переходѣ отъ одного значенія x къ слѣдующему, дѣлая его, наприм., равнымъ 1/4, 1/5, 0,1, и т. д., мы удлинняемъ таблицы и увеличиваемъ число отдѣльныхъ точекъ на плоскости. Если предположить, что x измѣняется непрерывно въ интервалѣ (1,3), то вслѣдствіе непрерывности разсматриваемыхъ функцій въ этомъ интервалѣ (§ 6) мы получимъ *непрерывный* рядъ точекъ на плоскости, т.-е. *линію*. Эта линія называется *графикомъ* функціи. Каждая точка ея своей абсциссой и ординатой даетъ соотвѣтственныя значенія перемѣннаго и функціи. Форма графика даетъ наглядное представленіе о характерѣ измѣненія функціи.

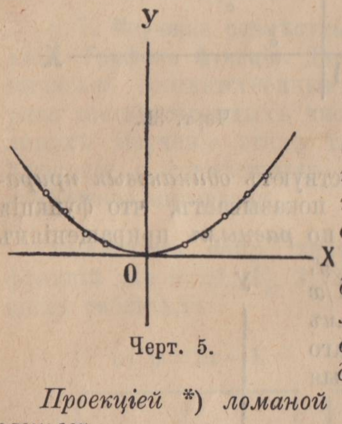
На чертежахъ 4, 5 и 6 даны графики функцій $y=2x-1$ (*прямая*), $y=\frac{1}{4}x^2$ (*парабола*) и $y=1/x$ (*гипербола*).



Черт. 4.



Черт. 6.



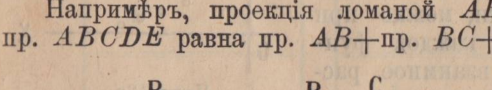
Черт. 5.

§ 8. **Проекція точки, отрѣзка и ломаной линіи.** *Прямоугольной проекціей точки на данную прямую (ось проекцій) называется основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на ось.*

Прямоугольной проекціей отрѣзка на данную ось называется отрѣзокъ, началомъ и концомъ котораго служатъ соотвѣтственно проекціи начала и конца даннаго отрѣзка на ось проекцій.

Проекціей *) *ломаной линіи называется сумма проекцій ея звеньевъ.*

Напримѣръ, проекція ломаной ABC равна пр. $AB+$пр. BC; пр. $ABCDE$ равна пр. $AB+$пр. $BC+$пр. $CD+$пр. DE (черт. 7).



Черт. 7.

Изъ послѣдняго опредѣленія слѣдуетъ, что *проекція незамкнутой ломаной линіи равна проекціи ея замыкающей, т.-е. того отрѣзка, который имѣетъ начало въ началѣ ломаной линіи, а конецъ—въ концѣ ея.*

Напр., пр. $ABC=$ пр. AC; пр. $ABCDE=$ пр. AE.

Тоже самое предложеніе можно выразить слѣдующимъ образомъ: *проекція замкнутой ломаной линіи равна нулю.*

---

*) Подъ словомъ „проекція" вездѣ разумѣется *прямоугольная* проекція.

Дѣйствительно, пр. $ABCA =$ пр. $AB +$ пр. $BC +$ пр. $CA =$ $=$ пр. $AC +$ пр. $CA = 0$; пр. $ABCDE =$ пр. $AB +$ пр. $BC +$ пр. $CD +$ $+$ пр. $DE +$ пр. $EA =$ пр. $AE +$ пр. $EA = 0$.

Упражненія къ главѣ I.

1. *Построить точки* $(3,0)$; $(-3,0)$; $(0,2)$; $(0,-2)$; $(1,2)$; $(2,1)$; $(-1,2)$; $(-1,-2)$; $(1,-2)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

2. *Построить графики слѣдующихъ функцій:* $y=x$; $y=-x+1$; $y=x^2-1$; $y=x^2+x+1$; $y=x^3$; $y=1/(x+1)$; $y=\sqrt{4-x^2}$.

3. *Показать непрерывность функціи* $y=x^3$ *при* $x=1$.

ГЛАВА II.

Измѣреніе дугъ круга. Измѣреніе угловъ

§ 9. **Мѣра дуги круга.** Для измѣренія дугъ круга употребляются два способа.

Въ первомъ изъ нихъ за единицу принимается *градусъ*, представляющій дугу, равную 1/360 окружности. Градусъ раздѣляется на 60 равныхъ частей, называемыхъ *минутами*, а минута—на 60 равныхъ частей, называемыхъ *секундами*.

Дуга, содержащая n градусовъ, m минутъ, p секундъ, обозначается символомъ: $n^0\ m'\ p''$.

Во второмъ способѣ измѣренія *за единицу дугъ круга принимается дуга, длина которой равна радіусу этого круга*.

Результатъ измѣренія этимъ способомъ выражается числомъ, показывающимъ длину дуги въ радіусахъ или отношеніе длины дуги къ радіусу. Наприм., дуга, мѣра которой есть 2,5, есть дуга, которой длина равна 2,5 радіуса.

Первый способъ измѣренія употребляется по преимуществу въ практическихъ вопросахъ, а второй въ теоретическихъ изслѣдованіяхъ.

Нетрудно установить формулы для перехода отъ результатовъ измѣренія дуги по одному способу къ результатамъ измѣренія ея по другому.

Пусть дуга круга радіуса R содержитъ α^0; требуется найти ея мѣру a по второму способу, т.-е. отношеніе длины этой дуги къ радіусу R.

Такъ какъ длина дуги въ α^0 есть $2\pi R\alpha/360$, то

$$a=\frac{\pi}{180}\cdot\alpha,$$

гдѣ π есть отношеніе окружности къ діаметру.

Обратно, число α градусовъ, содержащихся въ дугѣ, выразится формулой:

$$\alpha=\frac{180}{\pi}\cdot a$$

Изъ послѣдней формулы легко найти, что дуга 1 содержитъ $57^0\ 17'\ 44'',8$ (съ недостаткомъ), а дуги 2π, π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$ содержатъ соотвѣтственно 360^0, 180^0, 90^0, 60^0, 45^0 и 30^0. *)

---

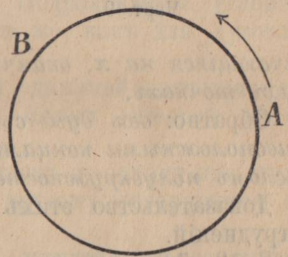
*) Кромѣ указанныхъ двухъ способовъ измѣренія дугъ круга существуетъ еще третій способъ, въ основаніи котораго лежитъ дѣленіе окружности на 400 равныхъ частей, называемыхъ *градами* (grades).

Если при измѣреніи дуги круга нужно знать не только ея величину, но и *направленіе*, то на кругѣ, носителѣ дугъ, различаютъ *два* направленія, называя одно *положительнымъ*, а противоположное ему *отрицательнымъ*. Къ числу, выражающему мѣру дуги присоединяется знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, съ положительнымъ или отрицательнымъ направленіемъ на кругѣ совпадаетъ направленіе измѣряемой дуги.

Кругъ съ указаннымъ на немъ положительнымъ направленіемъ (*оріентированный* кругъ) по отношенію къ дугамъ аналогиченъ *оси* по отношенію къ отрѣзкамъ, откладываемымъ на ней (§ 1). Но аналогія между отрѣзками, нанесенными на ось, и дугами даннаго круга нарушается числомъ условій, необходимыхъ для полнаго опредѣленія отрѣзка и дуги.

Для опредѣленія отрѣзка достаточно знать его начало и конецъ (§ 1) Не трудно видѣть, что для полнаго опредѣленія дуги недостаточно знать ея начало и конецъ: безчисленное множество дугъ имѣютъ одни и тѣ же начало и конецъ.

Пусть A и B суть соотвѣтственно начало и конецъ дуги, а стрѣлка указываетъ положительное направленіе на кругѣ (черт. 8). Пусть движущаяся точка вышла изъ A, перемѣщается въ положительномъ направленіи и, достигнувъ B, останавливается. Такимъ образомъ она описываетъ одну изъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ B. Обозначимъ мѣру этой дуги черезъ a. Если бы движущаяся точка не остановилась въ B, а продолжала движеніе въ томъ же направленіи, то она снова пришла бы въ B, описавъ кромѣ дуги a еще полную окружность, мѣра которой есть 2π. Такимъ образомъ мы получимъ новую дугу съ началомъ въ A и концомъ въ B. Мѣра этой дуги равна $a+2\pi$. Ясно, что не останавливая движущейся точки въ точкѣ B и заставляя ее описывать нѣсколько разъ полную окружность, мы получимъ новыя дуги съ началомъ въ A и концемъ B. Мѣры этихъ дугъ выражаются формулой $a+2k\pi$, гдѣ k обозначаетъ *цѣлое положительное* число или нуль. Кромѣ того, выйдя изъ точки A, движущаяся точка можетъ достигнуть B, перемѣщаясь въ отрицательномъ направленіи. Въ первый разъ это случится, когда она опишетъ дугу, равную по величинѣ $2\pi-a$, второй разъ, когда она опишетъ дугу, равную по величинѣ $2\pi-a+2\pi=$ $=2.2\pi-a$, и т. д. Но такъ какъ эти дуги отрицательны, то мѣры ихъ выразятся числами: $a-2\pi$, $a-2.2\pi$, и вообще $a-k.2\pi$, гдѣ k есть натуральное число.



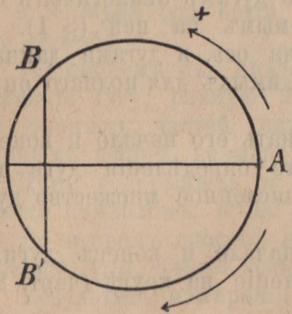
Черт. 8.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что дугъ съ началомъ A и концомъ B безчисленное множество, и что мѣры ихъ выражаются формулой $a+2k\pi$, гдѣ a есть мѣра одной изъ нихъ, а k есть *цѣлое* число (положительное или отрицательное) или *нуль*.

Въ градусныхъ измѣреніяхъ общее выраженіе дугъ съ данными началомъ и концомъ есть $a+k.\ 360^0$, гдѣ a есть градусное выраженіе одной изъ нихъ, а k есть цѣлое число или нуль.

Число a, выражающее алгебраическую мѣру дуги AB, можно назвать *криволинейной координатой* точки B, если точка A принята за начало координатъ (§ 2).

§ 10. **Дуги** a **и** $-a$. *Двѣ равныя по величинѣ и обратныя по знаку дуги, AB и AB' отсчитываемыя отъ общаго начала, оканчиваются въ точкахъ, симметрично расположенныхъ относительно діаметра, проходящаго черезъ ихъ общее начало* (черт. 9).



Черт. 9.

Обратно: *если концы B и B' двухъ дугъ AB и AB', имѣющихъ общее начало A, симметричны относительно діаметра, проведеннаго черезъ начало, то $AB' = -AB + 2k\pi$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль.*

Доказательство этихъ теоремъ основано на свойствѣ діаметра, перпендикулярнаго къ хордѣ, и на заключеніяхъ § 9.

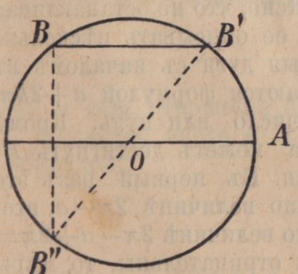
§ 11. **Дуги** a **и** $a+\pi$. *Двѣ дуги a и $a+\pi$, имѣющія общее начало и отличающіяся на π, оканчиваются въ діаметрально противоположныхъ точкахъ.*

Обратно: *двѣ дуги съ общимъ началомъ и діаметрально противоположными концами отличаются одна отъ другой нечетнымъ числомъ полуокружностей.*

Доказательство этихъ предложеній не представляетъ никакихъ затрудненій.

§ 12. **Дуги** a **и** $\pi-a$. Двѣ дуги a и $\pi-a$, сумма которыхъ равна π, называются *дополняющими* другъ друга до π.

Двѣ дуги дополняющія другъ друга до π и отсчитываемыя отъ общаго начала, оканчиваются въ точкахъ, которыя лежатъ на хордѣ, параллельной діаметру, проходящему черезъ ихъ общее начало.



Черт. 10.

Пусть A есть начало дугъ и B конецъ дуги a (черт. 10).

Чтобы построить дугу $\pi - a$, построимъ сначала дугу $-a$. Для этого достаточно (§ 10) опустить изъ B перпендикуляръ BB'' на діаметръ OA. Точка B'' пересѣченія его съ окружностью укажетъ конецъ дуги $-a$. Прибавимъ къ этой дугѣ $+\pi$, т.-е. полуокружность. Для этого проведемъ діаметръ черезъ B''; второй конецъ этого діаметра, точка B', есть конецъ дуги $\pi-a$ (§ 11). Прямая BB' перпендикулярна къ BB'', такъ какъ $\angle B$, вписанный и опирающійся на діаметръ, есть прямой; слѣд., $BB' \parallel OA$.

Обратно: *если концы дугъ AB и AB' съ общимъ началомъ A лежатъ на хордѣ, параллельной діаметру, проходящему черезъ начало, то одна дуга служитъ дополненіемъ другой до π или отличается отъ него на число, кратное 2π.*

Пусть $BB' \| OA$. Конецъ дуги $\pi - \overset{\frown}{AB}$, отсчитываемой отъ A, лежитъ по только что доказанной теоремѣ въ B'; слѣд. (§ 9) $\overset{\frown}{AB'} = \pi - \overset{\frown}{AB} + 2k\pi$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

§ 13. **Измѣреніе угловъ.** Въ геометріи устанавливается тѣсная связь между измѣреніемъ угловъ и измѣреніемъ дугъ круга. Это достигается тѣмъ, что каждый уголъ разсматривается, какъ *центральный* и доказывается *пропорціональность угловъ и дугъ, имъ соотвѣтствующихъ*, т.-е. заключенныхъ между сторонами угла.

Мѣра угла выражается въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, если соотвѣтственная дуга выражена въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; она выразится отвлеченнымъ числомъ, если мѣра дуги выражается отвлеченнымъ числомъ.

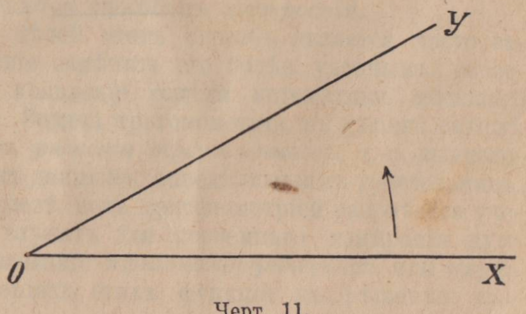
При первомъ способѣ измѣренія *единицей* мѣры угловъ служитъ *угловой градусъ*, т.-е. центральный уголъ, соотвѣтствующій дуговому градусу, и составляющій $^1/_{90}$ прямого угла. Подраздѣленіе углового градуса на минуты и секунды дѣлается такъ же, какъ для дугового градуса.

При второмъ способѣ измѣренія угловой единицей является *центральный уголъ, соотвѣтствующій дугѣ, длина которой равна радіусу.*

Переходъ отъ результатовъ измѣренія угловъ по одному изъ этихъ способовъ къ результатамъ измѣренія по другому совершается по формуламъ, даннымъ въ § 9.

Приближенное выраженіе въ градусахъ, минутахъ и секундахъ угла—единицы есть $57^0\ 17'\ 44'',8$ (съ недостаткомъ).

§ 14. **Уголъ, какъ мѣра вращенія.** Возьмемъ на плоскости два луча Ox и Oy, выходящіе изъ одной точки (черт. 11). Оставляя одинъ изъ нихъ, наприм., Ox неподвижнымъ и вращая другой около точки O, мы будемъ получать различные углы. При этомъ величина угла можетъ служить *мѣрою вращенія* луча Oy и быть совершенно произвольна.



Черт. 11.

Вращеніе около точки O можетъ совершаться въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ: противъ стрѣлки часовъ и по стрѣлкѣ часовъ. Чтобы отличить эти два направленія, примемъ одно изъ нихъ, напр., первое за *поло-*

жительное, а второе — за *отрицательное*. Къ числу, выражающему мѣру угла присоединяется знакъ $+$ или $-$ въ зависимости отъ того, въ положительномъ или отрицательномъ направленіи вращался лучъ Oy для образованія даннаго угла.

Плоскость, на которой указано *положительное* направленіе вращенія (*оріентированная* плоскость) аналогична оріентированному кругу (§ 9).

Если лучъ Ox назовемъ *начальной* стороной угла, а лучъ Oy его *конечной* стороной, то легко видѣть, что *существуетъ безчисленное множество угловъ, имѣющихъ общія начальную и конечную стороны.* Мѣры такихъ угловъ отличаются числами, кратными 2π или 360°, смотря по способу ихъ измѣренія (срав. § 9).

Упражненія къ главѣ II.

1. *Найти въ частяхъ радіуса выраженія дугъ, содержащихъ* 18°; $12^\circ 30'$; $1'$; $10''$.

2. *Ск. градусовъ, минутъ и секундъ содержатъ дуги, мѣры которыхъ въ частяхъ радіуса выражаются числами*: 3; 0,2; 7,5.

3. *Какъ расположены концы дугъ* $a, a+\frac{\pi}{6}, a+\frac{2\pi}{6}, \ldots, a+\frac{12\pi}{6}$, *имѣющихъ одно начало?*

4. *Какъ расположены концы дугъ* $\frac{6\pi}{7}+a$ и $\frac{8\pi}{7}-a$, *отсчитываемыхъ отъ общаго начала?*

5. *Какъ расположены концы дугъ* $\frac{5\pi}{8}+a$ и $\frac{3\pi}{8}-a$, *отсчитываемыхъ отъ общаго начала?*

ГЛАВА III.

Тригонометрическія функціи.

§ 15. **Предметъ тригонометріи.** Три стороны и три угла треугольника называются его *элементами.* Въ геометріи устанавливается существованіе между ними нѣкоторыхъ зависимостей, которыя по отношенію къ построенію треугольниковъ можно формулировать въ видѣ слѣдующихъ предложеній:

1) *по даннымъ тремъ сторонамъ либо можно построить только одинъ треугольникъ, либо нельзя построить ни одного;*

2) *по даннымъ двумъ сторонамъ и острому или тупому углу между ними можно построить только одинъ треугольникъ;*

3) *по данной сторонѣ и двумъ прилежащимъ къ этой сторонѣ угламъ, либо можно построить одинъ только треугольникъ, либо нельзя построить ни одного;*

4) *по даннымъ двумъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ, можно построить либо одинъ, либо два треугольника, либо нельзя построить ни одного;*

5) *по даннымъ тремъ угламъ либо можно построить безчисленное множество треугольниковъ, либо нельзя построить ни одного.*

Изъ этихъ предложеній видно, что для опредѣленія треугольника достаточно знать *три* его элемента, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ есть сторона. Что же касается остальныхъ трехъ элементовъ, то въ геометріи они получаются способомъ *построенія.*

Но для практическихъ цѣлей этотъ способъ является часто затруднительнымъ и стремленіе замѣнить его болѣе удобнымъ способомъ *вычисленія* вызвало появленіе отдѣла математики, носящаго названіе „*тригонометріи*“. Задача тригонометріи, въ узкомъ смыслѣ этого слова, заключается въ *рѣшеніи треугольниковъ*, т.-е. вычисленіи его элементовъ по тремъ даннымъ, опредѣляющимъ треугольникъ.

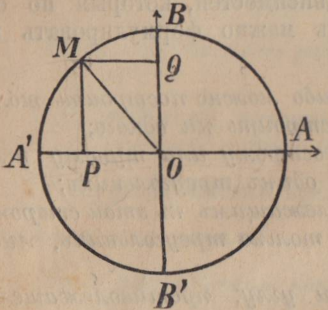
Въ болѣе широкомъ смыслѣ подъ тригонометріей разумѣется ученіе о функціяхъ, которыя служатъ для косвеннаго измѣренія дугъ круга и угловъ и носятъ названіе *тригонометрическихъ* или *круговыхъ* функцій, и о приложеніяхъ этихъ функцій къ рѣшенію треугольниковъ.

Ученіе о тригонометрическихъ функціяхъ составляетъ отдѣлъ, называемый *гоніометріей*; ученіе о приложеніяхъ этихъ функцій къ рѣшенію треугольниковъ—*тригонометрію* въ узкомъ смыслѣ этого слова.

§ 16. **Синусъ и косинусъ дуги.** На окружности круга радіуса R (черт. 12) возьмемъ точку A за начало дугъ; *положительнымъ* направленіемъ будемъ считать *противоположное движенію часовой стрѣлки*, а *отрицательнымъ—совпадающее съ движеніемъ часовой стрѣлки*.

Проведемъ діаметръ $A'OA$ черезъ начало A дугъ и діаметръ $B'OB$, перпендикулярный къ первому. Точку O (центръ круга) примемъ за начало отрѣзковъ, откладываемыхъ на этихъ діаметрахъ, какъ на осяхъ, при чемъ направленія OA и OB будемъ считать положительными.

Пусть x есть мѣра дуги, имѣющей начало въ A и конецъ въ M. Проведя радіусъ OM и проектируя его на діаметры OA и OB, получимъ на нихъ два отрѣзка: OP и OQ.



Черт. 12.

Отношеніе OP/R называется *косинусомъ* дуги x и обозначается знакомъ $\cos x$.

Отношеніе OQ/R называется *синусомъ* дуги x и обозначается знакомъ $\sin x$.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что абсолютная величина и знакъ указанныхъ отношеній не зависятъ отъ величины радіуса R.

Отрѣзки OP и $PM=OQ$ называются соотвѣтственно *линіями косинуса* и *синуса*, а діаметры $A'OA$ и $B'OB$—*осями косинусовъ и синусовъ*.

Изъ опредѣленія косинуса и синуса вытекаютъ слѣдующія заключенія.

1) *косинусъ и синусъ дуги суть числа, выражающія мѣру линій соотвѣтственно косинуса и синуса, когда радіусъ принятъ за единицу*;

2) *косинусъ и синусъ дуги зависятъ только отъ положенія конца дуги относительно ея начала*;

3) *дуги съ одними и тѣми же началомъ и концомъ имѣютъ одинаковые косинусы и одинаковые синусы*.

Послѣднее заключеніе на основаніи § 9 можно выразить слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}\cos(x+2k\pi)&=\cos x,\\ \sin(x+2k\pi)&=\sin x,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

§ 17. **Измѣненіе косинуса.** Прослѣдимъ измѣненіе $\cos x$ при измѣненіи дуги x отъ 0 до 2π.

При $x=0$ точка M (см. черт. 12) совпадаетъ съ A, линія OP косинуса равна R и $\cos x=1$. При возрастаніи x отъ 0 до $\pi/2$ отрѣзокъ OP *уменьшается* отъ R до нуля, а $\cos x$ *уменьшается* отъ 1 до 0.

При возрастанiи x отъ $\pi/2$ до π отрѣзокъ OP становится отрицательнымъ и *уменьшается* отъ 0 до $-R$, а $\cos x$ *уменьшается* отъ 0 до -1.

При возрастанiи x отъ π до $3\pi/2$ линiя OP косинуса *увеличивается* отъ $-R$ до 0, а $\cos x$ *возрастаетъ* отъ -1 до 0.

Наконецъ при возрастанiи x отъ $3\pi/2$ до 2π линiя OP косинуса *возрастаетъ* отъ 0 до R, а $\cos x$ *возрастаетъ* отъ 0 до 1.

При дальнѣйшемъ возрастанiи дуги значенiя косинуса повторяются въ прежнемъ порядкѣ (§ 16).

§ 18. **Измѣненiе синуса.** При $x=0$ точка M совпадаетъ съ A, точка Q — съ O и линiя OQ синуса равна нулю. Поэтому $\sin 0=0$.

При возрастанiи дуги отъ 0 до $\pi/2$ точка M движется по окружности отъ A къ B и достигаетъ B при $x=\pi/2$; точка Q при этомъ движется отъ O къ B и достигаетъ B при $x=\pi/2$.

Линiя OQ синуса *увеличивается* отъ *нуля* до R, а *синусъ* дуги *увеличивается* отъ 0 до 1.

При возрастанiи дуги отъ $\pi/2$ до π точка M движется отъ B къ A', а точка Q отъ B къ O. Линiя OQ синуса *уменьшается* отъ отъ R до 0, а *синусъ* дуги *уменьшается* отъ 1 до 0.

При дальнѣйшемъ возрастанiи дуги отъ π до $3\pi/2$ точка M движется отъ A' къ B', а точка Q — отъ O къ B'. Линiя OQ синуса *уменьшается* отъ 0 до $-R$, а *синусъ* дуги *уменьшается* отъ 0 до -1.

При возрастанiи дуги отъ $3\pi/2$ до 2π точка M движется отъ B' къ A, а точка Q — отъ B' къ O. Линiя OQ синуса *увеличивается* отъ $-R$ до 0, а *синусъ* дуги *увеличивается* отъ -1 до 0.

При дальнѣйшемъ возрастанiи дуги значенiя синуса повторяются въ прежнемъ порядкѣ (§ 16).

§ 19. **Заключенiя объ измѣненiяхъ косинуса и синуса.** Изъ сказаннаго въ §§ 17 и 18 объ измѣненiяхъ косинуса и синуса вытекаютъ слѣдующiя заключенiя:

1) *значенiя косинуса и синуса измѣняются въ предѣлахъ отъ -1 до $+1$;*

2) *перемѣна знака у косинуса и синуса происходитъ при переходѣ ихъ черезъ нуль;*

3) *если $\cos x=0$, то $\sin x=\pm 1$; если $\sin x=0$, то $\cos x=\pm 1$;*

4) *возрастанiю абсолютной величины синуса соотвѣтствуетъ убыванiе абсолютной величины косинуса и наоборотъ.*

Дiаметрами $A'OA$ и $B'OB$ окружность дѣлится на 4 равныя части. Назовемъ дуги AB, BA', $A'B'$ и $B'A$ соотвѣтственно *первой*, *второй*, *третьей* и *четвертой* четвертями окружности.

Заключенiе о знакахъ косинуса и синуса можно формулировать такъ:

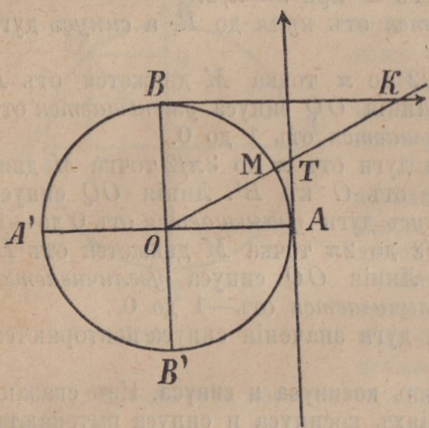
5) *косинусы дугъ, имѣющихъ конецъ въ первой и четвертой четвертяхъ окружности, положительны, а косинусы дугъ, оканчивающихся во второй и третьей четвертяхъ окружности, отрицательны; синусы дугъ, оканчивающихся въ первой и второй четвертяхъ окружности, положительны, а синусы дугъ, оканчивающихся въ третьей и четвертой четвертяхъ окружности, отрицательны.*

Косинусъ и синусъ дуги суть *функцiи* дуги круга (§ 5). Такъ какъ независимымъ перемѣннымъ служитъ *дуга круга*, то эти функціи называются *круговыми*. Онѣ называются также *тригонометрическими* по ихъ приложеніямъ къ рѣшенію треугольниковъ.

Функція $f(x)$ перемѣннаго x, обладающая тѣмъ свойствомъ, что $f(x+\omega)=f(x)$, гдѣ ω есть нѣкоторое *постоянное* число, а x обозначаетъ произвольное значеніе перемѣннаго, называется *періодической* функціей x, а число ω—*періодомъ* этой функціи. Изъ опредѣленія періодической функціи слѣдуетъ, что $f(x+n\omega)=f(x)$, гдѣ n обозначаетъ *цѣлое* число или *нуль*.

Формулы (1) показываютъ, что *косинусъ и синусъ суть періодическія функціи съ періодомъ* 2π *(или* 360^0*)*.

§ 20 **Тангенсъ и котангенсъ дуги.** Проведемъ въ точкахъ A и B (черт. 13) касательныя къ кругу и будемъ ихъ разсматривать, какъ *оси*, положительныя направленія которыхъ совпадаютъ соотвѣтственно съ положительными направленіями *оси синусовъ и оси косинусовъ*. Касательную въ точкѣ A назовемъ *осью тангенсовъ*, а касательную въ точкѣ B—*осью котангенсовъ*. Пусть радіусъ OM, проведенный въ конецъ M дуги x пересѣкаетъ ось тангенсовъ въ точкѣ T, а ось котангенсовъ въ точкѣ K.



Черт. 13.

Отрѣзокъ AT называется *линіей тангенса* дуги x, а отношеніе AT/R—*тангенсомъ* ея. Тангенсъ дуги x обозначается знакомъ: $\tan x$.

Отрѣзокъ BK называется *линіей котангенса* дуги x, а отношеніе BK/R—*котангенсомъ* ея. Котангенсъ дуги x обозначается знакомъ: $\cot x$.

§ 21. **Измѣненія тангенса и котангенса.** Для дуги $x=0$ точки M и T совпадаютъ съ A, а точка K, какъ пересѣченіе двухъ параллельныхъ прямыхъ (OA и касательной въ точкѣ B), есть безконечно удаленная точка. Поэтому $\tan 0=0$, $\cot 0=\infty$.

При возрастаніи x отъ 0 до $\pi/2$ точка T удаляется отъ точки A въ положительномъ направленіи къ безконечно удаленной точкѣ прямой, а точка K приближается къ точкѣ B, съ которой и совпадаетъ при $x=\pi/2$. Линія AT тангенса *возрастаетъ* отъ 0 до ∞, а линія BK котангенса *убываетъ* отъ ∞ до 0. Поэтому *тангенсъ* дуги при измѣненіи ея отъ 0 до $\pi/2$ *увеличивается* отъ 0 до ∞, а *котангенсъ* ея *уменьшается* отъ ∞ до 0.

При возрастаніи дуги отъ $\pi/2$ до π точка T появляется *по другую сторону* точки A и двигается по направленію къ A, а точка K переходитъ точку B и начинаетъ двигаться отъ точки B въ *отрицательномъ* направленіи. При $x=\pi$ точка T совпадаетъ съ точкой A, а точка K—съ безконечно удаленной точкой оси котангенсовъ.

Поэтому *тангенсъ* дуги при измѣненіи ея отъ $\pi/2$ до π *увеличивается* отъ $-\infty$ до 0, а *котангенсъ* ея *уменьшается* отъ 0 до $-\infty$.

При дальнѣйшемъ возрастаніи дуги значенія тангенса и котангенса повторяются въ прежней послѣдовательности.

Изъ опредѣленій тангенса и котангенса (§ 20) и изъ приведеннаго изслѣдованія ихъ измѣненій вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *тангенсъ и котангенсъ дуги суть числа, выражающія мѣру линій соотвѣтственно тангенса и котангенса, когда радіусъ принятъ за единицу;*

2) *тангенсъ и котангенсъ дуги зависятъ только отъ положенія конца дуги относительно ея начала;*

3) *значенія тангенса и котангенса измѣняются отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$;

4) *перемѣна знака у значеній тангенса и котангенса совершается при переходѣ ихъ черезъ нуль и черезъ безконечность;*

5) *если* $\tan x = 0$, *то* $\cot x = \mp\infty$; *если* $\cot x = 0$, *то* $\tan x = \mp\infty$;

6) *знаки тангенса и котангенса всегда одинаковы;*

7) *для дугъ, оканчивающихся въ первой четверти окружности, тангенсъ и котангенсъ имѣютъ положительныя значенія, а для дугъ, оканчивающихся во второй четверти, отрицательныя;*

8) *тангенсъ при возрастаніи дуги всегда возрастаетъ, а котангенсъ всегда убываетъ;*

9) *тангенсъ и котангенсъ суть круговыя или тригонометрическія функціи* (§ 19);

10) *тангенсъ и котангенсъ суть періодическія* (§ 19) *функціи съ періодомъ* π:

$$\left.\begin{aligned}\tan(x+k\pi)&=\tan x;\\ \cot(x+k\pi)&=\cot x,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

гдѣ k *есть цѣлое число или нуль;*

§ 22. Секансъ и косекансъ дуги. Черезъ конецъ M дуги x проведемъ касательную (черт. 14); пусть она пересѣкаетъ ось косинусовъ въ точкѣ S и ось синусовъ въ точкѣ C. Отрѣзокъ OS называется линіей *секанса* дуги x, а отношеніе OS/R—ея *секансомъ*; секансъ дуги x обозначается знакомъ $\sec x$.

Черт. 14.

Отрѣзокъ OC называется линіей *косеканса* дуги x, а отношеніе OC/R — ея *косекансомъ*; косекансъ дуги x обозначается знакомъ: $\operatorname{cosec} x$.

Соотвѣтственно новымъ отрѣзкамъ оси косинусовъ и синусовъ получаютъ названія *осей секансовъ* и *косекансовъ*. Положительныя направленія осей сохраняются прежнія.

§ 23. **Измѣненія секанса и косеканса**. Для дуги $x=0$ точки M и S совпадаютъ съ A, а точка C, какъ пересѣченіе двухъ параллельныхъ (оси синусовъ и касательной въ точкѣ A), есть безконечно удаленная точка этихъ прямыхъ.

Линія OS секанса равна R, а линія OC косеканса безконечно велика. Поэтому $\sec 0=1$; $\operatorname{cosec} 0=\infty$.

При возрастаніи x отъ 0 до $\pi/2$ точка S движется отъ A въ положительномъ направленіи, а точка C приближается къ B, двигаясь въ отрицательномъ направленіи; линія OS секанса *возрастаетъ* отъ R до ∞, а линія OC косеканса *убываетъ* отъ ∞ до R. Поэтому секансъ дуги *возрастаетъ* отъ 1 до ∞, а косекансъ *убываетъ* отъ ∞ до 1.

При возрастаніи дуги отъ $\pi/2$ до π точка S появляется по другую (лѣвую) сторону центра O и движется въ *положительномъ* направленіи къ точкѣ A', а точка C движется въ *положительномъ* направленіи отъ точки B; линія OS возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-R$, а линія OC косеканса возрастаетъ отъ R до ∞. Слѣд., секансъ *увеличивается* отъ $-\infty$ до -1, а косекансъ *увеличивается* отъ 1 до ∞.

При возрастаніи дуги отъ π до $3\pi/2$ точка S движется отъ точки A' въ *отрицательномъ* направленіи, а точка C появляется по другую (нижнюю) сторону точки O и движется въ *положительномъ* направленіи къ точкѣ B'; линія OS секанса *убываетъ* отъ $-R$ до $-\infty$, а линія OC секанса *возрастаетъ* отъ $-\infty$ до $-R$. Поэтому секансъ дуги *убываетъ* отъ -1 до $-\infty$, а косекансъ ея *возрастаетъ* отъ $-\infty$ до -1.

При возрастаніи дуги отъ $3\pi/2$ до 2π точка S снова появляется на правой сторонѣ отъ точки O и движется къ точкѣ A въ *отрицательномъ* направленіи, а точка C движется въ *отрицательномъ* направленіи отъ точки B'; линія OS секанса *убываетъ* отъ $+\infty$ до R, а линія OC косеканса *убываетъ* отъ $-R$ до $-\infty$. Поэтому секансъ дуги *уменьшается* отъ ∞ до 1, а косекансъ ея уменьшается отъ -1 до $-\infty$.

При дальнѣйшемъ возрастаніи дуги значенія секанса и косеканса повторяются въ прежней послѣдовательности.

Изъ опредѣленій и изслѣдованія измѣненій секанса и косеканса вытекаютъ слѣдующія заключенія:

1) *секансъ и косекансъ суть числа, выражающія мѣру соотвѣтственно линіи секанса и линіи косеканса, когда радіусъ принятъ за единицу*;

2) *значенія секанса и косеканса зависятъ только отъ положенія конца дуги относительно ея начала*;

3) *секансъ и косекансъ измѣняются въ предѣлахъ отъ* $-\infty$ *до* -1 *и отъ* 1 *до* $+\infty$;

4) *перемѣна знаковъ у значеній секанса и косеканса совершается при переходѣ ихъ черезъ безконечно большое значеніе*;

5) *знакъ секанса совпадаетъ со знакомъ косинуса, а знакъ косеканса со знакомъ синуса*;

6) *возрастаніе и убываніе секанса соотвѣтствуетъ убыванію и возрастанію косинуса, а возрастаніе и убываніе косеканса—убыванію и возрастанію синуса; безконечныя значенія секанса и косеканса соотвѣтствуютъ нулевымъ значеніямъ косинуса и синуса;*

7) *секансъ и косекансъ суть круговыя или тригонометрическія* (§ 19) *функціи;*

8) *секансъ и косекансъ суть періодическія* (19) *функціи съ періодомъ* 2π:

$$\left.\begin{aligned} \sec(x+2k\pi)&=\sec x,\\ \operatorname{cosec}(x+2k\pi)&=\operatorname{cosec} x,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots \tag{3}$$

гдѣ k *есть цѣлое число или нуль;*

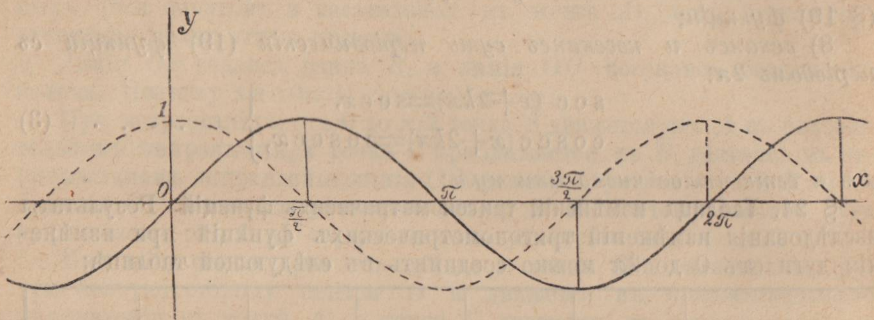
§ 24. **Таблица измѣненій тригонометричесихъ функцій.** Результаты изслѣдованія измѣненій тригонометрическихъ функцій при измѣненіи дуги отъ 0 до 2π можно соединить въ слѣдующей таблицѣ:

x	$\sin x$		$\cos x$		$\tan x$		$\cot x$		$\sec x$		$\operatorname{cosec} x$	
0	0		1		0		$\mp\infty$		1		$\mp\infty$	
$0<x<\frac{\pi}{2}$	$+$	возрастаетъ;	$+$	убываетъ;	$+$	возрастаетъ;	$+$	убываетъ;	$+$	возрастаетъ;	$+$	убываетъ;
$\frac{\pi}{2}$	1		0		$\pm\infty$		0		$\pm\infty$		1	
$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$+$	убываетъ;	$-$	убываетъ;	$-$	возрастаетъ;	$-$	убываетъ;	$-$	возрастаетъ;	$+$	возрастаетъ;
π	0		-1		0		$\pm\infty$		-1		$\pm\infty$	
$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$-$	убываетъ;	$-$	возрастаетъ;	$+$	возрастаетъ;	$+$	убываетъ;	$-$	убываетъ;	$-$	возрастаетъ;
$\frac{3\pi}{2}$	-1		0		$\pm\infty$		0		$\mp\infty$		-1	
$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	$-$	возрастаетъ;	$+$	возрастаетъ;	$-$	возрастаетъ;	$-$	убываетъ;	$+$	убываетъ;	$-$	убываетъ;
2π	0		1		0		$\mp\infty$		1		$\mp\infty$	

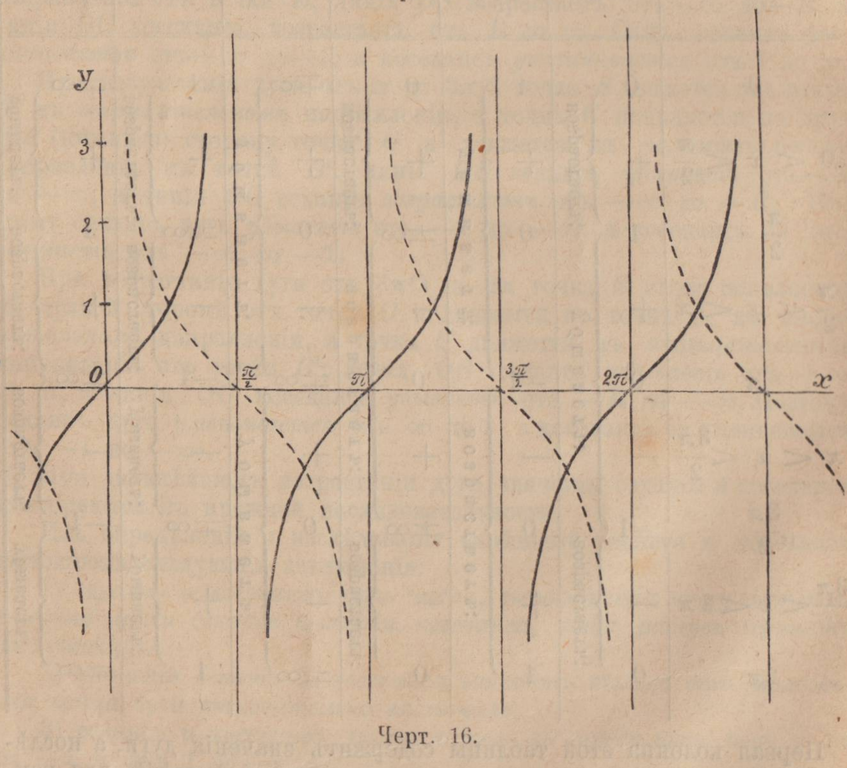
Первая колонна этой таблицы содержитъ значенія дуги, а послѣдующія 6—значенія шести тригонометрическихъ функцій для концевъ четвертей окружности, указанія знаковъ ихъ значеній въ предѣлахъ каждой четверти и характера ихъ измѣненій при возрастаніи дуги.

§ 25. **Графики тригонометрическихъ функцій.** Измѣненія тригонометрическихъ функцій можно представить графически, вычерчивая ихъ графики, т.-е. кривыя, опредѣляемыя уравненіями:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \cot x,\ y = \sec x,\ y = \operatorname{cosec} x.$$



Черт. 15.

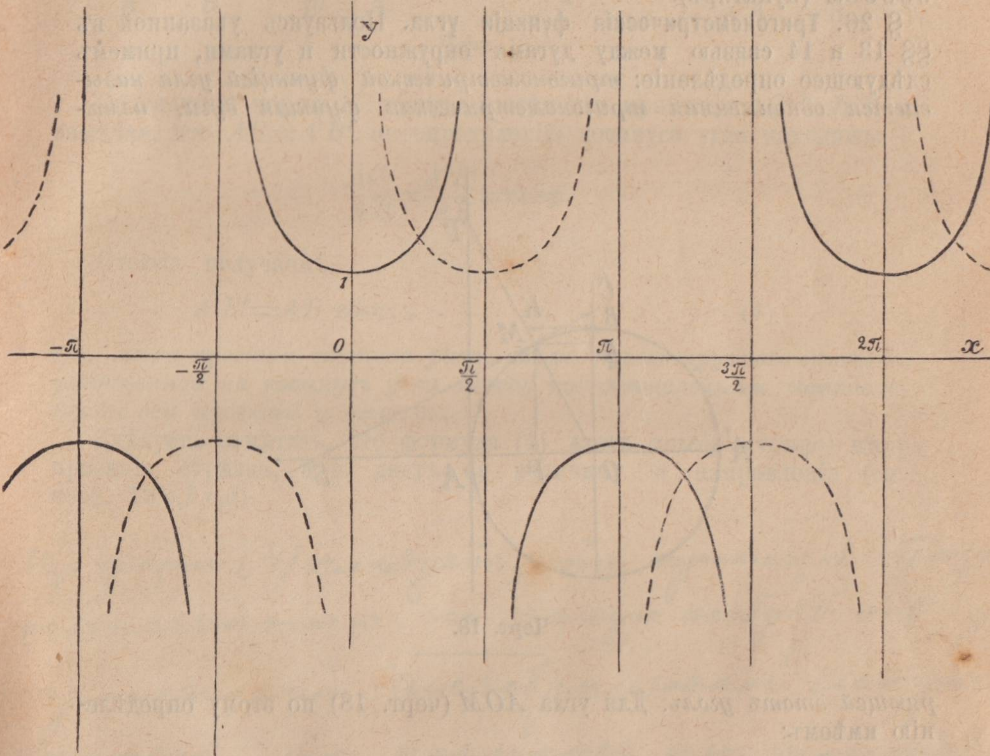


Черт. 16.

Для того, чтобы построить графикъ функціи $\sin x$, будемъ откладывать на оси абсциссъ отрѣзки, представляющіе въ извѣстномъ масштабѣ мѣры дугъ, а на перпендикулярахъ къ оси абсциссъ, возставленныхъ въ концахъ этихъ отрѣзковъ, отрѣзки, представляющіе соотвѣтственныя значенія синуса.

Концы построенныхъ такимъ образомъ перпендикуляровъ лежатъ на кривой, каждая точка которой своей абсциссой даетъ значеніе дуги, а своей ординатой—значеніе синуса этой дуги. *) Эта кривая имѣетъ волнообразную форму (черт. 15) и называется *синусоидой*.

Синусоида лежитъ между двумя прямыми, параллельными оси абсциссъ и лежащими на разстояніи ± 1 отъ нея.



Черт. 17.

Эти прямыя служатъ касательными къ синусоидѣ: прямая $y=1$ въ точкахъ, абсциссы которыхъ суть $\pi/2+2k\pi$, а прямая $y=-1$ въ точкахъ, абсциссы которыхъ суть $3\pi/2+2k\pi$. Этимъ графически указывается то, что $\sin x$ измѣняется отъ -1 до $+1$.

Періодичность синуса на чертежѣ выражается тѣмъ, что синусоида состоитъ изъ безчисленнаго множества *одинаковыхъ* волнъ, разстояніе между концами которыхъ равно 2π.

Совершенно также строятся графики остальныхъ функцій.

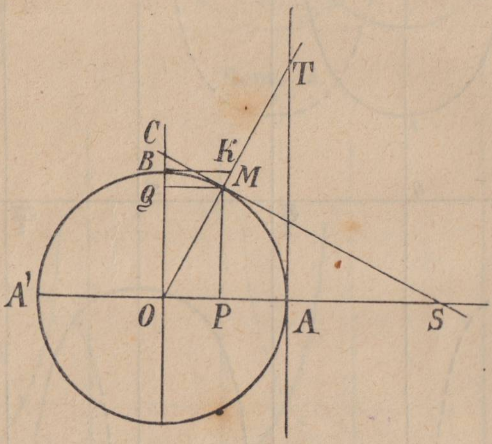
---

*) О непрерывности тригонометрическихъ функцій см. § 58.

При этомъ нужно замѣтить, что періодичность функцій, имѣющихъ безконечно большія значенія ($\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$), характеризуется тѣмъ, что соотвѣтственныя кривыя состоятъ изъ безчисленнаго множества одинаковыхъ отдѣльныхъ *вѣтвей*, разстоянія между которыми по оси x равны періоду функціи.

На черт. 15 представленъ графикъ $\cos x$ (пунктиръ); черт. 16 представляетъ графикъ $\tan x$ (сплошная линія) и $\cot x$ (пунктиръ); черт. 17 представляетъ графикъ $\sec x$ (сплошная линія) и графикъ $\operatorname{cosec} x$ (пунктиръ).

§ 26. **Тригонометрическія функціи угла.** Пользуясь указанной въ §§ 13 и 14 связью между дугами окружности и углами, примемъ слѣдующее опредѣленіе: *тригонометрической функціей угла называется одноименная тригонометрическая функція дуги, измѣ-*



Черт. 18.

ряющей этотъ уголъ. Для угла AOM (черт. 18) по этому опредѣленію имѣемъ:

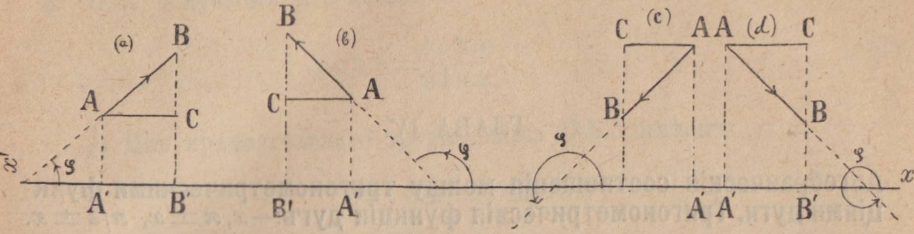
$$\cos \widehat{AOM} = OP/R;\ \sin \widehat{AOM} = OQ/R;\ \tan \widehat{AOM} = AT/R;$$

$$\cot \widehat{AOM} = BK/R;\ \sec \widehat{AOM} = OS/R;\ \operatorname{cosec} \widehat{AOM} = OC/R.$$

§ 27. **Мѣра проекціи отрѣзка.** Данное въ предыдущемъ § опредѣленіе позволяетъ выразить въ простой формѣ зависимость между мѣрой отрѣзка и мѣрой его ортогональной проекціи на какую нибудь ось.

Пусть AB и $A'B'$ (черт. 19) суть отрѣзокъ и его проекція на ось $x'x$. Уголъ между положительными направленіями оси проекцій и отрѣзка обозначимъ черезъ φ. Проведя черезъ точку A прямую

AC, параллельную оси проекцій, получимъ уголъ CAB, равный φ.



Черт. 19.

Обозначивъ черезъ C точку пересѣченія прямыхъ AC и BB' и замѣчая, что $AC = A'B'$, по опредѣленію косинуса угла находимъ:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \cos\varphi.$$

Отсюда получаемъ

$$A'B' = AB\cos\varphi, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

т.-е. *мѣра проекціи отрѣзка равна мѣрѣ проектируемаго отрѣзка, умноженной на косинусъ угла между положительными направленіями оси проекцій и отрѣзка.*

Слѣдуетъ замѣтить, что формула (4) даетъ *алгебраическую* мѣру проекціи отрѣзка, т.-е. даетъ ея величину и направленіе (см. черт. 19 a, b, c, d).

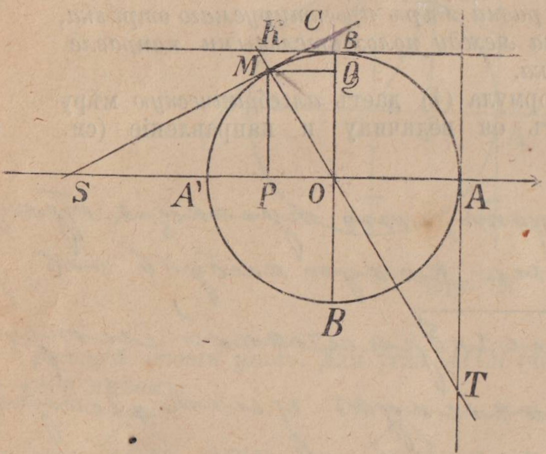
ГЛАВА IV.

Алгебраическія соотношенія между тригонометрическими функціями дуги. Тригонометрическія функціи дугъ: $-x, \pi \pm x, \pi/2 \pm x$.

§ 28. **Алгебраическія соотношенія между тригонометрическими функціями дуги или угла.** Для вывода соотношеній между тригонометрическими функціями дуги $AM = x$ разсмотримъ тѣ фигуры, элементами которыхъ служатъ ея тригонометрическія линіи (черт. 20).

a) Изъ прямоугольнаго треугольника MPO имѣемъ:

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 \text{ или } \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = 1.$$



Черт. 20.

Но отношенія, входящія въ послѣднее уравненіе, представляютъ абсолютныя значенія синуса и косинуса дуги $AM = x$. Такъ какъ въ это уравненіе входятъ только *квадраты* указанныхъ отношеній, то его можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ldots (5)$$

b) Изъ подобія треугольниковъ OMP и OAT находимъ:

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OA}{OP};$$

отсюда получаемъ:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OA} : \frac{OP}{OA}.$$

Но отношенія AT/OA, PM/OA и OP/OA равны соотвѣтственно $|\tan x|$, $|\sin x|$ и $|\cos x|$. Поэтому $|\tan x| = |\sin x/\cos x|$. Но изъ таблицы измѣненій $\sin x$, $\cos x$ и $\tan x$ (§ 24) легко видѣть, что знакъ $\tan x$ всегда совпадаетъ со знакомъ отношенія $\sin x/\cos x$. Слѣдовательно, для всякой дуги имѣемъ равенство:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Совершенно аналогично изъ разсмотрѣнія треугольниковъ OMQ и OBK получаемъ равенство:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

c) Изъ прямоугольнаго треугольника OMS имѣемъ:

$$OS : OM = OM : OP;$$

отсюда находимъ:

$$\frac{OS}{OM} = 1 : \frac{OP}{OM}.$$

Отношенія OS/OM и OP/OM равны соотвѣтственно $|\sec x|$ и $|\cos x|$. Изъ написаннаго равенства слѣдуетъ, что $\sec x$ и $1/\cos x$ равны по *абсолютной величинѣ*. Но извѣстно (§ 23), что $\sec x$ и $\cos x$ имѣютъ всегда одинаковые знаки. Поэтому

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Подобнымъ же образомъ изъ треугольника OMC находимъ, что

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Полученныя *пять* уравненій между *шестью* тригонометрическими функціями дуги представляютъ *всѣ независимыя* другъ отъ друга соотношенія между ними. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что существуетъ еще шестое уравненіе, не являющееся слѣдствіемъ первыхъ пяти, мы получили бы шесть уравненій, изъ которыхъ можно было бы найти числовыя значенія всѣхъ шести тригонометрическихъ функцій независимо отъ значенія перемѣннаго x, т.-е. для всѣхъ дугъ тригонометрическія функціи имѣли бы одинаковыя значенія, что противорѣчитъ опредѣленію функцій.

Изъ слѣдствій формулъ 5—9 полезно запомнить слѣдующія:

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Выводъ этихъ формулъ, какъ изъ формулъ 5—9, такъ и непосредственно изъ фигуръ, содержащихъ тригонометрическія линіи, представляетъ весьма полезное упражненіе.

§ 29. **Тригонометрическія функціи дуги** $-x$. Дуги x и $-x$ при одномъ началѣ имѣютъ концами точки, симметричныя относительно оси косинусовъ (§§ 10, 16). Поэтому изъ опредѣленія синуса, косинуса и тангенса (§§ 16, 20) вытекаютъ слѣдующія равенства:

$$\sin(-x) = -\sin x;\ \cos(-x) = \cos x;\ \tan(-x) = -\tan x.\ .\ .\ (13)$$

Значенія $\cot(-x)$, $\sec(-x)$ и $\operatorname{cosec}(-x)$ легко опредѣлить изъ формулъ (10), (8) и (9).

§ 30. **Тригонометрическія функціи дугъ:** $\pi \mp x$. Такъ какъ дуги x и $\pi + x$ при одномъ началѣ имѣютъ концами діаметрально противоположныя точки (§ 11), то (§§ 16, 20)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x;\ \cos(\pi + x) = -\cos x;\ \tan(\pi + x) = \tan x \ldots (14)$$

Дуги x и $\pi - x$ при одномъ началѣ имѣютъ концами точки, симметричныя относительно оси синусовъ (§§ 12, 16). Поэтому

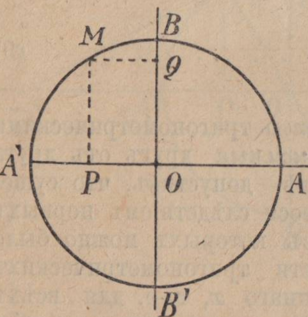
$$\sin(\pi - x) = \sin x;\ \cos(\pi - x) = -\cos x;\ \tan(\pi - x) = -\tan x \ldots (15)$$

§ 31. **Тригонометрическія функціи дуги** $\pi/2 - x$. Двѣ дуги, x и $\pi/2 - x$, сумма которыхъ равна $\pi/2$, называются *дополнительными* одна другой до $\pi/2$. Чтобы найти соотношенія между тригонометрическими функціями такихъ дугъ, можно воспользоваться произволомъ какъ въ выборѣ начала дугъ, такъ и въ выборѣ того направленія, которое мы считаемъ положительнымъ.

Въ кругѣ произвольнаго радіуса проведемъ два взаимно перпендикулярныхъ діаметра $A'A$ и $B'B$ (черт. 21). Точку A примемъ за *начало* дугъ и *положительнымъ* будемъ считать направленіе, *противоположное движенію часовой стрѣлки*. При этихъ условіяхъ дуга $AB = +\pi/2$.

Изъ чертежа легко видѣть, что двѣ дуги AM и MB, изъ которыхъ первая совершенно произвольна, составляютъ въ суммѣ дугу AB. Дуга MB есть дополнительная до $\pi/2$ дуги AM.

За *начало дополнительныхъ* дугъ возьмемъ точку B, а *положительнымъ* будемъ считать направленіе, *совпадающее съ направленіемъ движенія часовой стрѣлки*.



Черт. 21.

Чтобы получить дугу MB, принимая за начало точку B, достаточно замѣтить, что $\overset{\frown}{MB} = -\overset{\frown}{BM}$. Дугу же $-BM$ можно замѣнить суммою дугъ $\overset{\frown}{BA}$ и $\overset{\frown}{AM}$. Если x есть мѣра одной изъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M, то мѣра одной изъ дугъ съ началомъ въ B и концомъ въ M есть $\pi/2 - x$, при чемъ приняты во вниманіе указанныя выше условія относительно выбора положительнаго направленія дугъ, имѣющихъ начало въ A, и дугъ, имѣющихъ начало въ B.

При перенесеніи начала дугъ изъ точки A въ точку B и при перемѣнѣ условій относительно положительнаго направленія дугъ мѣняются ролями соотвѣтственно оси синусовъ и косинусовъ, оси тангенсовъ и котангенсовъ, оси секансовъ и косекансовъ, но положительныя направленія на этихъ осяхъ сохраняются прежнія.

Изъ этого слѣдуетъ, что

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x; & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x; \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x; & \cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x; \\ \sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cosec} x; & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x. \end{array}\right\}\ldots (16)$$

§ 32. **Тригонометрическія функціи дуги** $\pi/2+x$. Такъ какъ формулы (16) имѣютъ мѣсто для произвольныхъ значеній x, то въ нихъ можно x замѣнить черезъ $-x$. Сдѣлавъ это и принявъ во вниманіе формулы (13), получимъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x; & \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x; \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cot x; & \cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan x; \\ \sec\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cosec} x; & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sec x. \end{array}\right\}\ldots (17)$$

§ 33. **Приведеніе аргумента тригонометрическихъ функцій къ простѣйшему**. Періодичность тригонометрическихъ функцій и формулы 13—17 позволяютъ привести вопросъ о вычисленіи тригонометрическихъ функцій произвольной дуги къ вычисленію ихъ для дугъ *положительныхъ и не большихъ* $\pi/4$, или при градусныхъ измѣреніяхъ *не большихъ* 45^0.

Наприм., дуга $19\pi/3$ можетъ быть приведена къ дугѣ, меньшей $\pi/4$, слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{19\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=3.2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Поэтому

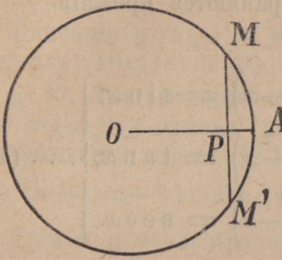
$$\sin\frac{19\pi}{3}=\sin\left[3.2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6};$$

$$\cos\frac{19\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6};\ \tan\frac{19\pi}{3}=\cot\frac{\pi}{6} \text{ и т. д.}$$

Для дуги -375^0 находимъ: $-375^0=-360^0-15^0$; поэтому

$$\sin(-375^0)=\sin(-15^0)=-\sin 15^0; \cos(-375^0)=\cos 15^0 \text{ и т. д.}$$

§ 34. **Значенія тригонометрическихъ функцій нѣкоторыхъ дугъ.** Въ ментарной геометріи приводятся выраженія сторонъ квадрата, правильныхъ треугольника, пятиугольника, шестиугольника, и десятиугольника, вписанныхъ въ кругъ, черезъ радіусъ этого круга. Эти выраженія даютъ возможность вычислить тригонометрическія функціи половинъ дугъ, стягиваемыхъ сторонами этихъ многоугольниковъ, или половинъ ихъ центральныхъ угловъ.



Черт. 22.

Пусть $M'M$ есть какая-нибудь хорда въ кругѣ радіуса R (черт. 22) и OA—радіусъ, къ ней перпендикулярный и пересѣкающій ее въ точкѣ P. По извѣстному свойству радіуса, перпендикулярнаго къ хордѣ, имѣемъ равенства:

$$\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{M'M} \text{ и } \widehat{AM}=\frac{1}{2}\widehat{M'M}.$$

Поэтому (§ 16)

$$\sin\widehat{AM}=\sin\angle AOM=\frac{PM}{R}=\frac{M'M}{2R} \quad \ldots.$$

Приложимъ эту формулу къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ.

a) Если $M'M$ есть сторона квадрата, вписаннаго въ кругъ радіуса R, то $M'M=R\sqrt{2}$, $\widehat{AM}=\pi/4$ (или 45^0). По формулѣ (α) находимъ:

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

b) Если $M'M$ есть сторона правильнаго шестиугольника, вписаннаго въ кругъ, то $M'M=R$ и $\widehat{A'M}=\pi/6$ (или 30^0). По формулѣ (α) получимъ:

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

c) Если $M'M$ есть сторона правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругъ, то $M'M=R\sqrt{3}$ и $\widehat{AM}=\pi/3$ (или 60^0). Формула (α) даетъ:

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

d) Если $M'M$ есть сторона правильнаго десятиугольника, вписаннаго въ кругъ, то $M'M=R(\sqrt{5}-1)/2$ и $\widehat{AM}=\pi/10$ (или 18^0). По формулѣ (α) находимъ:

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1).$$

e) Если $M'M$ есть сторона правильнаго пятиугольника, вписаннаго въ кругъ, то $M'M = R\sqrt{10-2\sqrt{5}}/2$ и $\widehat{AM} = \pi/5$ (или 36^0). По формулѣ (α) находимъ:

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

f) Если $M'M$ есть сторона правильнаго двѣнадцатиугольника, то $M'M = R\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)/2$ и $\widehat{AM} = \pi/12$ (или 15^0). Формула (α) даетъ:

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Зная значенiе синусовъ дугъ, легко найти значенiя остальныхъ тригометрическихъ функцiй этихъ дугъ при помощи формулъ 5—9 и тригонометрическiя функцiи дугъ, дополнительныхъ до $\pi/2$ (или 90^0) (форм. 16).

Сдѣлавъ это, можно результаты вычисленiй соединить въ слѣдующей таблицѣ:

	sin	cos	tan	cot	
$\frac{1}{12}\pi$ (или 15^0)	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}\pi$ (или 75^0)
$\frac{1}{10}\pi$ (или 18^0)	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{\ }}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}\pi$ (или 72^0)
$\frac{1}{6}\pi$ (или 30^0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\pi$ (или 60^0)
$\frac{1}{5}\pi$ (или 36^0)	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\frac{3}{10}\pi$ (или 54^0)
$\frac{1}{4}\pi$ (или 45^0)	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\frac{1}{4}\pi$ (или 45^0)
	cos	sin	cot	tan	

Верхнiя названiя колоннъ соотвѣтствуютъ значенiямъ дугъ, помѣщеннымъ въ первой колоннѣ, а нижнiя—помѣщеннымъ въ послѣдней колоннѣ.

Упражненія къ главѣ IV.

1. *Выразить тригонометрическія функціи дуги x черезъ* $\sin x$.

2. *Выразить тригонометрическія функціи дуги x черезъ* $\cos x$.

3. *Выразить тригонометрическія функціи дуги x черезъ* $\tan x$.

Найти тригонометрическія функціи дуги x по слѣдующимъ даннымъ:

4. $\cos x = \frac{3}{5},\ 0 < x < \frac{\pi}{2};$

5. $\sin x = \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2} < x < \pi;$

6. $\tan x = -\frac{60}{11},\ -\frac{\pi}{2} < x < 0.$

7. *Выразить тригонометрическія функціи дуги 1735° черезъ функціи наименьшей положительной дуги.*

8. *Та же задача для дуги* $-\frac{15}{8}\pi$.

Показать справедливость слѣдующихъ тождествъ:

9. $\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}.$

10. $\tan x\,(1-\cot^2 x) + \cot x\,(1-\tan^2 x) = 0.$

11. $\tan x + \cot x = \sec x \,.\, \operatorname{cosec} x.$

12. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x.$

13. $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1+\cot x}{1-\cot x}.$

14. $\frac{\tan x + \cot^2 x}{\tan x - \cot^2 x} = \frac{\tan^3 x + 1}{\tan^3 x - 1}.$

15. $1 + \sin x + \cos x + \tan x = (1+\cos x)(1+\tan x)$

16. $\cot^2 x \,.\, \cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x.$

17. $\sec^2 x \,.\, \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x.$

18. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2.$

19 $2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x) = -1.$

20. $\cos^4 x - \cos^2 x = \sin^4 x - \sin^2 x.$

ГЛАВА V.

Циклометрическія функціи.

§ 35. **Обратныя функціи. Циклометрическія функціи.** Въ § 5 было указано общее выраженіе функціональной зависимости между двумя перемѣнными x и y въ видѣ уравненія: $y=f(x)$. Это уравненіе показываетъ, что x принимается за независимое перемѣнное, а y за его функцію. Задача о выраженіи x въ функціи y называется *обращеніемъ* функціи f, а получаемая при этомъ функція — *обратной* функціи f.

Задача обращенія тригонометрическихъ функцій состоитъ въ опредѣленіи дуги по значенію которой-нибудь изъ ея тригонометрическихъ функцій и приводитъ къ новымъ функціямъ, которыя называются *обратными круговыми* или *циклометрическими* функціями. Такихъ функцій шесть: 1) arccos$x$ (читать: *аркусъ косинусъ* x) обозначаетъ дугу (*arcus*), *косинусъ* которой равенъ x; 2) arcsin$x$ обозначаетъ дугу, *синусъ* которой равенъ x; 3) arctan$x$ обозначаетъ дугу, *тангенсъ* которой равенъ x; 4) arccot$x$ обозначаетъ дугу, *котангенсъ* которой равенъ x; 5) arcsec$x$ обозначаетъ дугу, которой *секансъ* равенъ x; 6) arccosec$x$ обозначаетъ дугу, которой *косекансъ* равенъ x *).

Существуютъ два способа опредѣленія дуги по значенію ея тригонометрической функціи: способъ *построенія* и способъ *вычисленія*. Въ настоящей главѣ разсматривается рѣшеніе задачи первымъ способомъ.

Для построенія дуги, данной значеніемъ одной изъ тригонометрическихъ функцій, будемъ пользоваться оріентированнымъ кругомъ радіуса 1 съ проведенными осями тригонометрическихъ линій.

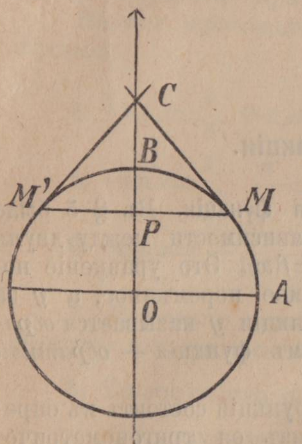
§ 36. **arcsin и arccosec.** Чтобы построить дугу, *синусъ* которой равенъ a, откладываемъ на оси синусовъ отрѣзокъ $OP=a$ и черезъ точку P проводимъ хорду, параллельную оси косинусовъ (черт. 23). Пусть эта хорда пересѣкаетъ окружность въ точкахъ M и M'. Всѣ

---

*) Въ англійской и американской литературѣ употребляются другія обозначенія циклометрическихъ функцій, подчеркивающія ихъ происхожденіе черезъ обращеніе тригометрическихъ. Если $f(x)$ есть нѣкоторая функція, то обратная ей обозначается символомъ $f^{-1}(x)$, который не слѣдуетъ смѣшивать съ символомъ $[f(x)]^{-1}$, выражающимъ дробь $1/f(x)$. Прилагая этотъ символъ къ циклометрическимъ функціямъ, для *arccos* x получимъ обозначеніе $\cos^{-1}x$, для *arctan* x—обозначеніе $\tan^{-1}x$ и т. д.

дуги съ началомъ A, имѣщія концомъ или точку M, или точку M', имѣютъ синусъ, равный a (§ 16).

Если $|a| < 1$, то указанное построеніе даетъ на окружности двѣ различныя точки M и M'; если $|a| = 1$, точки M и M' сливаются въ одну; если $|a| > 1$, то прямая, проведенная черезъ P параллельно оси косинусовъ, не пересѣкаетъ окружности. Слѣд., построеніе дуги, синусъ которой равенъ a, возможно лишь при условіи: $|a| \leq 1$ (ср. §§ 18 и 19).



Черт. 23.

Если это условіе выполнено, то построеніе даетъ *безчисленное множество* дугъ, мѣры которыхъ легко выразить одной формулой. Пусть одна изъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M, есть x. Тогда одна изъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M', есть $\pi - x$ (§ 12). Общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M, есть $2k\pi + x$, а общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M', есть $2k\pi + \pi - x = (2k+1)\pi - x$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль (§ 9).

Эти два выраженія можно соединить въ одно: $k\pi + (-1)^k x$, гдѣ k есть *цѣлое* число или *нуль*.

Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что если $\sin x = a$, то

$$\arcsin a = k\pi + (-1)^k x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Эта формула даетъ *общее* выраженіе дугъ, имѣющихъ данный синусъ.

Для построенія дуги, которой *косекансъ* равенъ b, откладываемъ на оси косекансовъ отрѣзокъ $OC = b$ (черт. 23) и изъ точки C проводимъ касательныя CM и CM' къ кругу. Точки M и M' касанія этихъ касательныхъ служатъ концами всѣхъ дугъ, имѣющихъ косекансъ, равный b, и начинающихся въ точкѣ A. Для возможности указаннаго построенія необходимо и достаточно, чтобы $|b| \geq 1$ (сравн. § 23).

Если $\operatorname{cosec} x = b$, то

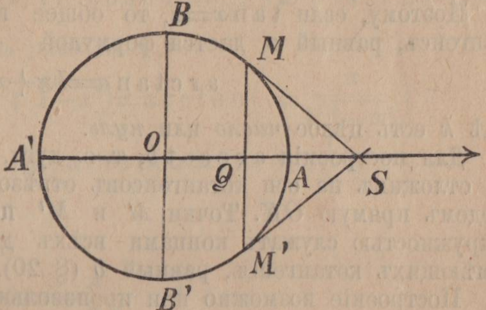
$$\operatorname{arccosec} b = k\pi + (-1)^k x, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

гдѣ k есть *цѣлое* число или *нуль*.

§ 37. **arccos и arcsec.** Для построенія $\arccos a$, т.-е. дуги, которой косинусъ равенъ a, отложимъ на оси косинусовъ отрѣзокъ $OQ = a$ (черт. 24) и черезъ точку Q проведемъ хорду, параллельную оси синусовъ. Точки M и M' пересѣченія этой хорды съ окружностью служатъ концами всѣхъ дугъ съ началомъ въ A, имѣющихъ данный косинусъ (§ 16).

Для возможности указаннаго построенія необходимо и достаточно, чтобы $|a| \leq 1$ (сравн. § 19).

Обозначимъ черезъ x одну изъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M; тогда одна изъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M', выразится черезъ $2\pi - x$ (§ 10).



Черт. 24.

Общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M, есть $2k\pi + x$, а общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и конецъ въ M', есть $2k\pi + 2\pi - x = 2(k+1)\pi - x$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль. Изъ этого слѣдуетъ, что если $\cos x = a$, то

$$\arccos a = 2k\pi \pm x, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

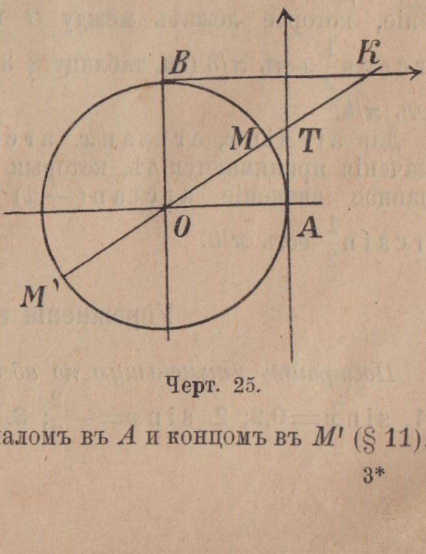
гдѣ k есть *цѣлое* число или *нуль*.

Для построенія дуги, которой *секансъ* равенъ b, отложимъ на оси *секансовъ* отрѣзокъ $OS = b$ (черт. 24) и проведемъ изъ точки S касательныя къ кругу. Точки M и M' прикосновенія этихъ касательныхъ служатъ *концами* всѣхъ дугъ съ началомъ въ A, имѣющихъ секансъ, равный b (§ 22). Для возможности построенія необходимо и достаточно, чтобы $|b| \geq 1$ (сравн. § 23).

Если $\sec x = b$, то общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ секансъ, равный b, представляется формулой:

$$\operatorname{arcsec} b = 2k\pi \pm x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

§ 38. **arctan и arccot.** Для построенія $\operatorname{arctan} a$, т.-е. дуги, которой тангенсъ равенъ a, отложимъ на оси тангенсовъ отрѣзокъ $AT = a$ (черт. 25) и проведемъ прямую OT. Точки M и M' пересѣченія ея съ окружностью служатъ концами всѣхъ дугъ, начинающихся въ A и имѣющихъ тангенсъ, равный a (§ 20).



Черт. 25.

Построеніе возможно при *произвольномъ* значеніи a (сравн. § 21).

Если x есть одна изъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M, то $x + \pi$ есть одна изъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M' (§ 11).

Общее выраженіе всѣхъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M есть $2k\pi+x$, а общее выраженіе всѣхъ дугъ съ началомъ въ A и концомъ въ M' есть $2k\pi+\pi+x=(2k+1)\pi+x$, гдѣ k есть *цѣлое* число или *нуль* (§ 9).

Поэтому, если $\tan x=a$, то общее выраженіе дугъ, имѣющихъ тангенсъ, равный a, дается формулой

$$\operatorname{arctan} a=k\pi+x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

гдѣ k есть цѣлое *число* или *нуль*.

Для построенія $\operatorname{arccot} b$, т.-е. дуги, *котангенсъ* которой равенъ b, отложимъ на оси котангенсовъ отрѣзокъ $BK=b$ (черт. 25) и проведемъ прямую OK. Точки M и M' пересѣченія этой прямой съ окружностью служатъ концами всѣхъ дугъ, начинающихся въ A и имѣющихъ котангенсъ, равный b (§ 20).

Построеніе возможно при произвольномъ значеніи b (сравн. § 21).

Если $\cot x=b$, то общее выраженіе всѣхъ дугъ, имѣющихъ котангенсъ, равный b, доставляется формулой:

$$\operatorname{arccot} b=k\pi+x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

гдѣ k есть *цѣлое* число или *нуль*.

§ 39. **Многозначность циклометрическихъ функцій.** Функція, имѣющая только одно значеніе для каждаго значенія перемѣннаго, называется *однозначной*, а функція, имѣющая нѣсколько значеній для одного значенія перемѣннаго, называется *многозначной*.

Напримѣръ, x^2 есть однозначная функція перемѣннаго x, а $\sqrt{x}$ есть двузначная функція перемѣннаго x.

Тригонометрическія функціи суть функціи *однозначныя* (§§ 16, 20, 22).

Циклометрическія функціи суть функціи *многозначныя* (форм. 18—23).

Одно изъ значеній циклометрической функціи называется *главнымъ*. Для $\arccos x$ и $\operatorname{arcsec} x$ за главное принимается то значеніе, которое лежитъ между 0 и π. Наприм., главное значеніе $\arccos\frac{1}{2}$ есть $\pi/3$ (см. таблицу § 34), главное значеніе $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$ есть $\pi/4$.

Для $\arcsin x$, $\operatorname{arctan} x$, $\operatorname{arccot} x$, $\operatorname{arccosec} x$ за главныя значенія принимаются тѣ, которыя лежатъ между $\mp\pi/2$. Напримѣръ, главное значеніе $\operatorname{arctan}(-1)$ есть $-\pi/4$, главное значеніе $\arcsin\frac{1}{2}$ есть $\pi/6$.

Упражненія къ главѣ V.

Построить наименьшую по абсолютной величинѣ дугу x, если

1. $\sin x=0{,}2$; **2.** $\sin x=-\frac{2}{3}$; **3.** $\cos x=0{,}8$; **4.** $\cos x=-\frac{1}{4}$;

5. $\tan x = 2$; **6.** $\tan x = -\frac{3}{4}$; **7.** $\cot x = \frac{1}{2}$; **8.** $\cot x = -3$;

9. $\sec x = 1{,}5$; **10.** $\sec x = -2$; **11.** $\operatorname{cosec} x = \frac{4}{3}$; **12.** $\operatorname{cosec} x = -3$.

Показать справедливость равенствъ:

13. $\arcsin x = \arccos(\pm\sqrt{1-x^2}) = \arctan\left(\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

14. $\arctan x = \operatorname{arccot}\frac{1}{x}$. **15.** $\operatorname{arcsec} x = \arccos\frac{1}{x}$.

16. $\operatorname{arccosec} x = \arcsin\frac{1}{x}$.

17. $\arcsin x + \arccos x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$.

18. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

19. $\arcsin x + \arcsin(-x) = 2k\pi$.

20. $\arccos x + \arccos(-x) = (2k+1)\pi$.

21. $\arctan x + \arctan(-x) = k\pi$.

22. $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(-x) = k\pi$.

(k есть *цѣлое* число или *нуль*).

23. *Построить графики циклометрическихъ функцій.*

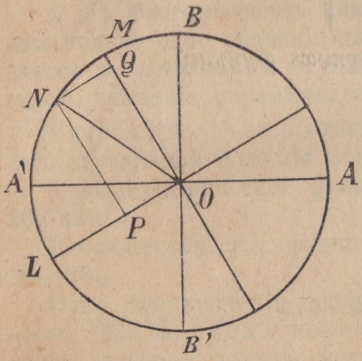
ГЛАВА VI.

Теорема сложенія. Удвоеніе дуги. Дѣленіе дуги пополамъ. Преобразованія суммъ въ произведенія.

§ 40. **Сложеніе дугъ.** Задача о сложеніи двухъ дугъ заключается въ опредѣленіи тригометрическихъ функцій дуги $a+b$ черезъ тригонометрическія функціи дугъ a и b.

§ 41. **cos (a+b).** Для опредѣленія $\cos(a+b)$ воспользуемся теоремами о проекціяхъ отрѣзка и ломаной линіи (§§ 27 и 8).

Пусть дуга a имѣетъ началомъ точку A и концомъ точку M (черт. 26), а дуга b имѣетъ началомъ точку M, а концомъ точку N. Для дугъ съ началомъ A положительное направленіе оси косинусовъ совпадаетъ съ направленіемъ радіуса OA, а положительное направленіе оси синусовъ съ направленіемъ радіуса OB, перпендикулярнаго къ OA.



Черт. 26.

Для дугъ съ началомъ M положительное направленіе оси косинусовъ совпадаетъ съ направленіемъ радіуса OM, а положительное направленіе оси синусовъ съ направленіемъ радіуса OL, перпендикулярнаго къ OM. При томъ и другомъ началѣ *положительное* направленіе дугъ *противоположно* направленію движенія часовой стрѣлки.

Обозначивъ соотвѣтственно черезъ Q и P проекціи точки N на прямыя OM и OL и разсматривая ON, какъ замыкающую ломаной OQN, по теоремѣ § 8 находимъ:

$$\text{пр. } ON = \text{пр. } OQ + \text{пр. } QN = \text{пр. } OQ + \text{пр. } OP \ldots \quad (\alpha)$$

Написанное равенство имѣетъ мѣсто для произвольной оси проекцій.

Возьмемъ за ось проекцій ось OA косинусовъ дугъ, имѣющихъ начало въ точкѣ A. Дуга съ началомъ A и концомъ N есть $a+b$.

Поэтому (§ 27) пр. $ON = R\cos(a+b)$, гдѣ R есть радіусъ круга.

Кромѣ того имѣемъ: $OQ = R\cos b$; $OP = R\sin b$;

$$\text{пр. } OQ = OQ\cos(\widehat{OQ, OA}) = OQ\cos a = R\cos a\cos b;$$

$$\text{пр. } OP = OP\cos(\widehat{OP,OA}) = OP\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -OP\sin a =$$
$$= -R\sin a\sin b.$$

Подставивъ найденныя значенія проекцій въ формулу (α) и сокративъ результатъ на R, получимъ:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

§ 42. **sin(a+b).** Проектируя ломаную OQN на ось OB синусовъ дугъ, имѣющихъ начало въ A и замѣчая, что

$$\text{пр. } ON = R\sin(a+b),$$

$$\text{пр. } OQ = OQ.\cos(\widehat{OQ,OB}) = OQ\cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right) = OQ\sin a =$$
$$= R\sin a\cos b,$$

$$\text{пр. } OP = OP.\cos(\widehat{OP,OB}) = OP\cos a = R\cos a\sin b,$$

изъ равенства (α) предыдущаго § находимъ:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b. \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

§ 43. **tan(a+b).** Почленное дѣленіе равенства (25) на равенство (24) даетъ (форм. 6) выраженіе $\tan(a+b)$:

$$\tan(a+b) = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b}.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя второй части на $\cos a\cos b$ получимъ:
$\tan(a+b) = \{\sin a/\cos a + \sin b/\cos b\}/\{1 - \sin a\sin b/\cos a\cos b\}$,
или

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Формулы (24), (25) и (26) рѣшаютъ задачу о сложеніи *двухъ произвольныхъ* дугъ.

§ 44. **Тригонометрическія функціи разности дугъ.** Пользуясь *общностью* формулъ 24, 25 и 26, можно въ нихъ b замѣнить черезъ $-b$.

Сдѣлавъ это и упростивъ результаты при помощи формулъ (13), получимъ косинусъ, синусъ и тангенсъ разности дугъ a и b:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \quad \ldots\ldots \quad (27)$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \quad \ldots\ldots \quad (28)$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

§ 45. **Удвоеніе дуги.** Полагая въ формулахъ (24), (25) и (26) $b=a$, мы получимъ косинусъ, синусъ и тангенсъ *двойной* дуги:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \text{ или } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \; . \; . \; . \; (30)$$

$$\sin 2a = 2\sin a . \cos a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (32)$$

§ 46. **Сложеніе произвольнаго числа дугъ. Кратныя дуги.** Послѣдовательное примѣненіе формулъ (24), (25) и (26) позволяетъ найти выраженія тригонометрическихъ функцій суммы a_1+a_2 двухъ дугъ a_1 и a_2, затѣмъ суммы $a_1+a_2+a_3$ трехъ дугъ a_1, a_2 и a_3, и вообще суммы $a_1+a_2+..+a_n$ n дугъ a_1, a_2,...,a_n, гдѣ n есть цѣлое положительное число.

Полагая въ полученныхъ такимъ образомъ формулахъ всѣ слагаемыя равными a, мы получимъ выраженія тригонометрическихъ функцій *двойной* дуги (§ 45), *тройной* дуги и, вообще, *n-кратной* дуги.

Оставляя выводъ общихъ формулъ, относящихся къ сложенію произвольнаго числа дугъ и умноженію дуги на произвольное цѣлое и положительное число, до главы о комплексныхъ числахъ, приведемъ здѣсь, въ видѣ примѣра, вычисленія тригонометрическихъ функцій суммы $a_1+a_2+a_3$ трехъ дугъ и тройной дуги.

По формуламъ 24, 25 имѣемъ:

$$\cos(a_1+a_2+a_3) = \cos(a_1+a_2)\cos a_3 - \sin(a_1+a_2)\sin a_3 =$$
$$= \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 - \sin a_1 \sin a_2 \cos a_3 - \sin a_3 \sin a_1 \cos a_2 -$$
$$- \sin a_2 \sin a_3 \cos a_1, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

$$\sin(a_1+a_2+a_3) = \sin(a_1+a_2)\cos a_3 + \cos(a_1+a_2)\sin a_3 =$$
$$= \sin a_1 \cos a_2 \cos a_3 + \sin a_2 \cos a_3 \cos a_1 + \sin a_3 \cos a_1 \cos a_2 -$$
$$- \sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34)$$

Этимъ формуламъ можно дать другой видъ, вынося во вторыхъ частяхъ за скобки $\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3$ и пользуясь формулой (6):

$$\cos(a_1+a_2+a_3) = \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 (1 - \tan a_1 \tan a_2 -$$
$$- \tan a_3 \tan a_1 - \tan a_2 \tan a_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33')$$

$$\sin(a_1+a_2+a_3) = \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 (\tan a_1 + \tan a_2 + \tan a_3 -$$
$$- \tan a_1 \tan a_2 \tan a_3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (34')$$

Изъ двухъ послѣднихъ формулъ находимъ:

$$\tan(a_1+a_2+a_3) = \frac{\tan a_1 + \tan a_2 + \tan a_3 - \tan a_1 \tan a_2 \tan a_3}{1 - \tan a_1 \tan a_2 - \tan a_3 \tan a_1 - \tan a_2 \tan a_3} \; . \; . \; . \; (35)$$

Полагая въ формулахъ 33, 34 и 35 $a_1=a_2=a_3=a$, получимъ тригонометрическія функціи *тройной* дуги:

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a,$$
$$\sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}.$$

§ 47. **Дѣленіе дуги пополамъ.** Задача о дѣленіи дуги пополамъ состоитъ въ опредѣленіи тригонометрическихъ функцій дуги $a/2$ черезъ тригонометрическія функціи дуги a.

Для этой цѣли воспользуемся формулой (30). Замѣнивъ въ ней a черезъ $a/2$, получимъ:

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1,$$

или (форм. 5)

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30')$$

Изъ этихъ уравненій находимъ:

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

$$\sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Раздѣливъ почленно второе равенство на первое, получимъ

$$\tan\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Формулы 36, 37 и 38 рѣшаютъ поставленную задачу, но содержатъ неопредѣленность относительно знаковъ, которые нужно взять при квадратныхъ корняхъ, входящихъ въ эти формулы. Эта двойственность знаковъ объясняется тѣмъ, что для пользованія формулами 36, 37 и 38 нужно знать *не дугу* a, которую требуется раздѣлить пополамъ, а ея *косинусъ*. Но общее выраженіе дугъ, косинусъ которыхъ равенъ $\cos a$, есть $2k\pi \pm a$ (§ 37). Общее выраженіе *половинъ* этихъ дугъ есть $k\pi \pm \frac{a}{2}$. Формулы (36), (37) и (38) показываютъ, что косинусъ, синусъ и тангенсъ этихъ дугъ отличаются только знаками. Дѣйствительно, при k *четномъ* имѣемъ (форм. 1, 2, 13):

$$\cos\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \cos\left(\pm\frac{a}{2}\right) = +\cos\frac{a}{2};$$

$$\sin\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \sin\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \pm\sin\frac{a}{2};$$

$$\tan\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \tan\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \pm\tan\frac{a}{2};$$

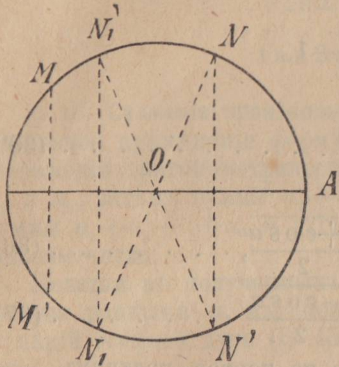
если же k есть *нечетное* число, то (форм. 1, 2, 14, 15):

$$\cos\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \cos\left(\pi \pm \frac{a}{2}\right) = -\cos\frac{a}{2};$$

$$\sin\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \sin\left(\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \mp\sin\frac{a}{2};$$

$$\tan\left(k\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \tan\left(\pi \pm \frac{a}{2}\right) = \pm\tan\frac{a}{2}.$$

Этому разъясненію двойныхъ знаковъ въ формулахъ (36), (37) и (38) можно дать геометрическую иллюстрацію. Пусть AM (чер. 27) есть одна изъ дугъ, косинусы которыхъ равны $\cos a$. Дуга AM', гдѣ M' есть точка, симметричная точкѣ M относительно оси OA косинусовъ, имѣетъ косинусъ, также равный $\cos a$ (§ 29). Всѣ дуги съ началомъ A, косинусъ которыхъ равенъ $\cos a$, оканчиваются либо въ M, либо въ M'. Половины этихъ дугъ, отсчитываемыя отъ A, оканчиваются либо въ срединахъ N и N' дугъ AM и AM', либо въ точкахъ N_1 и N'_1, діаметрально противоположныхъ соотвѣтственно точкамъ N и N'. Такимъ образомъ вычисленіе $\cos(a/2)$, $\sin(a/2)$ и $\tan(a/2)$ черезъ $\cos a$ есть не что иное, какъ опредѣленіе этихъ тригонометрическихъ функцій для дугъ, имѣющихъ начало въ A, а концы либо въ N, либо въ N', либо въ N_1, либо въ N'_1. Изъ построенія же этихъ точекъ слѣдуетъ, что тригонометрическія функціи указанныхъ дугъ могутъ отличаться только знаками.



Черт. 27.

Вмѣсто формулы (38) для $\tan(a/2)$ можно дать раціональную формулу. Такъ какъ (форм. 31)

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2},$$

то, пользуясь формулой (30), находимъ

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1+\cos a};$$

точно также при помощи формулы (30′) получимъ

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}} = \frac{1-\cos a}{\sin a}.$$

Итакъ

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a} \quad \ldots\ldots (39)$$

Формулы (39) въ противоположность формулѣ (38) не содержатъ двойныхъ знаковъ. Это объясняется тѣмъ, что вычисленіе $\tan(a/2)$ по этимъ формуламъ требуетъ знанія не только $\cos a$, но и $\sin a$, а данными значеніями синуса и косинуса опредѣляются дуги вида $2k\pi + a$ (форм. 1). Половины ихъ суть дуги $k\pi + a/2$, гдѣ k есть цѣлое число, а по формулѣ (2) тангенсы этихъ дугъ одинаковы.

Послѣдовательное многократное приложенiе формулъ (36), (37) и (38) рѣшаетъ задачу о дѣленiи дуги на 4, 8, 16 и т. д., вообще на 2^p, гдѣ p есть цѣлое, положительное число.

Способъ рѣшенiя общаго вопроса о дѣленiи дуги на число, не представляющее степени 2, будетъ указанъ при изложенiи теоремы *Moivre'a*.

§ 48. **Выраженiя** $\sin a$, $\cos a$ **и** $\tan a$ **черезъ** $\tan(a/2)$. Изъ формулъ (39) находимъ слѣдующiя равенства:

$$\sin a - \tan\frac{a}{2}.\cos a = \tan\frac{a}{2},$$

$$\tan\frac{a}{2}.\sin a + \cos a = 1.$$

Разсматривая здѣсь $\sin a$ и $\cos a$, какъ неизвѣстныя, и опредѣляя ихъ черезъ $\tan\frac{a}{2}$, находимъ:

$$\sin a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}, \quad \dots\dots\dots \quad (40)$$

$$\cos a = \frac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (41)$$

Черезъ почленное дѣленiе равенства (40) на равенство (41) получимъ:

$$\tan a = \frac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}} \quad \dots\dots\dots \quad (42)$$

Формулы (40), (41) и (42) показываютъ, что тригонометрическiя функцiи дуги a выражаются *рацiонально* черезъ $\tan(a/2)$.

§ 49. **Преобразованiя суммъ въ произведенiя.** Изъ формулъ (24), (25), (27) и (28) легко получаются формулы преобразованiя суммъ $\sin a \pm \sin b$ и $\cos a \pm \cos b$ въ произведенiя.

Изъ формулъ (25) и (28) имѣемъ:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y.$$

Складывая и вычитая почленно эти равенства, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+y)+\sin(x-y) &= 2\sin x\cos y\ \dots \\ \sin(x+y)-\sin(x-y) &= 2\cos x\sin y\ \dots \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Полагая

$$x+y=a;\ x-y=b,$$

получимъ для x и y слѣдующія выраженія:

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a-b}{2}.$$

Подставивъ ихъ въ формулы (43), получимъ:

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (44)$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (45)$$

По формуламъ (24) и (27) имѣемъ:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y.$$

Отсюда черезъ сложеніе и вычитаніе получаемъ:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,\\ \cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y\end{array}\right\}\ .\ .\ .\ (46)$$

Наконецъ, при помощи указанной выше подстановки, находимъ:

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},\ .\ .\ .\ .\ (47)$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .\ .\ .\ .\ (48)$$

Для суммы и разности тангенсовъ двухъ дугъ сдѣлаемъ слѣдующее преобразованіе:

$$\tan a\pm\tan b=\frac{\sin a}{\cos a}\pm\frac{\sin b}{\cos b}=\frac{\sin a\cos b\pm\cos a\sin b}{\cos a\cos b};$$

отсюда при помощи формулъ (25) и (28) находимъ:

$$\tan a\pm\tan b=\frac{\sin(a\pm b)}{\cos a\cos b}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (49)$$

Формулы настоящаго § имѣютъ большое значеніе при вычисленіяхъ съ помощью логариѳмовъ.

§ 50. **Новый видъ формулъ сложенія.** Формулы сложенія дугъ (§§ 41—44) можно преобразовать такъ, чтобы въ нихъ входили циклометрическія функціи. Пусть $\varphi=\arccos a$ и $\psi=\arccos b$. Вычислимъ по формуламъ (24) и (27) $\cos(\varphi\mp\psi)$. Такъ какъ $\cos\varphi=a$ и $\cos\psi=b$, то (форм. 5)

$$\sin\varphi=\sqrt{1-a^2};\ \sin\psi=\sqrt{1-b^2},$$

причемъ знаки квадратныхъ корней опредѣляются тѣми частными значеніями, которыя мы беремъ для дугъ φ и ψ.

Подставляя эти значенія косинусовъ и синусовъ въ формулы (24) и (27), найдемъ, что

$$\cos(\varphi\mp\psi)=ab\pm\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2};$$

отсюда получаемъ слѣдующія соотношенія между φ и ψ:

$$\varphi\mp\psi=\arccos\left[ab\pm\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right];$$

или

$$\arccos a\mp\arccos b=\arccos\left[ab\pm\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\right]\ldots(50)$$

Тѣмъ же путемъ изъ формулъ (25) и (28) и изъ формулъ (26) и (29) находимъ:

$$\arcsin a\pm\arcsin b=\arcsin\left[a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\right];\ldots(51)$$

$$\arctan a\mp\arctan b=\arctan\frac{a\mp b}{1\pm ab}\ldots\ldots(52)$$

Формулы удвоенія дуги (§ 45) приводятъ къ слѣдующимъ соотношеніямъ между циклометрическими функціями:

$$2\arcsin x=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2},$$
$$2\arccos x=\arccos(2x^2-1),$$
$$2\arctan x=\arctan\frac{2x}{1-x^2}.$$

Упражненія къ главѣ VI.

Показать справедливость тождествъ 1—23:

1. $\cot(a\mp b)=\dfrac{\cot a\cot b\pm1}{\cot b\mp\cot a}$.
2. $\sin(a+b)\cdot\sin(a-b)=\sin^2 a-\sin^2 b$.
3. $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a-\sin^2 b=\cos^2 b-\sin^2 a$.
4. $\sin(a-b)\cos(a+b)=\sin a\cos a-\sin b\cos b$.
5. $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right);\ \cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
6. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)=\sqrt{2}\cos a$.
7. $\cos(60^0+\alpha)+\cos(60^0-\alpha)=\cos\alpha$.
8. $\cos(30^0-\alpha)-\cos(30^0+\alpha)=\sin\alpha$.
9. $\cos(36^0+\alpha)+\cos(36^0-\alpha)=\cos\alpha+\sin(18^0+\alpha)+$ $+\sin(18^0-\alpha)$.
10. $\sin\alpha=\sin(36^0+\alpha)-\sin(36^0-\alpha)+$ $+\sin(72^0-\alpha)-\sin(72^0+\alpha)$.
11. $\cos\alpha=\sin(54^0+\alpha)+\sin(54^0-\alpha)-\sin(18^0+\alpha)-$ $-\sin(18^0-\alpha)$.

(см. таблицу § 34).

12. $\tan(a+b)=\dfrac{\sin^2 a-\sin^2 b}{\sin a\cos a-\sin b\cos b}$.

13. $\tan(a+b)-\tan a-\tan b=\tan(a+b)\tan a\tan b$.

14. $\dfrac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b}=\dfrac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$.

15. $\dfrac{\tan a\tan b+1}{1-\tan a\tan b}=\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(a+b)}$.

16. $\tan^2 a-\tan^2 b=\dfrac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\cos^2 a\cos^2 b}$.

17. $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

18. $\arctan\frac{3}{4}+\arctan\frac{1}{7}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

19. $\arctan\frac{m-1}{m}+\arctan\frac{1}{2m-1}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

20. $\arctan\frac{m}{n}-\arctan\frac{m-n}{m+n}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

21. $\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

22. $\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{7}+\arctan\frac{1}{8}=\frac{4k+1}{4}\pi$.

k есть цѣлое число или нуль.

23. $\dfrac{\tan a}{\tan b}-\dfrac{\tan b}{\tan a}+\dfrac{\tan b}{\tan c}-\dfrac{\tan c}{\tan b}+\dfrac{\tan c}{\tan a}-\dfrac{\tan a}{\tan c}=$
$$=\frac{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}{\sin a\sin b\sin c\cos a\cos b\cos c}.$$

24. Если $x+y+z=90^\circ$, то
$$\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x=1.$$

Если $A+B+C=180^\circ$, *то имѣютъ мѣсто тождества* 25—40:

25. $\sin A+\sin B=2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

26. $\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

27. $\cos A+\cos B=2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

28. $\cos B-\cos A=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

29. $\tan A+\tan B=\dfrac{\sin C}{\cos A\cos B}$.

30. $\cot A+\cot B=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}$.

31. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

32. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

33. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

34. $\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$.

35. $\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B=$
$=\sin A\sin B\sin C$.

36. $\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B=$
$=1+\cos A\cos B\cos C$.

37. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

38. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.

39. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

40. $\dfrac{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{1+\tan\frac{A}{4}}{1+\tan\frac{B}{4}}$.

Показать справедливость торжествъ 41—46:

41. a) $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$;

b) $\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$;

c) $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$;

d) $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$.

42. $\sin x\mp\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\mp\frac{\pi}{4}\right)$.

43. $\dfrac{1\pm\tan x}{1\mp\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)$.

44. $\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\sin 3x+\sin 5x}=\tan x$.

45. $\sin(a+b)+\sin a+\sin b=4\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$.

46. $1+\sin a+\cos a=2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$.

47. *Показать, что*

$$\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+\ldots+\cos(a+\overline{n-1}b)=$$
$$=\cos\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)\sin\frac{nb}{2}\operatorname{cosec}\frac{b}{2};$$

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots+\sin(a+\overline{n-1}b)=$$
$$=\sin\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)\sin\frac{nb}{2}\operatorname{cosec}\frac{b}{2}.$$

Указаніе. Умножить каждую изъ суммъ на $2\sin\frac{b}{2}$ и воспользоваться формулами упражненія 41.

48. *Доказать, что*

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0,$$
$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0,$$

Выяснить геометрическое значеніе этихъ тождествъ.

49. *Доказать, что*

$$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\sin\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0,$$
$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{n}\right)+\ldots+\cos\left(x+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=0,$$

гдѣ *n есть цѣлое число.*

50. *Если*

$$A=a.\cos^2x+2b\sin x\cos x+c.\sin^2x,$$
$$B=b(\cos^2x-\sin^2x)-(a-c)\sin x\cos x,$$
$$C=a.\sin^2x-2b.\sin x\cos x+c.\cos^2x,$$

то $B^2-AC=b^2-ac$.

51. *Доказать, что выраженіе*

$$\cos^2x-2\cos x\cos a\cos(a+x)+\cos^2(a+x)$$

не зависитъ отъ x.

52. *Показать, что выраженіе* $\dfrac{\sqrt{1-\sin x}+1}{\sqrt{1+\sin x}-1}$ *имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значеній:* $\cot\frac{x}{4}$, $\tan\frac{\pi+x}{4}$, $-\tan\frac{x}{4}$, $-\cot\frac{\pi+x}{4}$.

53. *Показать, что выраженіе* $\sqrt{1-\sin 2x}-\sqrt{1+\sin 2x}$ *имѣетъ одно изъ четырехъ значеній:* $\pm 2\cos x$, $\pm 2\sin x$, *и что значеніе* $2\cos x$ *соотвѣтствуетъ тому случаю, когда x лежитъ между* $2k\pi-{}^3/_4\pi$ *и* $2k\pi-{}^1/_4\pi$, *гдѣ k есть цѣлое число.*

54. *Построить графикъ функціи:* $y=\sin 2x$.

55. *Построить графики слѣдующихъ функцій:*

a) $y=\sin\frac{x}{2}$; b) $y=\cos\frac{x}{2}$; c) $y=\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$;

d) $y=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}$.

ГЛАВА VII.

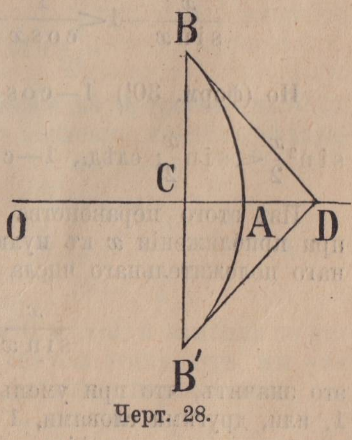
О вычисленіи тригонометрическихъ функцій. Тригонометрическія таблицы.

§ 51. **Возможность вычисленія значеній тригонометрическихъ функцій.** Практическія приложенія ученія о тригонометрическихъ функціяхъ требуютъ знанія ихъ значеній для произвольныхъ дугъ или угловъ. Такимъ образомъ выдвигается задача о способахъ вычисленія этихъ значеній. Эта задача во всемъ ея объемѣ выходитъ изъ рамокъ элементарнаго курса, въ которомъ достаточно показать лишь *возможность* ея рѣшенія.

Грубыя приближенія значеній тригонометрическихъ функцій можно получить непосредственнымъ измѣреніемъ тригонометрическихъ линій въ кругѣ радіуса 1 (§§ 16_1, 21_1, 23_1), при чемъ дуги или углы можно измѣрять транспортиромъ.

Возможность болѣе точнаго опредѣленія значеній тригонометрическихъ функцій *нѣкоторыхъ* угловъ показываетъ таблица § 34, въ которой всѣ вычисленія сводятся къ извлеченіямъ квадратныхъ корней, такъ что для угловъ, помѣщенныхъ въ этой таблицѣ, можно найти значенія тригонометрическихъ функцій съ произвольной степенью точности.

Въ слѣдующихъ параграфахъ указываются такія свойства синуса и косинуса, которыя позволяютъ убѣдиться въ томъ, что можно вычислить ихъ значенія съ опредѣленной степенью точности для дугъ, заключенныхъ между 0 и $\pi/2$.



Черт. 28.

§ 52. **Предѣлъ отношенія** $\sin x/x$ **при** $x=0$. Отношеніе $\sin x/x$, гдѣ x есть отвлеченное число, выражающее мѣру дуги или угла (§ 9), имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе при всѣхъ значеніяхъ x, за исключеніемъ $x=0$, когда оно обращается въ неопредѣленное выраженіе вида $\frac{0}{0}$. Будемъ разсматривать это отношеніе при стремленіи x къ нулю и найдемъ *предѣлъ*, къ которому оно стремится.

Пусть AB (черт. 28) есть дуга круга радіуса R и x ея мѣра. Построивъ линію CB синуса этой дуги и линію BD тангенса, продолжимъ линію синуса до вторичнаго пересѣченія въ точкѣ B' съ дугой и соединимъ точку B' съ точкой D. Сравнивая длину прямой BB', длину дуги BAB' и длину ломаной BDB', находимъ:

$$BB' < \widehat{BAB'} < BD + DB'.$$

Такъ какъ

$$BB' = 2CB; \ \widehat{BAB'} = 2\widehat{AB}; \ BD + DB' = 2BD,$$

то, сокративъ предыдущія неравенства на 2, получимъ

$$CB < \widehat{AB} < BD.$$

Раздѣливъ эти неравенства на R, находимъ:

$$\frac{CB}{R} < \frac{\widehat{AB}}{R} < \frac{BD}{R}.$$

Такъ какъ (§§ 9, 16, 20)

$$\frac{\widehat{AB}}{R} = x, \quad \frac{CB}{R} = \sin x; \quad \frac{BD}{R} = \tan x,$$

то при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имѣемъ:

$$\sin x < x < \tan x.$$

Отсюда черезъ дѣленіе на $\sin x$ получимъ:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \text{ или (форм. 6) } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Изъ этихъ неравенствъ слѣдуетъ, что

$$\frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1}{\cos x} - 1 \text{ или } \frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

Но (форм. 30') $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Такъ какъ $\sin \frac{x}{2} < 1$, то $\sin^2 \frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}$; слѣд., $1 - \cos x < 2 . \sin \frac{x}{2} < 2 . \frac{x}{2}$, т.-е. $1 - \cos x < x$.

Изъ этого неравенства заключаемъ, что дробь $(1 - \cos x)/\cos x$ при приближеніи x къ нулю можетъ сдѣлаться меньше любого даннаго положительнаго числа ε. Поэтому

$$\frac{x}{\sin x} - 1 < \frac{1 - \cos x}{\cos x} < \varepsilon;$$

это значитъ, что при уменьшеніи x отношеніе $x/\sin x$ стремится къ 1, или, другими словами, 1 есть предѣлъ этого отношенія, когда x стремится къ нулю: $\lim\limits_{x=0} x/\sin x = 1$.

Такъ какъ

$$\frac{\sin x}{x}=1\Big/\frac{x}{\sin x},$$

то

$$\lim_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (53)$$

Если $x<0$, то, положивъ $x=-x'$, гдѣ $x'>0$, найдемъ (форм. 13):

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x')}{-x'}=\frac{\sin x'}{x'}.$$

Слѣдовательно, формула (53) имѣетъ мѣсто и при отрицательныхъ значеніяхъ x.

§ 53. **Предѣлы значеній синуса и косинуса.** Формула (53) позволяетъ найти два числа, зависящія отъ x, между которыми лежитъ значеніе $\sin x$. Одно изъ нихъ есть x, какъ это видно изъ приведеннаго въ § 52 неравенства $\sin x<x$.

Для полученія второго воспользуемся выраженіемъ синуса тройной дуги (§ 46):

$$\sin 3x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

Отсюда, замѣняя x послѣдовательно черезъ $x/3$, $x/3^2,\ldots, x/3^n$, получимъ:

$$3\sin\frac{x}{3}-\sin x=4\sin^3\frac{x}{3},$$

$$3\sin\frac{x}{3^2}-\sin\frac{x}{3}=4\sin^3\frac{x}{3^2},$$

$$3\sin\frac{x}{3^3}-\sin\frac{x}{3^2}=4\sin^3\frac{x}{3^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3\sin\frac{x}{3^n}-\sin\frac{x}{3^{n-1}}=4\sin^3\frac{x}{3^n}.$$

Умножимъ первое равенство на 1, второе на 3, третье—на 3^2,..., послѣднее на 3^{n-1} и результаты сложимъ почленно; найдемъ слѣдующее равенство:

$$3^n\sin\frac{x}{3^n}-\sin x=4\left\{\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+\right.$$

$$\left.+3^2\sin^3\frac{x}{3^3}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\frac{x}{3^n}\right\}.$$

Предполагая, что x заключено между 0 и $\pi/2$, и замѣняя во второй части послѣдняго равенства дугами синусы этихъ дугъ, мы увеличиваемъ вторую часть и получаемъ слѣдующее неравенство:

$$3^n\sin\frac{x}{3^n}-\sin x<4\frac{x^3}{3^3}\left\{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^{2n-2}}\right\}.$$

Это неравенство имѣетъ мѣсто для произвольнаго натуральнаго числа n. Будемъ безгранично увеличивать n и разсмотримъ предѣлы, къ которымъ стремятся тѣ члены неравенства, которые содержатъ n.

Такъ какъ

$$3^n \sin\frac{x}{3^n} = x.\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}},$$

то

$$\lim_{n=\infty} 3^n \sin\frac{x}{3^n} = \lim_{n=\infty}\left\{x.\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}\right\} = x.\lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}.$$

Но при безграничномъ возрастанiи натуральнаго числа n число 3^n безгранично возрастаетъ, а число $x/3^n$ безгранично убываетъ, т.-е. стремится къ нулю. Слѣд., по форм. 53,

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}} = 1$$

и

$$\lim_{n=\infty} 3^n \sin\frac{x}{3^n} = x.$$

Поэтому первая часть разсматриваемаго неравенства при неограниченномъ возрастанiи n стремится къ предѣлу $x - \sin x$.

Входящая во вторую его часть сумма есть сумма n членовъ убывающей геометрической прогрессiи, знаменатель которой равенъ $1/9$, предѣлъ этой суммы равенъ $9/8$, а предѣлъ всей второй части неравенства есть $\frac{1}{6}x^3$.

Такимъ образомъ находимъ

$$x - \sin x < \frac{1}{6}x^3 \text{ или } \sin x > x - \frac{1}{6}x^3.$$

Соединяя это неравенство съ неравенствомъ $\sin x < x$ (§ 52), получимъ:

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

Изъ этихъ неравенствъ легко получить неравенства для $\cos x$.

Такъ какъ (форм. 30′) $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$, то

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Съ другой стороны (форм. 54) $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$; поэтому

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2 \text{ или } \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{1152}$$

и *à fortiori*

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Соединяя два полученныхъ для $\cos x$ неравенства, находимъ:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \ldots\ldots\ldots (55)$$

Неравенства (54) и (55) можно формулировать слѣдующимъ образомъ:
если x лежитъ между 0 и $\pi/2$, то значеніе $\sin x$ заключается между числами $x - \frac{1}{6}x^3$ и x, а значеніе $\cos x$ — между числами

$$1 - \frac{x^2}{2} \text{ и } 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

§ 54. **Вычисленіе $\sin 1'$ и $\cos 1'$.** Приложимъ формулы (54) и (55) къ вычисленію $\sin 1'$ и $\cos 1'$. Для этого найдемъ отвлеченное число, выражающее мѣру дуги въ $1'$. Обозначая его черезъ x, по первой формулѣ § 9 находимъ, что

$$x = \frac{\pi}{180.60} = 0,000\ 290\ 888\ 208\ 665,$$

если ограничиться вычисленіемъ 15 десятичныхъ знаковъ. Принимая $x = 0,0003$, находимъ $\frac{1}{6}x^3 = 27/(10^{12}.6) = 0,000\ 000\ 000\ 0045$ и

$x - \frac{1}{6}x^3 = 0,000\ 290\ 888\ 204\ 165$. По формулѣ (54) имѣемъ:

$$0,000\ 290\ 888\ 204\ 165 < \sin x < 0,000\ 290\ 888\ 208\ 665.$$

Такъ какъ два крайнія числа имѣютъ первыя 11 цифръ одинаковыя, то эти же цифры входятъ и въ значеніе $\sin 1'$, такъ что число 0,000 290 888 20 представляетъ приближенное значеніе $\sin 1'$ съ точностью до $1/10^{11}$.

Вычисляя $1 - \frac{1}{2}x^2$ и $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$, найдемъ по форм. 55, что

$$0,999\ 999\ 957\ 692\ 025\ 029 < \cos x < 0,999\ 999\ 957\ 692\ 025\ 319.$$

Отсюда заключаемъ, что число 0, 999 999 957 692 025 есть приближенное значенie $\cos 1'$ съ точностью до $1/10^{15}$.

§ 55. **Вычисленie** $\sin n'$ **и** $\cos n'$. По первой изъ формулъ (43) и первой изъ формулъ (46) имѣемъ равенства:

$$\sin nx + \sin (n-2)x = 2 \cos x . \sin (n-1)x,$$
$$\cos nx + \cos (n-2)x = 2 \cos x . \cos (n-1)x.$$

Отсюда находимъ

$$\sin nx = 2 \cos x . \sin (n-1)x - \sin (n-2)x,$$
$$\cos nx = 2 \cos x . \cos (n-1)x - \cos (n-2)x.$$

Полагая здѣсь $x=1'$ и вставляя $2-k$ вмѣсто $2\cos 1'$ (§ 54), гдѣ $k=0,000\ 000\ 084\ 615\ 95$, можно переписать предыдущiя формулы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sin nx - \sin (n-1)x = \{\sin (n-1)x - \sin (n-2)x\} - k \sin (n-1)x,$$
$$\cos nx - \cos (n-1)x = \{\cos (n-1)x - \cos (n-2)x\} - k \cos (n-1)x.$$

Полагая въ этихъ формулахъ $n=2$, можно вычислить $\sin 2'$ и $\cos 2'$. Полагая затѣмъ $n=3, 4\ldots.$, можно найти послѣдовательно разности $\sin 3' - \sin 2'$, $\sin 4' - \sin 3'$, и т. д., и разности $\cos 3' - \cos 2'$, $\cos 4' - \cos 3'$ и т. д., зная же значенiя $\sin 2'$ и $\cos 2'$ и указанныя разности, можно найти значенiя $\sin 3'$ и $\cos 3'$, $\sin 4'$ и $\cos 4'$, и вообще $\sin n'$ и $\cos n'$, гдѣ n есть цѣлое положительное число.

§ 56. **Тригонометрическiя таблицы.** Такъ какъ, зная синусъ и косинусъ дуги, можно по формуламъ (6), (7), (8) и (9) вычислить значенiя ея остальныхъ тригонометрическихъ функцiй, то изъ сказаннаго въ предыдущемъ § слѣдуетъ, что можно составить таблицы значенiй тригонометрическихъ функцiй для дугъ отъ 0^0 до 90^0 съ интерваломъ въ $1'$ между двумя послѣдовательными дугами. При этомъ нужно замѣтить, что формулы (16) позволяютъ сократить вдвое какъ нужныя для этого вычисленiя, такъ и размѣры таблицъ.

Таблицы, содержащiя значенiя тригонометрическихъ функцiй, называются таблицами *натуральныхъ значенiй тригонометрическихъ функцiй*. На стран. 100 и 101 помѣщена таблица, дающая значенiя тригонометрическихъ функцiй съ точностью до 0,001 для дугъ отъ 0^0 до 90^0 съ интерваломъ въ 1^0 между двумя послѣдовательными дугами.

Таблицы натуральныхъ значенiй тригонометрическихъ функцiй употребляются сравнительно рѣдко (въ физикѣ и кристаллографiи).

Болѣе употребительными являются *логариѳмическiя* таблицы. Въ нихъ даются не значенiя тригонометрическихъ функцiй, а *десятичные логариѳмы* этихъ значенiй, что является болѣе удобнымъ при выполненiи вычисленiй.

Такъ какъ при таблицахъ обыкновенно помѣщается ихъ описанiе, правила пользованiя ими и указанiе степени точности результатовъ вычисленiй, производимыхъ при помощи таблицъ, то останавливаться на этихъ вопросахъ мы не будемъ.

§ 57. **Непрерывность тригонометрическихъ функцiй.** Неравенство (§ 52)

$$|\sin x| < |x|$$

позволяетъ пополнить свѣдѣнія объ измѣненіяхъ тригонометрическихъ функцій указаніемъ на ихъ *непрерывность* (§ 6).

Пусть $y = \sin x$, $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$, гдѣ Δx и Δy суть соотвѣтственныя приращенія дуги и ея синуса. Опредѣляя Δy, по форм. (45), находимъ:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Такъ какъ

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 1, \qquad \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < \left|\frac{\Delta x}{2}\right|,$$

то

$$\left|2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < |\Delta x|,$$

или $|\Delta y| < |\Delta x|$.

Отсюда слѣдуетъ, что уменьшеніемъ абсолютной величины приращенія Δx дуги x можно сдѣлать абсолютную величину приращенія Δy синуса этой дуги меньше произвольнаго числа. Это значитъ (§ 6), что $\sin x$ есть *непрерывная функція* x при всѣхъ значеніяхъ x. Графикъ $\sin x$ (синусоида) есть непрерывная кривая (§ 25).

Совершенно такъ же обнаруживается непрерывность $\cos x$ для всѣхъ значеній x.

Для $\tan x$ по формулѣ (49) имѣемъ:

$$\tan(x + \Delta x) - \tan x = \frac{\sin \Delta x}{\cos x . \cos(x + \Delta x)}.$$

Абсолютная величина второй части этого равенства можетъ быть сдѣлана меньше произвольнаго числа, если $\cos x \neq 0$.

Отсюда слѣдуетъ, что $\tan x$ есть непрерывная функція x для всѣхъ значеній x, кромѣ $x = (2k+1)\pi/2$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

Графикъ $\tan x$ состоитъ изъ безчисленнаго множества одинаковыхъ отдѣльныхъ вѣтвей (§ 25; сравн. § 6, прим. 3).

Точно такъ же можно показать, что $\cot x$ есть непрерывная функція x за исключеніемъ значеній: $x = k\pi$; $\sec x$—непрерывная функція x за исключеніемъ значеній: $x = (2k+1)\pi/2$ и $\operatorname{cosec} x$—непрерывная функція x за исключеніемъ значеній: $x = k\pi$, при чемъ k обозначаетъ цѣлое число или нуль.

ГЛАВА VIII.

Тригонометрическія уравненія.

§ 58. **Понятіе о тригонометрическихъ уравненіяхъ.** *Тригонометрическими* называются такія уравненія, въ которыхъ неизвѣстныя входятъ подъ знакомъ тригонометрическихъ функцій.

Напримѣръ, уравненіе $a \sin x + b \cos x = c$, гдѣ a, b и c суть постоянныя, и уравненіе $x - \tan x = 0$ суть уравненія тригонометрическія; два уравненія: $x + y = a$, $\tan x + \tan y = b$, въ которыхъ a и b—постоянныя, представляютъ систему тригонометрическихъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

Тригонометрическія уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ можно раздѣлить на два класса: къ первому принадлежатъ уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ *только* подъ знакомъ тригонометрическихъ функцій, а ко второму—тѣ уравненія, въ которыхъ неизвѣстное входитъ кромѣ того и въ видѣ нѣкоторой алгебраической функціи.

Напримѣръ, уравненіе $a \sin x + b \cos x = c$ принадлежитъ къ первому классу, а уравненіе $x - \tan x = 0$—ко второму классу.

Мы будемъ разсматривать только уравненія перваго класса. *Особенностью* тригонометрическихъ уравненій этого класса является то, что, если они имѣютъ рѣшенія, то число ихъ безконечно. Эту особенность легко объяснить указаніемъ *общаго* пріема рѣшенія такихъ уравненій.

Пусть уравненіе содержитъ тригонометрическія функціи неизвѣстной дуги x. По § 48 всѣ эти функціи можно выразить раціонально черезъ $\tan(x/2)$. Поэтому, принявъ за неизвѣстное $t = \tan(x/2)$, мы получимъ *алгебраическое* уравненіе относительно t.

Положимъ, что t_1, t_2,.... суть его корни. Въ такомъ случаѣ неизвѣстное x найдется изъ уравненій

$$\tan\frac{x}{2} = t_1,\ \tan\frac{x}{2} = t_2, \ldots..,$$

которыя даютъ слѣдующія значенія x:

$$x = 2 \operatorname{arctan} t_1,\ x = 2 \operatorname{arctan} t_2, \ldots..$$

Но вторыя части каждой изъ этихъ формулъ имѣютъ безчисленное множество значеній (§ 38). Слѣд., для даннаго уравненія мы получимъ безчисленное множество рѣшеній.

Нужно замѣтить, что рѣшенія тригонометрическаго уравненія распредѣляются въ группы, изъ которыхъ каждая содержитъ значенія неизвѣстнаго, отличающіяся другъ отъ друга числомъ, кратнымъ періода той тригонометрической функціи, которая была взята за неизвѣстное. Въ нахожденіи всѣхъ этихъ группъ и заключается рѣшеніе тригонометрическаго уравненія.

Указанный выше способъ замѣны всѣхъ тригонометрическихъ функцій дуги x ихъ выраженіями черезъ $\tan(x/2)$ теоретически вполнѣ исчерпываетъ задачу о рѣшеніи тригонометрическаго уравненія, но часто имѣетъ то неудобство, что приводитъ къ весьма сложнымъ вычисленіямъ. Поэтому во многихъ случаяхъ бываетъ удобнѣе примѣнять частные методы, состоящіе въ томъ, что данное уравненіе при помощи соотношеній между тригонометрическими функціями приводится къ болѣе простому.

При этихъ преобразованіяхъ уравненія нужно внимательно слѣдить за тѣмъ, чтобы преобразованіе не вызвало потери рѣшеній или появленія постороннихъ рѣшеній, другими словами, нужно постоянно имѣть въ виду теоремы о *равносильныхъ* уравненіяхъ.

Въ слѣдующихъ §§ приведены примѣры рѣшеній тригонометрическихъ уравненій.

§ 59. **Уравненіе** $\sin x = a$. Рѣшеніе этого уравненія дается формулой (18), которую можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$x = n\pi + (-1)^n x_0,$$

гдѣ x_0 есть одна изъ дугъ, имѣющихъ синусъ, равный a, а n есть цѣлое число или нуль. Эта формула содержитъ двѣ группы рѣшеній:

$$x = 2k\pi + x_0 \text{ и } x = (2k+1)\pi - x_0,$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль. Значеніе x_0 находится вообще по тригонометрическимъ таблицамъ, въ частныхъ же случаяхъ можно пользоваться таблицей § 34. Приведемъ два примѣра.

1. Рѣшенія уравненія $\sin x = 1/2$ получаются при помощи таблицы § 34:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

2. Чтобы рѣшить уравненіе: $\sin x = 0{,}7456$, находимъ сначала при помощи таблицъ $x_0 = 48^0 12' 6''$ и, подставивъ это значеніе въ приведенныя выше формулы, найдемъ:

$$x = 360^0 k + 48^0 12' 6'' \text{ и } x = 360^0 k + 131^0 47' 54''.$$

Уравненія: $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$, $\sec x = a$, $\operatorname{cosec} x = a$ рѣшаются аналогичнымъ способомъ при помощи формулъ (20), (22), (23), (21) и (19). Объ условіяхъ возможности рѣшенія указанныхъ уравненій см. §§ 36, 37, 38.

§ 60. **Уравненіе** $\sin px = a$. Уравненіе $\sin px = a$, въ которомъ p и a суть постоянныя, приводится къ уравненію предыдущаго § посредствомъ подстановки: $px = z$. Если z_0 есть одна изъ дугъ, которыхъ синусъ равенъ a, то рѣшенія даннаго уравненія получатся изъ формулы:

$$x=k\frac{\pi}{p}+\frac{(-1)^k}{p}z_0.$$

Аналогично рѣшаются уравненія:

$$\cos px=a,\ \tan px=a,\ \cot px=a,\ \sec px=a,\ \operatorname{cosec} px=a.$$

Примѣры. 1) Уравненіе $\tan 3x=1$ имѣетъ слѣдующія рѣшенія (§ 34, табл.):

$$x=k\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12},$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

2) Рѣшенія уравненія $\cos 4x=-1/\sqrt{2}$ выражаются формулой (§§ 34, 37):

$$x=\pm 33^0 45'+90^0.k,$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

§ 61. **Уравненіе** $\sin px=\sin qx$. Для уравненія $\sin px=\sin qx$, въ которомъ p и q суть данныя числа, можно воспользоваться періодичностью синуса (форм. 1) и свойствомъ дугъ, дополняющихъ другъ друга до π (форм. 15). По этимъ свойствамъ имѣемъ слѣдующія уравненія для опредѣленія x:

$$px=qx+2k\pi,$$
$$px=\pi-qx+2k\pi.$$

Рѣшая каждое изъ этихъ уравненій, находимъ двѣ группы рѣшеній даннаго уравненія:

$$x=\frac{2k\pi}{p-q},\ x=\frac{(2k+1)\pi}{p+q},$$

гдѣ k обозначаетъ цѣлое число или нуль.

Въ случаѣ $p=q$ данное уравненіе обращается въ тождество.

Аналогично рѣшаются уравненія

$$\cos px=\cos qx,\ \tan px=\tan qx,\ \cot px=\cot qx,\ \sec px=\sec qx,\ \operatorname{cosec} px=\operatorname{cosec} qx.$$

Уравненія видовъ

$$\sin px=\cos px,\ \tan px=\cot qx,\ \sec px=\operatorname{cosec} qx$$

приводятся къ одному изъ указанныхъ видовъ при помощи формулъ (16). Наприм., первое изъ нихъ приводится къ уравненію:

$$\sin px=\sin\left(\frac{\pi}{2}-px\right).$$

§ 62. **Уравненіе** $a\cos x+b\sin x=c$. Для рѣшенія *линейнаго* относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравненія

$$a\cos x+b\sin x=c, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

въ которомъ a, b и c суть постоянныя, укажемъ нѣсколько способовъ.

1 *способъ*. Преобразуемъ уравненіо (α), принявъ за неизвѣстное $t=\tan(x/2)$.

При помощи формулъ (40) и (41) уравненіе приводится къ квадратному относительно t уравненію:

$$(a+c)t^2-2bt+c-a=0.$$

Корни этого уравненія выражаются формулами:

$$t_1=\frac{b+\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c},\quad t_2=\frac{b-\sqrt{b^2+a^2-c^2}}{a+c}.$$

Для того, чтобы, уравненіе (α) имѣло рѣшенія, необходимо и достаточно, чтобы эти корни были дѣйствительными, а для этого нужно, чтобы

$$a^2+b^2\geq c^2.$$

Пусть это условіе выполнено.

Опредѣливъ двѣ такія дуги x_1 и x_2, что

$$\tan x_1=t_1,\ \tan x_2=t_2,$$

мы получимъ рѣшенія уравненія (α) въ слѣдующемъ видѣ (форм. 22):

$$x=2k\pi+2x_1,\ x=2k\pi+2x_2.$$

2 *способъ*. Замѣняя въ уравненіи (α) $\cos x$ черезъ $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ (форм. 5), находимъ:

$$\pm a\sqrt{1-\sin^2 x}+b\sin x=c \text{ или } \pm a\sqrt{1-\sin^2 x}=c-b\sin x.$$

Возведя обѣ части послѣдняго уравненія въ квадратъ и сдѣлавъ упрощенія, получимъ уравненіе:

$$(a^2+b^2)\sin^2 x-2bc\sin x+c^2-a^2=0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\beta)$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\sin x$, находимъ:

$$\sin x=\frac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\quad \sin x=\frac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.$$

При $a^2+b^2\geq c^2$ найденныя значенія $\sin x$ дѣйствительны.

Кромѣ того оба дѣйствительныя значенія $\sin x$ по абсолютной величинѣ меньше 1, что необходимо для возможности опредѣленія дуги x (§ 36).

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (β) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^2(1-\sin^2 x)=(c-b\sin x)^2.$$

При дѣйствительныхъ значеніяхъ $\sin x$ вторая часть этого уравненія положительна, слѣд., множитель $1-\sin^2 x$ первой части также положителенъ; отсюда слѣдуетъ, что $|\sin x|<1$.

Пусть x_1 и x_2 суть двѣ такія дуги, что

$$\sin x_1=\frac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\quad \sin x_2=\frac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};$$

дуги $\pi-x_1$ и $\pi-x_2$ имѣютъ синусы, равные соотвѣтственно $\sin x_1$ и $\sin x_2$, а косинусы ихъ отличаются отъ $\cos x_1$ и $\cos x_2$ только знакомъ (форм. 15). Поэтому одна изъ дугъ x_1 и $\pi-x_1$ есть рѣшеніе уравненія (α), а другая—рѣшеніе уравненія

$$-a\cos x+b\sin x=c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha')$$

То же самое относится и къ дугамъ x_2 и $\pi-x_2$.

Если обозначимъ черезъ x' и x'' тѣ изъ двухъ паръ дугъ x_1, $\pi-x_1$ и x_2, $\pi-x_2$, которыя удовлетворяютъ уравненію (α), то всѣ рѣшенія этого уравненія представятся въ слѣдующемъ видѣ (форм. 1):

$$x=2k\pi+x', \; x=2k\pi+x''.$$

Не трудно выяснить причину появленія постороннихъ уравненію (α) рѣшеній при помощи разсматриваемаго способа.

Уравненіе (β) получается посредствомъ возведенія въ квадратъ обѣихъ частей уравненія (α), а возведеніе въ квадратъ ведетъ къ тому же результату, къ которому приводитъ умноженіе уравненія

$$a\cos x+b\sin x-c=0,$$

равносильнаго уравненію (α), на множитель $-a\cos x+b\sin x-c$, такъ что уравненіе (β) можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$(a\cos x+b\sin x-c)(-a\cos x+b\sin x-c)=0.$$

Это уравненіе распадается на уравненія (α) и (α'). Поэтому уравненіе (β) даетъ рѣшенія того и другого.

3 *способъ*. Найдемъ два числа r и φ такъ, чтобы

$$a=r\sin\varphi, \; b=r\cos\varphi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma)$$

Возведя въ квадратъ каждое изъ этихъ уравненій и сложивъ почленно полученные результаты, найдемъ (форм. 5):

$$r^2=a^2+b^2, \; r=\sqrt{a^2+b^2},$$

при чемъ при извлеченіи квадратнаго корня возьмемъ знакъ, одинаковый со знакомъ числа a. Первое изъ уравненій (γ) показываетъ, что наименьшая положительная дуга φ заключается между 0 и π (§ 18).

Для ея опредѣленія можно воспользоваться уравненіями (γ) и найденнымъ значеніемъ r, или уравненіемъ $\tan\varphi=a/b$, которое получается черезъ почленное дѣленіе перваго изъ уравненій (γ) на второе.

Подставивъ выраженія a и b черезъ r и φ въ уравненіе (α), получимъ:

$$r(\cos x\sin\varphi+\sin x\cos\varphi)=c.$$

Изъ этого уравненія при помощи формулы (25) находимъ:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{r}.$$

Уравненія этого типа были разсмотрѣны въ § 59. Уравненіе имѣетъ рѣшенія, если абсолютная величина c/r не превышаетъ 1, т.-е. если

$$r^2 \geq c^2 \text{ или } a^2+b^2 \geq c^2.$$

Третій способъ является наиболѣе удобнымъ на практикѣ, какъ требующій наименьшаго числа логариѳмическихъ вычисленій.

Примѣръ. Требуется рѣшить уравненіе:

$$2\cos x+2\sin x=\sqrt{2}.$$

Опредѣлимъ сначала r и φ изъ уравненій:

$$r\sin\varphi=2,\ r\cos\varphi=2.$$

Получимъ

$$r=2\sqrt{2};\ \tan\varphi=1,\ \varphi=\frac{\pi}{4}\cdot$$

Данное уравненіе преобразуется въ слѣдующее:

$$2\sqrt{2}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}.$$

Отсюда находимъ (§§ 34, 59):

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},\ x+\frac{\pi}{4}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6},$$

$$x=k\pi-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{6},$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

§ 63. **Уравненіе** $a.\cos^2 x+2b.\sin x\cos x+c.\sin^2 x=d$

Уравненіе

$$a.\cos^2 x+2b.\sin x\cos x+c.\sin^2 x=d,$$

гдѣ a, b, c и d суть постоянныя, можно привести къ уравненію (α) предыдущаго §. Замѣнивъ на основаніи формулы (5) d черезъ $d(\cos^2 x+\sin^2 x)$ и перенося всѣ члены въ первую часть уравненія, получимъ

$$(a-d)\cos^2 x+2b\sin x\cos x+(c-d)\sin^2 x=0.$$

Но (форм. 30, 30′ и 31)

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ 2\sin x\cos x=\sin 2x;$$

съ помощью этихъ формулъ послѣднее уравненіе преобразуется въ уравненіе

$$\frac{a-d}{2}(1+\cos 2x)+b\sin 2x+\frac{c-d}{2}(1-\cos 2x)=0,$$

которое послѣ упрощеній приводится къ уравненію:

$$A\cos 2x+B\sin 2x=C,$$

гдѣ

$$A=\frac{a-c}{2},\ B=b,\ C=\frac{2d-a-c}{2}.$$

§ 64. **О системахъ тригонометрическихъ уравненій.** Системы тригонометрическихъ уравненій можно распредѣлить на два класса: къ первому отнести тѣ системы, въ которыхъ всѣ уравненія тригонометрическія (§ 58), а ко второму такія системы, въ которыхъ кромѣ тригонометрическихъ есть и алгебраическія уравненія.

Напримѣръ система уравненій

$$a\cos x+b\cos y=c,\ a'\sin x+b'\sin y=c'$$

принадлежитъ къ первому классу; система уравненій

$$\sin x+\sin y=a,\ x+y=b$$

принадлежитъ ко второму классу.

Систему уравненій перваго класса всегда можно преобразовать въ систему алгебраическихъ уравненій. Если x, y,... суть неизвѣстныя данной системы, то для этого достаточно (§ 58) ввести новыя неизвѣстныя x', y',... посредствомъ подстановокъ:

$$x'=\tan\frac{x}{2},\ y'=\tan\frac{y}{2},\ldots.$$

Практическія неудобства этого общаго метода (§ 58) заставляютъ прибѣгать къ употребленію частныхъ способовъ, основанныхъ на изобрѣтательности и навыкѣ въ тригонометрическихъ преобразованіяхъ.

Что же касается до системъ второго класса, то для нихъ общаго пріема рѣшенія не существуетъ, и для каждой системы приходится изобрѣтать частный пріемъ.

Въ слѣдующемъ § приведены примѣры рѣшенія системъ тригонометрическихъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

§ 65. **Примѣры рѣшенія системъ тригонометрическихъ уравненій.** *Примѣръ* 1. Рѣшить систему уравненій

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\sin y&=a,\\ \cos x+\cos y&=b,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

гдѣ a и b суть постоянныя числа.

При помощи формулъ (44) и (47) эту систему можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}&=a\\ 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}&=b\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

Отсюда черезъ почленное дѣленіе перваго уравненія на второе находимъ:

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\gamma)$$

Такъ какъ тангенсъ можетъ имѣть любое значеніе (§ 21), то это уравненіе даетъ сумму $x+y$ при всѣхъ значеніяхъ a и b.

Зная $x+y$, можно опредѣлить изъ одного изъ уравненій (β) разность $x-y$ (форм. 8 и 11):

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\cos\frac{x+y}{2}}=\pm\frac{b}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} \quad \cdots\cdots (\delta)$$

Такъ какъ абсолютная величина косинуса не превышаетъ 1, то для возможности рѣшенія необходимо, чтобы

$$a^2+b^2\leq 4.$$

Положимъ, что это условіе выполнено и что φ есть одна изъ дугъ, тангенсъ которой равенъ a/b. Въ такомъ случаѣ изъ уравненія (γ) имѣемъ (§ 21):

$$\frac{x+y}{2}=k\pi+\varphi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\varepsilon)$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль, а изъ уравненія (δ) находимъ, что

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\cos(k\pi+\varphi)}=(-1)^k\frac{b}{2\cos\varphi}.$$

Пусть ψ есть дуга, косинусъ которой $=b/2\cos\varphi$. Такъ какъ (§ 30)

$$\cos(\pi+\psi)=-\cos\psi,$$

то изъ предыдущаго уравненія находимъ слѣдующія значенія $(x-y)/2$ (форм. 20):

$$\frac{x-y}{2}=2n\pi\pm\psi,\ \frac{x-y}{2}=2n\pi\pm(\pi+\psi) \quad \cdots\cdots (\zeta)$$

Значенія $(x-y)/2$, даваемыя этими формулами, можно выразить одной формулой:

$$\frac{x-y}{2}=2n\pi+k\pi\pm\psi,$$

гдѣ n есть цѣлое число или нуль, а k имѣетъ то же значеніе, что и въ формулѣ (ε).

Наконецъ, рѣшая уравненія (ε) и (ζ), находимъ значенія x и y:

$$x=2m\pi+\varphi\pm\psi,$$
$$y=2l\pi+\varphi\mp\psi,$$

гдѣ m и l суть цѣлыя числа или нули.

Примѣръ 2. Рѣшить систему уравненій

$$\sin x+\sin y=a$$
$$x+y=b.$$

Преобразуя первое уравненіе при помощи формулы (44), находимъ:

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a.$$

Отсюда при помощи второго уравненія данной системы получимъ:

$$2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a.$$

Это уравненіе позволяетъ вычислить $(x-y)/2$.
Зная $x+y$ и $(x-y)/2$ легко найти x и y.
Рѣшеніе системы возможно при выполненіи условія:

$$a^2\leq 4\sin^2(b/2).$$

Примѣръ 3. Рѣшить систему уравненій:

$$\frac{\tan x}{\tan y}=\frac{p}{q},\ x-y=a,$$

гдѣ a, p и q суть данныя числа.

По свойству равныхъ отношеній изъ перваго уравненія имѣемъ:

$$\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\frac{p+q}{p-q}.$$

Замѣнивъ тангенсы отношеніями синусовъ къ косинусамъ (форм. 6) и сдѣлавъ упрощенія, получимъ:

$$\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}=\frac{p+q}{p-q},$$

или [формулы (25) и (28)]

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{p+q}{p-q}.$$

Отсюда при помощи второго изъ данныхъ уравненій находимъ:

$$\sin(x+y)=\frac{p+q}{p-q}\sin a.$$

Опредѣливъ изъ этого уравненія сумму $x+y$ и зная разность $x-y$, легко найти каждое неизвѣстное.

Упражненія къ главѣ VIII.

Рѣшить уравненія:

1. $\sin x=\frac{1}{2}$. **2.** $\cos x=\cos 27^0$. **3.** $\cos x+\sin 15^0=0$.

4. $\tan x=-1$.

5. $\cot x = -\sqrt{3}$. 6. $\sec x = \sqrt{2}$. 7. $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{2}$. 8. $\sin 3x = \sin a$.
9. $\cos 4x = \sin a$. 10. $\tan 2x = -\cot 70^0$. 11. $\cot 3x = 1$.
12. $\sin 2x = \sin 3x$. 13. $\sin px = \cos qx$, 14. $\cos 2x = -\cos x$.
15. $\sin x + 1 = 2\cos^2 x$. 16. $\tan x + \cot x = 4$. 17. $2\sin^3 x + \cos^2 x = 1$.
18. $\sin x = \cot x$. 19. $3\cos x + 2\sin^2 x = 0$.
20. $\cos x - \sin x = \cos a - \sin a$. 21. $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.
22. $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 1$. 23. $\cos x + 2\sin x = 1$.
24. $2\sin x + 5\cos x = 2$. 25. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.
26. $\sin a + \sin(a + x) + \sin(a + 2x) = 0$.
27. $\cos a + \cos(a + x) + \cos(a + 2x) = 0$.
28. $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$. 29. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$.
30. $\sec 4x - \sec 2x = 2$. 31. $4\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$.
32. $2\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 1$.
33. $\cos^2 x - 2\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$.

Рѣшить системы уравненій:

34. $\cos x : \cos y = p : q$; $x + y = a$.
35. $\cos x + \cos y = a$; $x + y = b$.
36. $\tan x + \tan y = a$; $x + y = b$.
37. $\tan x \,.\, \tan y = a$; $x + y = b$.
38. $\sin x + \sin y = \sin x . \sin y$; $x + y = a$.
39. $\sin x + \cos y = a$; $x - y = b$.
40. $x + y + z = 180^0$; $\tan x : \tan y : \tan z = a : b : c$.

ГЛАВА IX.

Соотношенія между сторонами и углами треугольника. Рѣшеніе треугольниковъ.

§ 66. **Обозначенія.** Каждый уголъ треугольника ABC будемъ обозначать одной буквой, стоящей при его вершинѣ. Сторону, лежащую противъ угла A, будемъ обозначать буквой a, сторону, лежащую противъ угла B, буквой b, а сторону, лежащую противъ угла C, буквой c; радіусъ вписаннаго круга обозначается черезъ r, периметръ треугольника черезъ $2p$.

Въ прямоугольномъ треугольникѣ *гипотенуза* обозначается буквой a, а *катеты*—буквами b и c.

§ 67. **Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника.** Изъ геометріи извѣстны слѣдующія соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника:

$$B+C=90^0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$
$$b^2+c^2=a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

Такъ какъ катеты представляютъ не что иное, какъ проекціи гипотенузы, то по теоремѣ о проекціяхъ (§ 27) имѣемъ равенства:

$$b=a\cos C,\ c=a\cos B \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

Изъ этихъ формулъ при помощи соотношеній (56) и (16), находимъ:

$$b=a\sin B,\ c=a\sin C \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

Равенства (58) и (59) показываютъ, что *катетъ равняется гипотенузѣ, умноженной на косинусъ угла, прилежащаго къ нему, или на синусъ угла, ему противолежащаго.*

Раздѣливъ почленно первое изъ равенствъ (59) на второе изъ равенствъ (58), находимъ (см. форм. 6, 10, 16):

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B=\frac{1}{\cot B}=\frac{1}{\tan C}.$$

Отсюда получаемъ:

$$b=c.\tan B,\ c=b.\tan C. \quad \ldots\ldots\ldots (60)$$
$$b=c.\cot C,\ c=b.\cot B. \quad \ldots\ldots\ldots (61)$$

Эти равенства показываютъ, что *катетъ прямоугольнаго треугольника равняется другому катету, умноженному на тангенсъ* *угла, противолежащаго первому*, *или на котангенсъ угла*, *противолежащаго второму.*

Каждая изъ формулъ 56—61 содержитъ три элемента треугольника: формула (56) есть частный случай формулы $A+B+C=180^0$ при $A=90^0$; формула (57) устанавливаетъ связь между *тремя сторонами прямоугольнаго треугольника*; каждая изъ остальныхъ содержитъ *двѣ* стороны и *одинъ* уголъ. Эти послѣднія исчерпываютъ *всѣ* комбинаціи, которыя можно составить изъ двухъ сторонъ прямоугольнаго треугольника и одного изъ острыхъ угловъ.

Такихъ соотношеній, которыя содержали бы *одну* сторону и *два* угла, быть не можетъ, потому что въ противномъ случаѣ по двумъ даннымъ угламъ можно было бы найти стороны треугольника, а изъ этого вытекало бы равенство *подобныхъ* треугольниковъ.

§ 68. **Соотношенія между элементами косоугольнаго треугольника.** Изъ геометріи извѣстно соотношеніе между углами A, B и C треугольника ABC:

$$A+B+C=180^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (62)$$

Опишемъ около треугольника ABC (черт. 29) кругъ и назовемъ радіусъ его черезъ R.

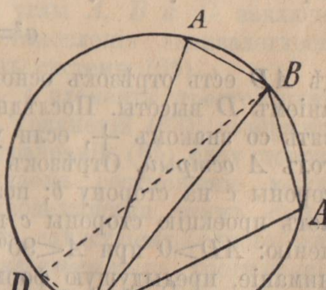
Проведя черезъ вершину B діаметръ и соединивъ конецъ D его съ вершиною C, получимъ прямоугольный треугольникъ BCD, изъ котораго имѣемъ (форм. 59):

$$BC=BD.\sin D.$$

Такъ какъ $BC=a$, $BD=2R$ и $\angle D=\angle A$, то

$$a=2R\sin A.$$

На чертежѣ уголъ A *острый*; но полученная формула справедлива и въ томъ случаѣ, когда уголъ A—*тупой*. Въ этомъ легко убѣдиться, повторивъ указанное построеніе для треугольника $A'BC$ (черт. 29) съ тупымъ угломъ A' и замѣтивъ, что въ этомъ случаѣ $D=180^0-A'$, и что, слѣд., $\sin D=$ $=\sin(180^0-A')=\sin A'$.



Черт. 29.

Изъ послѣдняго равенства получаемъ:

$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$

Точно также найдемъ, что

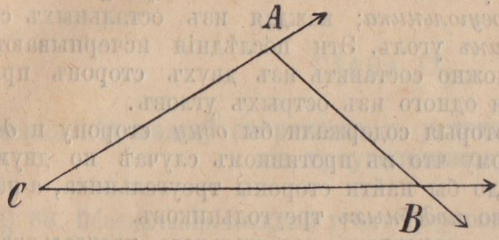
$$\frac{b}{\sin B}=2R, \quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Соединивъ полученные результаты, приходимъ къ равенствамъ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (63)$$

показывающимъ, что *стороны треугольника пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ*.

Равенства (62) и (63) представляютъ *первую основную группу соотношеній между элементами треугольника*.



Черт. 30.

Для полученія *второй основной группы соотношеній* проектируемъ ломаную CAB (черт. 30) на ея замыкающую CB. По теоремѣ о проекціяхъ (§ 27) имѣемъ $CB = CA . \cos C + AB . \cos B$. Аналогичныя формулы получимъ, проектируя ломаную ACB на AB и ломаную ABC на AC. Замѣнивъ въ нихъ CB, AC и AB соотвѣтственно черезъ a, b и c, найдемъ соотношенія

$$\left.\begin{array}{l} a = b\cos C + c\cos B, \\ b = c\cos A + a\cos C, \\ c = a\cos B + b\cos A, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

составляющія вторую основную группу соотношеній.

Наконецъ, мы получимъ *третью группу основныхъ соотношеній между элементами треугольника*, воспользовавшись извѣстнымъ изъ геометріи выраженіемъ квадрата стороны, лежащей противъ остраго или тупого угла:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2b . AD,$$

гдѣ AD есть отрѣзокъ основанія b между вершиною угла A и основаніемъ D высоты. Послѣдній членъ написанной формулы нужно взять со знакомъ $+$, если уголъ A *тупой*, и со знакомъ $-$, если уголъ A *острый*. Отрѣзокъ AD есть не что иное, какъ проекція стороны c на сторону b; поэтому (§ 27) $AD = c\cos A$. Эта формула даетъ проекцію стороны c не только по величинѣ, но и по направленію: $AD > 0$ при $A < 90^0$, $AD < 0$ при $A > 90^0$. Принимая это во вниманіе, предыдущую формулу можно переписать въ слѣдующемъ видѣ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos A$.

Для квадратовъ другихъ сторонъ получаются тѣмъ же пріемомъ аналогичныя формулы.

Равенства

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc . \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca . \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos C, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

представляютъ третью основную группу соотношеній между элементами треугольника.

Три группы (63, 64, 65) соотношенiй названы *основными* потому, что каждая изъ нихъ выражаетъ условiя, *необходимыя* и *достаточныя* для того, что три *положительныхъ* числа a, b, c выражали длины сторонъ треугольника, а три угла A, B и C, изъ которыхъ каждый больше 0^0 и меньше 180^0, были углами этого треугольника.

Необходимость этихъ условiй слѣдуетъ изъ того, что при ихъ выводѣ предполагалось существованiе треугольника.

Обнаружимъ *достаточность* первой изъ основныхъ группъ.

Построимъ треугольникъ по сторонѣ a и двумъ прилежащимъ угламъ B и C, при чемъ $a>0$, $B>0^0$, $C>0^0$, $B+C<180^0$. Называя остальные элементы треугольника черезъ A_1, b_1, c_1, по формуламъ (62) и (63) имѣемъ

$$A_1+B+C=180^0,\ \frac{a}{\sin A_1}=\frac{b_1}{\sin B}=\frac{c_1}{\sin C}.$$

Черезъ сравненiе этихъ соотношенiй съ формулами (62) и (63) заключаемъ, что $A_1=A$; $b_1=b$ и $c_1=c$. Слѣдовательно элементы построеннаго нами треугольника суть: a, b, c, A, B, C, что и доказываетъ достаточность первой основной группы отношенiй.

Аналогичнымъ способомъ можно показать достаточность двухъ остальныхъ группъ.

§ 69. **Эквивалентность основныхъ группъ.** Выведенныя въ предыдущемъ § три основныя группы соотношенiй между элементами треугольника *эквивалентны* между собою, т.-е. изъ каждой группы можно получить, какъ слѣдствiя, двѣ другiя группы, при условiи, что a, b, c суть положительныя числа, а углы A, B и C заключены между 0^0 и 180^0. Для примѣра установленiя эквивалетности покажемъ выводъ системы (62) и (63) изъ системы (65).

Каждое изъ уравненiй (65) содержитъ 4 элемента треугольника: три стороны и одинъ уголъ. Каждое изъ уравненiй (63) содержитъ двѣ стороны и два угла. Исключая изъ уравненiй (65) одну сторону и противолежащiй ей уголъ, мы получаемъ соотношенiе между двумя сторонами и двумя углами, противолежащими этимъ сторонамъ. Это новое соотношенiе *должно* быть слѣдствiемъ одного изъ соотношенiй (63). Дѣйствительно *двухъ независимыхъ* соотношенiй между a, b, A и B быть не можетъ, такъ какъ при существованiи двухъ независимыхъ соотношенiй между указанными элементами можно было бы опредѣлить стороны a и b по даннымъ угламъ A и B, т.-е. построить треугольникъ по двумъ угламъ, что, какъ извѣстно, невозможно.

Изъ этого слѣдуетъ, что для вывода первой основной системы изъ третьей достаточно исключить изъ уравненiй (65) одну сторону и противолежащiй ей уголъ. Сдѣлаемъ это.

Черезъ вычитанiе изъ перваго уравненiя системы (65) второго уравненiя той же системы находимъ послѣ упрощенiй:

$$a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A).$$

Отсюда имѣемъ:

$$c=\frac{a^2-b^2}{a\cos B-b\cos A}.$$

Подставивъ это значеніе c въ первое изъ уравненій (65), получимъ:

$$a^2=b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{(a\cos B-b\cos A)^2}-\frac{2b(a^2-b^2)\cos A}{a\cos B-b\cos A},$$

отсюда по сокращеніи на a^2-b^2 $(a^2\neq b^2)$ и приведеніи къ одному знаменателю найдемъ равенство

$$(a\cos B-b\cos A)^2=a^2-b^2-2b\cos A(a\cos B-b\cos A),$$

которое приводится къ слѣдующему:

$$a^2(1-\cos^2 B)=b^2(1-\cos^2 A) \text{ или } a^2\sin^2 B=b^2\sin^2 A.$$

Такъ какъ $a>0$ и $b>0$ и $\sin B>0$, $\sin A>0$, то послѣднее равенство можно замѣнить равенствомъ:

$$a\sin B=b\sin A,$$

изъ котораго находимъ, что

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

Тѣмъ же способомъ можно изъ равенствъ (65) вывести соотношеніе

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

Такимъ образомъ формулы (63) можно вывести изъ формулъ (65). Чтобы вывести изъ нихъ формулу (62), воспользуемся формулами (63), какъ уже извѣстными, и положимъ:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=q.$$

Опредѣливъ отсюда a, b и c черезъ q и подставивъ найденныя значенія въ двѣ первыя изъ формулъ (65), найдемъ по сокращенію на q^2:

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A,$$
$$\sin^2 B=\sin^2 C+\sin^2 A-2\sin C\sin A\cos B.$$

Отсюда черезъ почленное сложеніе получаемъ:

$$0=2\sin^2 C-2\sin C[\sin B\cos A+\sin A\cos B],$$

или (форм. 25)

$$\sin C=\sin(A+B).$$

Это уравненіе показываетъ, что

$$\text{или } C=A+B, \text{ или } C=180^0-(A+B).$$

Совершенно также получимъ, что или $B=A+C$, или $B=180^0-(A+C)$; или $A=B+C$, или $A=180^0-(B+C)$.

Разсматривая совмѣстно эти альтернативы для угловъ A, B и C, находимъ, что

$$A+B+C=180^0.$$

§ 70. **Замѣчаніе о формулахъ** (63). Формулы (63) служатъ источникомъ для полученія соотношеній, имѣющихъ мѣсто между углами, различными линіями треугольника (высоты, биссектрисы, медіаны и т. п.) и площадью его.

Всѣ эти соотношенія являются результатами двоякаго рода преобразованій формулъ (63).

Преобразованія перваго рода основаны на извѣстномъ свойствѣ равныхъ отношеній: сумма (алгебраическая) предыдущихъ относится къ суммѣ послѣдующихъ, какъ одинъ предыдущій относится къ своему послѣдующему. Преобразованія второго рода основаны на томъ, что каждое изъ отношеній (63) равно $2R$; поэтому произведеніе двухъ отношеній равно $(2R)^2$, а квадратный корень изъ этого произведенія равенъ $2R$; произведеніе трехъ отношеній равно $(2R)^3$, а кубичный корень изъ него равенъ $2R$ и т. д. Не входя въ подробности *). приведемъ нѣсколько соотношеній, полученныхъ указаннымъ способомъ:

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=$$

$$=\frac{a+b}{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{a-b}{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=$$

$$=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{p-a}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{h_a}{\sin B\sin C}=\frac{l_a\cos\frac{B-C}{2}}{\sin B\sin C}=$$

$$=\frac{r}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{r_a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2S}}{\sqrt{\sin A\sin B\sin C}}=\frac{m_a\sin(\widehat{a,m_a})}{\sin B\sin C},$$

гдѣ h_a есть высота на сторону a, l_a — биссектриса угла A, m_a — медіана, соотвѣтствующая сторонѣ a и r_a радіусъ внѣшне-вписаннаго круга, соотвѣтствующаго сторонѣ a.

---

*) Подробности о рядѣ равныхъ отношеній и приложеніи его къ рѣшенію треугольниковъ изложены въ брошюрѣ *К. Торопова: Магическій рядъ и примѣненіе его къ рѣшенію задачъ.* Оренбургъ, 1911.

§ 71. **Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.** Для опредѣленія прямоугольнаго треугольника ABC ($A=90^0$) достаточно знать два его элемента, въ томъ числѣ по крайней мѣрѣ одну сторону. Вычисленіе остальныхъ трехъ элементовъ производится по формуламъ 56—61.

Разсмотримъ *основные* или *классическіе* случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ.

1 случай. Даны гипотенуза а и острый уголъ В. Опредѣлить уголъ С и катеты b и с.

По формуламъ 56, 58 и 59 имѣемъ:

$$C=90^0-B,\ b=a\sin B,\ c=a\cos B.$$

2 случай. Даны катетъ b и острый уголъ В. Опредѣлить уголъ С, катетъ с и гипотенузу а.

По формуламъ (56), (59) и (61) имѣемъ:

$$C=90^0-B,\ c=b.\cot B,\ a=\frac{b}{\sin B}.$$

3 случай. Даны катетъ b и гипотенуза а. Найти углы В и С и катетъ с.

Изъ формулы (59) находимъ:

$$\sin B=\frac{b}{a}.$$

Вычисливъ уголъ B, по формулѣ (56), найдемъ $C=90^0-B$, а по формулѣ 58 опредѣлимъ катетъ c:

$$c=a\cos B.$$

Катетъ c можно опредѣлить также по формулѣ (61):

$$c=b.\cot B.$$

4 случай. Даны катеты b и с. Найти острые углы В и С и гипотенузу а.

Уголъ B опредѣляется по формулѣ (60):

$$\tan B=\frac{b}{c}.$$

Затѣмъ по формулѣ (56) находимъ уголъ C:

$$C=90^0-B.$$

Гипотенузу можно вычислить по одной изъ формулъ (58) и (57):

$$a=\frac{b}{\sin B},\ a=\sqrt{b^2+c^2}.$$

§ 72. **Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.** Для опредѣленія косоугольнаго треугольника нужно имѣть три данныхъ, при чемъ по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ есть длина нѣкоторой линіи въ треугольникѣ. Тѣ случаи, когда данными являются стороны и углы треугольника, называются *основными* или *классическими*. Такихъ случаевъ четыре: 1) даны сторона и два угла треугольника; 2) даны двѣ стороны и уголъ между ними; 3) даны двѣ стороны и уголъ, лежащій противъ одной изъ нихъ; 4) даны три стороны треугольника.

Разсмотримъ отдѣльно каждый изъ нихъ.

§ 73. **Рѣшеніе треугольника по даннымъ**: a, B и C. Рѣшеніе задачи возможно при выполненіи условія: $B+C<180^0$. Если это условіе выполнено, то опредѣленіе угла A и сторонъ b и c дается уравненіями (62) и (63) первой основной системы соотношеній между элементами треугольника:

$$A=180^0-B-C;\ b=\frac{a\sin B}{\sin A};\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

§ 74. **Рѣшеніе треугольника по даннымъ**: a, b и C. Изъ уравненія (62) имѣемъ:

$$A+B=180^0-C;$$

изъ уравненій (63) находимъ:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A+\sin B}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{a-b},$$

отсюда получаемъ

$$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{a+b}{a-b},$$

или (форм. 44 и 45)

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{a+b}{a-b},$$

или, наконецъ, (форм. 6)

$$\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Но $\tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(90^0-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$ (форм. 16); принявъ это во вниманіе, изъ послѣдняго равенства находимъ:

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}.$$

Это уравненіе даетъ разность $A-B$; зная же сумму и разность угловъ A и B, можно найти и самые углы A и B.

Вычисленіе стороны c производится по одному изъ уравненій (63). Для удобства вычисленій слѣдуетъ взять $a>b$.

§ 75. **Рѣшеніе треугольника по даннымъ**: a, b и A. Изъ формулъ (63) имѣемъ:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Такъ какъ $\sin B \leq 1$, то для возможности рѣшенія задачи необходимо, чтобы $b . \sin A \leq a$. Если $b \sin A < a$, то уравненіе (α) опредѣляетъ два угла, острый и тупой, которые могутъ быть углами треугольника и въ суммѣ составляютъ 180^0.

Но изъ геометріи извѣстно, что $A > B$, если $a > b$. Поэтому при $a > b$ уголъ B долженъ быть острый, и изъ двухъ рѣшеній, доставляемыхъ уравненіемъ (α), нужно взять только одно.

Если же $a < b$, то уголъ B можетъ быть и тупымъ. Поэтому задача имѣетъ два рѣшенія. Если $b \sin A = a$, то $B = 90^0$; задача имѣетъ одно рѣшеніе.

При $a = b$ нѣтъ надобности въ уравненіи (α): углы треугольника опредѣляются уравненіями: $B = A$, $A + B + C = 180^0$.

Приведенное изслѣдованіе можно резюмировать слѣдующимъ образомъ: двумя данными сторонами и угломъ, противолежащимъ большей изъ нихъ, опредѣляется единственный треугольникъ; двумя сторонами и угломъ, противолежащимъ меньшей изъ нихъ, опредѣляются либо два треугольника, либо одинъ, либо ни одного; первый случай имѣетъ мѣсто, когда $b \sin A < a$; второй при $b \sin A$ третій при $b \sin A > a$.

Эти заключенія легко пояснить геометрически, замѣтивъ, что $b \sin A$ есть не что иное, какъ разстояніе точки C, лежащей на сторонѣ угла A и отстоящей отъ его вершины на $AC = b$, отъ другой стороны этого угла, и припомнивъ построеніе треугольника по двумъ даннымъ сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ.

§ 76. **Рѣшеніе треугольника по даннымъ**: a, b и c. Чтобы по даннымъ сторонамъ треугольника найти его углы, воспользуемся третьей основной системой соотношеній между элементами треугольника (форм. 65). Изъ перваго уравненія этой системы имѣемъ:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} .$$

Черезъ прибавленіе $\cos A$ къ 1 черезъ вычитаніе $\cos A$ изъ 1 находимъ:

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} =$$

$b+c-a$

$$= \frac{(a+b+c)\ (a+b-c))}{2bc};$$

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{2bc} .$$

Отсюда черезъ почленное дѣленіе второго равенства на первое, при помощи формулъ (39), получимъ:

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)\ (a-b+c)}{(a+b+c)\ (b+c-a)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Преобразуемъ эту формулу, введя периметръ $2p$ треугольника, т.-е. положивъ $a+b+c=2p$. Такъ какъ

$$a+b-c=2p-2c=2(p-c),$$
$$a-b+c=2p-2b=2(p-b),$$
$$b+c-a=2p-2a=2(p-a),$$

то

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)\ (p-c)}{p(p-a)}.$$

Аналогичныя формулы получимъ и для угловъ B и C.

Опредѣляя изъ нихъ тангенсы угловъ $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$,

находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\ (p-a)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p(p-c)}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

Такъ какъ половины угловъ треугольника меньше 90^0, то въ этихъ формулахъ вторыя части положительны.

Если a есть наибольшая сторона, то изъ формулы (β), вторая часть которой должна быть положительнымъ числомъ, слѣдуетъ, что для возможности рѣшенія задачи необходимо и достаточно, чтобы $a<b+c$. При выполненіи этого условія задача имѣетъ одно рѣшеніе. Такимъ образомъ изслѣдованіе формулъ настоящаго § приводитъ къ результату, извѣстному изъ геометріи.

§ 77. **Выраженіе площади треугольника.** Изъ геометріи извѣстно, что площадь треугольника равна половинѣ произведенія его основанія на высоту.

Принимая за основаніе треугольника ABC сторону b и обозначая площадь его черезъ S, а высоту черезъ h, получаемъ соотношеніе:

$$S = \frac{bh}{2}.$$

Такъ какъ $h = a \sin C$, то

$$S = \frac{ab \sin C}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

т.-е. *площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ его сторонъ, умноженнаго на синусъ угла между ними.*

Формулой (77) удобно пользоваться, когда даны a, b и C (§ 74).

Замѣтивъ, что по формуламъ (63) $b=a\,.\sin B/\sin A$, изъ формулы (67) находимъ:

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Формула (68) служитъ для вычисленія площади треугольника когда извѣстны a, B и C (§ 73).

Кромѣ указанныхъ выраженій площади треугольника полезно помнить еще два слѣдующихъ, извѣстныхъ изъ геометріи:

$$S=\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)},$$
$$S=pr,$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника, а r радіусъ вписаннаго въ него круга.

Упражненія къ главѣ IX.

Обозначенія указаны въ § 66.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по даннымъ:

1. $b+c=s$, B. **2.** $b-c=d$, B. **3.** a, $b+c=s$. **4.** a, $b-c=d$.
5. $a+c=s$, B. **6.** $a-c=d$, B.

7. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ a и высотѣ h, опущенной на гипотенузу.*

8. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по проекціямъ p и q катетовъ b и c на гипотенузу.*

9. *Рѣшить прямоугольный треугольникъ по площади S и углу B.*

10. *Сторона правильнаго n-угольника$=a$. Найти радіусъ r вписаннаго въ него круга и радіусъ R описаннаго около него круга.*

11. *По сторонѣ a правильнаго вписаннаго въ кругъ n-угольника опредѣлить сторону правильнаго описаннаго около этого круга n-угольника.*

Показать, что во всякомъ треугольникѣ имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

12. $(a+b)\Big/c=\cos\frac{A-B}{2}\Big/\sin\frac{C}{2}$;

13. $(a-b)\Big/c=\sin\frac{A-B}{2}\Big/\cos\frac{C}{2}$;

14. $r=(p-a)\tan\frac{A}{2}=(p-b)\tan\frac{B}{2}=(p-c)\tan\frac{C}{2}=$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}{p}};$$

15. $S=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$;

16. $R=a\,/2\sin A=b/\,2\sin B=c\,/2\sin C=abc/\,4\,S$, *гдѣ* R *есть радіусъ круга, описаннаго около треугольника. Рѣшить треугольникъ, если извѣстны*
17. *сторона* a, *уголъ* A *и сумма* $b+c=s$;
18. *сторона* a, *уголъ* A *и разность* $b-c=d$;
19. *сторона* a, *уголъ* B *и разность* $b-c=d$;
20. *периметръ* $2p$ *и углы* A, B, C;
21. *три высоты* h_a, h_b, h_c;
22. *радіусъ* r *вписаннаго круга и углы* A, B, C.
23. *Показать, что площадь выпуклаго четыреугольника равна половинѣ произведенія его діагоналей на синусъ угла между ними.*
24. *Въ выпукломъ четыреугольникѣ* $ABCD$, *вписанномъ въ кругъ, извѣстны его стороны:* $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$. *Найти его углы* A, B, C, D, *площадь* S *и радіусъ описаннаго круга.*
25. *Въ четыреугольникѣ, указанномъ въ упр. 24, опредѣлить діагонали* AC *и* BD *и показать, что*

$$AC.BD=ac+bd \text{ (теорема Птоломея)},$$
$$AC:BD=(ad+bc)/(ab+cd).$$

ГЛАВА X.

Комплексныя числа. Формула Moivre'а. Умноженіе и дѣленіе дугъ. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій.

78. **Введеніе комплексныхъ чиселъ.** Извѣстно, что квадраты какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ чиселъ суть числа *положительныя*. Поэтому извлеченіе квадратнаго корня изъ отрицательнаго числа *невозможно, пока мы пользуемся только положительными и отрицательными числами*. То же самое относится и къ извлеченію корня произвольной четной степени изъ отрицательнаго числа. Съ цѣлью устранить эту невозможность понятіе числа расширяется введеніемъ новыхъ чиселъ, которыя получили названіе *мнимыхъ* или *комплексныхъ*, причемъ положительнымъ и отрицательнымъ числамъ присвоено названіе *вещественныхъ* или *дѣйствительныхъ*.

Комплексное число изображается символомъ $a+ib$, который указываетъ на соединеніе двухъ вещественныхъ чиселъ a, b въ одну числовую пару, причемъ i является *знакомъ* второго элемента этой пары.

Чтобы этой парѣ или этому комплексу можно было дать названіе числа, нужно указать *условіе* равенства двухъ комплексовъ, *опредѣлить* для нихъ основныя дѣйствія (сложеніе и умноженіе) и установить соотношеніе между ними и вещественными числами.

При выборѣ опредѣленій сложенія и умноженія руководящимъ принципомъ является стремленіе сохранить за дѣйствіями не одни названія, но и главныя свойства, которыми эти дѣйствія характеризуются въ области дѣйствительныхъ чиселъ.

Для сложенія эти свойства слѣдующія:

1) оно *всегда возможно;*

2) оно *однозначно;*

3) оно *коммутативно*, или *перемѣстительно*; простѣйшее выраженіе этого свойства дается формулой:

$$a+b=b+a,$$

гдѣ a и b произвольныя вещественныя числа.

4) оно *ассоціативно* или *собирательно*; это свойство выражается формулой:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Для умноженія главными свойствами являются слѣдующія:

1) оно *всегда возможно*;

2) оно *однозначно*;

3) оно *коммутативно* или *перемѣстительно*:

$$ab=ba;$$

4) оно *ассоціативно* или *собирательно*:

$$(ab).c=a.(bc);$$

5) оно *дистрибутивно* или *распредѣлительно*:

$$(a+b).c=ac+bc;$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Послѣднее свойство указываетъ на соотношеніе между сложеніемъ и умноженіемъ.

§ 79. **Опредѣленія равенства комплексовъ и дѣйствій надъ ними.**

Опредѣленіе I. $a+ib=a'+ib'$, если $a=a'$ и $b=b'$.

Опредѣленіе II. $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$.

Опредѣленіе I указываетъ условія равенства двухъ комплексныхъ чиселъ.

Опредѣленіе II даетъ правило сложенія двухъ комплексныхъ чиселъ; результатъ сложенія называется суммою.

Суммою трехъ комплексныхъ чиселъ называется сумма суммы первыхъ двухъ съ третьимъ и т. д.

Такъ какъ по опредѣленію II сложеніе комплексныхъ чиселъ приводится къ сложенію вещественныхъ чиселъ, то всѣ свойства сложенія, указанныя въ предыдущемъ §, сохраняются и при сложеніи комплексныхъ чиселъ.

Разностью комплексныхъ чиселъ $a+ib$ и $a'+ib'$ называется комплексное число $x+iy$, обладающее тѣмъ свойствомъ, что

$$(x+iy)+(a'+ib')=a+ib.$$

Первая часть этого равенства по опр. II приводится къ числу: $(x+a')+i(y+b')$.

Поэтому, по опредѣленію I, имѣемъ

$$x+a'=a,\ y+b'=b,$$

откуда находимъ:

$$x=a-a',\ y=b-b'.$$

Разность чиселъ $a+ib$ и $a'+ib'$ обозначается символомъ $(a+ib)-(a'+ib')$. Нахожденіе разности называется вычитаніемъ.

Изъ сказаннаго вытекаетъ правило вычитанія:

$$(a+ib)-(a'+ib')=(a-a')+i(b-b').$$

Опредѣленіе III. Умноженіе двухъ комплексныхъ чиселъ опредѣляется формулой:

$$(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

Число, стоящее въ правой части этого равенства, называется *произведеніемъ* чиселъ $a+ib$ и $a'+ib'$.

Произведеніемъ трехъ комплексныхъ чиселъ называется произведеніе произведенія первыхъ двухъ на третье и т. д.

Легко убѣдиться, что дѣйствіе, устанавливаемое опредѣленіемъ III, обладаетъ всѣми свойствами умноженія, указанными въ § 78.

Частнымъ двухъ комплексныхъ чиселъ $a+ib$ и $a'+ib'$ называется комплексное число $x+iy$, обладающее тѣмъ свойствомъ, что

$$(x+iy)(a'+ib')=a+ib.$$

Изъ этого равенства, по опредѣленіямъ III и I, находимъ:

$$a'x-b'y=a;\ b'x+a'y=b.$$

Рѣшая эти уравненія, получимъ для x и y слѣдующія значенія:

$$x=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2};\quad y=\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Опредѣленіе x и y возможно всегда, за исключеніемъ случая, когда $a'=b'=0$.

Частное двухъ комплексныхъ чиселъ обозначается однимъ изъ двухъ символовъ:

$$(a+ib):(a'+ib') \text{ или } \frac{a+ib}{a'+ib'}.$$

Нахожденіе частнаго называется дѣленіемъ. Правило дѣленія выражается формулой:

$$\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+i\,\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2},$$

при условіи, что a' и b' не равны одновременно нулю.

§ 80. **Вещественныя и чисто-мнимыя числа. Опредѣленіе IV.** $a+i0=a$. Это опредѣленіе позволяетъ разсматривать вещественныя числа, какъ частный случай комплексныхъ, и подсказывается опредѣленіемъ равенства комплексныхъ чиселъ и правилами 4 дѣйствій надъ ними. Дѣйствительно, два комплексныхъ числа, вторые элементы которыхъ суть нули, равны между собою, если равны ихъ первые элементы (опредѣленіе I); чтобы сложить, вычесть, умножить или раздѣлить два такія числа, достаточно произвести соотвѣтственное дѣйствіе надъ ихъ первыми элементами (см. правила дѣйствій въ предыдущемъ §).

Слѣдствіе 1. $a+ib=c$, если $b=0$ и $a=c$ (опр. I и IV).

Слѣдствіе 2. $a+ib=0$, если $a=0$, $b=0$ (опр. I и IV).

Слѣдствіе 3. $(a+ib)+[-a+i(-b)]=0$ (опр. II и IV).

Слѣдствіе 4. $(a+ib).c=ac+ibc$ (опр. III и IV).

Слѣдствіе 5. $ib=(i1).b$ (опр. IV и слѣд. 4).

До сихъ поръ i разсматривалось только, какъ знакъ второго элемента комплекснаго числа. Опредѣленіе IV и слѣдствіе 5 показываютъ, что всякое комплексное число $a+ib$ можно разсматривать, какъ сумму вещественнаго числа a и произведенія новаго числа $i1$

на вещественное число b. Это новое число будемъ обозначать черезъ i и называть *мнимой единицей*.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

$$i.0=0.i=0;\ i.1=1.i=i.$$

Произведеніе i на -1 обозначается черезъ $-i$.

Числа ib называются *чисто-мнимыми*.

Вещественныя и чисто-мнимыя числа суть частные случаи комплекснаго числа.

§ 81. **Степени числа i.** Для обозначенія степеней комплекснаго числа удержимъ обозначенія, принятыя для вещественныхъ чиселъ. Такъ, напр., произведеніе $(a+ib)(a+ib)$ будемъ обозначать черезъ $(a+ib)^2$, произведеніе ii—черезъ i^2, $1/(a+ib)$—черезъ $(a+ib)^{-1}$ и т. д.

Вычислимъ степени числа i.

Такъ какъ $i=i1=0+i1$ (§ 80), то по опредѣленію (III) находимъ:

$$i^2=ii=(0+i1)(0+i1)=-1+i0;$$

отсюда по опредѣленію IV заключаемъ, что

$$i^2=-1.$$

Это равенство выясняетъ значеніе мнимой единицы: i, мнимая единица, есть не что иное, какъ квадратный корень изъ -1. Итакъ

$$i=\sqrt{-1}.$$

Такъ какъ умноженіе комплексныхъ чиселъ ассоціативно, то

$$i^3=iii=i.(ii)=-i;\ i^4=i.i^3=i(-i)=-i^2=+1;$$

$$i^5=i.i^4=i;\ i^6=i.i^5=i.i=i^2=-1;\ i^7=i.i^6=-i;\ i^8=i.i^7=i(-i)=-i^2=+1.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i;\ i^{4k+2}=-1;\ i^{4k+3}=-i,$$

гдѣ k есть натуральное число или нуль.

§ 82. **Модуль.** Модулемъ комплекснаго числа $a+ib$ называется число $+\sqrt{a^2+b^2}$.

Модуль числа $a+ib$ обозначается символомъ $|a+ib|$:

$$|a+ib|=+\sqrt{a^2+b^2}.$$

Модуль дѣйствительнаго числа равенъ его абсолютной величинѣ (§ 80).

Модуль комплекснаго числа $a+ib$ равенъ нулю только въ томъ случаѣ, когда $a=b=0$, т.-е. когда это число равно нулю (§ 80).

§ 83. **Сопряженныя комплексныя числа.** Два числа $a+ib$ и $a-ib$, отличающіяся только знаками при мнимыхъ частяхъ, называются *сопряженными*.

Модули сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ равны.

Сумма двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ равна удвоенной дѣйствительной части:

$$(a+ib)+(a-ib)=2a.$$

Произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ равно квадрату ихъ модуля:

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2.$$

Въ связи съ послѣднимъ свойствомъ пары сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ отмѣтимъ возможность замѣны дѣленія комплексныхъ чиселъ умноженіемъ, какъ это видно изъ слѣдующаго преобразованія:

$$\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')}=\frac{(a+ib)(a'-ib')}{a'^2+b'^2}.$$

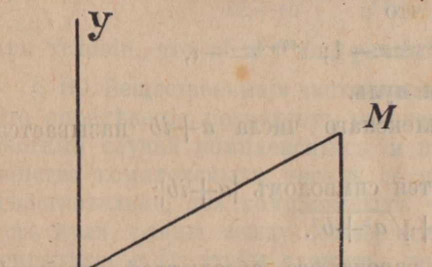
§ 84. **Геометрическое представленіе комплексныхъ чиселъ.** Комплексное число $x+iy$ изображается на плоскости точкой, прямоугольныя координаты которой суть x и y (x—абсцисса, y—ордината; см. § 3).

Каждому комплексному числу соотвѣтствуетъ *одна* точка плоскости, и, обратно, каждая точка плоскости служитъ изображаніемъ *одного* комплекснаго числа (§ 3).

Точки оси x представляютъ изображенія *дѣйствительныхъ* чиселъ, а точки оси y—изображенія *чисто-мнимыхъ* чиселъ.

Положеніе точки M на плоскости можно опредѣлить, давъ разстояніе OM точки M отъ нѣкоторой опредѣленной точки O и уголъ, который образуетъ отрѣзокъ OM съ нѣкоторой опредѣленной прямой Ox, проходящей черезъ точку O. Разстояніе OM называется *радіусомъ векторомъ* точки M, а $\angle xOM$—ея *амплитудой* или *аргументомъ*.

Радіусъ векторъ обозначимъ буквой r, а аргументъ буквой φ. Числа r и φ называются *полярными координатами* точки, точка O—*полюсомъ*, а прямая Ox—*полярной осью*. Радіусъ векторъ r считается *положительной* величиной, а аргументъ отсчитывается отъ полярной оси, причемъ положительнымъ считается направленіе, *противоположное* движенію часовой стрѣлки.



Черт. 31.

Если *полюсъ* и *полярная ось* совпадаютъ соотвѣтственно съ *началомъ* и *осью абсциссъ прямоугольной* системы координатъ, то между полярными координатами r и φ нѣкоторой точки M и ея *прямоугольными координатами* x и y существуютъ соотношенія:

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi, \ldots\ldots\ldots (69)$$

которыя выводятся изъ прямоугольнаго треугольника OPM (черт. 31) (§ 67).

Изъ этихъ соотношеній имѣемъ:

$$r=+\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\operatorname{arctan}\frac{y}{x},$$

ри чемъ за φ принимается *главное* (§ 39) значеніе $\operatorname{arctan}(y/x)$.

§ 85. **Тригонометрическая форма комплекснаго числа.** Изъ равенства $r=+\sqrt{x^2+y^2}$ слѣдуетъ, что радіусъ векторъ точки M, изображающей комплексное число $x+iy$, представляетъ *модуль* этого числа (§ 82). Аргументъ φ точки M называется аргументомъ комплекснаго числа $x+iy$.

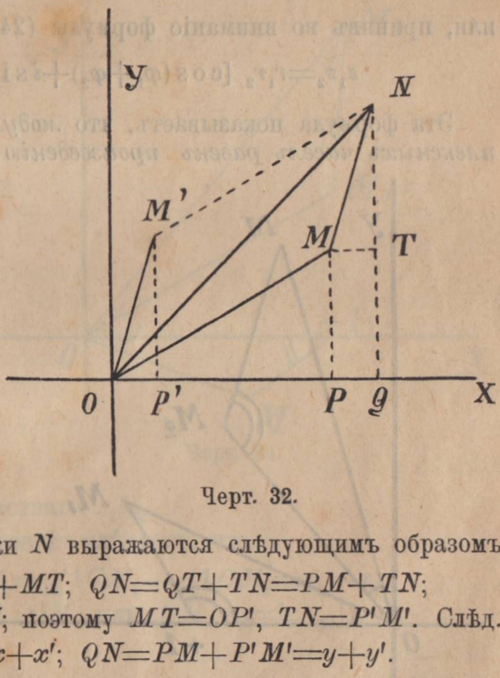
Пользуясь формулами (69), можно представить комплексное число въ тригонометрической формѣ:

$$x+iy=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)\quad\ldots\ldots\quad(70)$$

Аргументы вещественныхъ чиселъ суть 0 или π, аргументы чисто-мнимыхъ чиселъ суть $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ (§§ 84, 80, 19).

§ 86. **Построеніе суммы и разности комплексныхъ чиселъ.** Пусть M и M' (черт. 32) служатъ изображеніями соотвѣтственно чиселъ $x+iy$ и $x'+iy'$.

Требуется построить точку, изображающую ихъ сумму. Координаты искомой точки суть $x+x'$, $y+y'$ (§ 79, опр. II). Для построенія ея проводимъ изъ точки M прямую, параллельную OM', и отложимъ на ней отрѣзокъ MN, равный OM' и одинаково съ нимъ направленный. Точка N есть искомая точка.



Черт. 32.

Дѣйствительно, построивъ координаты точекъ M, M' и N и проведя прямую MT параллельно Ox, изъ чертежа легко усмотрѣть, что координаты OQ и QN точки N выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$OQ=OP+PQ=OP+MT;\quad QN=QT+TN=PM+TN;$$

Но $\triangle\ OP'M'=\triangle\ MTN$; поэтому $MT=OP'$, $TN=P'M'$. Слѣд.,

$$OQ=OP+OP'=x+x';\quad QN=PM+P'M'=y+y'.$$

Соединивъ O съ N, получимъ модуль суммы данныхъ чиселъ. Отсюда заключаемъ, что *модуль суммы двухъ комплексныхъ чиселъ есть замыкающая ломаной* OMN, *которой звенья* OM *и* MN *по направленію совпадаютъ съ модулями слагаемыхъ, а по величинѣ равны имъ.*

Изъ треугольника OMN имѣемъ:

$$\pm(OM-MN)\leq ON\leq OM+MN,$$

т.-е. модуль суммы двухъ слагаемыхъ не болѣе суммы и не менѣе разности ихъ модулей.

Указанный способъ построенія суммы двухъ комплексныхъ чиселъ легко распространить на случай произвольнаго числа слагаемыхъ.

Не останавливаясь на этомъ, отмѣтимъ только свойство модуля суммы: *модуль суммы не болѣе суммы модулей слагаемыхъ.*

Построеніе разности чиселъ $x+iy$ и $x'+iy'$ приводится къ построенію суммы чиселъ $x+iy$ и $-x'-iy'$.

§ 87. **Модуль и аргументъ произведенія.** Составляя произведеніе чиселъ

$$z_1=r_1\ (\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\ \text{и}\ z_2=r_2\ (\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

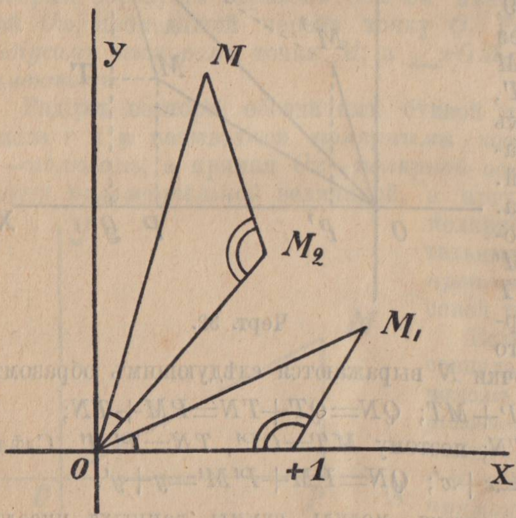
находимъ (§ 79, опр. III):

$$z_1z_2=r_1r_2\ [(\cos\varphi_1\ \cos\varphi_2-\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2+ \\ +\cos\varphi_1\ \sin\varphi_2)],$$

или, принявъ во вниманіе формулы (24) и (25),

$$z_1z_2=r_1r_2\ [\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\ \ .\ .\ .\ .\ .\ (71)$$

Эта формула показываетъ, что *модуль произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ равенъ произведенію ихъ модулей, а аргументъ ихъ произведенія равенъ суммѣ ихъ аргументовъ.*



Черт. 33.

§ 88. **Построеніе произведенія двухъ комплексныхъ чиселъ.** Пусть M_1 и M_2 (черт. 33) суть точки, изображающія соотвѣтственно числа $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Для построенія точки M, изображающей произведеніе z_1z_2, отложимъ по оси x отрѣзокъ $O1=+1$ и соединимъ точку 1 съ точкой M_1; затѣмъ на отрѣзкѣ OM_2 построимъ треугольникъ OM_2M, подобный треугольнику $O1M_1$, принявъ OM_2 и $O1$ за сходственныя стороны. Вершина M этого треугольника есть точка, изображающая произведеніе z_1z_2.

Дѣйствительно, изъ построенія слѣдуетъ, что

$$\angle M_2OM=\angle 1OM_1;\angle 1OM=\angle M_2OM+\angle 1OM_2=\varphi_1+\varphi_2;$$
$$OM:OM_1=OM_2:O1\ \text{или}\ OM:r_1=r_2:1,$$

откуда $OM=r_1r_2$.

§ 89. **Модуль и аргументъ частнаго. Построеніе частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ.** Частное чиселъ z_1 и z_2 выражается слѣдующимъ образомъ (§ 83):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)=$$

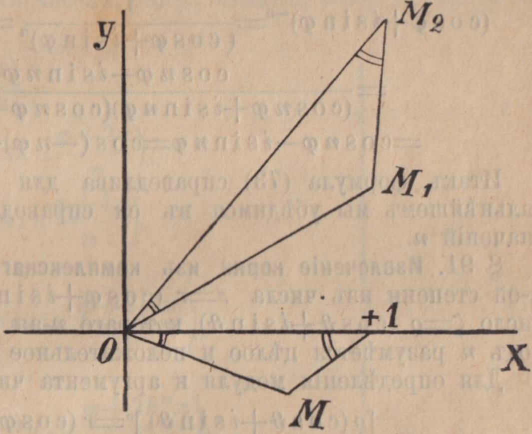
$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)\cdot[\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2)]=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Эта формула показываетъ, что *модуль частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равенъ частному ихъ модулей, а аргументъ частнаго равенъ разности аргументовъ дѣлимаго и дѣлителя.*

Пусть точки M_1 и M_2 суть изображенія соотвѣтственно чиселъ z_1 и z_2 (черт. 34).

Для построенія точки, изображающей частное z_1/z_2, отложимъ на оси x отрѣзокъ $O1=+1$ и на этомъ отрѣзкѣ построимъ треугольникъ $O1M$, подобный треугольнику OM_1M_2, принявъ за сходственныя стороны отрѣзки $O1$ и OM_2. Вершина M этого треугольника есть искомое изображеніе частнаго z_1/z_2.



Черт. 34.

Дѣйствительно, изъ построенія слѣдуетъ, что

$$\angle 1OM=\angle M_1OM_2=\angle 1OM_1-\angle 1OM_2=\varphi_1-\varphi_2;$$

$$OM:OM_1=O1:OM_2 \text{ или } OM:r_1=1:r_2,$$

откуда $OM=r_1/r_2$.

§ 90. **Возведеніе въ степень комплекснаго числа. Формула Moivre'а.** Прилагая формулу (71) послѣдовательно къ вычисленію z_1z_2, $(z_1z_2)\cdot z_3,\ldots,(z_1z_2\ldots z_{n-1})z_n$, гдѣ n есть натуральное число, большее 2, а $z_1,z_2,\ldots,z_n$ суть комплексныя числа, модули и аргументы которыхъ суть соотвѣтственно r_1 и φ_1, r_2 и $\varphi_2,\ldots$, r_n и φ_n, получимъ:

$$z_1z_2\ldots z_n=r_1r_2\ldots r_n\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Эта формула даетъ правило для вычисленія произведенія произвольнаго числа комплексныхъ чиселъ и показываетъ, что *модуль произведенія равенъ произведенію модулей множителей, а аргументъ произведенія равенъ суммѣ аргументовъ множителей.*

При $z_1=z_2=\ldots=z_n=z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ написанная формула даетъ выраженіе цѣлой и положительной степени комплекснаго числа:

$$z^n=r^n\,(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(72)$$

Вставляя вмѣсто z его значеніе $r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и сокращая результатъ на r^n, получимъ:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(73)$$

Эта формула называется „формулой *Moivre'a*".

При выводѣ ея предполагалось, что n есть цѣлое и положительное число.

Легко показать, что она справедлива и для цѣлыхъ и отрицательныхъ значеній n. Въ самомъ дѣлѣ, если n есть цѣлое положительное число, то

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{-n}=\frac{1}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n}=\frac{1}{\cos n\varphi+i\sin n\varphi}=$$

$$=\frac{\cos n\varphi-i\sin n\varphi}{(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)}=$$

$$=\cos n\varphi-i\sin n\varphi=\cos(-n\varphi)+i\sin(-n\varphi).$$

Итакъ, формула (73) справедлива для цѣлыхъ значеній n. Въ дальнѣйшемъ мы убѣдимся въ ея справедливости и для дробныхъ значеній n.

§ 91. **Извлеченіе корня изъ комплекснаго числа.** Извлечь корень n-ой степени изъ числа $z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ значитъ найти такое число $\zeta=\varrho\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, котораго n-ая степень равна z, при чемъ подъ n разумѣется цѣлое и положительное число.

Для опредѣленія модуля и аргумента числа ζ имѣемъ равенство:

$$[\varrho\,(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)]^n=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

или, по формулѣ (72),

$$\varrho^n\,(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta)=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Отсюда находимъ (§ 79, опред. I):

$$\varrho^n\cos n\vartheta=r\cos\varphi;\;\varrho^n\sin n\vartheta=r\sin\varphi.$$

Возводя каждое изъ этихъ уравненій въ квадратъ и складывая почленно, находимъ (форм. 5):

$$\varrho^{2n}=r^2 \text{ и } \varrho=\sqrt[n]{r},$$

при чемъ подъ $\sqrt[n]{\;}$ здѣсь разумѣется ариѳметическое значеніе корня, такъ какъ модули суть числа положительныя (§ 82).

Опредѣливъ ϱ, для ϑ находимъ два уравненія:

$$\cos n\vartheta=\cos\varphi \text{ и } \sin n\vartheta=\sin\varphi.$$

Углы съ равными синусами и косинусами равны между собою или отличаются другъ отъ друга числомъ, кратнымъ ихъ общаго періода (§§ 36 и 37). Поэтому

$$n\vartheta=\varphi+2k\pi,$$

гдѣ k есть произвольное цѣлое число или нуль. Изъ этой формулы находимъ ϑ:

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Такимъ образомъ получаемъ $\sqrt[n]{z}$ или число ζ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (74)$$

Эта формула содержитъ произвольное цѣлое число k и даетъ поэтому не одно значенiе для $\sqrt[n]{z}$, а нѣсколько. Докажемъ, что число различныхъ значенiй, доставляемыхъ второй частью формулы (74), равно n, и что эти значенiя можно получить, подставляя вмѣсто k рядъ n послѣдовательныхъ чиселъ, напр., полагая $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пусть

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_0 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),\\
\zeta_1 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),\\
\zeta_2 &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{k'} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{k''} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k''\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k''\pi}{n}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (75)$$

Докажемъ, что всѣ числа этой таблицы *различны*. Предполагая $\zeta_{k'}=\zeta_{k''}$, гдѣ $k'\neq k''$ и $0\leq k'\leq n-1$, $0\leq k''\leq n-1$, мы имѣли бы равенство:

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \cos\frac{\varphi+2k''\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k''\pi}{n}.$$

Это равенство распадается на два слѣдующихъ:

$$\cos\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \cos\frac{\varphi+2k''\pi}{n};\ \sin\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \sin\frac{\varphi+2k''\pi}{n}.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\varphi+2k'\pi}{n} = \frac{\varphi+2k''\pi}{n} + 2m\pi \quad \text{или} \quad \frac{k'-k''}{n} = m,$$

гдѣ m есть произвольное цѣлое число или нуль.

Послѣднее изъ написанныхъ равенствъ невозможно, такъ какъ по сдѣланнымъ нами предположеніямъ число $k'-k''$ по абсолютной величинѣ меньше n и, слѣд., частное $(k'-k'')/n$ не можетъ равняться цѣлому числу.

Итакъ, между числами (75) нѣтъ равныхъ.

Покажемъ теперь, что число ζ_p, получаемое изъ формулы (74) замѣной k числомъ p, не содержащимся въ рядѣ $0, 1, 2,\ldots, n-1$, равно одному изъ чиселъ (75).

Черезъ дѣленіе p на n получается равенство: $p=nq+h$, гдѣ q есть частное отъ дѣленія p на n, а h есть остатокъ этого дѣленія.

Если число p положительно, то q и h суть также положительныя числа и $h<n$. Если число p отрицательное, то непосредственное дѣленіе p на n приводитъ къ отрицательнымъ q и h, при чемъ $|h|<n$.

Но въ этомъ случаѣ число p можно представить въ видѣ: $p=(q-1)n+(n+h)$ и принять за остатокъ положительное число $n+h$, меньшее n. Итакъ, во всѣхъ случаяхъ въ формулѣ $p=nq+h$ можно считать h положительнымъ.

Подставивъ p вмѣсто k въ формулу (74), находимъ:

$$\zeta_p=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2p\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2p\pi}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(nq+h)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(nq+h)\pi}{n}\right]=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(2q\pi+\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)+i\sin\left(2q\pi+\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right)\right]=$$

$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2h\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right]=\zeta_h.$$

Но h есть одно изъ чиселъ: $0, 1, 2,\ldots, n-1$; слѣд., ζ_h есть одно изъ чиселъ (75).

Заключеніе. Извлеченіе корня есть дѣйствіе *многозначное*: корень n-ой степени имѣетъ n значеній; всѣ значенія $\sqrt[n]{z}$ получаются изъ формулы (74) подстановкой вмѣсто k ряда n послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, наприм., $0, 1, 2,\ldots, n-1$.

Слѣдствіе. Изъ формулы (74) слѣдуетъ, что

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n},$$

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}}=(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)^{\frac{1}{n}}=\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n},$$

гдѣ m и n цѣлыя числа.

Послѣдняя формула показываетъ, что формула *Moivre'a* справедлива и для дробныхъ показателей.

§ 92. **Корни n-ой степени изъ 1.** Такъ какъ

$$1=\cos 0+i\sin 0,$$

то, подставивъ въ формулу (74) 1 вмѣсто r и 0 вмѣсто φ, получимъ $\sqrt[n]{1}$:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Обозначая значенія $\sqrt[n]{1}$ черезъ $\omega_0, \omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_{n-1}$, изъ этой формулы находимъ:

$$\omega_0=1;\ \omega_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};\ \omega_2=\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\ldots;$$

$$\omega_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Одно изъ этихъ значеній (ω_0) есть число дѣйствительное при всѣхъ значеніяхъ числа n. Если n есть четное число, то $\omega_{n/2}$ есть также дѣйствительное число:

$$\omega_{n/2}=\cos\frac{2\cdot\frac{n}{2}\pi}{n}+i\sin\frac{2\cdot\frac{n}{2}\pi}{n}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

Остальныя значенія $\sqrt[n]{1}$ суть числа комплексныя.

Если n нечетное число, то дѣйствительное значеніе корня только одно, именно ω_0.

Комплексныя значенія $\sqrt[n]{1}$ являются попарно сопряженными (§ 83). Покажемъ, что ω_k и ω_{n-k}, гдѣ k есть одно изъ чиселъ $1, 2,\ldots n-1$ (число $n/2$ въ случаѣ n четнаго изъ этого ряда исключается), суть числа сопряженныя. Для этого преобразуемъ выраженіе ω_{n-k} слѣдующимъ образомъ:

$$\omega_{n-k}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+$$
$$+i\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)=\cos\left(-\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Отсюда по формуламъ (13) находимъ:

$$\omega_{n-k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n};$$

но $\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$; слѣд., ω_k и ω_{n-k} суть числа сопряженныя.

§ 93. **Двучленныя уравненія.** *Двучленными* уравненіями называются уравненія вида: $z^n-a=0$, гдѣ n есть цѣлое положительное число и a—данное число (въ общемъ случаѣ комплексное).

Простѣйшее изъ двучленныхъ уравненій

$$x^n-1=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(76)$$

рѣшается съ помощью формулъ предыдущаго §. Корни его даются формулой:

$$x_k = \omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1. \quad (77)$$

Рѣшеніе уравненія $z^n - a = 0$ приводится къ рѣшенію уравненія (76). Дѣйствительно, изъ этого уравненія находимъ: $z = \sqrt[n]{a}$.

Полагая $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, по формуламъ (74) и (71) имѣемъ:

$$z = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

или, называя черезъ z_0 *одно* изъ значеній $\sqrt[n]{a}$,

$$z = z_0\omega_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n-1.$$

Примѣры. 1. Корни уравненія $x^3 - 1 = 0$ суть

$$x_0 = 1;\ x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3};\ x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},$$

или $x_0 = 1,\ x_1 = -\cos 60^0 + i\sin 60^0;\ x_2 = -\cos 60^0 - i\sin 60^0,$

или $x_0 = 1,\ x_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ x_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$

2. Корни уравненія $x^4 - 1 = 0$ суть

$$x_0 = 1;\ x_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i;\ x_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1;$$

$$x_4 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i.$$

3. Корни уравненія $x^3 - 8 = 0$ суть

$$x_0 = 2;\ x_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3};$$

$$x_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

4. Корни уравненія $x^4 + 1 = 0$ суть

$$x_0 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}};\ x_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).i = \frac{i-1}{\sqrt{2}};$$

$$x_2 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).-1 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$x_3 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).-i = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

§ 94. **Геометрическое представленіе** $\sqrt[n]{z}$. Формула (74) показываетъ, что модули всѣхъ значеній $\sqrt[n]{z}$ одинаковы и равны $\sqrt[n]{|z|}$, аргументы же отличаются числомъ кратнымъ $2\pi/n$. Если на окружности O радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ дуга AM представляетъ одно изъ значеній аргумента φ числа a и дуга AN n-ую часть ея, то, прибавляя къ AN дугу $NN_1 = 2\pi/n$, затѣмъ $NN_2 = 2.2\pi/n$, $NN_3 = 3.2\pi/n, \ldots\ldots, NN_{n-1} = (n-1)2\pi/n$, мы получимъ точки $N, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$, которыя служатъ изображеніями значеній $\sqrt[n]{z}$. Эти точки лежатъ въ вершинахъ выпуклаго правильнаго вписаннаго въ кругъ n-угольника.

Такимъ образомъ задача о построеніи изображенія $\sqrt[n]{z}$ распадается на двѣ: первая состоитъ въ построеніи отрѣзка, равнаго $\sqrt[n]{|z|}$, когда данъ отрѣзокъ, равный $|z|$; вторая — въ построеніи выпуклаго правильнаго n-угольника, вписаннаго въ данный кругъ.

Первая изъ нихъ отпадаетъ, если $|z|=1$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ алгебраическая задача сводится къ вычисленію $\sqrt[n]{1}$, т.-е. къ рѣшенію уравненія: $x^n = 1$, то изъ предыдущаго обнаруживается тѣсная связь двухъ задачъ, на первый взглядъ совершенно различныхъ: задачи о рѣшеніи двучленнаго уравненія $x^n-1=0$ и задачи о построеніи правильнаго вписаннаго въ кругъ n угольника, т.-е. о дѣленіи окружности на равныя части *).

§ 95. **Сложеніе дугъ**. Въ §§ 40, 41, 42, 43 и 46 рѣшена задача о сложеніи двухъ и трехъ дугъ. Съ помощью формулъ настоящей главы легко рѣшить общую задачу о сложеніи дугъ, т.-е. найти выраженія тригонометрическихъ функцій суммы произвольнаго числа дугъ черезъ значенія тригонометрическихъ функцій этихъ дугъ.

Пусть требуется найти косинусъ, синусъ и тангенсъ суммы дугъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

По правилу умноженія комплексныхъ чиселъ (§ 90) имѣемъ:

$$(\cos a_1 + i\sin a_1)(\cos a_2 + i\sin a_2)\ldots(\cos a_n + i\sin a_n) =$$
$$= \cos(a_1+a_2+\ldots+a_n) + i\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Эту формулу можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n)+i\sin(a_1+a_2+\ldots+a_n) =$$
$$= \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n (1+i\tan a_1)(1+i\tan a_2)\ldots(1+i\tan a_n) \ldots (\alpha)$$

Обозначивъ черезъ t_1 сумму тангенсовъ дугъ $a_1, a_2, \ldots, a_n$, черезъ t_2 сумму произведеній этихъ тангенсовъ, взятыхъ по два, черезъ t_3 сумму ихъ произведеній, взятыхъ по три, и т. д., находимъ:
$(1+i\tan a_1)(1+i\tan a_2)\ldots(1+i\tan a_n) = 1+it_1+i^2t_2+i^3t_3+\ldots+i^nt_n$,
или, замѣнивъ степени i ихъ значеніями (§ 81),

$$(1+i\tan a_1)(1+i\tan a_2)\ldots(1+i\tan a_n) = (1-t_2+t_4-\ldots)+i(t_1-t_3+\ldots).$$

---

*) Подробности объ этой задачѣ см. въ *„Энциклопедіи элементарной математики“ Вебера и Вельштейна*, т. I (Одесса, Mathesis, 1911, изд. 2-ое).

При помощи этой формулы изъ равенства (α) получаемъ:

$$\cos(a_1+a_2+...+a_n)+i\sin(a_1+a_2+...+a_n)=$$
$$=\cos a_1\cos a_2...\cos a_n(1-t_2+t_4-...)+$$
$$+i\cos a_1\cos a_2...\cos a_n(t_1-t_3+t_5-...).$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части обѣихъ частей равенства, находимъ (§ 79, опр. I):

$$\cos(a_1+a_2+...+a_n)=\cos a_1\cos a_2...\cos a_n(1-t_2+t_4-...), \quad . \quad . \quad (78)$$
$$\sin(a_1+a_2+...+a_n)=\cos a_1\cos a_2...\cos a_n(t_1-t_3+t_5-...). \quad . \quad . \quad (79)$$

Отсюда, черезъ почленное дѣленіе равенства (79) на равенство (78), получимъ:

$$\tan(a_1+a_2+...+a_n)=\frac{t_1-t_3+t_5-...}{1-t_2+t_4-...} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Формулы (78), (79) и (80) вполнѣ рѣшаютъ задачу о сложеніи произвольнаго числа дугъ.

При $n=3$ мы получаемъ изъ нихъ формулы § 46.

§ 96. **Умноженіе дугъ.** Формула Moivre'а позволяетъ рѣшить задачу объ умноженіи дуги на произвольное цѣлое число n, т.-е. вычислить значенія тригонометрическихъ функцій дуги na по значеніямъ тригонометрическихъ функцій дуги a.

Въ §§ 45 и 46 эта задача рѣшена для $n=2$ и 3.

По формулѣ (73) имѣемъ:

$$\cos na+i\sin na=(\cos a+i\sin a)^n,$$

гдѣ n есть цѣлое положительное число.

Пользуясь формулой бинома Ньютона, раскроемъ вторую часть этого равенства:

$$(\cos a+i\sin a)^n=\cos^n a+iC^1{}_n\cos^{n-1}a.\sin a+$$
$$+i^2C^2{}_n\cos^{n-2}a\sin^2 a+...+i^n\sin^n a,$$

гдѣ C^p_n суть биноміальные коэффиціенты.

Замѣнивъ степени i ихъ значеніями (§ 81), получимъ:

$$\cos na+i\sin na=(\cos^n a-C^2{}_n\cos^{n-2}a\sin^2 a+$$
$$+C^4{}_n\cos^{n-4}a\sin^4 a-...)+i\sin a(C^1{}_n\cos^{n-1}a-C^3{}_n\cos^{n-3}a\sin^2 a+$$
$$+C^5{}_n\cos^{n-5}a\sin^4 a-...).$$

Отсюда находимъ (§ 79, опр. I):

$$\cos na=\cos^n a-C^2{}_n\cos^{n-2}a\sin^2 a+C^4{}_n\cos^{n-4}a\sin^4 a- \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$\sin na=\sin a(C^1{}_n\cos^{n-1}a-C^3{}_n\cos^{n-3}a\sin a^2+$$
$$+C^5{}_n\cos^{n-5}a\sin^4 a-...) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Эти формулы рѣшаютъ поставленную задачу.

Примѣры 1. Пусть $n=3$. По формуламъ (81) и (82) находимъ:

$$\cos 3a=\cos^3 a-C^2{}_3\cos a\ \sin^2 a=\cos^3 a-3\cos a\ \sin^2 a,$$
$$\sin 3a=\sin a(C^1{}_3\cos^2 a-C^3{}_3\sin^2 a)=3\sin a\ \cos^2 a-\sin^3 a$$

(сравн. § 46).

2. При $n=5$ формулы (81) и (82) даютъ:

$$\cos 5a=\cos^5 a-10\cos^3 a\ \sin^2 a+5\cos a\ \sin^4 a;$$
$$\sin 5a=\sin a(5\cos^4 a-10\cos^2 a\ \sin^2 a+\sin^4 a).$$

3. При $n=4$ по формуламъ (81) и (82) получимъ:

$$\cos 4a=\cos^4 a-6\cos^2 a\ \sin^2 a+\sin^4 a=8\cos^4 a-8\cos^2 a+1;$$
$$\sin 4a=\sin a(4\cos^3 a-4\cos a\ \sin^2 a).$$

Эти формулы легко получить при помощи формулъ (30) и (31).

§ 97. **Дѣленіе дугъ.** Задача о дѣленіи дуги a на цѣлое число n, т.-е. вычисленіе значеній тригонометрическихъ функцій дуги a/n по значеніямъ тригонометрическихъ функцій дуги a, рѣшается формулой (81), которую для этой цѣли преобразуемъ, подставивъ a вмѣсто na и, слѣд., a/n вмѣсто a. Получимъ:

$$\cos a=\cos^n\frac{a}{n}-C^2{}_n\cos^{n-2}\frac{a}{n}\sin^2\frac{a}{n}+C^4{}_n\cos^{n-4}\frac{a}{n}\sin^4\frac{a}{n}-\ldots \quad (83)$$

Это уравненіе совмѣстно съ уравненіемъ

$$\cos^2\frac{a}{n}+\sin^2\frac{n}{a}=1$$

служитъ для опредѣленія $\cos(a/n)$ черезъ $\cos a$.

По исключеніи изъ этихъ уравненій $\sin(a/n)$ получаемъ уравненіе:

$$x^n-C^2{}_n x^{n-2}(1-x^2)+C^4{}_n x^{n-4}(1-x^2)^2-\ldots-\cos a=0, \quad (84)$$

въ которомъ $x=\cos(a/n)$. Это уравненіе n-ой степени и имѣетъ n корней, которые всѣ дѣйствительны и лежатъ въ интервалахъ (по одному корню въ каждомъ), опредѣляемыхъ числами:

$$1,\ \cos\frac{\pi}{n},\ \cos\frac{2\pi}{n},\ldots,\ \cos\frac{(n-1)\pi}{n},\ -1 \quad (85)$$

Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ сначала, что подстановка $a=k\pi$, гдѣ k есть цѣлое число или нуль, преобразовываетъ равенство (83) въ слѣдующее:

$$\cos k\pi=\cos^n\frac{k\pi}{n}-C^2{}_n\cos^{n-2}\frac{k\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}+\ldots;$$

а такъ какъ $\cos k\pi=(-1)^k$ (§ 17), то

$$\cos^n\frac{k\pi}{n}-C^2{}_n\cos^{n-2}\frac{k\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}+\ldots=(-1)^k.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что результаты подстановки въ первую часть уравненія (84) вмѣсто x чиселъ (85) выразятся слѣдующими числами:

$$1-\cos a,\ -1-\cos a,\ 1-\cos a,\ldots,(-1)^n-\cos a,$$

изъ которыхъ каждыя два смежныя разныхъ знаковъ.

Но первая часть уравненія (84) есть цѣлая функція x, слѣд., она непрерывна при всѣхъ значеніяхъ x и мѣняетъ знакъ только при переходѣ черезъ нуль. Поэтому въ каждомъ изъ интерваловъ, границами которыхъ служатъ два послѣдовательныхъ числа изъ ряда (85), уравненіе (84) имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень. Но уравненіе n-ой степени имѣетъ n корней; такъ какъ число указанныхъ интерваловъ равно n, то въ каждомъ изъ нихъ лежитъ *только* одинъ корень уравненія (84). Итакъ, всѣ корни уравненія (84) дѣйствительны.

Изъ разсмотрѣнія чиселъ (85) видно, что абсолютная величина каждаго корня меньше 1; поэтому каждый изъ нихъ можетъ служить значеніемъ косинуса дуги a/n.

Многозначность рѣшенія поставленной задачи объясняется тѣмъ, что даннымъ является значеніе *косинуса* дуги a, а не дуга a. Такъ какъ (§ 37)

$$\arccos(\cos a)=2k\pi\pm a,$$

то общее выраженіе n-ой части всѣхъ дугъ, имѣющихъ косинусъ, равный $\cos a$, таково:

$$\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n},$$

гдѣ k есть цѣлое число или нуль.

Давая k значенія pn, $pn+1$, $pn+2$,..., $pn+(n-1)$, гдѣ p есть цѣлое число или нуль, имѣемъ для косинусовъ этихъ дугъ:

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(2p\pi\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\frac{a}{n};$$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(2p\pi+\frac{2\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right);$$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(2p\pi+\frac{4\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right);$$

. . . .

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(2p\pi+\frac{2(n-1)\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right).$$

Для синусовъ тѣхъ же дугъ находимъ равенства:

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(2p\pi\pm\frac{a}{n}\right)=\pm\sin\frac{a}{n};$$

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(2p\pi+\frac{2\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right);$$

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(2p\pi+\frac{4\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right);$$

. . . .

$$\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(2p\pi+\frac{2(n-1)\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)=\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right).$$

Въ эти формулы входитъ $2n-1$ различныхъ дугъ. Но дуги

$$\frac{2q\pi}{n}+\frac{a}{n} \text{ и } \frac{2(n-q)\pi}{n}-\frac{a}{n}$$

въ суммѣ составляютъ 2π; слѣд., косинусы ихъ равны, а синусы равны по абсолютной величинѣ и противоположны по знаку. Поэтому различныхъ значеній $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\pm\frac{a}{n}\right)$ будетъ только n, а именно:

$$\cos\frac{a}{n},\ \cos\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{a}{n}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{n}+\frac{a}{n}\right),\ldots,\ \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+\frac{a}{n}\right).$$

Упражненія къ главѣ X.

1. *Построить изображенія чиселъ*: $2+i$; $-1-i$; $2i$; $-3i$; $2(\cos 30^0\mp\sin 30^0)$.

2. *Найти модули и аргументы чиселъ*: ∓ 2; $\mp i$; $1\mp i$; $\mp\sqrt{3-i}$; *представить эти числа въ тригонометрической формѣ.*

3. *Показать, что изображенія чиселъ* $x+iy$, *удовлетворяющихъ условію*:

$$|x+iy-a-ib|=\varrho,$$

гдѣ a, b *и* ϱ *суть постоянныя, лежатъ на окружности съ центромъ въ точкѣ* (a, b) *и радіусомъ* ϱ.

4. *Показать, что изображенія чиселъ* $x+iy$, *удовлетворяющихъ условію*:

$$(y-b)/(x-a)=m,$$

гдѣ a, b *и* m *суть постоянныя числа, лежатъ на прямой, проходящей черезъ точку* (a, b).

5. *Посредствомъ умноженія чиселъ* $a+ib$ *и* $a'+ib'$ *показать, что*

$$\operatorname{arctan}\frac{b}{a}+\operatorname{arctan}\frac{b'}{a'}=k\pi+\operatorname{arctan}\frac{ab'+ba'}{aa'-bb'}.$$

6. *Посредствомъ возведенія въ квадратъ числа* $a+ib$ *показать что*

$$2\operatorname{arctan}\frac{b}{a}=k\pi+\operatorname{arctan}\frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

7. *Выразить* $\cos 6a$, $\sin 6a$ и $\tan 6a$ *черезъ тригонометрическія функціи дуги* a.

8. *Вычислить* $\sqrt{\mp i}$, $\sqrt{1\mp i}$, $\sqrt[3]{i}$.

9. *Рѣшить уравненія*: $x^5-1=0$; $x^6-1=0$.

10. *Показать, что*

$$x^5-1=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1\right);$$

$$x^6-1=(x^2-1)\left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{3}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{3}+1\right).$$

11. *Показать, что*

$$x^{2n+1}-1=(x-1)\prod_{k=1}^{k=n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right),$$

$$x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{k=n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right),$$

гдѣ Π *обозначаетъ произведеніе.*

12. *Показать, что* $x^n+x^{-n}=2^n\cos n\varphi$, *если* $x+x^{-1}=2\cos\varphi$.

13. *Показать, что*

$$\left[\frac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right]^n=\cos\left(\frac{n\pi}{2}-n\varphi\right)+i\sin\left(\frac{n\pi}{2}-n\varphi\right).$$

14. *Показать, что, если* ω *есть одно изъ комплексныхъ значеній* $\sqrt[3]{1}$, *то другое комплексное значеніе этого корня равно* ω^2, *и что*

$$1+\omega+\omega^2=0,$$
$$1+\omega^2+\omega^4=0,$$
$$(1+\omega^2)^4=\omega,$$
$$(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4,$$
$$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\ldots\left(1-\omega^{2^{2n-1}}+\omega^{2^{2n}}\right)=2^{2n}.$$

15. Если $(1+x)^n=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\ldots$, то

$$p_0-p_2+p_4-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4},$$

$$p_1-p_3+p_5-\ldots=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot$$

ОТВѢТЫ.

Глава II. 1. $\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi}{72}$; $\frac{\pi}{10800}=0,0002908882....$;

$\frac{\pi}{64800}=0,000048481....$ **2.** $171^0 53' 16'',4$; $10^0 27' 33'',8$; $429^0 43' 36''$.

Глава IV. 1. $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$; $\tan x=\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$;

$\cot x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$.

2. $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$; $\tan x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$;

$\cot x=\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

3. $\sin x=\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$; $\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.

4. $\sin x=\frac{4}{5}$; $\tan x=\frac{4}{3}$. **5.** $\cos x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\tan x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. $\sin x=-\frac{60}{61}$; $\cos x=\frac{11}{61}$.

7. $\sin 1735^0=-\cos 25^0$; $\cos 1735^0=\sin 25^0$.

8. $\sin\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\left(-\frac{15\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{8}$.

Глава VIII. 1. $180^0 . k+(-1)^k . 30^0$. **2.** $360^0 . k\mp 27^0$.

3. $(2k+1)180^0\mp 75^0$. **4.** $k\pi-\frac{\pi}{4}$. **5.** $k\pi-\frac{\pi}{6}$. **6.** $2k\pi\mp\frac{\pi}{4}$.

7. $k\pi-(-1)^k\frac{\pi}{4}$. **8.** $k\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{a}{3}$. **9.** $k\frac{\pi}{2}\pm\left(\frac{\pi}{8}-\frac{a}{4}\right)$. **10.** $k . 90^0-10^0$.

11. $(4k+1)\frac{\pi}{12}$. **12.** $2k\pi$, $(2k+1)\frac{\pi}{5}$. **13.** $\frac{(4k+1)\pi}{2(p\mp q)}$. **14.** $(2k+1)\frac{\pi}{3}$,

$(2k+1)\pi$. **15.** $\frac{(2k+1)\pi}{2}$; $k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$. **16.** $180^0 k+15^0$; $180^0 k+75^0$.

17. $k\pi$; $k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}$. **18.** $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=36{,}0^\circ.k\pm 51^\circ 49'$

19. $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. **20.** $2k\pi+a$; $(4k-1)\frac{\pi}{2}-a$. **21.** $2k\pi+\frac{\pi}{6}$; $2k\pi+\frac{\pi}{3}$.

22. $2k\pi-\frac{\pi}{12}$, $2k\pi+\frac{7\pi}{12}$. **23.** $2k\pi$; $(2k+1)\pi-\arcsin\frac{4}{5}$.

24. $(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $(4k-1)\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{20}{21}$. **25.** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$;

$k\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **26.** $k\pi-a$; $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$. **27.** $(2k+1)\frac{\pi}{2}-a$; $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}-a$.

27. $k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. **28.** $k\pi-\frac{\pi}{4}$, $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **29.** $k\pi$; $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$;

$k\pi\pm\arctan\sqrt{\frac{1}{2}}$. **30.** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{10}$. **31.** $k\pi-\frac{\pi}{4}$,

$k\pi+\arctan 2$. **32.** Невозм. **33.** $k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$.

Глава IX. **1.** $a=s/\sqrt{2}\cos(45^\circ-B)$. **2.** $a=s/\sqrt{2}\sin(45^\circ-B)$.

3. $\cos(45^\circ-B)=s/a\sqrt{2}$. **4.** $\sin(45^\circ-B)=d/a\sqrt{2}$. **5.** $b=s\tan\frac{B}{2}$.

6. $b=d\cot\frac{B}{2}$. **7.** $\sin 2C=2h/a$. **8.** $\tan C=p/q$. **9.** $a^2=4S/\sin 2B$.

10. $\frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{180^\circ}{n}$. **11.** $a/\cos\frac{180^\circ}{n}$.

17. $\cos\frac{B-C}{2}=s.\sin\frac{A}{2}\Big/a$. **18.** $\sin\frac{B-C}{2}=d.\cos\frac{A}{2}\Big/a$.

19. $\tan\frac{C}{2}=(a-d)\tan\frac{B}{2}\Big/(a+d)$. **20.** $a=p\sin\frac{A}{2}\Big/\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

21. $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$.

22. $a=r\cos\frac{A}{2}\Big/\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. **24.** $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$;

$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, $R=\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}/4S$,

при чемъ $2p=a+b+c+d$. **25.** $AC=\sqrt{(bc+ad)(ac+bd)/(ab+cd)}$.

Глава X. **1.** $2=2(\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi)$; $-2=2[\cos(2k+\pi+$

$+i\sin(2k+1)\pi]$; $i=\cos(4k+1)\frac{\pi}{2}+i\sin(4k+1)\frac{\pi}{2}$,

$-i=\cos(4k+3)\frac{\pi}{2}+i\sin(4k+3)\frac{\pi}{2}$; $1\mp i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ\mp i\sin 45^\circ$.

$\sqrt{3}-i=2(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ)$; $-\sqrt{3}-i=2(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)$.

7. $\cos 6a = \cos^6 a[1 - 15\tan^2 a + 15\tan^4 a - \tan^6 a]$;
$\sin 6a = \cos^6 a[6\tan a - 20\tan^3 a + 6\tan^5 a]$.

8. $\sqrt{i} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

$\sqrt{-i} = \pm\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \pm\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$;

$\sqrt{1+i} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; $\sqrt{1-i} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

$\sqrt[3]{i} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i),\ -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),\ -i.$

9. $x = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5},\ k = 0,1,2,3,4;$

$x = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6},\ k = 0,1,2,3,4,5.$

Таблица значеній тригоно

Мѣра дуги въ градусахъ.	sin	cos	tan	cot	
0	0.000	1,000	0,000	∞	90
1	0,017	1,000	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0.213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
	cos	sin	cot	tan	Мѣра дуги въ градусахъ.

метрическихъ функцій.

Мѣра дуги въ градусахъ.	sin	cos	tan	cot	
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0,554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1,664	59
32	0,530	0,848	0,625	1,600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0,629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1,000	45
	cos	sin	cot	tan	Мѣра дуги въ градусахъ.