ОСНОВАНІЯ

АЛГЕБРЫ,

составленныя

Д. Перевощиковымъ.

Приняты Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія, какъ пособіе для преподаванія въ Гимназіяхъ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1854.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ,

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлено было въ Ценсурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ. С. Петербургъ, 29 Марта 1854 года.

Ценсоръ *Н. Пейкеръ.*

ВМѢСТО ПРЕДИСЛОВІЯ.

Préférez, dans l'enseignement, les méthodes générales; attachez vous à les présenter de la maniére la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours le plus faciles.

Laplace.

Опытъ убѣдилъ меня, что ничто столько не удаляетъ отъ цѣли, которой долженъ достигнуть всякій излагающій какую нибудь науку, какъ мелочное и утомительное разсмотрѣніе каждаго предмета. Сочинитель, предлагая всѣ свои мысли, препятствуетъ разсужденію читателя; наставникъ дѣлается необходимъ для учащагося, который привыкаетъ такимъ образомъ къ недѣятельности разсудка и къ многословію, весьма вреднымъ для успѣха. Наставнику слѣдуетъ соразмѣрять степень объясненія предметовъ со способностями каждаго учащагося.

Франкёръ.

СОДЕРЖАНІЕ.

I.

ПРЕДМЕТЪ АЛГЕБРЫ.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЕ ЗНАКИ.

(1). Въ Ариѳметикѣ разрѣшаются вопросы, въ которыхъ отношенія между извѣстными или *данными* и неизвѣстными или *искомыми* количествами, по большой части, бываютъ столь просты и очевидны, что послѣднія опредѣляются посредствомъ весьма легкихъ соображеній, не требующихъ особенныхъ знаковъ для выраженія смысла или требованій задачи; но когда сложныя условія вопроса затрудняютъ пониманіе связи между извѣстными и неизвѣстными, тогда надобно употреблять особенные знаки для изображенія этой связи и особенные способы для опредѣленія величины искомыхъ количествъ посредствомъ данныхъ: эти способы, приведенные въ систематическій порядокъ, составляютъ *Общую науку исчисленій* или *Алгебру*, въ которой отношенія количествъ разсматриваются независимо отъ ихъ числовыхъ величинъ, или независимо отъ принятой системы численія или *нумераціи*.

Примѣчаніе. Весьма трудно составить опредѣленіе Алгебры, полное и совершенно понятное для начинающихъ; она столь тѣсно соединена съ Ариѳметикою, что почти не возможно назначить предѣлы, гдѣ оканчивается одна, и начинается другая. На примѣръ, ариѳметическое доказательство не превратится въ алгебраическое, когда разсуждая о какомъ нибудь общемъ свойствѣ чиселъ, изобразимъ ихъ не цифрами, но буквами А, В, и пр.: иначе въ Ариѳметикѣ не было бы ни одного общаго разсужденія, ни одного общаго правила для рѣшенія того или другаго рода вопросовъ. Выраженіе

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

представляющее общее правило возвышенія въ квадратъ двухъ-частнаго числа, отъ выраженія того же правила, предлагаемаго въ Ариѳметикѣ, отличается только краткостью своихъ знаковъ. Хотя употребленіе такихъ знаковъ много облегчаетъ изслѣдованія о свойствѣ количествъ, однако оно не составляетъ еще Алгебры, а приводитъ только къ простѣйшимъ выраженіямъ, называемымъ *формулами*. Но когда формулы понадобится подвергнуть вычисленіямъ, тогда ариѳметическія правила оказываются недостаточными; здѣсь уже нужны правила, происходящія изъ смысла, приданнаго знакамъ, принятымъ для изображенія ариѳметическихъ дѣйствій. Ежели, на примѣръ, условимся, что произведеніе числа b на b есть b^2, то уже, по понятіямъ дѣлимаго и дѣлителя, частное отъ дѣленія b^2 на b должно быть b: здѣсь частное находимъ не чрезъ ариѳметическій расчетъ, но какъ слѣдствіе условія. И такъ, для уразумѣнія алгебраическихъ изслѣдованій о количествахъ, дожно прежде всего пріобрѣсти точныя понятія о смыслѣ принятыхъ въ Алгебру знаковъ.

(2). Количества изображаются въ Алгебрѣ буквами Латинской, иногда же Греческой азбуки. Когда при рѣшеніи вопроса нѣкоторыя количества сохраняютъ постоянно свою величину, тогда они представляются первыми буквами: a, b, c, и пр.; но количества, измѣняющіяся въ своей величинѣ, и количества искомыя или неизвѣстныя выражаются послѣдними буквами: x, y, z, и пр.

(3). Знаки главныхъ дѣйствій суть тѣ же, какіе приняты и въ Ариѳметикѣ. Такъ

$a+b$ значитъ	сложить a съ b;
$a-b$	вычесть b изъ a;
$a \times b$ или $a \,.\, b$	помножить a на b;
$a : b$ или $\frac{a}{b}$	раздѣлить a на b.

Произведеніе двухъ количествъ, выраженныхъ буквами, можетъ быть представлено безъ знаковъ ($\times$) и (.), поставляя одну букву подлѣ другой: ab есть произведеніе количествъ a и b.

(4). Когда слагаемыя равны между собою, тогда сложеніе ихъ выражается сокращенно посредствомъ множителя, означающаго число слагаемыхъ : такимъ же образомъ и въ Алгебрѣ, суммы $a+a$, $b+b+b+b$, и пр. состоящія изъ опредѣленнаго числа равныхъ слагаемыхъ, представляются сокращенно чрезъ $2a$, $4b$, и пр., 2 и 4 называются уже *коэффиціентами*; слѣд. *коэффиціентъ означаетъ число равныхъ слагаемыхъ.* Если отъ количества b надобно взять нѣсколько долей, напримѣръ, *три четверти*, *восемь десятыхъ* и пр.; то это дѣйствіе выражается также посредствомъ коэффиціентовъ: $\frac{3}{4}b$, $0,8b$, и пр.

(5). Произведеніе равныхъ производителей называется *степенью* одного изъ нихъ. Если произведенія содержатъ два, три, четыре, и пр. равныхъ производителей, то они называются *квадратомъ* или *второю степенью*, *кубомъ* или *третьею степенью*, *четвертою степенью* (иногда *биквадратомъ*). и пр. Такъ

aa есть квадратъ или вторая степень колич. a,
aaa кубъ или третья степень колич. a,
$aaaa$ четвертая степень колич. a,
$aaaaa$ пятая степень колич. a,
и проч.

Чѣмъ болѣе число производителей, тѣмъ неудобнѣе изображеніе степеней въ видѣ произведеній; по этой причинѣ берутъ одинъ производитель степени и пишутъ надъ нимъ цифру, означающую число ея производителей. Цифру эту называютъ *показателемъ* степени. Такъ

вмѣсто aa пишутъ a^2,
aaa a^3,
$aaaa$ a^4,
$aaaaa$ a^5,
и проч.

Здѣсь цифры 2, 3, 4, 5, и пр. суть показатели квадрата, куба, четвертой, пятой, и пр. степеней. Вообще выраженіе a^n означаетъ произведеніе, содержащее n равныхъ производителей a, и называется n-ою степенью количества a.

Каждый изъ равныхъ производителей степени называется ея *корнемъ*. Такъ

a есть квадратный корень степени a^2,
a кубическій корень степени a^3,
a корень четвертой степени a^4,
и пр.
a есть n-ый корень степени a^n.

Корень изображается знакомъ $\sqrt{}$, поставляемымъ предъ степенью съ цифрою въ его отверстіи, показывающею степень, кромѣ корня второй степени или крадратнаго, который пишется безъ цифры 2. Такъ

$$a = \sqrt{a^2},\ a = \sqrt[3]{a^3},\ a = \sqrt[4]{a^4}, \ldots a = \sqrt[n]{a^n}.$$

Вообще чрезъ $\sqrt[n]{b}$ изображаютъ корень n-ой степени количества b, т. е. подъ $\sqrt[n]{b}$ разумѣютъ одинъ изъ n производителей, составляющихъ произведеніе b, т. е. $(\sqrt[n]{b})^n = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{b} \times$ и пр. $= b$, или если примемъ $\sqrt[n]{b} = x$, то $b = x^n$.

(6). Выраженія, состоящія изъ многихъ количествъ, соединенныхъ знаками ($+$) и ($-$), называются *составными*, и каждое изъ количествъ — его *членомъ*. Въ составномъ количествѣ

$$5a + a^3b - cd + \frac{p}{q} - \sqrt[n]{b}$$

сумма $5a$, произведенія a^3b и cd, дробь $\frac{p}{q}$ и n-ый корень изъ b суть члены. Притомъ, каждый изъ знаковъ ($\times$) и ($-$) относится къ тому члену, предъ которымъ онъ поставленъ. Здѣсь къ $5a$ должно придать a^3b и $\frac{p}{q}$, и вычесть cd и $\sqrt[n]{b}$. Когда надобно, чтобъ какой нибудь знакъ ($+$), ($-$), (.), (:), или дѣлитель, или множитель, или показатели степени и корня относились къ составному количеству; тогда его заключаютъ въ скобки, и предъ скобками ставятъ одинъ изъ упомянутыхъ знаковъ. Выраженіе

$$a - n\left(b - c + \frac{d}{e}\right)$$

показываетъ, что изъ b и $\frac{d}{e}$ надобно вычесть c, остатокъ помножить на n, и потомъ произведеніе вычесть изъ a. Выраженіе

$$(a^3b - 3c + d):(b - c - f)$$

означаетъ частное, которое должно произойти отъ дѣленія составнаго количества $a^3b - 3c + d$ на составное $b - c - f$. Подобныя частныя всегда представляются въ видѣ дроби

$$\frac{a^3b - 3c + d}{b - c - f}.$$

называемой *алгебраическою*. Изъ выраженій

$$(a^2 - 2ab)^3, \sqrt[4]{(a^2 - 2ab)},$$

первое есть кубъ, второе же корень четвертой степени изъ составнаго $a^2 - 2ab$.

(7). Величины степеней отъ количествъ, представленныхъ буквами, *алгебраически* считаются по показателямъ. Такъ b^3 алгебраически болѣе b^2. Но если b есть дѣйствительная дробь, то ариѳметически b^3 менѣе b^2; напримѣръ $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}, (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. И такъ, алгебраическая величина степени означаетъ только ея *старшинство*, судя по числу содержащихся въ ней равныхъ производителей.

(8). Когда члены составнаго количества бываютъ написаны по нисходящему порядку степеней одной и той же буквы, тогда говорятъ, что оно *расположено по этой буквѣ*. Выраженіе

$$a^4 + 3a^2b + 3ab^2 + b^4$$

расположено по буквѣ a.

(9). Если члены составнаго количества содержатъ одинаковыя степени и корни тѣхъ же самыхъ буквъ, то они называются *подобными*. Въ

$$a^3 - 3a^2b + 6a^2b, a^3 + 3a\sqrt{b} - \tfrac{5}{7}a\sqrt{b}$$

вторые и третьи члены суть подобные.

(10). Ежели количество составлено изъ членовъ, имѣющихъ одно и тоже число производителей, не считая коэффиціентовъ; то оно называется *однороднымъ.* Количества

$$a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^n - qa^{n-1}b + ga\,b^{n-1} + mb^n,$$

суть *однородныя.* Притомъ первое принадлежитъ ко второй степени, второе же — къ n-ой степени, потому что въ немъ буквы q, g, m принимаются за коэффиціенты. Также

$$a^3 - 3a^2\sqrt[n]{b^n}$$

есть выраженіе третьей степени, потому что $\sqrt[n]{b^n}$ есть b. Выра-

$$\frac{a^3 - 3a^2b}{a^2 - b^2}$$

принадлежитъ къ первой степени, потому что числитель только одною степенью выше знаменателя. — Степень составнаго количества часто называется его *измѣреніемъ.* — Наконецъ составное количество часто называется *суммою*, хотя члены его складываются и вычитаются.

Вотъ всѣ необходимыя основанія для алгебраическихъ вычисленій, къ объясненію которыхъ теперь приступаемъ.

II.

СЛОЖЕНІЕ И ВЫЧИТАНІЕ.

(11). Сложеніе и вычитаніе алгебраическія состоятъ въ перемѣнѣ сложныхъ выраженій на простѣйшія, если только эти перемѣны возможны по подобію членовъ. Выраженіе

$$a + b - c + 5d$$

не можетъ быть представлено въ кратчайшемъ видѣ, потому что не имѣетъ подобныхъ членовъ. Но вмѣсто

$$5a - 3b + 6c - 2a + 5\sqrt{b} - 3b - 6c + 2\sqrt{b}$$

можно написать

$$3a - 6b + 7\sqrt{b},$$

потому что $5a$ безъ $2a$ есть $3a$; вычесть $3b$ и $3b$ значитъ вычесть $6b$; придать $6c$ и вычесть $6c$ значитъ ничего не придавать и ничего не вычитать; наконецъ количества $5\sqrt{b}$ и $2\sqrt{b}$ суть также подобныя, и потому придать 5 и 2 квадратныхъ корня изъ b значитъ придать 7 такихъ корней. — Также выраженіе

$$8a^2b - 5c + 6a\sqrt{b} + 3c - 4a^2b - 5a\sqrt{b},$$

по соединеніи подобныхъ членовъ, превращается въ

$$4a^2b - 2c + a\sqrt{b},$$

потому что $8a^2b$ безъ $4a^2b$ даютъ $4a^2b$; вычесть $5c$ и придать $3c$ значитъ вычесть $2c$; придать $6a\sqrt{b}$ и вычесть $5a\sqrt{b}$ значитъ придать *одно* такое произведеніе или $a\sqrt{b}$.

Вотъ еще примѣры:

$$\text{I. } a^3 - 3a^2b + b^3 - a^3 + 3ab^2 - b^3 = 3ab^2 - 3a^2b.$$

$$\text{II. } 8\sqrt[3]{a} - 4\sqrt[4]{b} + 6\sqrt[4]{b} - 9\sqrt[3]{a} = 2\sqrt[4]{b} - \sqrt[3]{a}.$$

$$\text{III. } \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{a} - \tfrac{1}{3}\sqrt[n]{a} = \tfrac{3}{6}\sqrt[n]{a} - \tfrac{2}{6}\sqrt[n]{a} = \tfrac{1}{6}\sqrt[n]{a}.$$

(12). Чтобъ выраженіе

$$a + (b - c + d - 8a)$$

представить въ кратчайшемъ видѣ, должно сперва написать его безъ скобокъ, *не перемѣняя его смысла*: но какъ здѣсь требуется къ количеству a придать b и d безъ c и безъ $8a$; то, по уничтоженіи скобокъ, выйдетъ

$$a + b + d - c - 8a = b + d - c - 7a.$$

Въ выраженіи

$$a - (b + c)$$

требуется изъ a вычесть b и c; слѣд.

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Но выраженіе

$$a - (b - c)$$

перемѣняется въ

$$a - b + c,$$

потому что здѣсь требуется изъ количества a вычесть b безъ c; слѣд. отнявъ b, отниму болѣе требуемаго, именно болѣе количествомъ c, и потому ошибку въ разности $a - b$ должно поправить приложеніемъ къ ней количества c. Для бóльшаго объясненія этого расчета, возмемъ примѣръ въ числахъ: если изъ 20 требуется вычесть 12 безъ 5, или если требуется представить въ кратчайшемъ видѣ выраженіе $20 - (12 - 5)$, то разность $20 - 12$ или 8 будетъ менѣе искомой разности числомъ 5, и потому 5 должно придать къ 8 или къ $20 - 12$; слѣд.

$$20 - (12 - 5) = 20 - 12 + 5 = 13.$$

Основываясь на объясненномъ, для представленія въ кратчайшемъ видѣ выраженія

$$(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - (a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + b^3),$$

должно сперва уничтожить скобки или написать:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 - b^3 + 3a^2b + 3ab^2,$$

потому что здѣсь изъ составнаго количества $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ требуется вычесть a^3 и b^3 безъ $3a^2b$ и безъ $3ab^2$. Потомъ уже чрезъ сложеніе и вычитаніе подобныхъ членовъ получилъ выраженіе

$$6ab^2 - 2b^3.$$

Примѣры.

$$\text{I. } a - (2a - 3b) = a - 2a + 3b = 3b - a,$$

$$\text{II. } (5a^3 - 6a^2b - 7f) - (6a^2b - 7f + 5c) + (5a^3 - 7f)$$
$$= 5a^3 - 6a^2b - 7f - 6a^2b - 5c + 7f + 5a^3 - 7f$$
$$= 10a^3 - 12a^2b - 7f - 5c.$$

$$\text{III. } (\sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c} + \sqrt[5]{d}) - (2\sqrt[3]{b} - 3\sqrt[4]{c} - 4\sqrt[5]{d})$$
$$+ (3\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} - 6\sqrt[4]{c} - 7\sqrt[5]{d})$$
$$= \sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c} + \sqrt[5]{d} - 2\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[4]{c} + 4\sqrt[5]{d}$$
$$+ 3\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} - 6\sqrt[4]{c} - 7\sqrt[5]{d})$$
$$= 4\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{c} - 2\sqrt[5]{d}.$$

Ежели составныя количества бываютъ многосложны, то для удобности представленія ихъ въ кратчайшемъ видѣ, подобные члены пишутъ одинъ подъ другимъ съ ихъ знаками, по уничтоженіи скобокъ. Въ предъидущемъ примѣрѣ вторая строка располагается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c} + \sqrt[5]{d} \\ - 2\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[4]{c} + 4\sqrt[5]{d} \\ + 3\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} - 6\sqrt[4]{c} - 7\sqrt[5]{d} \\ \hline 4\sqrt{a} + 0 - 2\sqrt[4]{c} - 2\sqrt[5]{d} \end{array}$$

или

$$4\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{c} - 2\sqrt[5]{d}.$$

IV. Изъ выраженія

$$(8a^3 - \tfrac{3}{4}\sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c}) - (9a^3 + \tfrac{3}{4}\sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c}) + (7a^3 - \tfrac{1}{5}\sqrt{b} + \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{c})$$
$$- (12a^3 - \tfrac{7}{15}\sqrt{b} + \tfrac{5}{14}\sqrt[3]{c}) + (\tfrac{8}{60}\sqrt{b} - \tfrac{4}{28}\sqrt[3]{c})$$

составляетъ

$$\begin{array}{r} 8a^3 - \tfrac{3}{4}\sqrt{b} - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c} \\ -9a^3 - \tfrac{3}{4}\sqrt{b} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{c} \\ +7a^3 - \tfrac{1}{5}\sqrt{b} + \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{c} \\ -12a^3 + \tfrac{7}{15}\sqrt{b} - \tfrac{5}{14}\sqrt[3]{c} \\ + \tfrac{8}{60}\sqrt{b} - \tfrac{4}{28}\sqrt[3]{c} \\ \hline -6a^3 - \tfrac{66}{60}\sqrt{b} - \tfrac{2}{28}\sqrt[3]{c}, \end{array}$$

или

$$-6a^3 - \tfrac{11}{10}\sqrt{b} - \tfrac{1}{14}\sqrt[3]{c}.$$

$$\text{V. } \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

Въ этомъ примѣрѣ видимъ, что *полусумма двухъ количествъ съ полуразностью тѣхъ же количествъ даетъ большое изъ нихъ.*

$$\text{VI. } \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b,$$

т. е. *полусумма безъ полуразности однихъ и тѣхъ же двухъ количествъ даетъ меньшее изъ нихъ.*

(13). Если въ разности $a - b$ вычитаемое $b = a + c$, то найдемъ, что

$$a - b = a - (a + c) = a - a - c = -c,$$

какъ, на примѣръ, $5 - 8 = 5 - 5 - 3 = -3$. Остатки $-c$, -3, происходящіе отъ вычитанія большаго количества изъ меньщаго, называются каличествами *отрицательными*, и, въ строгомъ смыслѣ, означаютъ невозможность рѣшенія задачи; но какъ подобныя требованія съ другими условіями вопроса могутъ быть удовлетворяемы, напримѣръ, 5 безъ 8 и съ 9 или $5-8+9=-3+9=6$; то отрицательныя количества приняты въ вычисленія, и потому надобно открыть общія правила ихъ употребленія, что не трудно: стоитъ только обратить вниманіе на ихъ происхожденіе. Именно:

1) Когда требуется къ q придать $(-c)$, или найти, чему равняется $q+(-c)$, тогда должно перемѣнить c на $a-(a+c)$; получимъ

$$q+(-c)=q+[a-(a+c)]=q+a-a-c=q-c.$$

Чтобъ не повторять такой выкладки при всякой встрѣчѣ съ сложеніемъ отрицательныхъ количествъ, результатъ ея выражаютъ сокращенно: *придать отрицательное количество значитъ вычесть его величину.*

2) Чтобъ найти, чему раняется $q-(-c)$, опять перемѣняемъ $-c$ на $a-(a+c)$, и находимъ

$$q-(-c)=q-[a-(a+c)]=q-a+a+c=q+c,$$

что опять выражаютъ сокращенно: *вычесть отрицательное количество значитъ придать его величину.*

И такъ, когда $a>b$, т. е когда a болѣе b, тогда разность $b-a$, въ строгомъ смыслѣ, не можетъ быть найдена, и выражается тѣмъ количествомъ, которымъ b менѣе a, называемымъ отрицательнымъ; обратную же разность $a-b$, находимую прямо исключеніемъ величины b изъ a, называютъ уже количествомъ *положительнымъ*, и если она $=c$, то передъ c иногда ставятъ знакъ $+c$, т. е. пишутъ $a-b=+c$, желая чрезъ то выразить противуположность между $a-b$ и $b-a$. Эта противуположность ясно обнаруживается во всѣхъ алгебраическихъ дѣйствіяхъ. Такъ въ сложеніи и вычитаніи находимъ

$$q+(a-b)=q+a-b,$$
$$q+(b-a)=q+b-a,$$
$$q-(b-a)=q-b+a,$$

такъ что

$$q + (a - b) = q - (b - a).$$

Такимъ же образомъ въ выраженіи

$$a + (f + b - c - d) = a + f + b - c - d$$

видимъ, что къ a надобно придать f и b безъ c и d; слѣд можно написать

$$\begin{aligned} a + (f + b - c - d) &= a + [(f + b) - (c + d)] \\ &= a - [(c + d) - (f + b)] \\ &= a - (c + d) + (f + b) \\ &= a - c - d + f + b. \end{aligned}$$

Такія перемѣны въ видахъ выраженія употребляются весьма часто и бываютъ весьма полезны.

III.

УМНОЖЕНІЕ И ДѢЛЕНІЕ ОДНОЧЛЕННЫХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

(14). Поелику степень есть произведеніе равныхъ производителей; слѣд. перемноженіе степеней состоитъ только въ счетѣ производителей, содержащихся во множимомъ и въ множителѣ: если множимое есть кубъ, множитель пятая степень, то явно, что произведеніе будетъ содержать восемь равныхъ производителей, или будетъ осьмая степень; а какъ показатели степени означаютъ число производителей, то перемноженіе степеней можетъ быть произведено только чрезъ сложеніе ихъ показателей. И такъ

$$a^3 \times a^5 = aaaaaaaa = a^8,$$
$$a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

(15). Перемноженіе степеней есть основаніе умноженія и дѣленія одночленныхъ количествъ; потому что дѣленіе степеней, входящее въ это вычисленіе, какъ дѣйствіе обратное ихъ умноженію, т. е. такое дѣйствіе, въ которомъ по числу равныхъ производителей произведенія и одного производителя опредѣляется число производителей другаго производителя, очевидно само собою, и должно производиться чрезъ вычитаніе показателей. Именно:

$$a^8 : a^5 = a^3,$$
$$a^{n+m} : a^m = a^n,$$
$$a^k : a^i = a^{k-i}.$$

(16). Если производство дѣленія степеней чрезъ вычитаніе ихъ показателей примемъ за *сущность*, а не за *форму* дѣйствія; то встрѣтимся съ двумя случаями, въ которыхъ получаются результаты, не согласные съ понятіемъ степеней: 1) ежели показатели дѣлимаго и дѣлителя равны, то показатель частнаго выйдетъ *нуль*, и 2) если показатель дѣлимаго менѣе показателя дѣлителя, то показатель частнаго будетъ отрицательный. Но когда вычитаніе показателей есть только *форма* дѣленія степеней, тогда и упомянутые результаты должно считать *формами* дѣйствительныхъ частныхъ, происходящихъ отъ дѣленія алгебраическихъ количествъ, которое въ первомъ случаѣ даетъ *единицу*, во второмъ же — дробь, потому что нисшая степень алгебраически считается менѣе высшей (*чл.* 7). И такъ степень, имѣющая показателемъ *нуль* есть алгебраическая форма или *символъ* единицы; а степень съ отрицательнымъ показателемъ есть *символъ* дроби. Такимъ образомъ

$$a^n : a^n = a^0 = 1,$$
$$a^n : a^{n+i} = a^{-i} = \frac{a^n}{a^{n+i}}.$$

Во второмъ выраженіи дробь $\frac{a^n}{a^{n+i}}$ можетъ быть сокращена дѣленіемъ числителя и знаменателя на числитель a^n; слѣдств.

$$a^{-i} = \frac{1}{a^i}$$

Употребленіе этихъ символическихъ выраженій весьма полезно въ высщихъ вычисленіяхъ; въ элементарныхъ же нѣтъ въ нихъ большой надобности.

(17). Къ этимъ двумъ главнымъ основаніямъ умноженія и дѣленія одночленныхъ алгебраическихъ количествъ остается прибавить объясненіе употребленія коэфиціентовъ.

Помножить, на примѣръ, $5a$ на b значитъ сумму $a+a+a+a+a$ повторить b разъ; слѣд.

$$5a \times b = ab + ab + ab + ab + ab = 5ab.$$

Помножить $5a$ на $3b$ значитъ сумму $a+a+a+a+a$ повторить b, b и b разъ; такъ что

$$5a \times 3b = \left\{\begin{matrix} ab+ab+ab+ab+ab \\ ab+ab+ab+ab+ab \\ ab+ab+ab+ab+ab \end{matrix}\right\} = 15ab.$$

Потножить $8a$ на $\frac{3}{5}b$ значитъ пятую долю отъ $8a$ или $\frac{8a}{5}$ повторить $3b$ разъ; слѣд.

$$8a \times \tfrac{3}{5}b = \tfrac{24}{5}\, ab.$$

Послѣ этихъ объясненій рѣшенія въ слѣдующихъ примѣрахъ должны быть понятны для всякаго:

I. $8ab \times 9a^5b = 72a^6b^2.$

II. $9abc \times \frac{2}{3}a = 6a^2bc.$

III. $\frac{18}{27}a^3b^2c^4 \times 27ab^3c = 18a^4b^5c^5.$

IV. $18a^4b^5c^5 : 27ab^3c = \frac{18}{27}a^3b^2c^4 = \frac{2}{3}a^3b^2c^4.$

V. $8a^3b^4c : 4a^5bc^3 = 2a^{-2}b^3c^{-2} = \frac{2b^3}{a^2c^2}.$

VI. $a^n \times a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$

VII. $a^{-n} \times a^{-m} = \frac{1}{a^n} \times \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{n+m}}.$

VIII. $a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$

IV.

УМНОЖЕНІЕ И ДѢЛЕНІЕ СОСТАВНЫХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

(18). Если составное количество $a + b - c$ потребуется помножить на n; то на n надобно помножить a и b безъ c; слѣд. произведеніе $na + nb$ болѣе искомаго произведеніемъ nc, т. е. истинное произведеніе получится, когда изъ $na + nb$ вычтется nc; такъ что

$$(a + b - c) \times n = na + nb - nc.$$

По той же причинѣ

$$(a^2 - 2ab + b^2) \times a = a^3 - 2a^2b + ab^2,$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) \times \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a^3 - a^2b + \tfrac{1}{2}ab^2.$$

Обратно:

$$pq - rq^2 + q = (p - rq + 1) \times q;$$
$$a^2b + c\sqrt{b} = (a^2\sqrt{b} + c) \times \sqrt{b}.$$

На послѣдній примѣръ должно обратить вниманіе, потому что онъ требуетъ точнаго уразумѣнія опредѣленія квадратнаго корня; по этому опредѣленію $b = \sqrt{b}.\sqrt{b}$, слѣд.

$$a^2b + c\sqrt{b} = a^2\sqrt{b}.\sqrt{b} + c\sqrt{b},$$

гдѣ видно, что $\sqrt{b}$ есть общій производитель обоихъ членовъ, изъ чего и вышелъ найденный результатъ. Такое отдѣленіе общихъ производителей безпрестанно употребляется въ алгебраическихъ вычисленіяхъ. Вотъ еще примѣры:

I. $Sq - q = q(S - 1)$.

II. $48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2$
$= 12a^2b^3x^2(4x^4 - 10ax^3 + a^2x^2 - a^4)$.

(19). Если $a + b - c$ раздѣлимъ на n, то въ частномъ получимъ

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n},$$

потому что частное, будучи помножено на дѣлитель, должно давать дѣлимое, и здѣсь

$$\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}\right)\times n=\frac{na}{n}+\frac{nb}{n}-\frac{cn}{n}=a+b-c.$$

(20). Когда требуется найти произведенiе составнаго количества $a+b-c-d$ на составное $a-b+c-d$, тогда, по виду множителя, заключаемъ, что множимое надобно помножить на a и c безъ b и безъ d; слѣд. въ суммѣ первыхъ двухъ произведенiй

$$a^2+ab-ac-ad+ac+bc-c^2-cd$$

содержатся два лишнихъ произведенiя

$$ab+b^2-cb-db$$

и

$$ad+bd-cd-d^2,$$

и потому эти произведенiя должно вычесть изъ предъидущей суммы, отъ чего искомое произведенiе будетъ

$$a^2+ab-ac-ad+ac+bc-c^2-cd-ab-b^2+cb+db$$
$$-ad-bd+cd+d^2.$$

Это выраженiе слѣдовало бы теперь привести въ кратчайшiй видъ алгебраическимъ соединенiемъ подобныхъ членовъ; но прежде, разсмотрѣвъ его и сличивъ съ производителями, замѣтимъ:

1) *Чтобъ перемножить составныя количества, должно каждый членъ множимаго помножить на каждый членъ множителя*, и

2) *Частныя произведенiя надобно или складывать, когда производители имѣютъ одинаковые знаки, или вычитать, когда производители имѣютъ разные знаки.*

Кратчайшiй окончательный видъ найденнаго произведенiя будетъ:

$$a^2-2ad+2bc-b^2-c^2+d^2.$$

(21). Оба заключенія, выведенныя изъ разсмотрѣнія произведенія составныхъ количествъ, суть *практическія замѣтки*, необходимыя для того, чтобъ находить подобныя произведенія, не повторяя при всякой новой задачѣ тѣхъ разсужденій, посредствомъ которыхъ разрѣшены вопросы въ членахъ 18, 19 и 20, и которыя суть прямыя, непосредственныя слѣдствія понятія объ умноженіи. Основываясь на этихъ заключеніяхъ, можно уже безъ труда найти такъ называемыя *правила знаковъ*, или правила для перемноженія количествъ противоположныхъ. Именно:

1) Чтобъ найти, чему равняется произведеніе $(-c).q$, обращаемся къ происхожденію количества $(-c)$ и перемѣняемъ его на $a-(a+c)$; найдемъ

$$(-c).q=[a-(a+c)]\,q=qa-q(a+c)=qa-qa-qc=-qc;$$

также

$$q.(-c)=q.[a-(a+c)]=qa-q(a+c)=qa-qa-qc=-qc.$$

Теперь, чтобъ не повторять этихъ выкладокъ, выведенный изъ нихъ результатъ выражаютъ сокращенно:

Ежели въ произведеніи изъ двухъ производителей одинъ производитель отрицательный, то произведеніе также отрицательное.

2) Если положимъ, что другое отрицательное количество $-d=b-(b+d)$; то найдемъ (чл. 20)

$$\begin{aligned}(-c).(-d)&=[a-(a+c)].[b-(b+d)]\\&=ab-(a+c)\,b-a(b+d)+(a+c)(b+d)\\&=ab-ab-bc-ab-ad+ab+bc+ad+dc,\end{aligned}$$

изъ чего, по приведеніи въ кратчайшій видъ, получимъ

$$(-c)(-d)=+dc;$$

слѣд. *произведеніе двухъ отрицательныхъ количествъ есть положительное.*

3) Если $-c=a-(a+c)$ и $-d=b-(b+d)$; то, по изъясненному въ членѣ 13, будетъ $+c=(a+c)-a$, $+d=(b+d)-b$, и потому

$$(+c)(+d) = [(a+c)-a].[(b+d)-b]$$
$$= (a+c)(b+d) - a(b+d) - (a+c)b + ab$$
$$= ab + bc + ad + dc - ab - ad - ab - bc + ab$$
$$= + cd;$$

слѣд. *произведенiе положительныхъ количествъ есть положительное.*

(22). Поелику дѣлимое есть произведенiе дѣлителя на частное; слѣд.

$$\frac{+dc}{-d} = -c, \quad \frac{-dc}{+d} = -c,$$

и

$$\frac{-dc}{-d} = +c, \quad \frac{+dc}{+d} = +c;$$

т. е. 1) *Частныя положительнаго и отрицательнаго количествъ суть отрицательныя.*

2) *Частныя количествъ отрицательныхъ, или количествъ положительныхъ суть положительныя.*

(23). Если перемножаемыя количества очень многосложны, то для удобности приведенiя ихъ въ кратчайшiй видъ, подобныя частныя произведенiя располагаются столбцами. Такъ

$$(a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4)(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) =$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
a^7 - 4a^6b + & 6a^5b^2 - & 4a^4b^3 + & a^3b^4 & & & & \\
-3a^6b + & 12a^5b^2 - & 18a^4b^3 + & 12a^3b^4 - & 3a^2b^5 & & & \\
& + 3a^5b^2 - & 12a^4b^3 + & 18a^3b^4 - & 12a^2b^5 + & 3ab^6 & & \\
& & - a^4b^3 + & 4a^3b^4 - & 6a^2b^5 + & 4ab^6 - & b^7 & \\
\hline
a^7 - 7a^6b + & 21a^5b^2 - & 35a^4b^3 + & 35a^3b^4 - & 21a^2b^5 + & 7ab^6 - & b^7 &
\end{array}$$

Здѣсь перемножены количества однородныя и расположенныя по одной и той же буквѣ. Изъ разсмотрѣнiя произведенiя нетрудно вывести слѣдующiя заключенiя:

1) *Произведенiе однородныхъ количествъ есть также количество однородное.*

2) *Произведенiе однородныхъ количествъ располагается по сте-*

пенямъ той же самой буквы, по степенямъ которой расположены множимое и множитель.

3) *Члены съ главными степенями суть простыя произведенія главныхъ степеней производителей.*

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ:

I. $(2a^3-5ab^2+2b^3)(2a^3+5ab^2-2b^3)=4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6$.

II. $(y^2-2ay+a^2)(y^2+2ay-\frac{1}{2}a^2)=y^4-\frac{7}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4$.

III. $(a^2+ab\sqrt{2}+b^2)(a^2-ab\sqrt{2}+b^2)=a^4+b^4$.

(24). На замѣчаніяхъ, предложенныхъ въ предъидущемъ членѣ, основывается дѣленіе составныхъ однородныхъ количествъ, потому что дѣлимое есть произведеніе частнаго на дѣлитель. И такъ, если дѣлимое и дѣлитель суть количества однородныя и расположены по степенямъ одной и той же буквы, то и частное, какъ другой производитель, будетъ также количество однородное, расположенное по степенямъ той же буквы. Первый членъ частнаго есть частное главныхъ степеней дѣлимаго и дѣлителя. Когда дѣлимое и дѣлитель суть

$$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

и

$$a^2-2ab+b^2;$$

тогда нашедши первый членъ частнаго a^2, потому что $\frac{a^4}{a^2}=a^2$, для втораго и третьяго членовъ, кромѣ коэффиціентовъ и знаковъ, получимъ ab и b^2. Для опредѣленія знаковъ и коэффиціентовъ, помножаемъ дѣлитель на первый членъ частнаго, и произведеніе

$$a^4-2a^3b+a^2b^2$$

вычитаемъ изъ дѣлимаго, дабы видѣть, что̀ еще остается составить; находимъ въ остаткѣ

$$-2a^3b+5a^2b^2-4ab^3+b^4.$$

Этотъ остатокъ есть произведеніе дѣлителя на послѣдніе два члена частнаго; слѣд. не трудно усмотрѣть, что a^2 должно помножить на $-2ab$, чтобъ имѣть $-2a^3b$. Перемноживъ весь

*

дѣлитель на $-2ab$ и исключивъ произведеніе изъ остатка, получимъ второй остатокъ

$$+a^2b^2-2ab^3+b^4,$$

который есть произведеніе дѣлителя на третій членъ частнаго b^2; слѣд. этотъ членъ долженъ имѣть знакъ $(+)$ и его произведеніе на дѣлитель будетъ

$$+a^2b^2-2ab^3+b^4.$$

И такъ дѣленіе есть точное или безъ остатка, и искомое частное $=a^2-2ab+b^2$. — Все это производство располагается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{l|l}
a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 & a^2-2ab+b^2 \\
\cline{2-2}
a^2-2a^3b+a^2b^2 & a^2-2ab+b^2 \\
\cline{1-1}
\quad -2a^3b+5a^2b^2-4ab^3+b^4 & \\
\quad -2a^3b+4a^2b^2-2ab^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad +a^2b^2-2ab^3+b^4 & \\
\qquad +a^2b^2-2ab^3+b^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Такимъ же образомъ разрѣшаются и слѣдующіе примѣры:

$$\text{I. }\begin{array}{l|l}
4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\
\cline{2-2}
4a^6-10a^4b^2+4a^3b^3 & 2a^3+5ab^2-2b^3 \\
\cline{1-1}
+10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
+10a^4b^2-25a^2b^4+10ab^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
\qquad -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\text{II. }\begin{array}{l|l}
y^4-\frac{7}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 & y^2-2ay+a^2 \\
\cline{2-2}
y^4-2ay^3+a^2y^2 & y^2+2ay-\frac{1}{2}a^2 \\
\cline{1-1}
\quad +2ay^3-\frac{9}{2}a^2y^2+3a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\
\quad +2ay^3-4a^2y^2+2a^3y & \\
\cline{1-1}
\qquad -\frac{1}{2}a^2y^2+a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\
\qquad -\frac{1}{2}a^2y^2+a^3y-\frac{1}{2}a^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\text{III. } a^4 + b^4 \left| \begin{array}{l} a^2 + ab\sqrt{2} + b^2 \\ \hline a^2 - ab\sqrt{2} + b^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} a^4 + a^3b\sqrt{2} + a^2b^2 \\ \hline \quad - a^3b\sqrt{2} - \ \ a^2b^2 + b^4 \\ \quad - a^3b\sqrt{2} - 2a^2b^2 - ab^3\sqrt{2} \\ \hline \qquad\qquad + \ a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} + b^4 \\ \qquad\qquad + \ a^2b^2 + ab^3\sqrt{2} + b^4 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

IV. Если будемъ дѣлить $a^n - b^n$ на $a - b$, то въ первомъ членѣ частнаго получимъ a^{n-1}, и первый и второй остатки будутъ

$$a^{n-1}b - b^n = b(a^{n-1} - b^{n-1}),$$
$$a^{n-2}b^2 - b^n = b^2(a^{n-2} - b^{n-2}),$$

по которымъ не трудно заключить, что $(n\text{-}1)$-ый остатокъ долженъ быть $(a - b)b^{n-1}$, дѣлящійся на $a - b$ безъ остатка, и въ частномъ получится

$$a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots\ldots + b^{n-1}.$$

Такъ

$$\frac{a^5 - b^5}{a - b} = a^4 + ba^3 + b^2a^2 + ab^3 + b^4,$$

и

$$\frac{a - b}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2}\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b^2} + \sqrt[4]{b^3}.$$

(25). Когда дѣлимое и дѣлитель расположены, какъ въ предложенныхъ примѣрахъ, по уменьшающимся или по *нисходящимъ* степенямъ одной и той же буквы; тогда, послѣ опредѣленнаго числа частныхъ дѣленій, всегда получится остатокъ или равный нулю, или алгебраически меньшей дѣлителя, потому что при каждомъ частномъ дѣленіи уничтожается первый членъ остатка; слѣд. въ каждомъ остаткѣ показатель главной буквы уменьшается по крайней мѣрѣ единицею противъ остатка предъидущаго. На примѣръ, составное количество

$$x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 2a^3x - a^4,$$

будучи дилимо на

$$x^2 - 2ax + a^2,$$

дастъ въ первомъ остаткѣ

$$-2ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x - a^4,$$

во второмъ

$$+a^2x^2 - a^4,$$

и въ третьемъ

$$+2a^3x - 2a^4,$$

и этотъ остатокъ алгебраически уже меньше дѣлителя. И такъ здѣсь надобно остановиться, ежели не хотимъ имѣть въ частномъ степеней съ отрицательными показателями, и чтобъ получить полное частное, должно придать къ нему алгебраическую дробь, которой числитель будетъ послѣднiй остатокъ, а знаменатель — дѣлитель; такъ что въ настоящемъ случаѣ полное частное будетъ

$$x^2 - 2ax + a^2 + \frac{2a^3x - 2a^4}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

(26). Посредствомъ изложенныхъ правилъ алгебраическаго дѣленiя, алгебраическiя дроби могутъ быть выражаемы рядами съ безконечнымъ числомъ членовъ.

Примѣры:

$$\text{I. } \begin{array}{l|l} 2a^3x - 2a^4 & x^2 - 2ax + a^2 \\ \cline{2-2} 2a^3x - 4a^4 + \frac{2a^5}{x} & \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^4}{x^2} + \frac{2a^5}{x^3} + \frac{2a^6}{x^4} + \dots \\ \cline{1-1} \quad + 2a^4 - \frac{2a^5}{x} & \\ \quad + 2a^4 - \frac{4a^5}{x} + \frac{2a^6}{x^2} & \\ \cline{1-1} \qquad + \frac{2a^5}{x} - \frac{2a^6}{x^2} & \\ \qquad + \frac{2a^5}{x} - \frac{4a^6}{x^2} + \frac{2a^7}{x^3} & \\ \cline{1-1} \qquad\quad + \frac{2a^6}{x^2} - \frac{2a^7}{x^3}, \text{ и пр.} & \end{array}$$

слѣд.

$$\frac{2a^3x - 2a^4}{x^2 - 2ax + a^2} = \frac{2a^3}{x} + \frac{2a^4}{x^2} + \frac{2a^5}{x^3} + \frac{2a^6}{x^4} + \text{и пр.}$$

Очевидно, что слѣдующіе члены можно уже написать, не производя дѣленія, и что каждый членъ этого ряда можно выразить вообще чрезъ $\frac{2a^{n+2}}{x^n}$, гдѣ n означаетъ всякой членъ ряда: напримѣръ, 8-ый членъ будетъ $\frac{2a^{10}}{x^8}$. Такое общее выраженіе каждаго члена ряда называется его *общимъ членомъ*.

$$\text{II. } \frac{a}{x-1} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4} + \ldots,$$

гдѣ общій членъ есть $\frac{a}{x^n}$.

$$\text{III. } \frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots,$$

и общій членъ ряда есть ax^{n-1}, потому что для перваго члена $n = 1$, $ax^{n-1} = ax^0 = a$.

Ежели x представляетъ цѣлое число, то члены перваго и втораго ряда будутъ безпрестанно уменьшаться, третьяго же увеличиваться. Ряды перваго рода называются *сходящимися* и суммы ихъ членовъ приближаются къ опредѣленной величинѣ, называемой ихъ *предѣломъ*. Ряды втораго рода вовростаютъ въ безконечность, извѣстны подъ именемъ *расходящихся* и предѣловъ не имѣютъ.

(27). При дѣленіи однородныхъ составныхъ количествъ расположеніе ихъ по степенямъ одной и той же буквы необходимо: иначе получимъ ложное частное, потому что первый членъ дѣлимаго можетъ быть алгебраическая сумма подобныхъ членовъ частныхъ произведеній дѣлителя на искомое частное. Такъ дѣля прямо $3ab^2 + 3a^2b + b^3 + a^3$ на $2ab + b^2 + a^2$, для перваго члена частнаго получимъ ложный членъ $\frac{3}{2}b$, и потому все частное будетъ ложное.

(28) Наконецъ разрѣшимъ нѣсколько примѣровъ дѣленія неоднородныхъ количествъ, въ которыхъ также надобно распо-

лагать члены по степенямъ одной и той же буквы. Такъ составное количество

$$a^6 + 5a^5b^2 + a^4 + 3a^3b + 15a^2b^3 + 3ab,$$

въ которомъ члены расположены по степенямъ буквы a, но которое не однородно, будучи раздѣлено также на составное неоднородное.

$$a^4 + 5a^3b^2 + a^2,$$

даетъ въ частномъ

$$a^2 + \frac{3a^3b + 15a^2b^3 + 3ab}{a^4 + 5a^3b^2 + a^2}.$$

Если дробную часть частнаго пожелаемъ разложить въ рядъ, то найдемъ, что онъ состоитъ только изъ одного члена $\frac{3b}{a}$; слѣд. полное частное будетъ

$$a^2 + \frac{3b}{a}.$$

При расположеніи неоднородныхъ количествъ по степенямъ одной и той же буквы, часто случается, что она помножается также на составныя количества какъ въ дѣлимомъ, такъ и въ дѣлителѣ. Для примѣра возмемъ количества

$$(y^3 + 2y^2 + 2y + 1)x^2 + (y^4 + 8y^3 + 5y^2 - 8y - 15)x$$
$$+ 7y^4 - 14y^3 - 7y + 14, \text{ дѣлимое,}$$
$$(y + 1)x + 7(y - 2), \text{ дѣлитель.}$$

Въ такомъ случаѣ должно сперва коэффиціентъ перваго члена дѣлимаго раздѣлить особо на коэффиціентъ перваго члена дѣлителя: здѣсь получимъ въ частномъ $y^2 + y + 1$; слѣд. первый членъ общаго частнаго будетъ $(y^2 + y + 1)x$. Помноживъ на него дѣлитель и вычтя произведеніе изъ дѣлимаго, въ остаткѣ найдемъ

$$(y^4 + y^3 + 12y^2 - y - 1)x + (7y^4 - 14y^3 - 7y + 14).$$

Здѣсь опять надобно произвести предварительное дѣленіе коэффиціента перваго члена на $y + 1$; но какъ дѣленіе выходитъ не точное, то и все дѣленіе не можетъ быть точнымъ. Когда бы коэффиціентъ $y^4 + y^3 + 12y^2 - y - 1$ дѣлился на $y + 1$ точно, тогда второй остатокъ не содержалъ бы уже главной буквы; предположивъ этотъ остатокъ равнымъ нулю, получили бы выраженіе, называемое *условіемъ точнаго дѣленія*. Такъ при дѣленіи $a^2 + 2ab + b^2 + c$ на $a + b$, въ частномъ получаемъ $a + b$, и въ остаткѣ c; слѣд. въ этомъ случаѣ $c = o$ будетъ условіе точнаго дѣленія данныхъ составныхъ количествъ. Также дѣленіе $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ на $x - e$ даетъ въ частномъ $x^3 + (e + a)x^2 + (e^2 + ae + b)x + (e^3 + ae^2 + be + c)$ и въ остаткѣ $e^4 + ae^3 + be^2 + ce + d$; слѣд. условіе точнаго дѣленія будетъ $e^4 + ae^3 + be^2 + ce + d = o$.

V.

НѢКОТОРЫЯ СВОЙСТВА ЧИСЕЛЪ.

(29). 1) Когда числа A, B, C, и пр. имѣютъ общій дѣлитель δ, тогда и сумма ихъ дѣлится на тоже число. Ибо, положивъ $A = a\delta$, $B = b\delta$, $C = c\delta$, и пр. т. е. положивъ, что a, b, c, и пр. суть частныя, происходящія отъ точныхъ дѣленій A, B, C, и пр. на δ, найдемъ (чл. 18)

$$A + B + C + \text{и пр.} = (a + b + c + \text{и пр.})\,\delta,$$

или

$$\frac{A + B + C + \text{и пр.}}{\delta} = \text{цѣл. числу}.$$

2) Общій дѣлитель суммы и одного слагаемаго дѣлитъ и другое ея слагаемое. Когда $\frac{A + B}{\delta} = m$ или $A + B = m\delta$, $\frac{A}{\delta} = n$ или $A = n\delta$, тогда $B = m\delta - A$, потому что сумма двухъ слагаемыхъ безъ одного изъ нихъ равняется другому; но какъ $A = n\delta$, то $B = m\delta - A = m\delta - n\delta = (m - n)\,\delta$ (чл. 18), т. е.

$\frac{B}{\delta}$ = цѣл. числу. — Когда же въ суммѣ $A + B$ одно только A дѣлится на δ, т. е. когда только $A = n\delta$, тогда $A + B = n\delta + B$, изъ чего, по раздѣленіи на δ, получимъ $\frac{A+B}{\delta} = n + \frac{B}{\delta}$ (чл. 19), гдѣ $\frac{B}{\delta}$ есть дробь по условію; слѣд. $\frac{A+B}{\delta}$ = дроби, т. е. сумма $A + B$ на δ точно не дѣлится.

3) Всякое цѣлое число есть кратное 9 съ суммою его цифръ. Положивъ, что a, b, c, d, и пр. суть цифры единицъ, десятковъ, сотенъ, тысячъ, и пр. числа N, найдемъ

$$N = a + 10b + 100c + 1000\,d + \text{и пр.}$$

или

$$N = a + (9+1)b + (99+1)c + (999+1)d + \ldots.$$
$$= a + 9b + b + 99c + c + 999d + d + \ldots.$$

и, по чл. 18,

$$N = (b + 11c + 111d + \ldots.) \times 9 + (a + b + c + d + \ldots.)$$

И такъ данное число N есть сумма двухъ слагаемыхъ, изъ которыхъ первое дѣлится на 9 или есть кратное числа 9; второе же есть сумма цифръ числа N. Такъ если $N = 5876$, то $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 5$, и потому

$$5876 = (7 + 88 + 555) \times 9 + (6 + 7 + 8 + 5)$$
$$= 650\,.\,9 + 26.$$

4) Если числа A и B, будучи раздѣлены на δ, даютъ въ частныхъ m и n, и въ остаткахъ R и R'; то, по свойству дѣлимаго,

$$A = m\delta + R,\ B = n\delta + R'$$

Перемноживъ эти числа по правиламъ чл. 20, получимъ

$$A \times B = nm\delta^2 + n\delta R + m\delta R' + RR'$$

и, по чл. 18.

$$A \times B = (nm\delta + nR + mR').\,\delta + RR'.$$

Теперь положимъ, что если произведеніе RR' раздѣлится на δ, то въ частномъ выйдетъ q, въ остаткѣ же ρ, т. е. положимъ, что $RR' = q\delta + \rho$: тогда

$$A \times B = (nm\delta + nR + mR')\,\delta + q\delta + \rho,$$

или

$$A \times B = (nm\delta + nR + mR' + q)\,\delta + \rho.$$

Изъ этого видно, что когда произведеніе двухъ чиселъ $A \times B$ раздѣлится на δ, тогда въ остаткѣ получится ρ, т. е. тотъ самый остатокъ, который выходитъ отъ дѣленія на δ произведенія RR' остатковъ, послѣ дѣленія на δ данныхъ чиселъ A и B. — Если данныя числа будутъ 17 и 43 и дѣлитель $\delta = 5$, то

$$17 = 3\,.\,5 + 2,\ R = 2,$$
$$43 = 8\,.\,5 + 3,\ R' = 3;$$

слѣд. $RR' = 6$, и 6 раздѣленное на 5, даетъ въ остаткѣ 1; произведеніе $17 \times 43 = 731$, что раздѣленное на 5, даетъ въ остаткѣ также 1.

Изъ этихъ теоремъ, третья приводитъ къ заключенью, что *число дѣлится на 9 безъ остатка, когда на 9 дѣлится сумма его цифръ*. Такимъ образомъ видно, что 5876 не дѣлится на 9 безъ остатка, потому что сумма цифръ 26 на 9 не дѣлится (теор. 2). То же самое правило относится и къ числу 3, потому что 9 дѣлится на 3 безъ остатка. На примѣръ, числа 111 и 111111 дѣлятся на 3, а число 111111111 дѣлится и на 3 и на 9, и отъ послѣдняго дѣленія въ частномъ выйдетъ 12345679.

5) Посмотримъ теперь, какіе суть признаки дѣлимости даннаго числа на 7, 11 и 13. Предварительно найдемъ, что

$$10^3 = 7.11.13 - 1,$$
$$10^6 = (7.11.13 - 1) \times (7.11.13 - 1) = 7^2.11^2.13^2 - 2.7.11.13 + 1$$
$$= 7.11.13.Q + 1,$$

гдѣ для краткости положено $Q = 7,11.13 - 2$; потомъ

$$10^9 = 10^3 \times 10^6 = 7^3.11^3.13^3 - 3.7^2.11^2.13^2 + 3.7.11.13 - 1$$
$$= 7.11.13.(7^2\,11^2.13^2 - 3.7.11.13 + 3) - 1,$$

или

$$10^9 = 7.\,11.\,13.\,Q' - 1$$

гдѣ $Q' = 7^2.\,11^2.\,13^2 - 3.\,7.\,11.\,13 + 3$. Теперь припомнивъ, что $10^4 = 10^3.\,10$, $10^5 = 10^3.\,10^2$, $10^7 = 10^6.\,10$, $10^8 = 10^6.10^2$, $10^{10} = 10^9.\,10$, $11^{11} = 10^9.\,10^2$, возмемъ число

$$N = a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e + 10^5.f + 10^6.g + 10^7.i \\ + 10^8h + 10^9.l + 10^{10}.m + 10^{11}.n,$$

т. е. возмемъ число, состоящее изъ 12 цифръ, и въ которомъ a есть цифра единицъ, b — цифра десятковъ, c цифра сотенъ, и т. д., и вставимъ въ его выраженіе величины 10^3, 10^6, 10^9; найдемъ

$$N = (a + 10b + 10^2c) + (g + 10i + 10^2h) - (d + 10.\,e + 10^2f) \\ - (l + 10m + 10^2n) + 7.\,11.\,13\,(d + 10e + 10^2f + Q.\,g \\ + 10.\,Q.\,i + 10^2.\,Q.\,h + Q'.\,l + 10.\,Q'\,m + 10^2.\,Q'.\,n),$$

что, для краткости, можемъ написать въ такомъ видѣ:

$$N = (a + 10.\,b + 10^2.\,c) + (g + 10.\,i + 10^2h) - (d + 10.\,e + 10^2f) \\ - (l + 10m + 10^2n) + 7.\,11\,13.\,M,$$

разумѣя подъ M всю сумму, заключающуюся въ послѣдней скобкѣ. Ежели данное число, состоящее изъ 12 цифръ, начиная отъ правой руки, разобьемъ на грани, по три цифры въ каждой; то первыя двѣ скобки будутъ нечетныя грани, а третья и четвертая скобки — четныя; слѣд. видимъ, что *если разность первыхъ двухъ граней безъ двухъ послѣднихъ дѣлится на* 7, 11 *и* 13; *то на эти числа будетъ дѣлиться и данное число* (теор. 1).

6). Если число A болѣе B, или $A > B$, и если A раздѣленное на B, даетъ въ частномъ q и въ остаткѣ r; то $A = qB + r$. Когда A и B имѣютъ общій дѣлитель δ, тогда явно, что на δ будетъ дѣлиться и остатокъ r (теор. 1).

7) Если $A = qB + r$, то $nA = q.\,Bn + nr$. Изъ этого видимъ, что когда дѣлимое и дѣлитель, т. е. A и B, поможатся

на одно число n, тогда частное не перемѣнится, остатокъ же увеличится въ n разъ. Если $n = \frac{1}{m}$, то отъ дѣленія A и B на m, частное опять не перемѣнится, уменьшится только остатокъ въ m разъ.

8) Когда въ произведеніи $A \times B$, производитель A не имѣетъ общаго дѣлителя съ числомъ δ, на которое дѣлится все произведеніе; то на δ долженъ дѣлиться другой производитель B. Ибо, поступивъ съ A и δ по ариѳметическому правилу нахожденія общаго дѣлителя двухъ чиселъ, получимъ въ остаткѣ 1; потомъ если A и δ помножимъ на B и съ произведеніями $A \times B$ и $\delta \times B$ поступимъ по тому же правилу, то дойдемъ до остатка $1 \times B$ или B (теор. 7). Но $A \times B$ и $\delta \times B$ на δ дѣлятся, слѣд. на тоже число должно дѣлиться и B (теор. 6). И такъ, если *произведеніе $A \times B$ дѣлится на какое нибудь простое число, то на это число долженъ дѣлиться одинъ изъ производителей.*

9) Если два равныя числа $A = a.b.c.$ и пр. и $B = a'.b'.c'.$ и пр. состоятъ изъ простыхъ производителей, то эти производители должны быть соотвѣтственно равны между собою. Поелику A дѣлится на каждый изъ своихъ производителей, слѣд. на тотъ же производитель должно дѣлиться и B; а какъ это можетъ быть только въ томъ случаѣ, когда на упомянутый производитель будутъ дѣлиться или a', или b', или c', и пр.; то которое нибудь изъ этихъ простыхъ чиселъ должно равняться разсматриваемому производителю; положивъ $a = a'$, получимъ $b.c.$ и пр. $= b'.c'.$ и пр. Разсуждая объ этихъ произведеніяхъ по предъидущему, дойдемъ до заключенія, что на пр. $b = b'$, и т. д. Отсюда слѣдуетъ: 1) Ежели $P = A \times B$, и $A = a.b.c.$ и пр., $B = a'.b'.c'.$ и пр., гдѣ a, b, c и пр., a', b', c' и пр. суть простыя числа; то P должно состоять изъ тѣхъ же самыхъ простыхъ производителей. 2) Общій большой дѣлитель D двухъ чиселъ P и P' составляется изъ общихъ простыхъ дѣлителей этихъ чиселъ.

10) Всякое сложное число N можетъ быть представлено

чрезъ $a^m \,.\, b^n \,.\, c^r$. и пр., гдѣ a, b, c и пр. суть простыя числа и a меньше b, b меньше c, и пр. или $a < b$, $b < c$ и пр. Ибо, если произведя дѣленіе числа N на 2, 3, 5, 7, и пр. найдемъ, что оно на одно изъ нихъ a можетъ раздѣлиться m разъ, то будетъ $N = a^m \,.\, P$. Здѣсь уже P не можетъ дѣлиться на число, мéньшее a, потому что тогда и N дѣлилось бы на это число, что противно предположенію. И такъ число P должно дѣлить на простыя числа, бóльшія a, и т. д. *Если при такихъ дѣленіяхъ дойдемъ до частнаго n, которое не можетъ дѣлиться ни на одно изъ простыхъ чиселъ, мéньшихъ $\sqrt{n}$; то n есть число простое.* Когда бы n дѣлилось на $q > \sqrt{n}$, и въ частномъ получилось бы p, тогда бы $n = pq$, $p = \frac{n}{q} < \frac{n}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}.\sqrt{n}}{\sqrt{n}} < \sqrt{n}$; слѣд. n могло бы дѣлиться на $p < \sqrt{n}$, что противно условію.

11) Если число $N = a^m \,.\, b^n \,.\, c^r$, то N можетъ быть раздѣлено на число $N' = a^k \,.\, b^e \,.\, c^h$, гдѣ k, e, h менѣе m, n, r. По этому всѣ дѣлители числа N суть члены произведенія

$$(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^m)\,(1 + b + b^2 + b^3 + \ldots + b^n)$$
$$(1 + c + c^2 + c^3 + \ldots + c^r).$$

12) Дробь $\frac{B}{A}$ не можетъ быть сокращена, если числа B и A не имѣютъ общаго производителя. Если бы $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$, гдѣ $b < B$, $a < A$, то $b = \frac{B \times a}{A}$. Но b есть цѣлое число, B и A общаго дѣлителя не имѣютъ; слѣд. a должно бы дѣлиться на A (теор. 8), чего не можетъ быть, потому что a меньше A.

13) Когда дробь $\frac{B}{A}$ равняется несокращаемой дроби $\frac{b}{a}$, тогда $B = nb$, $A = na$. Ибо изъ $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$ слѣдуетъ, что $B = \frac{b \times A}{a}$; но какъ здѣсь по усковію b и a общаго дѣлителя не имѣютъ, то, по теор. 8, только A можетъ быть раздѣлено на a; слѣд. $A = na$, и $B = \frac{b \times na}{a} = nb$.

14) Если дробь $\frac{b}{a}$ несокращаемая, то не можетъ сократиться и дробь $\frac{b^m}{a^m}$; въ противномъ случаѣ b^m и a^m имѣли бы общій

дѣлитель δ, на который дѣлились бы b^m и a^m (теор. 8), что противно условію. И такъ, если $\sqrt[n]{a}$ не равняется цѣлому числу, то этотъ корень не можетъ равняться и дроби $\frac{h}{l}$, которую уже принимаемъ сокращенною, что всегда можемъ сдѣлать. Но положимъ, что $\sqrt[n]{a} = \frac{h}{l}$; найдемъ $a = \frac{h^n}{l^n}$, что невозможно, потому что h^n и l^n имѣли бы общимъ дѣлителемъ знаменатель l^n.

(30). Число называется *четнымъ*, если оно дѣлится на 2 безъ остатка, въ противномъ случаѣ число будетъ *нечетное*. Всѣ четныя числа заключаются въ выраженіи $2n$, нечетныя же — въ выраженіи $2n + 1$. Поэтому: 1) *Произведенія четныхъ чиселъ на четныя суть числа четныя:* $2n \times 2n' = 4nn'$. 2) *Произведеніе четнаго числа на нечетное есть также число четное:* $2n(2n' + 1) = 4nn' + 2n = 2(2nn' + n)$. 3) *Произведенія нечетныхъ чиселъ суть нечетныя:* $(2n + 1)(2n' + 1) = 2(2nn' + n + n') + 1$.

(31). Ежели число c требуется помножить на произведеніе двухъ другихъ чиселъ a и b; то можно сперва помножить на a, потомъ на b; такъ что $c \times ab = ca \times b$. Пусть будетъ $ab = n = a + a + a +$ и пр., гдѣ должно быть b слагаемыхъ; отсюда $c \times n = ca + ca + ca +$ и пр., гдѣ содержится b слагаемыхъ; слѣд. $c \times n = ca \times b$. Вмѣстѣ съ тѣмъ видно, что *для умноженія произведенія ab на c, должно помножить только одинъ производитель.*

(32). Отъ перемѣны порядка въ производителяхъ, произведеніе не перемѣняется. Во первыхъ $c \times n = n \times c$, потому что

$$c \times n = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ и пр. до } c \text{ разъ} \\ 1 + 1 + 1 + 1 + \text{ и пр.} \\ \quad \text{и пр. до } n \text{ разъ} \end{array} \right\} = n + n + \text{ и пр.} = n \times c.$$

Также, перемноживъ дроби $\frac{n}{m}$ и $\frac{p}{q}$, получимъ въ произведеніи $\frac{n.p}{m.q}$; но какъ, по доказанному, $n.p = p.n$, и $m.q = q.m$; слѣд.

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p.n}{p.m} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m}.$$

Теперь, вообще: $abc = bac = bca = cba$. Ибо $abc = ab.c = ba.c = b.ac$ (чл. 31) $= bca = bc.a = cba$.

VI.

АЛГЕБРАИЧЕСКІЯ ДРОБИ. НАИБОЛЬШІЙ ОБЩІЙ ДѢЛИТЕЛЬ СОСТАВНЫХЪ КОЛИЧЕСТВЪ.

(33). Вычисленія съ алгебраическими дробями производятся тѣже самыя и по тѣмъ же правиламъ, какъ съ дробями ариѳметическими. Вотъ примѣры:

I. Для приведенія дробей

$$\frac{a^2}{b^3c},\ \frac{a^2-1}{b^2cd},\ \frac{a+b}{bcd^3f}$$

къ одному знаменателю, должно взять наименьшій знаменатель b^3cd^3f, и получимъ дроби

$$\frac{a^2d^3f}{b^3cd^3f},\ \frac{(a^2-1)bd^2f}{b^3cd^3f},\ \frac{(a+b)b^2}{b^3cd^3f}.$$

Для дробей

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f}$$

наименьшій знаменатель будетъ bdf, и потому данныя дроби превратятся въ

$$\frac{adf}{bdf},\ \frac{cbf}{bdf},\ \frac{ebd}{bdf}.$$

II. Сумма $8x^2 + \frac{9x^3-b}{x} = \frac{8x^3}{x} + \frac{9x^3-b}{x} = \frac{17x^3-b}{x}$.

Разность $8x^2 - \frac{9x^3-b}{x} = \frac{8x^3-9x^3+b}{x} = \frac{b-x^3}{x}$.

III. Сумма $\frac{3x^2-1}{2x+7} + \frac{5x-2}{x+1} = \frac{3x^3+13x^2+30x-15}{(2x+7)(x+1)}$.

Разность $\frac{3x^2-1}{2x+7} - \frac{5x^2-2}{x+1} = \frac{-7x^3-32x^2+3x+13}{(2x+7)(x+1)}$.

IV. Произведеніе

$$\frac{x^2+yx+y^2}{x^2+2ax+a^2} \times \frac{x^3+3ax^2+3a^2x+a^3}{x^3-y^3} = \frac{x+a}{x-y}.$$

V. Частное

$$\frac{x^3+3ax^2+3a^2x+a^3}{x^3-y^3}:\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{x+a}{x-y}.$$

(34). Составное количество

$$x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4=(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$$

можетъ дѣлиться на $x+a$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$ и $(x+a)^4$; также составное

$$x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5=(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)$$

можетъ дѣлиться на $(x+a)$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$ и $(x+a)^5$; слѣд. общій наибольшій дѣлитель этихъ составныхъ есть $(x+a)^4$, потому что по раздѣленіи, получимъ 1 и $x+a$, которыя уже общаго дѣлителя не имѣютъ. И такъ, если бы не было почти непреодолимыхъ препятствій въ разложеніи составныхъ количествъ на простые производители, то ихъ общій наибольшій дѣлитель опредѣлялся бы также просто, какъ въ ариѳметикѣ; такой дѣлитель составляется изъ перемноженія всѣхъ простыхъ общихъ дѣлителей двухъ чиселъ. По этой причинѣ къ алгебраическимъ составнымъ количествамъ примѣняется второй ариѳметическій способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя.

Пусть данныя составныя количества будутъ A и B, расположенныя по степенямъ одной той же буквы, и въ которыхъ высшая степень количества B менѣе высшей степени A, т. е. B алгебраически менѣе A: поелику общій большой дѣлитель не можетъ быть болѣе B, слѣд. дѣйствіе должно начать дѣленіемъ A на B, и если оно кончится безъ остатка, то явно, что искомый дѣлитель будетъ B. Но получивъ остатокъ R и частное Q, по свойству дѣлимаго, найдемъ, что

$$A=B.Q+R,$$

выраженіе, которое показываетъ, что количество, дѣлящее B и R, раздѣлитъ и A (чл. 29, 1 и 8); слѣд. задача приводится къ нахожденію общаго дѣлителя для B и R, и какъ R алгебраически менѣе B, то надобно дѣлить B на R. Если, продолжая такимъ образомъ дѣлить на каждый остатокъ предъидущаго дѣлителя, дойдемъ до остатка $= 0$; то послѣдній дѣлитель будетъ искомый общій и наибольшій дѣлитель данныхъ составныхъ A и B. Все это совершенно согласно съ правиломъ ариѳметическимъ; но при описанныхъ дѣйствіяхъ съ алгебраическими количествами надобно обращать вниманіе на слѣдующее: 1) Если въ которомъ нибудь составномъ количествѣ встрѣтится такой общій производитель всѣхъ его членовъ, на который не дѣлится точно другое составное, то его можно и должно исключить, потому что общій дѣлитель D для $N.M.D$ и $P.Q.D$ есть также и общій дѣлитель для $M.D$ и $P.Q.D$, когда N не дѣлитъ PQ и не имѣетъ съ нимъ общаго дѣлителя (чл. 29, 9). 2) Если въ одномъ изъ остатковъ находится общій производитель, на который предъидущій остатокъ не дѣлится, то этотъ производитель исключается по изъясненной же причинѣ. 3) Если первый членъ одного изъ дѣлимыхъ не дѣлится на первый членъ соотвѣтствующаго дѣлителя, то, для избѣжанія дробей, все дѣлимое помножается на коэффиціентъ перваго члена дѣлителя, увѣрившись прежде, что на этотъ коэффиціентъ не дѣлятся всѣ члены дѣлителя: отъ этого искомый общій дѣлитель не перемѣнится, потому что общій дѣлитель для MD и ND останется такимъ же и для PMD и ND, когда P не имѣетъ общаго дѣлителя съ N. Наконецъ 4) если данныя составныя количества имѣютъ очевидно общіе производители, такъ что $A = dA'$, $B = dB'$, то дѣйствіе должно начать по исключеніи d, т. е. надобно дѣлить A' на B', и когда найдется, что ихъ общій дѣлитель есть D, тогда искомый наибольшій дѣлитель данныхъ составныхъ A и B будетъ уже dD.

Теперь положимъ, что

$$A = 48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2,$$

$$B = 48a^3bx^7 - 88a^4bx^6 + 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4.$$

Сначала находимъ отдѣльно наибольшіе общіе дѣлители членовъ данныхъ количествъ A и B, именно: $12a^2b^3x^2$ и $8a^3bx^4$. Эти одночленные количества показываютъ, что A и B имѣютъ общій одночленный дѣлитель $4a^2bx^2$, и потому исключивъ его, получаемъ

$$A' = 12b^2x^4 - 30ab^2x^3 + 3a^2b^2x^2 - 3a^4b^2,$$
$$B' = 12ax^5 - 22a^2x^4 - 16a^3x^3 - 2a^4x^2,$$

изъ которыхъ можно еще исключить общихъ производителей b^2 и ax^2; выйдетъ

$$A'' = 12x^4 - 30ax^3 + 3a^2x^2 - 3a^4,$$
$$B'' = 12x^3 - 22ax^2 - 16a^2x - 2a^3.$$

Доведши такимъ образомъ A и B до простѣйшаго вида, начинаемъ дѣлить A'' на B'':

$$\begin{array}{l|l} 12x^4 - 30ax^3 + 3a^2x^2 - 3a^4 & 12x^3 - 22ax^2 - 16a^2x - 2a^3 \\ \cline{2-2} 12x^4 - 22ax^3 - 16a^2x^2 - 2a^3x & x - 2 \\ \hline -8ax^3 + 19a^2x^2 + 2a^3x - 3a^4 & \end{array}$$

Чтобъ не имѣть въ частномъ дробей, найденный остатокъ слѣдовало бы помножить на коэффиціентъ 12 перваго члена дѣлителя; но очевидно, что здѣсь достаточно помножить на 3, и потому продолжаемъ дѣленіе такъ:

$$\begin{array}{r} -24ax^3 + 57a^2x^2 + 6a^3x - 9a^4 \\ -24ax^3 + 44a^2x^2 + 32a^3x + 4a^4 \\ \hline +13a^2x^2 - 26a^3x - 13a^4 \end{array}$$

или

$$+x^2 - 2ax - a^2.$$

Потомъ находимъ

$$\begin{array}{l|l} 12x^3 - 22ax^2 - 16a^2x - 2a^3 & x^2 - 2ax - a^2 \\ \cline{2-2} 12x^3 - 24ax^2 - 12a^2x & 12x + 1 \\ \hline +2ax^2 - 4a^2x - 2a^3 & \end{array}$$

или

$$
\begin{array}{r}
+x^2-2ax-a^2 \\
+x^2-2ax-a^2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

И такъ A'' и B'' имѣютъ наибольшій общій дѣлитель $x^2-2ax-a^2$, который помноживъ на $4a^2bx^2$, получимъ искомый наибольшій дѣлитель $4a^2bx^4-8a^3bx^3-4a^4bx^2$ данныхъ количествъ A и B.

Для другаго примѣра, возмемъ

$$A=x^3+2yx^2-x^2+y^2x-2yx-y^2,$$
$$B=yx^2+x^2+y^2x+yx+x+y.$$

Для опредѣленія ихъ общаго дѣлителя, должно сперва представить A и B въ такомъ видѣ:

$$A=x^3+(2y-1)x^2+(y^2-2y)x-y^2,$$
$$B=(y+1)x^2+(y^2+y+1)x+y;$$

потомъ, для избѣжанія въ частномъ дробей, помножаемъ A на $y+1$, и найденное произведеніе

$$(y+1)x^3+(2y^2+y-1)x^2+(y^3-y^2-2y)x-(y^3+y^2)$$

дѣлимъ на B; въ частномъ выйдетъ x, въ остаткѣ же — $(y^2-2)x^2+(y^3-y^2-3y)x-(y^3+y^2)$, который опять помножаемъ на $y+1$, а дѣлитель B на y^2-2; тогда въ частномъ получится 1, и въ остаткѣ $(-y^3-3y^2+y+2)x-(y^4+3y^3-y^2+2y)$, или $(-y^3-3y^2-y+2)x+(-y^3-3y^2-y+2)y$; такъ что этотъ остатокъ можно превратить въ $x+y$, исключивъ изъ него общій производитель $(-y^3-3y^2-y+2)$. Теперь на $x+y$ надобно дѣлить B: дѣленіе произведется безъ остатка; слѣд. искомый наибольшій дѣлитель количествъ A и B будетъ $x+y$.

VII.

ВЫЧИСЛЕНІЯ СО СТЕПЕНЯМИ И КОРНЯМИ. СОСТАВЛЕНІЕ И ИЗВЛЕЧЕНІЕ КВАДРАТНЫХЪ И КУБИЧЕСКИХЪ КОРНЕЙ.

(35). Объяснены уже правила для перемноженія степеней и для ихъ взаимнаго дѣленія съ двумя исключительными случаями формулы или общаго выраженія частнаго степеней, что было необходимо для вычисленій, содержащихся въ отдѣленіяхъ IV и VI: теперь остается изложить всѣ возможныя дѣйствія со степенями и корнями, для чего замѣчаемъ вообще, что всѣ эти дѣйствія прямо проистекаютъ изъ опредѣленій и ихъ изображеній, помѣщенныхъ въ чл. 5.

1) Поелику

$$(a^3)^4 = (aaa)^4 = aaa \times aaa \times aaa \times aaa = a^{12}.$$

Вообще: чтобъ найти, чему равняется $(a^n)^m$, надобно принять во вниманіе, что здѣсь требуется составить произведеніе изъ m такихъ производителей, изъ которыхъ каждый содержитъ n производителей; слѣд. въ искомомъ произведеніи будетъ содержаться nm производителей; такъ что

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

И такъ, *возвышеніе степени въ степень производится чрезъ умноженіе показателей степеней.*

2) Поелику $(8a)^3 = 8a \times 8a \times 8a$; слѣд. $(8a)^3 = 512a^3$, т. е. *при возвышеніи въ степень, коэффиціентъ возвышается въ ту же степень.*

3) Чтобъ возвысить произведеніе ab, на примѣръ, въ четвертую степень, надобно составить произведеніе $ab \times ab \times ab \times ab = a^4b^4$; слѣд. $(ab)^4 = a^4b^4$, т. е. *степень произведенія равняется произведенію тѣхъ же степеней производителей.*

4) Дробь $\frac{a}{b}$ въ пятой степени или $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^5}{b^5}$; слѣд. *дробь возвысится въ степень, когда возвысятся въ оную и числитель и знаменатель.*

5) Поелику, по смыслу корня, $(\sqrt[n]{ab})^n = ab$; слѣдст. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, потому что $(\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n = ab$. И такъ, *корень изъ произведенія равняется произведенію тѣхъ же корней изъ каждаго производителя.*

6) *Корень изъ дроби равняется тѣмъ же корнямъ изъ числителя и знаменателя:* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, потому что $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$.

Примѣры.

I. $(8a^3b)^4 = 4096a^{12}b^4$; $(8a^{-3}b)^4 = \left(\frac{8b}{a^3}\right)^4 = \frac{4096b^4}{a^{12}} = 4096a^{-12}b^4$; $(8a^3b)^0 = 1$.

II. $\left(\frac{8a^3}{3b^2}\right)^3 = \frac{512a^9}{27b^6}$; $\left(\frac{8a^{-3}}{3b^{-2}}\right)^3 = \left(\frac{8b^2}{3a^3}\right)^3 = \frac{512b^6}{27a^3}$.

III. $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$; $\sqrt[3]{a^4b^3} = \sqrt[3]{a^3ab^3} = ab\sqrt[3]{a}$.

IV. $\sqrt[3]{a^5b} \times \sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[3]{a^6b^3} = a^2b$; $\sqrt[4]{8a^3b^2} \times \sqrt[4]{2ab} = \sqrt[4]{16a^4b^3} = 2a\sqrt[4]{b^3}$.

V. $\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} = \frac{a^2}{b^2}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} : \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} = \sqrt{\frac{ab^3}{a^3b}} = \frac{b}{a}$.

VI. $\sqrt[3]{\frac{5a^2bc}{7d^3f}} \times \sqrt[3]{\frac{25ab^2c}{49df^2}} = \frac{5ab}{7df}\sqrt[3]{\frac{c^2}{d}}$.

$$\sqrt[3]{\frac{5a^2bc}{7d^3f}} : \sqrt[3]{\frac{25ab^2c}{49df^2}} = \sqrt[3]{\frac{5.49a^2bcdf^2}{25.7ab^2cd^3f}} = \sqrt[3]{\frac{7af}{5bd^2}}.$$

$$\frac{5ab}{7df}\sqrt[3]{\frac{c^2}{d}} : \sqrt[3]{\frac{5a^2bc}{7d^3f}} = \sqrt[3]{\frac{125a^3b^3c^2}{343d^4f^3}} : \sqrt[3]{\frac{5a^2bc}{7d^3f}} = \sqrt[3]{\frac{25ab^2c}{49df^2}}.$$

7) Положимъ, что $x = \sqrt[n]{a}$, т. е. $x^n = a$; изъ этого получаемъ $(x^n)^m = x^{nm} = a^m$; слѣд.

$$x = \sqrt[nm]{a^m}.$$

По этой формулѣ корни разныхъ степеней приводятся къ корню одной степени или къ одному показателю корня, что требуется многими вопросами.

Примѣры.

$$\text{I. } \sqrt[3]{a^2b} \times \sqrt{a^3b} = \sqrt[6]{a^4b^2} \times \sqrt[6]{a^9b^3} = \sqrt[6]{a^{13}b^5} = a^2\sqrt[6]{ab^5}.$$

$$\text{II. } \sqrt[3]{a^2b} : \sqrt{a^3b} = \sqrt[6]{a^4b^2} : \sqrt[6]{a^9b^3} = \sqrt[6]{\frac{a^4b^2}{a^9b^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a^5b}}.$$

$$\text{III. } a^2\sqrt[6]{ab^5} : \sqrt{a^3b} = \sqrt[6]{a^{13}b^5} : \sqrt[6]{a^9b^3} = \sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[3]{a^2b}.$$

$$\text{IV. } \sqrt[n]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \times \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^mb^n}.$$

Эти примѣры показываютъ, что приведенiе корней къ одному показателю производится какъ приведенiе дробей къ одному знаменателю. Дѣйствительно для рѣшенiя IV-го общаго примѣра, можно взять дроби

$$\frac{1}{n},\ \frac{1}{m},$$

и приведя ихъ къ одному знаменателю

$$\frac{m}{nm},\ \frac{n}{nm},$$

принять знаменатель за показатель корня, а числителей — за показателей степеней. Это дѣйствiе, полезное для многихъ случаевъ, обобщено изображенiемъ корней въ видѣ степеней съ дробными показателями; такъ что выраженiя

$$\sqrt{a} \text{ и } a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{a^2} \text{ и } a^{\frac{2}{3}},\ \sqrt[n]{a^m} \text{ и } a^{\frac{m}{n}}$$

считаются однозначенательными. Чтобъ показать пользу этого способа изображенiя степеней, положимъ, что требуется найти, чему равняется $\sqrt[r]{(\sqrt[m]{a})}$. Превративъ это выраженiе въ $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{r}}$, тотчасъ находимъ, что $\sqrt[r]{(\sqrt[m]{a})} = a^{\frac{1}{mr}} = \sqrt[mr]{a}$.

(36). Квадратный корень $\sqrt{-a^2}$ не есть ни $(+a)$, ни $(-a)$, потому что и $(+a)^2$ и $(-a)^2$ даютъ $+a^2$. По этой причинѣ выраженіе $\sqrt{-a^2}$ и подобное ему $\sqrt{-b}$ называются количествами *мнимыми*. Но какъ $\sqrt{-a^2}=\sqrt{(-1\,.\,a^2)}=a\sqrt{-1}$, и $\sqrt{-b}=\sqrt{(-1\,.\,b)}=\sqrt{b}\sqrt{-1}$; то за общее выраженіе мнимыхъ количествъ принимаютъ $\alpha\sqrt{-1}$.

(37). Поелику $(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1).(-1)}$, что, согласно съ понятіемъ квадратнаго корня, есть -1; слѣд. $(\sqrt{-1})^2=-1$. Эта формула служитъ основаніемъ для вычисленій съ мнимыми количествами. Именно:

1). $(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}$,

$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^3\sqrt{-1}=-(\sqrt{-1})\sqrt{-1}=1$,

$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$,

$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^5\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$,

и т. д.

2). $\alpha\sqrt{-1}\pm\beta\sqrt{-1}=(\alpha\pm\beta)\sqrt{-1}$.

3). $\alpha\sqrt{-1}\times\beta\sqrt{-1}=-\alpha\beta$.

4). $\alpha\sqrt{-1}:\beta\sqrt{-1}=\frac{\alpha}{\beta}$.

5). $(\alpha\sqrt{-1})^2=-\alpha^2$, $(\alpha\sqrt{-1})^8=\alpha^8$.

6). $\sqrt{(\sqrt[m]{-1})}=\sqrt[2m]{-1}$.

Если положимъ $\sqrt[2m]{-1}=x$ или $x^{2m}=-1$, изъ чего, придавъ къ обѣимъ количествамъ 1, получимъ выраженіе $x^{2m}+1=o$, котораго изслѣдованія составляютъ одну изъ важнѣйшихъ теорій Высшей Алгебры.

(38). Слѣдующіе вопросы, разрѣшенные по правиламъ перемноженія составныхъ количествъ, суть теоремы, имѣющія обширное употребленіе въ алгебраическихъ вычисленіяхъ.

1). $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$,

т. е. *квадратъ суммы двухъ количествъ состоитъ изъ квадратовъ обоихъ количествъ съ ихъ удвоеннымъ произведеніемъ.*

2). $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$,

т. е. *квадратъ разности двухъ количествъ равняется суммѣ квадратовъ обоихъ количествъ безъ ихъ удвоеннаго произведенія.*

3). $(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$, и $(a-b+c-d)^2 = a^2 - 2ab + 2ac - 2ad + b^2 - 2bc + 2bd + c^2 - 2cd + d^2$, т. е. *квадратъ составнаго количества содержитъ сумму квадратовъ всѣхъ его членовъ и удвоенныя произведенія каждаго члена на всѣ слѣдующія, съ соблюденіемъ правила знаковъ.*

4). $(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$,

т. е. *разность квадратовъ двухъ количествъ есть произведеніе суммы на разность тѣхъ же количествъ.*

Если положимъ $a^2 = m$, $b^2 = n$, то та же теорема выразится такимъ образомъ:

$$m - n = (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}),$$

т. е. *разность двухъ количествъ равняется произведенію суммы ихъ корней на разность тѣхъ же корней.*

5). $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

т. е. *кубъ суммы двухъ количествъ состоитъ изъ кубовъ обоихъ количествъ и изъ утроенныхъ произведеній квадрата перваго изъ нихъ на второе и квадрата втораго на первое.*

6) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,

т. е. *кубъ разности двухъ количествъ равняется кубу перваго изъ нихъ съ его утроеннымъ произведеніемъ на квадратъ втораго, безъ куба этого втораго количества и безъ его утроеннаго произведенія на квадратъ перваго.*

7). Чтобъ найти, чему равняется $(a+b+c)^3$, примемъ $a+b$ за одно количество, т. е. положимъ, что $(a+b+c)^3 = [(a+b)+c]^3$; найдемъ

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

Также

$$(a+b+c)^3=[a+(b+c)]^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

(39). На третьей теоремѣ предъидущаго члена основываются правила извлеченія квадратныхъ корней изъ данныхъ чиселъ, требующія слѣдующихъ предварительныхъ замѣчаній:

1) Въ общепринятомъ счисленіи или нумераціи, числа 1, 10, 100, 1000, и пр. суть предѣлы, между которыми заключаются всѣ прочія цѣлыя числа, изображаемыя одною, двумя, тремя, и пр. цифрами; слѣд. надобно сперва найти правило для составленія квадратовъ этихъ предѣловъ. Разсмотрѣвъ квадраты

$$10^2 = 10.10 = 100,$$
$$100^2 = 100.100 = 10000,$$
$$1000^2 = 1000.1000 = 1000000,$$

и пр.

видимъ, что *число нулей квадрата вдвое болѣе числа нулей корня.*

Полезно также обратить вниманіе на слѣдующіе примѣры:

$$20^2 = 400,\ 5000^2 = 25000000, \text{ и пр.}$$

которые показываютъ, что для составленія квадрата изъ числа, изображеннаго цифрою съ нулями, должно къ квадрату этой цифры приписать двойное число нулей корня.

2) Выше замѣчено, что всѣ числа, выражаемыя одной, двумя, тремя, и пр. цифрами, содержатся между 1 и 10, 10 и 100, 100 и 1000, и пр.; слѣд. квадраты ихъ содержатся между 1 и 10^2 или 1 и 100, 10^2 и 100^2 или 100 и 10000, 100^2 и 1000^2 или 10000 и 1000000, и пр. Отсюда слѣдуетъ, что

(1 циф.)^2 можетъ содержать 1 и 2 цифры
(2 циф.)^2 » » 3 и 4 »
(3 циф.)^2 » » 5 и 6 »
(4 циф.)^2 » » 7 и 8 »

и т. д.

Вообще: *число цифръ квадрата или ровно вдвое или вдвое безъ одной болѣе числа цифръ корня.* Изъ этого слѣдуетъ, что если квадраты содержатъ 8, 17, 24, 37. и пр. цифръ. то корни должны имѣть 4, 9, 12, 19. и пр. цифръ.

(40). Извлеченіе квадратныхъ корней, или нахожденіе квадратнаго корня даннаго числа, принимаемаго за квадратъ искомаго корня, есть дѣйствіе, обратное составленію квадратовъ; слѣд. при этомъ извлеченіи должно руководствоваться третьею теоремою чл. 38 и постепенно находить такія цифры или части корня, которыя удовлетворяли бы этой теоремѣ. Пусть данное число, считаемое квадратомъ, будетъ 316969: сперва по правилу о числѣ цифръ корня заключаемъ, что искомый корень долженъ содержать *три* цифры или *три* части. т. е. сотни, десятки и единицы, и потому

$$316969 = (\textit{сот.})^2 + 2.\,\textit{сот.} \times \textit{десят.} + 2.\,\textit{сот.} \times \textit{един.}$$
$$+ (\textit{десят.})^2 + 2.\,\textit{десят.} \times \textit{един.} + (\textit{един.})^2.$$

По этому выраженію расчитываемъ, что квадратъ сотенъ долженъ состоять изъ четырехъ нулей, и цифра сотенъ должна давать квадратъ, который былъ бы не болѣе 31; но $6^2 = 36$; слѣд. искомая цифра сотенъ есть 5. Когда изъ даннаго числа вычтимъ 250000, квадратъ найденныхъ сотенъ, тогда въ остаткѣ 66969 будутъ содержаться всѣ члены вышенаписаннаго выраженія, кромѣ $(\textit{сот.})^2$. Теперь слѣдуетъ найти цифру десятковъ: для этого беремъ произведеніе 2. *сот.* $\times$ *десят.* и разчитываемъ: въ сотняхъ содержится два нуля, въ десяткахъ — одинъ; слѣд. въ ихъ произведеніи будетъ три нуля, и удвоенное произведеніе цифры сотенъ на цифру десятковъ не должно превышать 66, и потому цифра десятковъ есть 6, потому что $2.500.60 = 60000$. По опредѣленіи цифры десятковъ, квадратъ ихъ становится извѣстнымъ, почему и придаемъ его къ найденному удвоенному произведенію: въ суммѣ получимъ 63600, которую вычитаемъ изъ перваго остатка 66969. Второй остатокъ 3369 будетъ уже содержать 2. *сот.* $\times$ *един.* $+$ 2. *десят.* $\times$ *един.* $+$ (*един.*)^2. Чтобъ опредѣлить эти члены, въ которыхъ сотни и десятки уже извѣстны, остается найти цифру единицъ: но какъ произведеніе сотенъ на единицы будетъ содержать два нуля, то удвоенное произведеніе цифръ сотенъ и единицъ не можетъ быть болѣе 33, и потому должно взять 3 единицы. Послѣ этого найдемъ 2. *сот.* $\times$ *един.* $+$ 2. *десят.* $\times$ *един.* $+$ (*един.*)^2, $=$ 3369. И такъ 563 есть искомый квадратный корень. Всѣ эти вычисленія располагаются въ слѣдующемъ видѣ:

$$
\begin{array}{rrr}
 & \sqrt{316969} = & 500 \\
(500)^2 = & 250000 & 60 \\
\hline
 & 66969 & 3 \\
2.500.60 + (60)^2 = & 63600 & 563 \\
\hline
 & 3369 & \\
2.500.3 + 2.60.3 + 3^2 = & 3369 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Извлечемъ еще квадратный корень изъ 1111088889, который долженъ содержать пять цифръ, т. е. части этого корня будутъ десятки тысячь, тысячи, сотни, десятки и единицы; такъ что

$$
\begin{aligned}
1111088889 = {} & (\textit{дес.тыс.})^2 + 2.\,\textit{дес.}\,\textit{т.} \times \textit{тыс.} + 2.\,\textit{дес.т.} \times \textit{сот.} \\
& + 2.\,\textit{дес.т.} \times \textit{десят.} + 2.\,\textit{дес.т.} \times \textit{един.} + (\textit{тыс.})^2 \\
& + 2.\,\textit{т.} \times \textit{сот.} + 2.\,\textit{т.} \times \textit{дес.} + 2.\,\textit{т.} \times \textit{един.} \\
& + (\textit{сот.})^2 + 2.\,\textit{сот.} \times \textit{десят.} + 2.\,\textit{сот.} \times \textit{един.} \\
& + (\textit{десят.})^2 + 2.\,\textit{десят.} \times \textit{един.} + (\textit{един.})^2.
\end{aligned}
$$

Руководствуясь этимъ выраженіемъ, которое получившій навыкъ въ подобныхъ вычисленіяхъ не пишетъ, но удерживаетъ въ памяти, и изъясненнымъ рѣшеніемъ предъидущаго примѣра, не трудно уже опредѣлитель цифры искомаго корня; по этому, не повторяя расчетовъ, прямо предлагаемъ рѣшеніе:

$$
\begin{array}{rrr}
 & \sqrt{1111088889} = & 30000 \\
(30000)^2 = & \underline{900000000} & 3000 \\
 & 211088889 & 300 \\
2.30000.3000 + (3000)^2 = & \underline{189000000} & 30 \\
 & 22088889 & \underline{3} \\
2.30000.300 + 2.3000.300 + (300)^2 = & \underline{19890000} & 33333 \\
 & 2198889 & \\
2.30000.30 + 2.3000.30 + 2.300.30 + (30)^2 = & \underline{1998900} & \\
 & 199989 & \\
2.30000.3 + 2.3000.3 + 2.300.3 + 2.30.3 + 3^2 = & \underline{199989} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Ежели данное число не есть точный квадратъ, то посредствомъ извлеченія можемъ найти числа, между которыми искомый корень содержится. Такъ $\sqrt{123456789}$ содержится между 11111 и 11112, какъ видно изъ слѣдующаго самаго извлеченія

$$
\begin{array}{rr}
\sqrt{123456789} = & 10000 \\
\underline{100000000} & 1000 \\
23456789 & 100 \\
\underline{21000000} & 10 \\
2456789 & \underline{1} \\
\underline{2210000} & 11111 \\
246789 & \\
\underline{222100} & \\
24689 & \\
\underline{22221} & \\
2468 &
\end{array}
$$

Правила извлеченія квадратныхъ корней предложены здѣсь со всѣми подробностями, какъ слѣдствія составленія квадратовъ; но въ практикѣ описанныя дѣйствія могутъ быть сокращены: пріобрѣтшій навыкъ можетъ опускать нули, и тогда къ остаткамъ надобно будетъ *сносить* по двѣ цифры даннаго квадрата, и самая старшая цифра корня можетъ быть 9. Вотъ образецъ такого сокращеннаго извлеченія:

$$\sqrt{896345} = 946$$

$$\begin{array}{r}
9^2 = 81 \\
\hline
863 \\
2.9.4 = 72 \\
4^2 = 16 \\
\hline
736 \\
\hline
12745 \\
2.94.6 = 1128 \\
6^2 = 36 \\
\hline
11316 \\
\hline
1429
\end{array}$$

(41). Выше (чл. 35, 6) доказано, что для извлеченія корня изъ дроби, надобно извлекать корни изъ числителя и знаменателя. Такъ

$$\sqrt{\tfrac{81}{49}} = \tfrac{9}{7},\ \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3},\ \sqrt{0,25} = \sqrt{\tfrac{25}{100}} = \tfrac{5}{10} = 0,5.$$

Но какъ всего чаще случается, что знаменатели не суть квадратныя числа, то для избѣжанія двухъ извлеченій, знаменатель всегда дѣлается квадратнымъ числомъ посредствомъ умноженія числителя и знаменателя дроби на знаменатель. Такъ $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$. Правило это относится и къ десятичнымъ дробямъ, но чтобъ не увеличивать чиселъ безъ надобности, должно числитель и знаменатель ея помножать только на 10. Напримѣръ:

$$\sqrt{0,5} = \sqrt{0,50} = \tfrac{\sqrt{50}}{10},\ \sqrt{0,003} = \sqrt{0,0030} = \tfrac{\sqrt{30}}{100},$$

$$\sqrt{8,045} = \sqrt{\tfrac{8045}{1000}} = \sqrt{\tfrac{80450}{10000}} = \tfrac{\sqrt{80450}}{100}.$$

Произведя дѣйствительное извлеченіе въ третьемъ примѣрѣ, найдемъ, что корень числителя содержится между 283 и 284: если удовольствуемся первымъ изъ этихъ чиселъ, то получимъ

$$\sqrt{8,045} = 2,83.$$

Поступивъ также во второмъ примѣрѣ, найдемъ

$$\sqrt{0,003} = 0,05.$$

Такіе корни по большой части не удовлетворяютъ требованіямъ вопросовъ, и какъ въ чл. 29, 14 доказано, что въ подобныхъ случаяхъ нельзя найти точнаго корня; то остается опредѣлять его съ желаемою степенью приближенія къ точному корню, котораго предѣлы означаются уже первымъ извлеченіемъ.

(42). Въ *третьемъ примѣрѣ* чл. 35 видѣли, что

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

Эта формула показываетъ, что *когда помножается корень, тогда квадратъ его помножается уже на квадратъ множителя.* На этомъ правилѣ основывается постепенное приближеніе къ истинному корню. Положимъ, что требуется извлечь квадратный корень изъ 5, который заключается между 2 и 3. Ежели помножимъ 5 на 100, и извлечемъ изъ 500 корень 22, то получимъ

$$500 = (22)^2 + 16,$$

и

$$5 = (2,2)^2 + 0,16;$$

слѣд. 2,2 уже ближе къ искомому корню, нежели 2, потому что $5 = 2^2 + 1$. Послѣ этого найдемъ

$$50000 = (223)^2 + 271,$$

и

$$5 = (2,23)^2 + 0,0271.$$

Изъ этого видно, что 2,23 ближе къ искомому корню, нежели 2,2. Найдемъ еще

$$5000000 = (2236)^2 + 304$$

и

$$5 = (2,336)^2 + 0,000304.$$

Такимъ образомъ къ истинной величинѣ корня можно приближаться по желанію. Вотъ еще примѣры:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142, \text{ и } 2 = (1{,}4142)^2 + 0{,}00003836;$$

$$\sqrt{0{,}6} = \frac{\sqrt{60}}{10} = 0{,}7745....,$$

$$\sqrt{26{,}720034} = \frac{\sqrt{26720034}}{1000} = 5{,}169142.$$

(43). Приблизительное извлеченіе корней съ означеніемъ ихъ предѣловъ получаетъ бо́льшую ясность: положимъ, что при извлеченіи $\sqrt{26720034}$ надобно довольствоваться такимъ числомъ, которое отъ истиннаго корня отличалось бы менѣе, нежели тысячною долею, т. е. корень этотъ долженъ заключаться между двумя дробями, разнящимися тысячною долею единицы.

Такъ, чтобъ было

$$\frac{x}{1000} < \sqrt{26720034} < \frac{x+1}{1000},$$

или

$$x < 1000\sqrt{26720034} < x + 1,$$

или

$$x < \sqrt{26720034000000} < x + 1.$$

Но какъ $\sqrt{26720034000000}$ содержится между 5169142 и 5169143, то $x = 5169142$, $x + 1 = 5169143$, и потому требуемое число будетъ или 5169,142 или 5169,143, и послѣ того, какъ прежде,

$$\sqrt{26{,}720034} = \frac{\sqrt{26720034}}{1000} = 5{,}169142.$$

(44). Переходимъ къ извлеченію кубическихъ корней. Кубъ составляется чрезъ умноженіе квадрата на корень; квадратъ содержитъ двойное число нулей противъ корня, и въ произведеніи столько нулей, сколько ихъ въ обоихъ производителяхъ: слѣд. *число нулей куба втрое болѣе числа нулей корня*. Такъ $(10)^3 = 1000$, $(1000)^3 = 1000000000$, и пр.

Для опредѣленія числа цифръ куба, должно расчитывать также, какъ для квадратовъ: числа, выражаемыя одной цифрой, содержатся между 1 и 10; кубы ихъ должны содержаться между 1 и 1000, т. е. они могутъ выражаться 1, 2 и 3 цифрами, или

$(1 \text{ циф.})^3$ содержитъ 1, 2, 3 цифры.

Числа, заключающіяся между 10 и 100, выражаются двумя цифрами, и кубы ихъ, содержащіяся между 1000 и 1000000, могутъ имѣть 4, 5, 6 цифръ, или

$(2 \text{ циф.})^3$ содержитъ 4, 5, 6 цифръ.

Такимъ же образомъ не трудно разсчитать, что

$(3 \text{ циф.})^3$ содержитъ 7, 8, 9 цифръ.
$(4 \text{ циф.})^4$ » 10, 11, 12 цифръ.
и пр.

Вообще: *число цифръ куба болѣе или ровно втрое, или втрое безъ одной, или втрое безъ двухъ цифръ числа цифръ корня.*

(45). Если корень состоитъ изъ двухъ цифръ или изъ двухъ частей, изъ десятковъ и единицъ; то его кубъ составляется по формулѣ чл. 38, 5. Такъ $(75)^3 = (70 + 5)^3 = 70^3 + 3 \,.\, 70^2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 70 \,.\, 5^2 + 5^3$

$$
\begin{array}{r}
= 343000 \\
73500 \\
5250 \\
125 \\
\hline
421875.
\end{array}
$$

Но если корень будетъ многосложнѣе, напр. 845, то для составленія куба должно обратиться къ фор. 38, 7, т. е. должно сперва представить, что это число состоитъ изъ десятковъ и единицъ, именно изъ 84 десятковъ и 5 единицъ; потомъ находимъ

$$(845)^3 = (840 + 5)^3 = (840)^3 + 3 \,.\, (840)^2 \times 5 + 3 \,.\, 840 \,.\, 5^2 + 5^3.$$

Послѣ этого число 840 разложимъ на 80 десятковъ и на 40 единицъ; получимъ

$$(840)^3 = (800 + 40)^3 = (800)^3 + 3\,.\,(800)^2\,.\,40 + 3\,.\,800\,.\,(40)^2 + (40)^3,$$

и

$$(840)^2 = (800)^2 + 2\,.\,800\,.\,40 + (40)^2.$$

Вставивъ эти выраженія въ первое, найдемъ

$$(845)^3 = (800)^3 + 3.(800)^2.40 + 3.(800)^2.5 + (40)^3 + 3.(40)^2.800 + 3.(40)^2.5 + 5^3 + 3.5^2.800 + 3.5^2.40 + 6.800.40.5.$$

Точно такимъ же образомъ должно поступать при составленіи кубокъ изъ многосложнѣйшихъ чиселъ, и разсмотрѣвъ результаты, можно было бы получить общее заключеніе о возвышеніи въ кубъ всякаго даннаго числа; но это заключеніе, по своей многосложности, оказывается безполезнымъ для рѣшенія обратнаго вопроса, т. е. для извлеченія кубическихъ корней, которое несравненно удобнѣе производится по изъясненному правилу составленія кубовъ изъ суммы двухъ чиселъ.

(46). Положимъ, что требуется извлечь кубическій корень изъ 21952. Основываясь на правилѣ о числѣ цифръ куба, видимъ, что искомый корень долженъ состоять изъ десятковъ и единицъ; слѣд. 21952 содержитъ кубъ десятковъ, утроенное произведеніе квадрата десятковъ на единицы, и пр. Но кубъ цифры десятковъ долженъ имѣть при себѣ три нуля, слѣд. кубъ самой цифры не долженъ превышать 21, и потому цифра эта есть 2, ибо 3^3 = уже 27. И такъ беремъ $(20)^3 = 8000$ и вычитаемъ его изъ 21952; въ остаткѣ 13952 будутъ заключаться утроенныя произведенія квадрата десятковъ на единицы, десятковъ на квадратъ единицъ, и кубъ единицъ: а какъ $3\,.(20)^2 = 1200$, то для цифры единицъ надобно взять 8 и найти

$$3\,.(20)^2\,.\,8 = 9600,\ 3\,.\,20\,.\,8^2 = 3840,\ \text{и}\ 8^3 = 512;$$

сумма всѣхъ этихъ чиселъ есть 13952, т. е. $\sqrt[3]{21952}=28$. Все это вычисленіе располагается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{rrr} & \sqrt{21952} = 20 & \\ (20)^3 = & 8000 & 8 \\ \hline & 13952 & 28 \\ 3.(20)^2.8+3.20.8^2+8^3 = & 13952 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Чтобъ показать, какимъ образомъ этотъ способъ распространяется на числа многосложныя, извлечемъ кубическій корень изъ 12305472000. Поелику искомый корень долженъ состоять изъ четырехъ цифръ, т. е. изъ тысячь, сотенъ, десятковъ и единицъ, и кубъ цифры тысячь имѣетъ при себѣ *девять* нулей; слѣд. самая цифра должна быть 2, ибо $3^3=27$. И такъ беру $(2000)^3=8000000000$, вычитаю его изъ даннаго числа, получаю въ остаткѣ 4305472000. Послѣ этого, чтобъ продолжать извлеченіе по предъидущему примѣру, найденную цифру тысячь принимаю за цифру десятковъ и нахожу цифру единицъ; но какъ эта цифра на самомъ дѣлѣ есть цифра сотенъ, то утроенное ея произведеніе на квадратъ найденной цифры тысячь будетъ имѣть при себѣ 8 нулей, и притомъ $3.2^2=12$; слѣд. искомая цифра должна быть 3. Потомъ составляю

$$\begin{aligned} 3.(2000)^2\times 300 &= 3600000000, \\ 3.2000\times(300)^2 &= 540000000, \\ (300)^3 &= 27000000; \end{aligned}$$

сумму 4167000000 этихъ трехъ чиселъ вычитаю изъ полученнаго остатка; во второмъ остаткѣ выйдетъ 138472000. Сообразуясь опять съ предъидущимъ примѣромъ, найденную часть корня 2300 принимаю за его десятки и ищу цифру единицъ, которая на самомъ дѣлѣ будетъ цифра десятковъ. Поступивъ также, какъ находили цифру сотенъ, увидимъ, что искомая цифра десятковъ есть 0; слѣд. остается опредѣлить дѣйствительную цифру единицъ: для этого составляю

$$\begin{aligned} 3\,.\,(2300)^2 \times 8 &= 126960000, \\ 3\,.\,2300\,.\,8^2 &= \quad\; 441600, \\ 8^3 &= \qquad\;\; 512; \end{aligned}$$

сумму этихъ чиселъ вычитаю изъ втораго остатка, и какъ выходитъ еще остатокъ, то заключаю, что искомый кубическій корень содержится между 2308 и 2309. Вотъ форма самаго вычисленія:

$$\begin{array}{rrr} & \sqrt[3]{12305472000} = & 2000 \\ (2000)^3 = & 8000000000 & 300 \\ \hline & 4305472000 & 8 \\ \hline 3.(2000)^2.300+3.2000.(300)^2+(300)^3 = & 4167000000 & 2308 \\ \hline & 138472000 & \\ 3.(2300)^2.8+3.300.8^2+8^3 = & 127402112 & \\ \hline & 11069888 & \end{array}$$

Эта форма извлеченія можетъ быть сокращена также, какъ извлеченіе квадратнаго корня; т. е. и здѣсь можно опускать нули и къ каждому остатку сносить по три цифры. Такъ

$$\begin{array}{rl} \sqrt[3]{1234567} = 107 & \\ 1 & \\ \hline 234567 & \\ 2100 & = 3\,.\,(100)^2\,.\,7 \\ 1470 & = 3\,.\,100\,.\,7^2 \\ 343 & = 7^3 \\ \hline 225043 & \\ \hline 9524 & \end{array}$$

(47). Для облегченія извлеченій кубическихъ корней изъ дробей, когда знаменатель не есть кубъ, должно числитель и знаменатель помножать на квадратъ знаменателя. Такъ

$$\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5\,.\,49}{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{245}}{7}.$$

Въ десятичныхъ же дробяхъ числитель и знаменатель достаточно помножать или на 10 или на 100. На примѣръ,

$$\sqrt[3]{0,5}=\sqrt[3]{0,500}=\frac{\sqrt[3]{500}}{10},$$

$$\sqrt[3]{0,07305}=\sqrt[3]{\frac{7305}{100000}}=\sqrt[3]{\frac{73050}{1000000}}=\frac{\sqrt[3]{73050}}{100}.$$

и пр.

(48). Приближенное извлеченіе кубическихъ корней основывается на формулѣ

$$\sqrt[3]{a^3b}=a\sqrt[3]{b},$$

показывающей, что умноженіе кубическаго корня замѣняется умноженіемъ куба на кубъ множителя. И такъ, если потребуется найти число, которое отъ $\sqrt[3]{5}$ отличалось бы менѣе, нежели сотою долею; то должно составить

$$\frac{x}{100}<\sqrt[3]{5}<\frac{x+1}{100},$$

или

$$x<100\sqrt[3]{5}<x+1,$$

или

$$x<\sqrt[3]{5000000}<x+1.$$

Но

$$170<\sqrt[3]{5000000}<171;$$

слѣд.

$$\sqrt[3]{5}=1,70 \text{ или } 1,71.$$

(49). Квадратные и кубическіе, и пр. корни чиселъ, извлекаемые по приближенію, называются числами *ирраціональными* или *несоизмѣримыми съ единицею*, потому что ихъ нельзя выразить ни повтореніемъ единицы, ни повтореніемъ ея долей. Если такія числа встрѣчаются въ срединѣ выкладки, то нѣтъ надобности находить къ нимъ приближенныя: ибо весьма часто къ концу рѣшенія вопроса числа эти или совершенно уничтожаются, или превращаются въ *раціональныя*, выражаемыя точно или единицами или ихъ долями. Такъ

$$5\sqrt{2}+0{,}98-3\sqrt{2}-0{,}73-2\sqrt{2}=0{,}25;$$

$$3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=6\sqrt{4}=12;$$

$$\sqrt[3]{0{,}5}\times\sqrt[3]{0{,}25}=\sqrt[3]{0{,}125}=0{,}5;$$

$$\frac{\sqrt[3]{375}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{375}{3}}=5.$$

(50). Извлеченіе квадратнаго корня изъ составнаго алгебраическаго количества, содержащаго болѣе трехъ членовъ, производится по формулѣ чл. 38, 3. Изъ слѣдующаго примѣра, безъ особенныхъ объясненій, видно употребленіе этой формулы:

$$\sqrt{\left(\tfrac{4}{9}a^2x^2-4axy^2+9y^4+\tfrac{4}{3}axz^2-6y^2z^2+z^4\right)}=\tfrac{2}{3}ax-3y^2+z^2$$

$$\begin{array}{l}
\tfrac{4}{9}a^2x^2 \\
\hline
\quad -4axy^2+9y^4+\tfrac{4}{3}axz^2-6y^2z^2+z^4 \\
\quad -4axy^2+9y^4 \\
\hline
\qquad\qquad +\tfrac{4}{3}axz^2-6y^2z^2+z^4 \\
\qquad\qquad +\tfrac{4}{3}axz^2-6y^2z^2+z^4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(51). Извлеченіе кубическаго корня изъ многосложнаго алгебраическаго количества производится по формулѣ чл. 38, 7, т. е. найденные члены корня считаются за первую его часть. На примѣръ:

$$\sqrt[3]{(27a^6-54a^4x^2+36a^2x^4-8x^6+54a^4y^2-72a^2x^2y^2+24x^4y^2+36a^2y^4-24x^2y^4+8y^6)}=3a^2-2x^2+2y^2$$

$$27a^6$$

$$-54a^4x^2+36a^2x^4-8x^6$$
$$-54a^4x^2+36a^2x^4-8x^6$$

$$+54a^4y^2-72a^2x^2y^2+24x^4y^2+36a^2y^4-24x^2y^2+8y^6$$
$$+54a^4y^2-72a^2x^2y^2+24x^4y^2+36a^2y^4-24x^2y^2+8y^6$$

$$0$$

Здѣсь третье вычитаемое равняется

$$3(3a^2-2x^2)^2 . 2y^2+3(3a^2-2x^2) . 4y^4+8y^6.$$

VIII.

УРАВНЕНІЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

(51). Равенство двухъ простыхъ или составныхъ количествъ, изображенныхъ и буквами и числами, удовлетворяемое только особенными величинами этихъ буквъ, называется *уравненіемъ*. Но если такое равенство можетъ быть удовлетворено всякими величинами упомянутыхъ буквъ, то оно есть *тожество*. Такъ $x+3=7$ есть уравненіе, потому что оно возможно только при $x=4$; но $2x-1=2x+2-3$, $(x+1)^2=x^2+2x+1$, и пр. суть тожества: здѣсь x можетъ имѣть всякую величину. Всѣ до сихъ поръ разсматриваемыя алгебраическія выраженія, представляющія различныя теоремы относительно производства алгебраическихъ вычисленій, суть тожества.

(52). Въ уравненіи, суммы (чл. 9) количествъ, раздѣленныя знакомъ (=), называются его *частями*, а каждое количество вмѣстѣ съ его коэффиціентомъ и показателемъ — *членомъ*. Такъ въ $5a^2x^3-6=7ax^2+8$, части суть $5a^2x^2-6$ и $7ax^2+8$, члены же — каждое изъ четырехъ содержащихся здѣсь количествъ.

(53). Если въ уравненіи только неизвѣстныя или искомыя количества изображены буквами, а всѣ прочія — числами; то оно называется *числовымъ*. Если же и данныя количества всѣ или нѣкоторыя изъ нихъ представлены буквами; то уравненіе будетъ *литеральное*. Такъ $2x - \frac{4}{5} = y + 2$ есть уравненіе числовое; $2ax - 5 + 47b = y$ — литеральное.

(54). Уравненія различаются между собою степенями неизвѣстныхъ количествъ. Всякое уравненіе *первой степени* съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ быть всегда представлено въ такомъ видѣ:

$$Ax \pm B = o, \text{ или } Ax = \mp B,$$

гдѣ A и B суть простыя или составныя количества данныя. Притомъ, въ случаѣ $Ax = + B$, пишутъ просто $Ax = B$. Уравненія *второй степени* съ однимъ неизвѣстнымъ представляются въ трехъ видахъ:

$$Ax^2 + B = o,$$
$$Ax^2 + Bx = o,$$
$$Ax^2 + Bx + C = o,$$

гдѣ A, B, C суть количества данныя. — Уравненія, въ которыхъ неизвѣстное количество возводится въ третью, четвертую, и пр. степени, называются уравненіями *высшихъ степеней;* ихъ общій видъ есть

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Sx + T = o,$$

гдѣ A, B, C, и пр. суть количества данныя; нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть равны *нулю*.

(55). *Разрѣшить уравненіе* значитъ величину неизвѣстнаго выразить посредствомъ данныхъ такъ, чтобъ эта величина, будучи вставлена въ уравненіе, удовлетворяла бы ему. На примѣръ, въ уравненіи

$$Ax = B$$

видимъ, что B есть произведеніе неизвѣстнаго x на данное A, или x есть частное, B дѣлимое и A дѣлитель; именно:

$$x = \frac{B}{A}.$$

Этою величиною x данное уравненіе разрѣшается, потому что когда вставимъ ее въ $Ax = B$, тогда получимъ

$$A \times \frac{B}{A} = B.$$

Въ этомъ правилѣ заключается общій способъ рѣшенія уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ, и потому всякое такое уравненіе должно превращать въ видъ $Ax = B$ по слѣдующимъ правиламъ.

(56). Возмемъ уравненіе

$$\frac{ax}{n} - c\left(b - \frac{m}{c}x\right) = \frac{q}{m}x + b\left(x - \frac{d}{c}\right).$$

Для его рѣшенія, должно

1) *Разложить скобки, не перемѣняя смысла всего выраженія.* Это производится по правиламъ, предложеннымъ въ чл. 12; именно:

$$\frac{ax}{n} - cb + mx = \frac{q}{m}x + bx - \frac{bd}{c}.$$

2) *Уничтожить знаменателей.* Для этого всѣ члены уравненія помножаются на общій знаменатель, который здѣсь будетъ nmc; перемноживъ на него члены уравненія, получимъ

$$\frac{nmca}{n}x - nmc^2b + nm^2cx = \frac{nmcq}{m}x + nmcbx - \frac{nmcbd}{c},$$

и по сокращеніи дробей

$$mcax - nmc^2b + nm^2cx = ncqx + nmcbx - nmbd.$$

3) *Члены, содержащіе неизвѣстное, перенести въ одну часть уравненія, а извѣстные въ другую.* Для этого надобно придавать или вычитать одинаковые члены къ обѣимъ или изъ обѣихъ частей. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ, должно къ обѣимъ

частямъ придать nmc^2b, и отъ обѣихъ частей отнять $ncqx$ и $nmcbx$, отъ чего выйдетъ

$$mcax + nm^2cx - ncqx - nmcbx = nmc^2b - nmbd.$$

4) *Члены, содержащіе неизвѣстныя и извѣстныя количества, соединить въ два члена.* Такъ здѣсь получимъ (чл. 18).

$$c\,(am + nm^2 - nq - nmb)\,x = nmb\,(c^2 - d).$$

Это выраженіе имѣетъ тотъ видъ, о которомъ было сказано въ членѣ предъидущемъ, потому что всегда можно принять

$$A = c\,(am + nm^2 - nq - nmb),\ B = nmb\,(c^2 - d).$$

Послѣ этого не трудно уже найти, что

$$x = \frac{nmb\,(c^2 - d)}{c(am + nm^2 - nq - nmb)},$$

и такимъ образомъ найденною величиною x данное уравненіе удовлетворяется, въ чемъ не трудно увѣриться.

Разрѣшимъ еще числовое уравненіе

$$5x + 58 - \tfrac{4}{3}x + 7(x - 10) = 18 + \tfrac{2}{3}x - 4(x - 10).$$

По первому изъ предложенныхъ правилъ, находимъ

$$5x + 58 - \tfrac{4}{3}x + 7x - 70 = 18 + \tfrac{2}{3}x - 4x + 40;$$

по второму:

$$15x + 174 - 4x + 21x - 210 = 54 + 2x - 12x + 120;$$

по третьему:

$$15x - 4x + 21x - 2x + 12x = 54 + 120 + 210 - 174;$$

по четвертому:

$$42x = 210.$$

Отсюда

$$x = \frac{210}{42} = 5.$$

Эта величина удовлетворяетъ данному уравненію, потому что если въ данное уравненіе внесемъ 5 вмѣсто x, то въ обѣихъ частяхъ получимъ $41\frac{1}{3}$.

(57). Изъ предложеннаго видно, что знающій выше-изъясненныя правила алгебраическихъ дѣйствій, не встрѣтитъ почти никакихъ затрудненій въ разрѣшеніи данныхъ уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ: но для составленія уравненій изъ вопросовъ, потребенъ навыкъ въ соображеніи отношеній между данными и неизвѣстными количествами; начинающіе затрудняются здѣсь по тому, что для этихъ соображеній нельзя дать опредѣленныхъ и общихъ правилъ, по причинѣ разнообразія вопросовъ. Относительно этого предмета можно предложить только одно общее замѣчаніе. Прежде всего надобно предположить, что вопросъ разрѣшенъ. Основываясь на этомъ, неизвѣстныя количества изображаются произвольными буквами, — обыкновенно чрезъ x, y, z, и пр. Потомъ изображенныя такимъ образомъ неизвѣстныя соединяются съ извѣстными сообразно съ условіями вопроса: это дѣйствіе производится какъ бы для повѣрки, точно ли вопросъ удовлетворяется предположенными величинами неизвѣстныхъ.

Возмемъ такой примѣръ: Купецъ ежегодно издерживаетъ 1000 руб., и также ежегодно увеличиваетъ свой капиталъ третьими долями остатковъ; чрезъ три года капиталъ его удвояется: требуется опредѣлить капиталъ при началѣ оборота? — Для составленія уравненія, разлагаемъ вопросъ на части и каждую изъ нихъ выражаемъ алгебраически.

Положимъ, что купецъ имѣлъ. . . . . . . x руб.

Въ первый годъ онъ издерживаетъ изъ него

1000 руб. . . . . $x-1000$

Остатокъ увеличиваетъ его третью. . . . $x-1000+\frac{x-1000}{3}$,

или, по приведеніи

въ кратчайшій видъ,

. . . . $\frac{4x-4000}{3}$.

Во второй годъ опять издерживаетъ 1000 руб. $\frac{4x-4000}{3}-1000$,

или

$$\frac{4x-7000}{3},$$

Остатокъ увеличиваетъ его третью . . . . . $\frac{4x-7000}{3}+\frac{4x-7000}{9}$,

или

$$\frac{16x-28000}{9}.$$

Въ третій годъ опять издерживаетъ 1000 руб. $\frac{16x-28000}{9}-1000$

или

$$\frac{16x-37000}{9},$$

Остатокъ увеличиваетъ его третью . . . $\frac{16x-37000}{9}+\frac{16x-37000}{27}$,

или

$$\frac{64x-148000}{27}.$$

Послѣ этого оборота капиталъ удвояется. . . $\frac{64x-148000}{27}=2x$.

Таково есть искомое уравненіе, которое уже разрѣшить не трудно: сперва находимъ

$$64x-148000=54x,$$

потомъ

$$64x-54x=148000,$$
$$10x=148000,$$
$$x=14800.$$

Для начинающихъ полезно передѣлать все предложенное, употребивъ 14800 вмѣсто x.

Для другаго примѣра, опредѣлимъ числа, которыхъ сумма есть b, а разность ихъ квадратовъ есть d.

Если одно число есть . . . . x,

то другое будетъ . . . . $b-x$.

Квадраты этихъ чиселъ суть . . . . $b^2 - 2bx + x^2, x^2,$

разность ихъ есть. . . . . $b^2 - 2bx + x^2 - x^2$

или

$b^2 - 2bx,$

она равняется d . . . . $b^2 - 2bx = d.$

Вотъ желаемое уравненіе; изъ него выводимъ сперва

$$2bx = b^2 - d,$$

и потомъ

$$x = \frac{b^2 - d}{2b},\ b - x = b - \frac{b^2 - d}{2b} = \frac{2b^2 - b^2 + d}{2b} = \frac{b^2 + d}{2b}.$$

Примѣры.

I. Раздѣлить число 20 на четыре части, изъ которыхъ вторая противъ первой, третья противъ второй и четвертая противъ третьей были бы больше 2.

Ежели первая часть есть x, то вторая будетъ $x + 2$, третья $x + 4$, и четвертая $x + 6$; слѣд.

$$x + (x + 2) + (x + 4) + (x + 6) = 20.$$

Отсюда

$$4x + 12 = 20,\ x = 2.$$

II. Если бы раздающій деньги нищимъ имѣлъ 8 копѣйками болѣе своихъ денегъ, то каждому нищему могъ бы дать по 3 коп.; но по раздѣлѣ каждому нищему по 2 коп., остается у него 3 коп. Спр. сколько было нищихъ и денегъ?

Если бы число нищихъ было x, и если бы каждый изъ нихъ получилъ по 3 коп.; то всѣхъ денегъ было бы $3x$; но въ этомъ случаѣ у раздающаго недостаетъ 8 коп.; слѣд. число его денегъ $= 3x - 8$. Съ другой стороны, при раздачѣ по 2 коп., будетъ истрачено $2x$, и какъ останется 3 коп., то число денегъ выразится чрезъ $2x + 2$. И такъ

$$3x - 8 = 2x + 3,$$

и $x = 11$, а число денегъ $= 25$ коп.

III. Отецъ старше сына *втрое*, а за 10 лѣтъ онъ былъ старше *впятеро*. Спр. настоящее число лѣтъ того и другаго?

Отецъ имѣетъ 60 лѣтъ, а сынъ 20, потому что вопросъ даетъ уравненіе

$$3x - 10 = 5(x - 10),$$

гдѣ x означаетъ число лѣтъ сына.

IV. Имѣя монеты въ 2 и 5 франковъ, надобно употребить 10 тѣхъ и другихъ для уплаты 26 франк. Спр. число монетъ въ 2 и 5 франковъ?

Если перваго рода монетъ было x, то втораго будетъ $10-x$, и потому получимъ уравненіе

$$2x + 5(10 - x) = 26,$$

изъ котораго

$$x = 8,\ 10 - x = 2.$$

V. Спрашивается, какъ великъ будетъ капиталъ c чрезъ t лѣтъ, когда каждый годъ получается по p процентовъ съ одного только капитала?

Въ одинъ годъ получится $\frac{pc}{100}$, а въ t лѣтъ — $\frac{tcp}{100}$; слѣд. весь капиталъ превратится въ

$$x = c + \frac{tcp}{100} = \frac{100 + tp}{100} \times c.$$

Здѣсь уравненіе и рѣшеніе его получаются вмѣстѣ. Если $c = 480000$ руб., $p = 5$ руб., $t = 3$, то

$$x = \frac{100 + 15}{100} \times 480000 = 552000.$$

VI. Одинъ писецъ исписываетъ 5 листовъ въ 3 дни, другой — 7 листовъ въ 5 дней, третій — 9 листовъ въ 7 дней. Спр. во сколько дней всѣ они испишутъ 40 листовъ? Этотъ вопросъ выражается уравненіемъ

$$\tfrac{5}{3}x + \tfrac{7}{5}x + \tfrac{9}{7}x = 40,$$

изъ котораго

$$x = \text{иск. числу дней} = 9\tfrac{87}{457}\ \text{дней}.$$

VII. Изъ бассейна можетъ вытечь вся вода въ 3 часа; въ бассейнъ проведены двѣ трубы, изъ которыхъ чрезъ первую наполняется онъ въ $\frac{3}{2}$ часа, а чрезъ вторую — въ $\frac{3}{4}$ час. Спр. во сколько времени наполнится весь бассейнъ? — Вопросъ даетъ уравненіе

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}x - \tfrac{1}{3}x = 1,$$

изъ котораго

$$x = \tfrac{3}{5} \text{ час.}$$

VIII. Купецъ на два торговыя предпріятія употребилъ два капитала по x рублей; каждый годъ отъ перваго предпріятія онъ терялъ 100 руб., отъ втораго же получалъ прибыли по 10 на 100; чрезъ три года онъ получилъ выгоды 1024 руб. Спр. какъ великъ былъ каждый капиталъ?

Если бы купецъ терпѣлъ одни убытки, то чрезъ три года капиталъ, употребленный на первое предпріятіе, превратился бы въ $x - 300$; но капиталъ отъ втораго предпріятія превращается

$$\text{чрезъ годъ въ } x + \tfrac{1}{10}x = \tfrac{11}{10}x,$$
$$\text{чрезъ два года въ } \tfrac{11}{10}x + \frac{11}{(10)^2}x = (\tfrac{11}{10})^2 x,$$
$$\text{чрезъ три года въ } (\tfrac{11}{10})^2 x + \frac{(11)^2}{(10)^3}x = (\tfrac{11}{10})^3 x;$$

слѣд. по окончаніи оборотовъ, купецъ будетъ имѣть

$$x - 300 + (\tfrac{11}{10})^3 x;$$

по условію же вопроса, онъ долженъ имѣть $2x + 1024$; слѣд.

$$x - 300 + (\tfrac{11}{10})^3 x = 2x + 1024,$$

изъ чего

$$x = 4000.$$

IX. Два курьера отправляются изъ двухъ городовъ, между которыми разстояніе $= 100$ мил.; когда первый проѣдетъ $\frac{2}{3}$, а второй $\frac{3}{5}$ своего пути, тогда между ними останется разстояніе въ 42 мил. Спр. въ какомъ мѣстѣ съѣдутся курьеры?

1) Если курьеры ѣдутъ на встрѣчу одинъ другому, и если первый изъ нихъ проѣдетъ x мил., то для втораго останется $100 - x$; когда же первый проѣдетъ $\frac{2}{3}x$, второй же $\frac{3}{5}(100 - x)$, тогда придавъ 42 къ суммѣ этихъ двухъ количествъ, получимъ

$$\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}(100 - x) + 42 = 100,$$

изъ чего

$$10x + 1530 = 9x + 1500;$$

слѣд. по точному смыслу условій, рѣшеніе невозможно, что алгебраически выражается отрицательною величиною неизвѣстнаго: $x = -30$.

2) Когда положимъ, что первый курьеръ ѣдетъ въ слѣдъ за вторымъ, тогда путь втораго будетъ $x - 100$, и вопросъ даетъ уравненіе

$$\frac{3}{5}(x - 100) + 100 - \frac{2}{3}x = 42,$$

или

$$9x + 600 = 10x + 630.$$

Опять рѣшеніе невозможное, опять $x = -30$.

3) Наконецъ, когда положимъ, что второй курьеръ ѣдетъ въ слѣдъ за первымъ, тогда уже путь втораго будетъ $100 + x$, и изъ вопроса выйдетъ уравненіе

$$\frac{2}{3}x - \left[\frac{3}{5}(100 + x) - 100\right] = 42,$$

или

$$\frac{2}{3}x + 100 = \frac{3}{5}(100 + x) + 42,$$

или

$$10x + 1500 = 9x + 1530.$$

Это уравненіе возможно, и даетъ $x = 30$. Къ этому возможному уравненію можно перейти непосредственно отъ уравненія перваго случая, принявъ въ немъ x отрицательнымъ: тогда получимъ

$$-\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}(100 + x) + 42 = 100,$$

или

$$\frac{3}{5}(100 + x) + 42 = 100 + \frac{2}{3}x.$$

Изъ этого должно заключить: 1) Отрицательныя рѣшенія показываютъ невозможность вопроса, что было уже замѣчено въ чл. 13; здѣсь же она обнаруживается по всей ясности, потому что $10x + 1530$ не могутъ равняться $9x + 1500$, при всякой величинѣ x. 2) Невозможность вопроса уничтожается, когда его условія принимаются въ обратномъ смыслѣ. Здѣсь, въ первомъ случаѣ, предполагалось, что первый курьеръ ѣдетъ въ правую сторону, а въ третьемъ — въ лѣвую или противоположную.

Вотъ еще невозможный вопросъ. Отцу 40 лѣтъ, а сыну 12; спр. чрезъ сколько лѣтъ отецъ будетъ впятеро старше сына? — Если искомое число лѣтъ изобразимъ чрезъ x, то составимъ невозможное уравненіе

$$40 + x = 5(12 + x) = 60 + 5x,$$

изъ котораго $x = -5$. Но если спросимъ, сколько лѣтъ прошло, когда отецъ былъ впятеро старше сына; то x сдѣлается количествомъ отрицательнымъ, и уравненіе будетъ

$$40 - x = 60 - 5x,$$

изъ чего $x = 5$.

(58). Для разсмотрѣнія всѣхъ затрудненій, которыя могутъ встрѣчаться при рѣшеніи уравненій первой степени, возьмемъ общее уравненіе

$$bx + c = dx + e,$$

изъ котораго опредѣляемъ

$$x = \frac{e - c}{b - d};$$

слѣд. величина неизвѣстнаго и возможность вопроса зависятъ отъ величинъ данныхъ количествъ b, c, d, e. Положимъ же:

1) $e > c$, $b > d$: въ этомъ случаѣ рѣшеніе возможно въ прямомъ смыслѣ вопроса.

2) $b > d$, $e < c$, или $b < d$, $e > c$. Въ обоихъ случаяхъ x будетъ количество отрицательное, и въ обоихъ случаяхъ во-

просъ невозможенъ. Примѣры такихъ случаевъ видѣли въ уравненіяхъ

$$10x + 1530 = 9x + 1500,$$
$$9x + 600 = 10x + 630,$$

которыя даютъ

$$x = \frac{1500 - 1530}{10 - 9}, \quad x = \frac{630 - 600}{9 - 10}.$$

3) $e < c$, $b < d$. Въ этомъ случаѣ x будетъ количество положительное, и вопросъ возможенъ; вычитаніе же большихъ количествъ изъ меньшихъ произошло отъ неправильнаго ихъ перенесенія съ одной стороны равенства на другую, въ ариѳметическомъ смыслѣ. Такъ въ уравненіи $10x + 1500 = 9x + 1530$ сдѣлаемъ неправильное ариѳметическое перенесеніе, когда напишемъ

$$1500 - 1530 = 9x - 10x.$$

4) $e > c$, $b = d$. Въ этомъ случаѣ, положивъ $e - c = n$, найдемъ

$$x = \frac{n}{o},$$

Что также показываетъ невозможность вопроса, потому что при взятыхъ условіяхъ, разсматриваемое уравненіе превращается въ

$$bx + c = bx + e,$$

гдѣ первая часть менѣе второй. Дробь $\frac{n}{o}$ называется количествомъ *безконечно-большимъ*, потому что съ уменьшеніемъ знаменателя, дробь увеличивается. — Чтобъ показать возможность случая, въ которомъ дробь, выражающая величину неизвѣстнаго, принимаетъ знаменатель $= o$, предложенный IX примѣръ превратимъ въ общую задачу движенія: *Два тѣла A и B, раздѣленныя разстояніемъ d, движутся по одному направленію въ правую сторону, начинаютъ свое движеніе въ одно время, и первое проходитъ пространство e во время t, второе — пространство e′ во время t′; спр. гдѣ A догонитъ B?* — Если A пройдетъ пространство x, то B пройдетъ пространство $x-d$; тѣло A *единицу* своего пути проходитъ во время $\frac{t}{e}$, слѣд. весь путь x кончитъ оно во время $\frac{t}{e}x$; также тѣло B свой путь кончитъ во время $\frac{t'}{e'}(x-d)$, и какъ оба тѣла начинаютъ движенiе въ одно время, то

$$\frac{t}{e}x=\frac{t'}{e'}(x-d),$$

изъ чего

$$x=\frac{t'ed}{t'e-te'}.$$

Когда въ этомъ выраженiи будетъ $t'e=te'$, тогда $\frac{e}{t}=\frac{e'}{t'}$, т. е. тогда оба тѣла движутся съ равными скоростями; слѣд. очевидно, что тогда A не можетъ догнать B.

5) $e=c$, $b=d$. Въ этомъ случаѣ $x=\frac{0}{0}$. Такимъ выраженiемъ означается *неопредѣленность* вопроса, т. е. неизвѣстное x можетъ имѣть всякiя величины. Дѣйствительно, при условiяхъ $e=c$, $b=d$, разсматриваемое уравненiе превратится въ

$$bx+c=bx+c,$$

т. е. въ тожество. Если въ предъидущемъ примѣрѣ, при условiи $t'e=te'$, положимъ, что тѣла начинаютъ двигаться съ одного мѣста, то d будетъ $=o$, и $x=\frac{0}{0}$: это значитъ, что движущiяся тѣла никогда не разойдутся. Притомъ самое уравненiе превратится въ тожество

$$x=x.$$

Для упражненiя начинающихъ, предлагаемъ еще нѣсколько вопросовъ.

X. По завѣщанiю умершаго, должно отдать половину наслѣдства сыну, треть дочери и 10000 руб. вдовѣ: опредѣлить величину наслѣдства x. Найдется $x=60000$.

X. За 15 руб. хотятъ купить 8 бутылокъ двухъ сортовъ вина, изъ которыхъ бутылка одного сорта стоитъ *полтора* рубли, другаго же — *три* руб. Спр. Сколько можно купить бутылокъ того и другаго сорта? — Перваго сорта 6 бут., втораго 2 бут.

XII. Одного вина бутылка стоитъ *полтора* руб., другаго *три* руб.; составить изъ обоихъ винъ 8 бут., по 2 руб. Спр. Сколько надобно употребить бутылокъ того и другаго вина? — Перваго $5\frac{1}{3}$ бут., втораго $2\frac{2}{3}$ бут.

Вообще: даются цѣны b и d двухъ однородныхъ веществъ; требуется опредѣлить, сколько должно взять отъ каждаго изъ нихъ, чтобъ *единица* смѣшаннаго c стоила m? — Если перваго вещества надобно взять x, то втораго $c-x$, и потому

$$bx + d(c-x) = mc,$$

изъ чего

$$x = \frac{c(m-d)}{b-d},\ c - x = \frac{c(b-m)}{b-d}.$$

Если предъидущій частный вопросъ захотимъ разрѣшить по этимъ формуламъ, то надобно будетъ принять

$$c = 8,\ m = 2,\ d = 3,\ b = \tfrac{3}{2},$$

и

$$x = \frac{8(2-3)}{\frac{3}{2}-3} = \frac{-8}{-\frac{3}{2}} = 5\,\frac{1}{3},$$

$$c - x = 8 - x = \frac{8(\frac{3}{2}-2)}{\frac{3}{2}-3} = \frac{-8\times\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} = 2\,\frac{2}{3}.$$

Еще замѣтимъ, что можно избѣжать отрицательныхъ количествъ (см. въ концѣ чл. 13), написавъ

$$x = \frac{c(d-m)}{d-b},\ cx = \frac{c(m-b)}{d-b}.$$

XIII. Двое покупаютъ по-нѣсколько аршинъ одного сукна, такъ что если бы первый купилъ 5 арш., то заплатилъ бы за нихъ 48 руб. и еще столько сколько второй прибавилъ бы къ 70 руб. за 7 арш. Спр. чего стоитъ каждый аршинъ? —

Если бы первый къ 48 руб. придалъ x руб., то цѣна каждаго аршина выразилась бы чрезъ $\frac{48+x}{5}$ и $\frac{70+x}{7}$; слѣд.

$$\frac{48+x}{5}=\frac{70+x}{7},$$

изъ чего $x=7$, и цѣна аршина $=11$ руб.

XIV. Купецъ покупаетъ сукно по 7 руб. серебромъ за 5 арш., и продавъ его по 11 руб. за 7 арш., получилъ прибыли 100 руб. Спр. число аршинъ? — Искомое число $x=583\frac{1}{3}$.

XV. Домъ въ два этажа имѣетъ вышины a саж., верхнiй этажъ выше нижняго на b саж. Спр. сколько саженъ въ каждомъ этажѣ? Въ верхнемъ $\frac{a+b}{2}$, въ нижнемъ $\frac{a-b}{2}$. См. чл. 12, прим. V и VI.

(59). Положимъ, что надобно опредѣлить величины двухъ неизвѣстныхъ количествъ x, y, удовлетворяющiя двумъ уравненiямъ

$$\tfrac{3}{5}x-0{,}3y=7,\ 8x+\tfrac{2}{3}y=5\tfrac{1}{3}.$$

Сперва уничтожаемъ знаменателей въ обоихъ уравненiяхъ, помноживъ члены перваго на 10, и члены втораго на 3:

$$6x-3y=70,\ 24x+2y=16\ \ldots.(q)$$

Потомъ члены втораго уравненiя равдѣлимъ на ихъ общiй дѣлитель 2:

$$6x-3y=70,\ 12x+y=8\ \ldots.(q')$$

Чтобъ уравнять коэффицiенты при x, первое уравненiе помножаемъ на 2:

$$12x-6y=140,\ 12x+y=8.$$

Въ разности этихъ уравненiй получаю уравненiе съ однимъ неизвѣстнымъ y:

$$-7y=132,\ y=-\frac{132}{7}.$$

Если второе уравненiе изъ (q') помножу на 3, то получу

$$6x-3y=70,\ 36x+3y=24,$$

и сумма этихъ уравненій даетъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ x:

$$42x = 94,\ x = \tfrac{94}{42} = \tfrac{47}{21}.$$

Не трудно увѣриться, что эти величины x и y удовлетворяютъ предложеннымъ уравненіямъ, или уравненіямъ (q').

Такой способъ рѣшенія уравненій съ двумя неизвѣстными называется *способомъ исключенія неизвѣстныхъ чрезъ сравненіе коэффиціентовъ*. Исключеніе неизвѣстныхъ нужно для того, чтобъ *новую задачу превратить въ такую*, *которой рѣшеніе уже извѣстно*.

Возьмемъ три уравненія съ тремя неизвѣстными:

$$3x + 2y + z = 16,\ 2x + 2y + 2z = 18,\ 2x + 2y + z = 14.$$

Слѣдуя предложенному замѣчанію, надобно составить изъ нихъ два уравненія съ двумя неизвѣстными, т. е. надобно исключить одно неизвѣстное: но какъ во всѣхъ уравненіяхъ y имѣетъ одинаковые коэффиціенты, то изъ втораго уравненія вычитаемъ по порядку первое и третье уравненія; получимъ два:

$$z - x = 2,\ z = 4,$$

изъ которыхъ тотчасъ видно, что $x = 2$. Когда эти величины x и z вставимъ въ первое уравненіе, то превратимъ его въ

$$6 + 2y + 4 = 16,\ 2y + 10 = 16,\ y + 5 = 8;$$

слѣд. $y = 3$.

Ежели этотъ способъ рѣшенія уравненій со многими неизвѣстными примѣнимъ къ литеральнымъ уравненіямъ; то увидимъ, какимъ образомъ величины неизвѣстныхъ выражаются посредствомъ ихъ коэффиціентовъ и членовъ, независимыхъ отъ неизвѣстныхъ. Пусть данныя уравненія будутъ

$$bx + cy = d,\ b'x + c'y = d'.$$

Для сравненія коэффиціентовъ при x, первое уравненіе помножимъ на b', второе же — на b, и найдемъ разность ихъ произведеній:

$$(cb' - c'b)\,y = db' - bd',$$

изъ чего

$$y = \frac{db' - bd'}{cb' - bc'}.$$

Сравнивъ такимъ же образомъ коэффиціенты при y, въ разности уравненій получимъ

$$x = \frac{d'c - dc'}{cb' - bc'}.$$

Когда будутъ три уравненія съ тремя неизвѣстными

$$ax + by + cz = d,\ a'x + b'y + c'z = d',\ a''x + b''y + c''z = d'',$$

тогда сперва исключимъ одно неизвѣстное, чтобъ имѣть уравненія только съ двумя неизвѣстными; сравненіе коэффиціентовъ при x приводитъ къ двумъ парамъ уравненій:

$$aa'x + a'by + a'cz = a'd,\ aa''x + a''by + a''cz = a''d,$$
$$aa'x + ab'y + ac'z = ad',\ aa''x + ab''y + ac''z = ad'',$$

соотвѣтствующія разности этихъ паръ будутъ

$$(a'b - ab')\,y + (a'c - ac')\,z = a'd - ad',$$
$$(a''b - ab'')\,y + (a''c - ac'')\,z = a''d - ad''.$$

Теперь можемъ исключить y, помноживъ первое уравненіе на $a''b - ab''$, второе же — на $a'b - ab'$, и нашедъ разность произведеній; эта разность будетъ уравненіе съ однимъ z, изъ котораго выведемъ

$$z = \frac{(a'd - ad')(a''b - ab'') - (a''d - ad'')(a'b - ab')}{(a'c - ac')(a''b - ab'') - (a''c - ac'')(a'b - ab')},$$

что не трудно привести въ такой видъ:

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Чтобъ имѣть выраженія величинъ y и x, надобно только разсмотрѣть, какимъ образомъ составилась величина z изъ коэффиціентовъ и количествъ, независимыхъ отъ неизвѣстныхъ. Въ знаменателѣ видимъ, что онъ составляется только изъ коэффиціентовъ слѣдующимъ образомъ: ежели въ двухъ *тожественныхъ* произведеніяхъ

$$ab \text{ и } ba,$$

называемыхъ *сочетаніями*, третій коэффиціентъ c переставимъ чрезъ всѣ три мѣста, то получимъ шесть сочетаній:

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba.$$

Теперь, въ каждомъ сочетаніи надъ второю буквою поставимъ знакъ ($'$), надъ третьею знакъ ($''$), и вышедшія разныя произведенія соединимъ попеременно знаками ($-$) и ($+$); получимъ знаменатель. Сличивъ этотъ знаменатель съ числителемъ, найдемъ, что вмѣсто коэффиціентовъ опредѣляемаго неизвѣстнаго надобно поставить соотвѣтствующіе члены, независимые отъ неизвѣстнаго. По этимъ правиламъ найдемъ

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Тѣже самыя выраженія можно получить посредствомъ *способа неопредѣленныхъ множителей*. Первое и второе изъ данныхъ уравненій помножимъ на неопредѣленныя количества λ и μ, и отъ суммы произведеній отнимемъ третье уравненіе:

$$(\lambda a + \mu a' - a'')x + (\lambda b + \mu b' - b'')y + (\lambda c + \mu c' - c'')z = \lambda d + \mu d' - d''.$$

Здѣсь λ и μ суть количества, которыя можно опредѣлять произвольными условіями; беремъ такія:

$$\lambda a + \mu a' = a'',\ \lambda b + \mu b' = b'', \ldots (p)$$

которыя составленное уравненіе превращаютъ въ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ z:

$$(\lambda c + \mu c' - c'')z = \lambda d + \mu d' - d''.$$

Но какъ условныя уравненія (p) даютъ

$$\lambda = \frac{a'b'' - a''b'}{a'b - ab'},\ \mu = \frac{a''b - ab''}{a'b - ab'};$$

то

$$z = \frac{(a'b'' - a''b')\,d + (a''b - ab'')\,d' + (ab' - a'b)\,d''}{(a'b'' - a''b')\,c + (a''b - ab'')\,c' + (ab' - a'b)\,c''}.$$

Потомъ уже очевидно, что

$$y = \frac{(a'c'' - a''c')\,d + (a''c - ac'')\,d' + (ac' - a'c)\,d''}{(a'c'' - a''c')\,b + (a''c - a''c)\,b' + (ac' - a'c)\,b''},$$

$$x = \frac{(c'b'' - b''c')\,d + (c''b - b''c)\,d' + (cb' - bc')\,d''}{(c'b'' - b''c')\,a + (c''b - b''c)\,a' + (cb' - bc')\,a''}.$$

(60). Исключеніе неизвѣстныхъ производится еще чрезъ сравненіе величинъ одного изъ нихъ, опредѣляемыхъ изъ каждаго уравненія въ предположеніи, что прочія неизвѣстныя принадлежатъ къ числу извѣстныхъ количествъ. Ежели данныя уравненія будутъ

$$2x + 5y - 3z = 3,\ 3x + z = 4y - 2,\ 5x - y + 2z = 9,$$

то находимъ изъ нихъ

$$x = \frac{3 - 5y + 3z}{2},\ x = \frac{4y - z - 2}{3},\ x = \frac{9 - 2z + y}{5};$$

слѣд.

$$\frac{3 - 5y + 3z}{2} = \frac{4y - z - 2}{3},\ \frac{3 - 5y + 3z}{2} = \frac{9 - 2z + y}{5}.$$

По уничтоженіи знаменателей и по перенесеніи неизвѣстныхъ количествъ въ одну часть, а извѣстныхъ въ другую, получимъ два уравненія

$$23y - 11z = 13,\ 27y - 19z = -3,$$

изъ которыхъ опредѣляемъ

$$y = \frac{13 + 11z}{23},\ y = \frac{19z - 3}{27},$$

и отсюда одно уравненіе:

$$\frac{13 + 11z}{23} = \frac{19z - 3}{27},$$

изъ котораго выводимъ $z = 3$. Вставивъ эту величину въ одно изъ выраженій y, получимъ

$$y = \frac{13 + 33}{23} = \frac{57 - 3}{27} = 2.$$

Наконецъ по y и z вычисляется

$$x = \frac{3 - 10 + 9}{2} = \frac{8 - 3 - 2}{3} = \frac{9 + 2 - 6}{5} = 1.$$

(61). Третій способъ исключенія неизвѣстныхъ называется *способомъ вставки:* въ одномъ изъ данныхъ уравненій опредѣляется одно неизвѣстное и величина его вставляется во всѣ прочія уравненія; чрезъ это изъ n данныхъ уравненій получится $n - 1$ новыхъ съ $n - 1$ неизвѣстнымъ; поступивъ съ этими уравненіями какъ съ первоначальными, составимъ $n - 2$ урав. съ $n - 2$ неизвѣстными, и такимъ образомъ дойдемъ до одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Взявъ опять предъидущій примѣръ, изъ втораго уравненія находимъ

$$z = 4y - 3x - 2,$$

что, будучи вставлено въ два прочія, дастъ

$$11x - 7y = 3,\ 7y - x = 13;$$

изъ втораго уравненія видимъ, что

$$y = \frac{13 + x}{7},$$

и потому первое превратится въ

$$11x - 13 - x = -3;$$

слѣд.

$$x = 1,\ y = \frac{14}{7} = 2,\ z = 8 - 3 - 2 = 3.$$

Не безполезно замѣтить, что послѣдніе два способа рѣшенія, приложенные къ уравненіямъ литеральнымъ, приводятъ къ тѣмъ же формуламъ, которыя составляются по способу сравненія коэффиціентовъ.

(62). Когда дано будетъ $m + n$ уравненій съ m неизвѣстными, тогда разрѣшивъ m уравненій по предъидущимъ правиламъ, и вставивъ величины неизвѣстныхъ въ прочія n уравненій, получимъ уравненія между найденными величинами неизвѣстныхъ и данными количествами въ этихъ n уравненіяхъ. Такія уравненія называются *условными*, потому что они, какъ принадлежащія къ системѣ данныхъ уравненій, должны быть удовлетворяемы найденными величинами неизвѣстныхъ. Въ противномъ случаѣ или невозможенъ вопросъ, или нѣкоторыя изъ данныхъ количествъ имѣютъ невѣрныя величины. Вотъ примѣры:

I. Уравненія $2x + 3y = 23$, $2x - y = 3$, $x + y = 9$ возможны, потому что два первыя даютъ $x = 4$, $y = 5$, которыми величинами третье удовлетворяется.

II. Уравненія $2x + 3y = 23$, $2x - y = 3$, $x + y = 7$ въ совокупности невозможны, потому что величины $x = 4$, $y = 5$ третьему уравненію не удовлетворяютъ.

III. Взявъ литеральныя уравненія

$ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$, $a''x + b''y = c''$, $a'''x + b'''y = c'''$,

находимъ

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},\ y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

и два уравненія условныхъ:

$$(cb' - bc')a'' + (ac' - ca')b'' = (ab' - ba')c'',$$
$$(cb' - bc')a''' + (ac' - ca')b''' = (ab' - ba')c'''.$$

(63). Когда исключая m неизвѣстныхъ изъ m уравненій, достигнемъ до уравненія, не содержащаго неизвѣстнаго количества; тогда это уравненіе можетъ быть представлено или чрезъ $A = o$, или чрезъ $o = o$. Въ первомъ случаѣ уравненія называются *несовмѣстными*, во второмъ же допускаютъ неопредѣленное число рѣшеній. На примѣръ, уравненія

$$x + 2y = 5,\ 3x + 6y = 2,$$

по исключеніи x, приводятъ къ нелѣпому условію $13 = o$; слѣд. эти уравненія *несовмѣстны*, что можно было видѣть съ перваго взгляда: первая часть втораго уравненія втрое больше первой части перваго уравненія, и потому она не можетъ $= 2$.

Но уравненія

$$6x + 3y = 3,\ 4x + 2y = 2,$$

изъ которыхъ второе составлено изъ перваго чрезъ умноженіе на $\frac{2}{3}$, приведутъ къ неопредѣленности, потому что собственно дается только одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, или требуется по одному условію опредѣлить два количества. Дѣйствительно, по исключеніи y, получимъ $o = o$.

(64). Изъяснивъ всѣ правила для рѣшенія уравненій первой степени со многими неизвѣстными, предлагаемъ нѣсколько примѣровъ съ окончательными ихъ рѣшеніями.

I. Три товарища A, B, C мѣняются своими деньгами такимъ образомъ: сперва удвояются деньги B и C изъ денегъ A; потомъ деньги A и C удвояются изъ денегъ B; наконецъ деньги A и B удвояются изъ денегъ C; по окончаніи мѣны у каждаго выходитъ по 16 руб. Спраш. сколько было денегъ у A, B, C до мѣны? — Если искомыя деньги изобразимъ чрезъ x, y, z; то

первая мѣна дастъ $x - y - z,\ 2y,\ 2z,$
вторая » » $2x - 2y - 2z,\ 3y - x - z,\ 4z,$
третья » » $4x - 4y - 4z,\ 6y - 2x - 2x,\ 7z - x - y;$

отсюда уравненія:

$$x - y - z = 4,\ 3y - x - z = 8,\ 7z - x - y = 16,$$

изъ которыхъ

$$x = 26,\ y = 14,\ z = 8.$$

II. Нѣкто имѣетъ четыре кошелька съ деньгами и говоритъ: во всѣхъ кошелькахъ 90 франковъ; если въ первый положу 5 фр., изъ втораго выну 4 фр., деньги третьяго утрою и выну половину денегъ изъ четвертаго; то въ каждомъ кошелькѣ будутъ равныя суммы.

Уравненія суть:

$$x + y + z + v = 90,\ x + 5 = y - 4,\ x + 5 = 3z,\ x + 5 = \frac{v}{2},$$

и

$$x = 16,\ y = 25,\ z = 7,\ v = 42.$$

III. Одинъ изъ трехъ товарищей положилъ въ торгъ β руб. на 6 мѣсяцовъ, второй — γ рублей на c мѣсяцовъ и третій δ рублей на d мѣсяцовъ; выгоды получили α руб.; требуется раздѣлить выгоду соотвѣтственно капиталамъ каждаго.

Изобразивъ чрезъ x, y, z суммы, которыя достанутся на долю перваго, втораго и третьяго товарища, получимъ

$$x = \frac{b\alpha\beta}{b\beta + c\gamma + \delta d},\ y = \frac{c\alpha\gamma}{b\beta + c\gamma + d\delta},\ z = \frac{d\alpha\delta}{b\beta + c\gamma + d\delta}.$$

IV. Мастеръ золотыхъ дѣлъ имѣетъ два слитка, изъ которыхъ первый составленъ изъ c граммъ золота и b граммъ мѣди, второй же — изъ c гр. золота и изъ b' гр. мѣди; спр. сколько должно взять граммовъ изъ каждаго слитка, для составленія третьяго, который содержалъ бы c'' гр. золота и b'' гр. мѣди?

$$\text{Изъ перваго } x = \frac{(c''b' - c'b'')(c + b)}{cb' - c'b},$$

$$\text{изъ втораго } y = \frac{(cb'' - c''b)(c' + b')}{cb' - c'b}.$$

V. Изъ трехъ слитковъ, каждый фунтъ перваго содержитъ 12 унцій серебра, 1 ун. мѣди и 3 ун. олова; каждый фунтъ втораго — 1 ун. серебра, 12 ун. мѣди и 3 ун. олова; каждый фунтъ третьяго — 14 ун. мѣди и 2 ун. олова; надобно составить четвертый слитокъ, въ фунтѣ котораго содержалось бы 4 унц. серебра, 9 унц. мѣди, и 3 унц. олова.

Изъ перваго слитка должно взять $x = \frac{3}{11}$, изъ втораго $y = \frac{8}{11}$, и изъ третьяго $z = o$.

(65). Вопросы съ однимъ неизвѣстнымъ первой степени можно разрѣшить посредствомъ *фальшиваго правила* съ однимъ и съ двумя положеніями.

1) Пусть $cx = b$ будетъ уравненіе, выражающее условіе вопроса; если предположимъ, что искомое $x = s$, и если s есть настоящая величина x, то должно быть

$$cs = b;$$

въ противномъ же случаѣ будетъ

$$cs = d;$$

отсюда

$$\frac{cx}{cs} = \frac{b}{d},\ x = \frac{bs}{d}.$$

Примѣръ. Найдемъ число, котораго половина, четвертая и пятая доли составляютъ 456. — Если положимъ, что это число есть 200, то получимъ

$$c = \frac{19}{20},\ b = 456,\ d = 190,\ x = \frac{456.200}{190} = 480.$$

2) Если же общее уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ представимъ въ такомъ видѣ:

$$ax + b = cx + d,$$

и положивъ $x = s$, не удовлетворимъ уравненію; то найдемъ

$$(as + b) - (cs + d) = e,$$

гдѣ e называется *первою погрѣшностью*. Потомъ полагаемъ $x = s'$, и выражаемъ *вторую* погрѣшность e' чрезъ

$$(as' + b) - (cs' + d) = e'.$$

Теперь находимъ разности между этими выраженіями и общимъ уравненіемъ:

$$a(x - s) - c(x - s) = -e,\ a(x - s') - c(x - s') = -e',$$

или

$$(a - c)(x - s) = -e,\ (a - c)(x - s') = -e'.$$

Отсюда

$$\frac{x-s}{x-s'}, = \frac{e}{e'}, \; x = \frac{se'-s'e}{e'-e}.$$

Примѣръ. По завѣщанію, дѣти должны раздѣлить имѣніе такъ, чтобъ каждому досталось по-ровну, и притомъ, чтобъ старшій сынъ взялъ 1000 руб. и седьмую часть остатка, второй 2000 руб. и также 7-ю часть остатка, и т. д.

Ежели искомую величину имѣнія изобразимъ чрезъ x, и предположимъ, что оно $= 8000$ и 15000; то найдемъ

$$e = 571\tfrac{3}{7}, e' = 428\tfrac{4}{7},$$
$$x = 36000.$$

IX.

НЕОПРЕДѢЛЕННЫЯ ЗАДАЧИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ.

(66). Если въ вопросѣ содержится $n+1$ неизвѣстныхъ, а уравненій изъ него можно составить только n; то исключая неизвѣстныя одно за другимъ, достигнемъ наконецъ уравненія

$$Nx + My = C,$$

въ которомъ число неизвѣстныхъ болѣе 1 числа уравненій; слѣд. здѣсь недостаетъ одного условія, такъ что одно неизвѣстное останется неопредѣленнымъ. По этому, нашедши

$$x = \frac{C-My}{N},$$

надобно назначать для y произвольныя величины, и вычислять соотвѣтствующія величины x. Вотъ почему относящіеся сюда вопросы называются *задачами неопредѣленными.*

(67). При разрѣшеніи неопредѣленныхъ задачъ число рѣшеній обыкновенно ограничивается двумя условіями:

1. *Чтобъ неизвѣстныя опредѣлялись въ числахъ цѣлыхъ.*
2. *Чтобъ рѣшенія были положительныя.*

Первое изъ этихъ условій не всегда можетъ быть выполняемо: положимъ, что $N = nN'$, $M = nM'$, $C = nC'$, т. е. положимъ, что данныя количества N, M, C имѣютъ общій дѣлитель n: тогда всѣ члены уравненія должно раздѣлить на него, и выйдетъ

$$N'x + M'y = C'.$$

Если послѣ того N' и M' будутъ имѣть еще общій дѣлитель, на который C' не дѣлится; то x и y нельзя уже опредѣлить въ цѣлыхъ числахъ: въ противномъ случаѣ сумма цѣлыхъ чиселъ равнялась бы дроби $\frac{C'}{n'}$.

(68). На основаніи объясненнаго въ предъидущемъ членѣ, принимаемъ, что въ уравненіи

$$Nx + My = C \qquad (1)$$

коэффиціенты N и M общаго дѣлителя уже не имѣютъ, т. е. дробь $\frac{M}{N}$ не можетъ не сокращаться, ни превращаться въ цѣлое число. Если для x и y найдемъ по одной величинѣ h и l, удовлетворяющей уравненію (1); то будетъ

$$Nh + Ml = C;$$

потомъ найдемъ

$$N(x - h) + M(y - l) = o,$$

изъ чего

$$x = h - \frac{M(y - l)}{N},$$

гдѣ, какъ требуется выше-предложенными условіями, дробь $\frac{M(y - l)}{N}$ должна быть цѣлое число; но принято, что $\frac{M}{N}$ не можетъ быть цѣлымъ числомъ; слѣд. надобно положить, что (чл. 29, 8)

$$\frac{y - l}{N} = t.$$

И такъ общія формулы для опредѣленія цѣлыхъ величинъ для x и y въ уравненіи (1) суть:

$$\left.\begin{aligned} y &= l + Nt \\ x &= h - Mt \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здѣсь видно, что когда произвольная величина t будетъ положительная, тогда для положительнаго рѣшенія относительно x надобно, чтобъ

$$h > Mt, \text{ или } t < \frac{h}{M}.$$

Если же t будемъ принимать величиною отрицательною, то формулы (2) примутъ такой видъ

$$y = l - Nt,$$
$$x = h + Mt,$$

и тогда для положительнаго рѣшенія относительно y надобно, чтобъ

$$l > Nt, \text{ или } t < \frac{l}{N}.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что неопредѣленная задача, изъ которой составляется уравненіе (1), имѣетъ ограниченное число рѣшеній.

(69). Когда данное уравненіе будетъ

$$Nx - My = C, \qquad (3)$$

тогда уже формулы (2) примутъ такой видъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= l + Nt \\ x &= h + Mt \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здѣсь видно, что положительныя рѣшенія для y и x соотвѣтствуютъ всякой положительной величинѣ t; для отрицательныхъ же величинъ t надобно, чтобъ

$$l > Nt, \text{ или } t < \frac{l}{N},$$

и

$$h > Mt, \text{ или } t < \frac{h}{M}.$$

И такъ, неопредѣленная задача, изъ которой получается уравненіе (3), имѣетъ неограниченное число положительныхъ рѣшеній.

(70). Теперь надобно показать, какимъ образомъ опредѣляются величины h и l въ цѣлыхъ числахъ. Возьмемъ примѣръ:

$$24x + 65y = 243.$$

Рѣшеніе должно начинать опредѣленіемъ того неизвѣстнаго, которое имѣетъ мѣньшій коэффиціентъ; слѣд. здѣсь

$$x = \frac{243 - 65y}{24}.$$

Открываемъ въ этомъ выраженіи цѣлыя числа и дроби, т. е. дѣлимъ числитель на знаменатель; найдемъ

$$x = 10 - 2y + \frac{3 - 17y}{24},$$

или (чл. 13)

$$x = 10 - 2y - \frac{17y - 3}{24}.$$

И такъ здѣсь надобно положить, что

$$\frac{17y - 3}{24} = \text{цѣл. чис. } t;$$

слѣд. будетъ

$$y = \frac{24t + 3}{17} = t + \frac{7t + 3}{17},$$

и потому опять должно принять

$$\frac{7t + 3}{17} = \text{цѣл. чис. } q$$

и опредѣлить

$$t = \frac{17q - 3}{7} = 2q + \frac{3q - 3}{7} = 2q + \frac{3(q - 1)}{7}.$$

Здѣсь видимъ, что t будетъ цѣлымъ числомъ, когда

$$\frac{q - 1}{7} = \text{цѣл. чис. } s;$$

слѣд. q опредѣляется чрезъ

$$q = 7s + 1.$$

Такимъ образомъ всѣ дробныя выраженія исключены, и всякое цѣлое s дастъ x и y въ цѣлыхъ числахъ. Пусть $s=o$; найдемъ $q=1$, $t=2$, $y=3$, $x=2$. Сличивъ частное уравненіе $24x+65y=243$ съ общимъ (1), увидимъ, что $N=24$, $M=65$, $h=2$, $l=3$; слѣд. по формуламъ (2) получимъ

$$y=3+24t,\ x=2-65t,$$

выраженія, которыя показываютъ, что для удовлетворенія требованій чл. 67, цѣлое число t можетъ быть только *нуль;* такъ что вопросъ принимаетъ только одно рѣшеніе: $x=2$, $y=3$.

Для втораго случая, разрѣшимъ уравненіе

$$95x-56y=11,$$

изъ котораго находимъ

$$y=\frac{95x-11}{56}=x+\frac{39x-11}{56},$$

$$t'=\frac{39x-11}{56},\ x=\frac{56t'+11}{39}=t'+\frac{17t'+11}{39},$$

$$q=\frac{17t'+11}{39},\ t'=2q+\frac{5q-11}{17},$$

$$s=\frac{5q-11}{17},\ q=3s+2+\frac{2s+1}{5},$$

$$r=\frac{2s+1}{5},\ s=2r+\frac{r-1}{2},$$

$$p=\frac{r-1}{2},\ r=2p+1.$$

Положимъ $p=o$, выведемъ $r=1$, $s=2$, $q=9$, $t'=20$, $x=29$, $y=49$, и по формуламъ (4),

$$y=49+95t,\ x=29+65t,$$

гдѣ вмѣсто t можно брать всякое цѣлое и положительное число, начиная съ *нуля*, и ни одного отрицательнаго.

Примѣры.

I. Уравненіе $7x+11y=179$ разрѣшается условіями:

$$y=7t+1,\ x=24-11t,$$

изъ которыхъ видно, что цѣлое и положительное t не можетъ быть болѣе 2, отрицательная же величина t невозможна; такъ что рѣшенія будутъ

$$t = o,\quad 1,\quad 2$$

$$x = 24,\ 13,\ 2$$

$$y = o,\quad 8,\ 15.$$

II. Найти число Q, которое будучи раздѣлено на 39 и 56, даетъ въ остаткахъ 16 и 27. — Ежели чрезъ x и y изобразимъ соотвѣтствующія частныя; то, по свойству дѣлимаго, найдемъ

$$Q = 39x + 16,\ Q = 56y + 27;$$

слѣд. надобно разрѣшить уравненіе

$$39x - 56y = 11,$$

изъ котораго

$$x = 29 + 56t,\ y = 20 + 39t,$$

и

$$Q = 1147 + 2184t.$$

Число Q должно быть положительное, слѣд. отрицательныя величины t невозможны, и самое меньшое изъ неопредѣленнаго числа положительныхъ величинъ есть 1147, соотвѣтствующее $t = o$.

III. Какимъ образомъ можно уплатить 2000 руб. монетами въ 3 руб. и 5 руб.? — Изъ этого вопроса составляемъ уравненіе

$$3x + 5y = 2000,$$

для котораго

$$y = 3t + 1,\ x = 665 - 5t.$$

Отрицательныя величины для t невозможны, а число положительныхъ опредѣляется условіемъ

$$t < \tfrac{665}{5} < 133;$$

слѣд. если не захотимъ, чтобъ $x = o$, то вопросъ приметъ 132 рѣшенія.

IV. Земля описываетъ свой путь около солнца въ 365 д. 5 ч. 48 м. 49 сек. или въ 365,242244 д., и для удобности въ гражданскомъ счисленіи времени дробь $0,242244 = \frac{20929}{86400}$ опускается ежегодно и опускаемое время прибавляется по истеченіи опредѣленнаго числа лѣтъ: для такого соглашенія гражданскаго года съ астрономическимъ, должно разсмотрѣть тѣ дроби, которыя выражаясь небольшими числами, достаточно приближаются къ дроби $\frac{20929}{86400}$. Если положимъ, что одна изъ такихъ дробей есть $\frac{x}{y}$, то разность

$$\frac{20929}{86400} - \frac{x}{y} = \frac{20929y - 86400x}{86400y}$$

должна быть наименьшая, что удовлетворяется уравненіемъ

$$20929y - 86400x = 1,$$

которое разрѣшается условіями

$$x = 1349 + 20929t,$$
$$y = 5569 + 86400t;$$

слѣд. искомая дробь будетъ $\frac{1349}{5569}$. Но какъ она для употребленія также неудобна, какъ и первоначальная; то вновь разрѣшимъ уравненіе

$$1349y - 5569x = 1,$$

изъ котораго выходятъ условія

$$x = 655 + 1349t,$$
$$y = 2704 + 5569t.$$

По смыслу задачи, x и y могутъ быть или оба положительныя или оба отрицательныя числа, и потому находимъ

$$t = -1,\ x = -694,\ y = -2865,$$

и разрѣшаемъ уравненіе

$$694y - 2865x = 1$$

условіями

$$x = 694t - 39,$$
$$y = 2865t - 161,$$

изъ которыхъ получаются двѣ дроби $\frac{39}{161}$ и $\frac{655}{2704}$. Хотя первая изъ этихъ дробей можетъ быть употреблена для уравненія гражданскаго года, однако найдемъ еще нѣсколько дробей, разрѣшая уравненіе

$$39y - 161x = 1$$

условіями

$$x = 39t - 2,\ y = 161t - 23,$$

дающими дроби $\frac{8}{33}$, $\frac{31}{128}$, $\frac{70}{289}$, $\frac{109}{450}$, и пр., и потомъ уравненіе

$$8y - 33x = 1,$$

въ которомъ

$$x = 8t - 1,\ y = 33t - 4;$$

слѣд. получимъ дроби $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$, и пр. И такъ вмѣсто дроби $\frac{20929}{86400}$ можно брать

$$\frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{31}{128},\ \frac{39}{161},\ \frac{70}{289},\ \frac{109}{450},\ \text{и пр.}$$

Первая изъ этихъ дробей показываетъ, что если примемъ годъ въ $365\frac{1}{4}$ д. или въ 365,25, то для уравненія его съ астрономическимъ, надобно будетъ въ каждые четыре года придавать къ гражданскому году *одинъ* день: этотъ способъ уравненія гражданскаго года, введенный Юліемъ-Цезаремъ, до нынѣ употребляется въ Россіи. Но какъ $\frac{20929}{86400} = 0,242244$, то ежегодная погрѣшность простирается до 0,007756 сут., которая чрезъ 1582 года возрасла до 10 дней, почему папа Григорій XIII, въ 1582 г. издалъ повелѣніе считать 5 октября 15-мъ, и въ 400 г. принимать не 100, но только 97 високосныхъ лѣтъ, т. е. этимъ повелѣніемъ дробь $\frac{20929}{86400}$ перемѣнена на $\frac{97}{400}$. Хотя этотъ способъ достаточно уравниваетъ гражданскій годъ съ астрономическимъ, потому что въ 4 тысячи лѣтъ погрѣшность возрастетъ только до *одного* дня; однако дроби $\frac{97}{400}$ въ выше-найденномъ ряду дробей не содержится; слѣд. грегоріанское счисленіе есть совершенно произвольное. Если бы вмѣсто $\frac{97}{400}$ была взята дробь $\frac{109}{450}$, то гражданскій годъ состоялъ бы изъ 365,2422222 дней, и отъ астрономическаго отличался бы дробью 0,0000218, которая довела бы погрѣшность до двухъ дней въ 100 тысячъ лѣтъ. Дробь $\frac{109}{450}$ показываетъ, что для такого результата, надобно считать 109 лѣтъ високосныхъ въ 450 годахъ.

Этотъ любопытный вопросъ разрѣшенъ по тому, что въ немъ начинающіе найдутъ много примѣровъ для упражненія въ рѣшеніи неопредѣленныхъ задачъ; но считаемъ не безполезнымъ разрѣшить еще слѣдующій замѣчательный вопросъ:

V. Найти число y, отъ котораго дроби

$$\frac{3y-10}{7},\ \frac{11y+8}{17},\ \frac{16y-1}{5}$$

превратились бы въ цѣлыя числа. — Положимъ, что третья дробь $=x$, т. е. составляемъ уравненіе

$$16y-5x=1,$$

изъ котораго

$$x=3y+\frac{y-1}{5}.$$

Сдѣлавъ $a=\frac{y-1}{5}$, получимъ $y=5a+1$. Если эту величину y вставимъ въ первую дробь, то найдемъ

$$\frac{15a-7}{7}=2a-1+\frac{a}{7}.$$

Положивъ $a=7b$, выведемъ $y=35b+1$. Очевидно, что эта величина y удовлетворяетъ первой и третьей изъ данныхъ дробей; но оставивъ ее во вторую, получимъ

$$\frac{385b+19}{17}=22b+1+\frac{11b+2}{17}.$$

И такъ надобно принять

$$c=\frac{11b+2}{17},$$

изъ чего

$$b = \frac{17c-2}{11} = c + \frac{6c-2}{11} = c + \frac{2(3c-1)}{11},$$

$$d = \frac{3c-1}{11},\ c = \frac{11d+1}{3} = 3d + \frac{2d+1}{3},$$

$$e = \frac{2d+1}{3},\ d = \frac{3e-1}{2} = e + \frac{e-1}{2},$$

$$f = \frac{e-1}{2},\ e = 2f + 1;$$

такъ что

$$d = 3f + 1,\ c = 11f + 4,\ b = 17f + 6,\ y = 211 + 595f.$$

И такъ самое меньшее число изъ искомыхъ чиселъ есть 211.

(71). Разрѣшимъ теперь нѣсколько примѣровъ неопредѣленныхъ задачъ со многими неизвѣстными.

I. Изъ уравненій

$$13x + 5y - 2z + 4u = 2559,$$
$$8x + 7y - 3z - 5u = 1595,$$
$$11x - 3y + 5z - 7u = 2157,$$

сперва получаемъ

$$\left.\begin{aligned} 97x + 53y + 2z &= 19175, \\ 135x + 23y + 6z &= 26541, \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

потомъ

$$156x + 136y = 30984,$$

или

$$39x + 34y = 7746.$$

Отсюда

$$x = 34c + 26,\ y = 198 - 39c.$$

Вставивъ эти величины въ первое уравненіе (b), найдемъ

$$2z + 1231c = 6159,$$

изъ чего

$$\begin{aligned} c = 2d + 1,\ z &= 2464 - 1231d, \\ u &= 1478 - 739d, \\ y &= 159 - 78d, \\ x &= 68d + 60. \end{aligned}$$

И такъ отрицательныя величины d невозможны, и для положительныхъ можемъ взять только

$$d = o,\ x = 60,\ y = 159,\ z = 2464,\ u = 1478,$$
$$d = 1,\ x = 128,\ y = 81,\ z = 1233,\ u = 739,$$
$$d = 2,\ x = 196,\ y = 3,\ z = 2,\ u = o.$$

II. Для постройки дома нанято 80 человѣкъ каменьщиковъ, плотниковъ и штукатуровъ; каменьщики получали въ мѣсяцъ по 8 рублей, плотники по 10 и штукатуры по 11; всего же въ мѣсяцъ выходило 700 рублей; спр. сколько было каменьщиковъ, плотниковъ и штукатуровъ?

Положимъ, что каменьщиковъ было x, плотниковъ y, и штукатуровъ z, и составимъ уравненія

$$x + y + z = 80,$$
$$8x + 10y + 11z = 700,$$

въ которыхъ x, y, z никакъ уже не могутъ быть ни дробными, ни отрицательными числами. Изъ этихъ уравненій находимъ

$$2y + 3z = 60,$$

изъ чего

$$y = \frac{60 - 3z}{2} = 30 - z - \tfrac{1}{2}z;$$

слѣд. надобно принять

$$\tfrac{1}{2}z = t,\ z = 2t,$$
$$y = 30 - 3t$$
$$x = 50 + t.$$

Здѣсь t отрицательныхъ величинъ не можетъ имѣть, а положительныя заключаются между *нулемъ* и 10, т. е. вопросъ принимаетъ *девять* рѣшеній:

$$t = 1,\ z = 2,\ y = 27,\ x = 51,$$
$$t = 2,\ z = 4,\ y = 24,\ x = 52,$$
$$t = 3,\ z = 6,\ y = 21,\ x = 53,$$
$$t = 4,\ z = 8,\ y = 18,\ x = 54,$$

и пр.

III. На 100 рублей куплено *сто* быковъ, коровъ, овецъ и поросятъ; за быка платили 17 руб., за корову 12 руб., за овцу $\frac{5}{4}$ руб. и за поросенка $\frac{1}{4}$ руб.; спр. сколько каждой скотины куплено? — Опять видно, что искомыя числа x, y, z и u должны быть цѣлыя и положительныя числа въ уравненіяхъ

$$x + y + z + u = 100,$$
$$17x + 12y + \tfrac{5}{4}z + \tfrac{1}{4}u = 100.$$

Уничтоживъ во второмъ уравненіи знаменатель 4, и отнявъ первое уравненіе, получимъ

$$67x + 47y + 4z = 300,$$

изъ чего

$$z = 75 - 16x - 11y - \frac{3(x+y)}{4};$$

слѣд. надобно принять

$$x + y = 4t,\ y = 4t - x;$$

отъ этого выйдетъ

$$z = 75 - 5x - 47t,$$
$$u = 25 + 5x + 43t.$$

Выраженіе величины y показываетъ, что t не можетъ быть ни нулемъ, ни отрицательнымъ количествомъ; выраженіе же величины z требуетъ, чтобъ t было $< \frac{75}{47} < 2$; слѣд. $t = 1$, и потому

$$y = 4 - x,$$
$$z = 28 - 5x,$$
$$u = 68 + 5x.$$

Здѣсь видимъ, что x не можетъ быть ни нуль, ни болѣе 3; такъ что рѣшенія будутъ

$$x = 1,\ z = 23,\ u = 73,\ y = 3,$$
$$x = 2,\ z = 18,\ u = 78,\ y = 2,$$
$$x = 3,\ z = 13,\ u = 83,\ y = 1.$$

Прибавленіе. Если дробь $\frac{20929}{86400}$ разложимъ въ непрерывную, то изъ нея получимъ тѣже приближающіяся дроби, какія были найдены при разрѣшеніи вопроса IV; слѣд. посредствомъ непрерывной дроби можно очень скоро находить по одной величинѣ для неизвѣстныхъ, чтобъ имѣть общія выраженія ихъ величинъ, согласно съ формулами (2) и (4). Такъ для рѣшенія уравненія

$$20929y - 86400x = 1,$$

нахожу, что дробь

$$\frac{86400}{20929} = 4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15}}}}}}}}$$

Предпослѣдняя приближающаяся дробь есть $\frac{5569}{1349}$, и, судя по ея порядку, она болѣе данной; по этому беру разность

$$\frac{5569}{1349} - \frac{86400}{20929} = + \frac{1}{1349 . 20929};$$

слѣд.

$$5569 . 20929 - 86400 . 1349 = 1.$$

Вычитаю это выраженіе изъ даннаго уравненія, и получаю

$$20929(y - 5569) - 86400(x - 1349) = o,$$

изъ чего

$$x = 1349 + 20929t,$$
$$y = 5560 + 86400t.$$

Для другаго примѣра возьмемъ уравненіе

$$24x + 65y = 243,$$

и найдемъ

$$\frac{65}{24} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}$$

Отсюда

$$\frac{19}{7}-\frac{65}{24}=\frac{1}{24\,.\,7},$$

$$24\,.\,19-65\,.\,7=1,$$

или

$$24\,.\,19\,.\,243-65\,.\,7\,.\,243=243,$$

что, по вычитаніи изъ взятаго уравненія, даетъ

$$y=24t-7\,.\,243=24t-1701,$$
$$x=243\,.\,19-65t=4617-65t,$$

гдѣ t должно быть $>\frac{1701}{24}=70\frac{21}{24}$ и $<\frac{4617}{65}=71\frac{2}{65}$; такъ что t можетъ быть только 71, и $x=2$, $y=3$.

Наконецъ приложимъ этотъ способъ рѣшенія къ вопросу II, въ которомъ дробь $\frac{56}{39}$ даетъ

$$39\,.\,23\,.\,11-56\,.\,16\,.\,11=11,$$

и потому

$$y=16\,.\,11+39t=39\,.\,4+20+39t=20+39\,(t+4),$$
$$x=23\,.\,11+56\,.\,t=56\,.\,4+29+56t=29+56\,(t+4),$$

или

$$y=20+39q,\ x=29+56q.$$

X.

УРАВНЕНІЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

(72). Замѣчено уже, что уравненія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ могутъ имѣть такіе виды:

$$Ax^2+B=o, \qquad (1)$$
$$Ax^2+Bx=o, \qquad (2)$$
$$Ax^2+Bx+C=o, \qquad (3)$$

изъ которыхъ первое и второе называютъ уравненіями *неполными*, третіе же — *полнымъ*. Уравненіе втораго вида разрѣшается чрезвычайно просто, потому что оно выражаетъ произведеніе

$$x(Ax + B) = o,$$

которое удовлетворяется уравненіями

$$x = o,\ Ax + B = o \text{ или } x = -\frac{B}{A}.$$

Изъ этого заключаемъ, что и прочіе виды уравненій второй степени могутъ быть разрѣшены только по превращеніи ихъ въ два уравненія первой степени.

(73). Обратившись къ первому виду, съ перваго взгляда усматриваемъ, что если количество A и B суть или оба положительныя или оба отрицательныя; то уравненіе выражаетъ невозможность вопроса, потому что сумма положительныхъ количествъ не можетъ быть равна *нулю*. Въ этомъ случаѣ, невозможность рѣшенія алгебраически выражается мнимыми количествами; именно

$$x^2 = -\frac{B}{A},\ x = \sqrt{-\frac{B}{A}}.$$

Вотъ происхожденіе и смыслъ мнимыхъ количествъ.

(74). Теперь положимъ, что B есть количество отрицательное: тогда будемъ имѣть

$$x^2 - \frac{B}{A} = o,$$

или, для краткости, принявъ $\frac{B}{A} = b$,

$$x^2 - b = o,$$

что, по четвертой теоремѣ чл. 38, превращается въ произведеніе

$$(x + \sqrt{b})(x - \sqrt{b}) = o,$$

удовлетворяемое двумя уравненіями первой степени

$$x + \sqrt{b} = o,\ x - \sqrt{b} = o,$$

изъ которыхъ

$$x = -\sqrt{b},\ x = \sqrt{b}.$$

Эти двѣ величины x обыкновенно соединяются въ одно выраженіе

$$x = \pm\sqrt{b}.$$

Притомъ эти величины получаются чрезъ извлеченіе квадратнаго корня, и потому называются *корнями* уравненія.

(75). Чтобъ разрѣшить уравненіе второй степени третьяго вида, надобно его превратить въ первый видъ, что сдѣлать не трудно, потому что раздѣливъ на A, и положивъ $\frac{B}{A} = b$, $\frac{C}{A} = c$, получимъ

$$x^2 + bx = -c,$$

гдѣ видимъ, что первая часть можетъ сдѣлаться квадратомъ двухчленнаго количества, если къ обѣимъ частямъ придадимъ $\frac{b^2}{4}$:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c,$$

или

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right) = o,$$

что опять превращается въ произведеніе

$$\left[\left(x + \frac{b}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)}\right] = o,$$

удовлетворяемое двумя уравненіями первой степени:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)} = o,\ \left(x + \frac{b}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)} = o,$$

изъ которыхъ получаемъ слѣдующія двѣ величины x:

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)},$$

$$x = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)},$$

также соединяемыя въ одно выраженіе:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - c\right)} \qquad (4)$$

Примѣры.

I. Число b раздѣлить на двѣ части такъ, чтобъ частное квадратовъ этихъ частей равнялось данному числу m. — Если первую часть изобразимъ чрезъ x, то вторая будетъ $b-x$, и условіе вопроса выразится чрезъ

$$\frac{x^2}{(b-x)^2}=m,$$

или

$$x^2=mb^2-2mbx+mx^2,$$

или

$$(1-m)x^2+2mbx=mb^2,$$

или наконецъ

$$x^2+\frac{2mb}{1-m}x=\frac{mb^2}{1-m},$$

изъ чего, по формулѣ (4),

$$x=-\frac{mb}{1-m}\pm\sqrt{\left[\frac{m^2b^2}{(1-m)^2}+\frac{mb^2}{1-m}\right]}.$$

Эти двѣ величины x могутъ быть приведены въ кратчайшій видъ:

$$x=\frac{-b\sqrt{m}\,(\sqrt{m}\mp 1)}{(1+\sqrt{m})\,(1-\sqrt{m})},$$

такъ что

$$x=\frac{b\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},\ x=-\frac{b\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}};$$

величины же второй части суть

$$b-x=b-\frac{b\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}}=\frac{b}{1+\sqrt{m}},$$

$$b-x=b+\frac{b\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}=\frac{b}{1-\sqrt{m}},$$

и въ обоихъ случаяхъ

$$b+(b-x)=b,\ \frac{x^2}{(b-x)^2}=m.$$

Если $b=12$, $m=25$, то $x=10$ и 15, $b-x=2$ и -3, и

$$\frac{x^2}{(b-x)^2}=\frac{100}{4}=25,$$

$$\frac{x^2}{(b-x)^2}=\frac{15\,.\,15}{(-3)(-3)}=(-5)(-5)=25.$$

II. Купецъ продаетъ товаръ за 11 руб., причемъ получаетъ на 100 руб. столько прибыли, сколько стоилъ товаръ: опредѣлить цѣну товара? Если товаръ стоилъ x, то прибыль на одинъ рубль будетъ $\frac{x}{100}$ и на x руб. — $\frac{x^2}{100}$; слѣд.

$$x+\frac{x^2}{100}=11,$$

изъ чего

$$x^2+100x=1100,$$

и

$$x=-50\pm\sqrt{(2500+1100)},$$

или

$$x=-50\pm 60;$$

т. е. двѣ величины x суть 10, и -110, изъ которыхъ вторая удовлетворяетъ данное уравненіе алгебраически.

III. Изъ двухъ работниковъ, первый получилъ 96 рублей, второй же, работавшій 6 днями меньше перваго, — 54 руб.; но если бы первый работалъ 6 днями меньше, а второй 6 днями больше, то они получили бы поровну; спр. сколько дней каждый работалъ? — Предположивъ, что первый работалъ x дней, составимъ уравненіе

$$\frac{54x}{x-6}=\frac{96(x-6)}{x},$$

изъ котораго $x=24$ и $\frac{24}{7}$; слѣд. второй работникъ работалъ 18 д. и $-\frac{18}{7}$, т. е. только первая величина отвѣчаетъ на вопросъ.

IV. Опредѣлить число, состоящее изъ трехъ слѣдующихъ цифръ: квадратъ цифры десятковъ равняется произведенію крайнихъ цифръ съ 4; разность между удвоенною цифрою десятковъ и цифрою единицъ равняется цифрѣ сотенъ; когда же число напишется обратно, тогда новое число, будучи отнято отъ перваго, даетъ 390 съ цифрою десятковъ? — Изъ вопроса составляются три уравненія:

$$y^2 = xz + 4,\ 2y - z = x,\ 99x - 99z = 390 + y,$$

изъ которыхъ первое и второе даютъ

$$4y^2 = z^2 + x^2 + 2xz,\ 4y^2 = 4xz + 16;$$

слѣд.

$$x^2 + z^2 - 2xz = 16, \text{ или } x - z = 4.$$

По этой величинѣ $x - z$, вставленной въ третье уравненіе, получимъ

$$390 + y = 396,\ y = 6.$$

Потомъ изъ уравненій

$$x - z = 4,\ x + z = 12,$$

тотчасъ выводимъ $x = 8$, $z = 4$; слѣд. искомое число есть 864.

V. Уравненіе

$$x^2 + x\sqrt{3} - 6 = o$$

даетъ

$$x = \sqrt{3},\ x = -2\sqrt{3}.$$

VI. Разрѣшить уравненіе $x^4 + 3x^2 - 28 = o$. — Положивъ $x^2 = y$, данное уравненіе превратимъ въ видъ уравненія второй степени:

$$y^2 + 3y - 28 = o,$$

изъ котораго

$$y = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} + 28)} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{11}{2};$$

слѣд. величины y суть:

$$y = 4,\ y = -7;$$

отсюда

$$x^2 = 4,\ x^2 = -7,$$

и четыре величины x будутъ

$$x=2,\ x=-2,\ x=\sqrt{-7},\ x=-\sqrt{-7}.$$

(76). Ежели двѣ величины x, содержащіяся въ формулѣ (4), изобразимъ чрезъ x', x''; то въ суммѣ этихъ величинъ

$$x'=-\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-c\right)},$$
$$x''=-\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-c\right)},$$

получимъ

$$x'+x''=-b,$$

а въ ихъ произведеніи

$$x'.x''=c.$$

И такъ, *сумма корней уравненія второй степени равняется коэффиціенту втораго члена съ противнымъ знакомъ, и произведеніе ихъ равняется третьему члену уравненія.*

Изъ этого слѣдуетъ, что уравненіе второй степени, есть собственно результатъ исключенія неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій, въ которыхъ даются сумма и произведеніе этихъ неизвѣстныхъ. Такъ, если

$$x+y=b,\ xy=c,$$

то

$$y=\frac{c}{x},\ x+\frac{c}{x}=b,\ x^2-bx+c=o.$$

(77). Если число a удовлетворяетъ уравненію $x^2+bx+c=o$, то $a^2+ba+c=o$; а раздѣливъ x^2+bx+c на $x-a$, въ остаткѣ получимъ именно a^2+ba+c; слѣд. *уравненіе второй степени дѣлится безъ остатка на разность неизвѣстнаго и корня уравненія.*

(78). Посредствомъ формулы (4) трехчленное составное количество второй степени

$$nx^2+px+q$$

разлагается на двухъ-членные производители первой степени, потому что это составное можетъ быть представлено въ видѣ:

$$n\left(x^2+\frac{p}{n}x+\frac{q}{n}\right),$$

изъ чего не трудно уже найти, что

$$nx^2+px+q=\frac{[2nx+p+\sqrt{(p^2-4nq)}]\,[2nx+p-\sqrt{(p^2-4nq)}]}{4n}.$$

(79). Раздѣлить число 10 на двѣ части, которыхъ бы произведеніе было 50? — Этотъ вопросъ разрѣшается уравненіемъ

$$x(10-x)=50,$$

или

$$x^2-10x=-50;$$

слѣд.

$$x=5\pm\sqrt{-25},\ 10-x=5\mp\sqrt{-25}.$$

И такъ обѣ величины x суть мнимыя, т. е. вопросъ невозможенъ. Чтобъ открыть причину невозможности вопроса, положимъ, что $2n$ есть число, которое требуется раздѣлить на двѣ части, изъ которыхъ одну изобразимъ чрезъ $n+\beta$; слѣд. другая часть будетъ $n-\beta$, и ихъ произведеніе $=n^2-\beta^2$. Очевидно, что наибольшая величина этого произведенія есть n^2, т. е. надобно принять $\beta=o$. Отсюда заключаемъ, что *наибольшая величина произведенія двухъ частей какого нибудь числа есть квадратъ его половины;* а половина 10 есть 5; слѣд. произведеніе двухъ частей 10 не можетъ быть болѣе 25.

(80). Видѣли, что уравненіе $x^2+bx+c=o$ даетъ

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-c\right)}=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(b^2-4c)}.$$

Если здѣсь, какъ въ предъидущемъ вопросѣ, $b^2<4c$; то вопросъ будетъ невозможенъ. Положивъ $b^2-4c=-4i^2$, $-\frac{b}{2}=h$, величины x выразимъ чрезъ

$$x=h\pm i\sqrt{-1}.$$

*

Вотъ самое общее выраженіе мнимыхъ количествъ. Принявъ въ основаніе изъясненное въ чл. 38, 1, всякой безъ труда найдетъ:

$$\text{I. } (h\pm i\sqrt{-1})+(h'\pm i'\sqrt{-1})=(h+h')\pm(i+i')\sqrt{-1},$$
$$(h\pm i\sqrt{-1})-(h'\pm i'\sqrt{-1})=(h-h')\pm(i-i')\sqrt{-1}.$$
$$\text{II. } (h\pm i\sqrt{-1})(h'\pm i'\sqrt{-1})=(hh'\mp ii')\pm(ih'+i'h)\sqrt{-1}.$$

III. Въ частномъ $\frac{h+i\sqrt{-1}}{h'+i'\sqrt{-1}}$ мнимый знаменатель можно превратить въ дѣйствительный: стоитъ только числитель и знаменатель помножить на знаменатель съ противнымъ знакомъ; именно:

$$\frac{h+i\sqrt{-1}}{h'+i'\sqrt{-1}}=\frac{(h+i\sqrt{-1})(h'-i'\sqrt{-1})}{h'^2+i'^2},$$

потому что произведеніе $(h'+i'\sqrt{-1})(h'-i'\sqrt{-1})$, по чл. 38, 4, есть разность квадратовъ $h'^2-(i'\sqrt{-1})^2=h'^2+i'^2$. Потомъ не трудно вычислить, что

$$(h+i\sqrt{-1})(h'-i'\sqrt{-1})=(hh'+ii')+(ih'-i'h)\sqrt{-1}.$$

И такъ

$$\frac{h+i\sqrt{-1}}{h'+i'\sqrt{-1}}=\frac{hh'+ii'}{h'^2+i'^2}+\frac{ih'-i'h}{h'^2+i'^2}\sqrt{-1}.$$

Такое же вычисленіе покажетъ, что

$$\frac{h-i\sqrt{-1}}{h'-i'\sqrt{-1}}=\frac{hh'+ii'}{h'^2+i'^2}-\frac{ih'-i'h}{h'^2+i'^2}\sqrt{-1}.$$

$$\text{IV. } (h\pm i\sqrt{-1})^2=(h^2-i^2)\pm 2hi\sqrt{-1}.$$

V. Для извлеченія квадратнаго корня изъ мнимаго количества, положимъ, что

$$\sqrt{[h+i\sqrt{-1}]}=x+y\sqrt{-1},$$

чего квадратъ есть

$$h+i\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}.$$

Это равенство возможно только въ томъ случаѣ, когда дѣйствительные члены будутъ равны дѣйствительнымъ, а мнимые — мнимымъ; слѣд.

$$x^2 - y^2 = h,\ 2xy = i.$$

Чтобъ изъ этихъ уравненій опредѣлить x и y, возвышаемъ ихъ въ квадраты и найдемъ ихъ сумму:

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = h^2 + i^2,$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 = h^2 + i^2.$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(h^2 + i^2)}.$$

Теперь, по члену 12, V и VI, не трудно уже найти, что

$$x^2 = \frac{h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2},$$

$$y^2 = \frac{-h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2},$$

и

$$x = \sqrt{\frac{h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2}},$$

$$y = \sqrt{\frac{-h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2}}.$$

И такъ $\sqrt{[h \pm i\sqrt{-1}]} = \sqrt{\frac{h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{-h + \sqrt{(h^2 + i^2)}}{2}} . \sqrt{-1}$ (a).

Всѣ эти вычисленія показываютъ, что видъ общаго выраженія мнимыхъ количествъ не перемѣняется.

(81). Для упражненія въ вычисленіяхъ мнимыхъ количествъ разрѣшимъ нѣсколько примѣровъ.

I. Чему равняется $\sqrt{2\sqrt{-1}}$? — Сличивъ это выраженіе съ формулою (a), найдемъ $h = o$, $i = 2$; слѣд.

$$\sqrt{2\sqrt{-1}} = [1 + \sqrt{-1}],$$

и дѣйствительно возвысивъ вторую часть въ квадратъ, получимъ $2\sqrt{-1}$.

II. Изъ уравненія

$$x^2 - (5 + 4\sqrt{-1})x + (6 + 8\sqrt{-1}) = o$$

находимъ

$$x = \frac{5 + 4\sqrt{-1} \pm \sqrt{(-15 + 8\sqrt{-1})}}{2}.$$

Здѣсь, по формулѣ (a),

$$\sqrt{(-15 + 8\sqrt{-1})} = 1 + 4\sqrt{-1},$$

потому что $h = -15$, $i = 8$, $\sqrt{(h^2 + i^2)} = 17$; слѣд.

$$x = \frac{5 + 4\sqrt{-1} \pm (1 + 4\sqrt{-1})}{2} = \begin{cases} 3 + 4\sqrt{-1} \\ 2 \end{cases}$$

Не трудно повѣрить, что эти двѣ величины x удовлетворяютъ данному уравненію.

III. Извлечь квадратный корень изъ $2 + \sqrt{3}$? — Въ этомъ случаѣ $h = 2$, $-i^2 = 3$; слѣд.

$$\sqrt{(2 + \sqrt{3})} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{-2+1}{2}}\sqrt{-1} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

и дѣйствительно

$$(\sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + 2\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Не безполезно повѣрить этотъ результатъ дѣйствительнымъ вычисленіемъ, которое для обѣихъ частей дастъ 1,9318.

Такъ же $\sqrt{(2 - 3\sqrt{-1})} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{2}} - \sqrt{\frac{-2 + \sqrt{13}}{2}}\sqrt{-1}$.

XI.

ПРОПОРЦІИ И ПРОГРЕССІИ АРИѲМЕТИЧЕСКІЯ.

(82). Двѣ равныя разности $a - b = c - d$ четырехъ количествъ a, b, c, d называются *ариѳметической пропорціею*. — Если въ такой пропорціи перенесемъ d на лѣвую сторону равенства и b на правую; то получимъ

$$a + d = c + b,$$

и потому говорятъ, что *въ ариѳметической пропорціи сумма крайнихъ членовъ равняется суммѣ среднихъ*. Эту теорему можно получить и другимъ способомъ: если разности $a - b = f$, $c - d = f$, то $a = b + f$ и $d = c - f$; слѣд. $a + d = b + f + c - f = b + c$.

Когда въ ариѳметической пропорціи средніе члены равны между собою, $a - b = b - d$, тогда она называется *непрерывною*, и очевидно, что въ ней *средній членъ* b *равняется полусуммѣ крайнихъ членовъ* $\frac{a+d}{2}$.

(83). Возьмемъ рядъ непрерывныхъ ариѳ. пропорцій

$$a - b = b - c = c - e = e - f = f - h = \text{ и пр.}$$

и положимъ, что $a - b = -d$; тогда найдемъ рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое число составляется изъ предъидущаго и постоянной разности d; именно:

$a, b = a + d, c = a + 2d, e = a + 3d, f = a + 4d, h = a + 5d$, и пр.

Такой рядъ обыкновенно пишется въ слѣдующемъ видѣ:

$$\div a\,.\,(a + d)\,.\,(a + 2d)\,.\,(a + 3d)\,.\,(a + 4d)\,.\,(a + 5d)\,.\text{ и пр.}$$

и называется *ариѳметическою прогрессіею*. По разсмотрѣніи этого ряда не трудно заключить, что каждый или n-ый членъ его выражается чрезъ

$$a + (n - 1)d.$$

Если n-мъ членомъ рядъ оканчивается, то онъ называется *послѣднимъ*, который постоянно будетъ изображать чрезъ z; слѣд.

$$z = a + (n - 1)d,$$

т. е. *послѣдній членъ ариѳметической прогрессіи равняется первому члену, сложенному съ разностью, помноженною на число членовъ* безъ 1. — Если разность d будетъ отрицательная и члены прогрессіи уменьшаются; то послѣдній членъ

$$z = a - (n - 1)d \tag{1}$$

(84). Изъ ариѳметической прогрессіи

$$\div a\,.\,(a + d)\,.\,(a + 2d)\,.\,(a + 3d)\,.\,(a + 4d)\,....\,[a + (n - 3)d]\,.$$
$$[a + (n - 2)d]\,.\,[a + (n - 1)d]$$

тотчасъ находимъ

$$a + [a + (n-1)d] = 2a + (n-1)d,$$
$$(a+d) + [a + (n-2)d] = 2a + (n-1)d,$$
$$(a+2d) + [a + (n-3)d] = 2a + (n-1)d,$$

и пр.

И такъ, *въ ариѳ. прогрессіи сумма двухъ членовъ, взятыхъ въ равныхъ разстояніяхъ отъ крайнихъ членовъ, равняется суммѣ этихъ послѣднихъ членовъ.*

(85). Суммы членовъ одной ариѳ. прогрессіи напишемъ въ прямомъ и обратномъ порядкѣ:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a+(n-3)d] + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$
$$S = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + [a+(n-3)d] + \dots + [a+2d] + [a+d] + a$$

Въ суммѣ этихъ двухъ рядовъ получимъ

$$2S = \{a + [a+(n-1)d]\} + \{a + [a+(n-1)d]\} \dots + \{a + [a+(n-1)d]\},$$

или

$$2S = (a+z) + (a+z) + \dots = n(a+z),$$

слѣд.

$$S = \frac{n(a+z)}{2}. \qquad (2)$$

И такъ, *сумма членовъ ариѳ. прогрессіи равняется суммѣ перваго съ послѣднимъ, помноженной на половину числа членовъ.*

Посредствомъ формулъ (1) и (2) разрѣшаются всѣ возможныя задачи относительно ариѳ. прогрессій.

Примѣры.

1. Даются два члена a и q; вставить между ними m среднихъ членовъ, — По смыслу вопроса, должно найти разность

ариѳ. прогрессіи, въ которой первый членъ есть a, послѣдній q и числа членовъ $m+2$; слѣд. формула (1) даетъ

$$q = a + (m+1)d,\ d = \frac{q-a}{m+1}.$$

Ежели $a=1$, $q=5$, $m=5$; то $d=\frac{2}{3}$, и прогрессія будетъ

$$\div 1 . \tfrac{5}{3} . \tfrac{7}{3} . \tfrac{9}{3}(3) . \tfrac{11}{3} . \tfrac{13}{3} . \tfrac{15}{3}(5).$$

II. По даннымъ a, S, d опредѣлить n и z. — Величину z изъ формулы (1) вставляемъ въ формулу (2): выйдетъ

$$2S = 2an + n(n-1)d,$$

или

$$dn^2 + (2a-d)n - 2S = o;$$

слѣд.

$$n = -\frac{2a-d}{2d} \pm \sqrt{\frac{(2a-d)^2+8dS}{4d^2}}$$

$$= \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{(2a-d)^2+8dS}{4d^2}},$$

и

$$z = \frac{-d \pm \sqrt{[(2a-d)^2+8dS]}}{2}.$$

Если $a=9$, $d=-2$, $S=21$; то $n=3$ и 7, $z=5$ и -3; слѣд. прогрессіи будутъ

$$\div 9 . 7 . 5$$

и

$$\div 9 . 7 . 5 . 3 . 1 . (-1) . (-3).$$

III. По даннымъ z, S, d опредѣлить n, a? — Изъ тѣхъ же формулъ выводимъ

$$a = z - (n-1)d,$$

$$n^2 - \frac{2z+d}{d}n + 2S = o;$$

слѣд.

$$n = \frac{2z+d \pm \sqrt{[(2z+d)^2 - 8dS]}}{2d},$$

$$a = \frac{d \pm \sqrt{[(2z+d)^2 - 8dS]}}{2}.$$

XII.

ПРОПОРЦІИ И ПРОГРЕССІИ ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ.

(86). Два равныхъ частныхъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ четырехъ количествъ a, b, c, d, называются *геометрическою пропорціею*, въ которой первый и четвертый (a и d) члены суть *крайніе*, второй и третій (b и c) — *средніе*, первый и третій (a и c) — *предъидущіе*, и наконецъ второй и четвертый (b и d) — *послѣдующіе*.

1) Когда въ геом. пропорціи $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ положимъ $\frac{a}{b} = n$, тогда найдемъ $a = bn$, $d = \frac{c}{n}$; слѣд. $ad = bc$, т. е. *произведеніе крайнихъ членовъ равняется произведенію среднихъ.* — Обратно: если имѣемъ равныя произведенія $ad = bc$, то можемъ составить пропорцію $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, потому что положивъ $\frac{a}{b} = n$, $\frac{c}{d} = m$, найдемъ $a = nb$, $d = \frac{c}{m}$, $ad = \frac{n}{m} bc$; но какъ, по условію, $ad = bc$, то и $n = m$. — Изъ этихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ, что въ геом. пропорціи по тремъ даннымъ ея членамъ всегда можно опредѣлить четвертый; на примѣръ, изъ $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ найдемъ $x = \frac{bc}{a}$, и изъ $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$ будетъ $x = \frac{ad}{b}$.

2) Въ разсматриваемой пропорціи $a = nb$, $c = nd$; слѣд. $\frac{a}{c} = \frac{nb}{nd} = \frac{b}{d}$, т. е. *въ геом. пропорціи можно перемѣнять мѣста среднихъ членовъ.*

3) Въ той же пропорціи $\frac{b}{a} = \frac{1}{n}$, $\frac{d}{c} = \frac{1}{n}$; слѣд. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, т. е. *въ геом. пропорціи можно поставить члены обратно.*

4) Поелику $a = nb$, $c = nd$; слѣд. $a \pm b = (n \pm 1)b$, $c \pm d = (n \pm 1)d$, и отсюда пропорція $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$. — Также изъ $b = \frac{a}{n}$, $d = \frac{c}{n}$ слѣдуетъ, что $a \pm b = \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) a$, $c \pm d = \left(1 \pm \frac{1}{n}\right) c$, и $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$. И такъ, *въ геом. пропорціи суммы и разности членовъ обоихъ частныхъ относятся какъ ихъ послѣдующіе или какъ ихъ предъидущіе члены.*

5) Изъ $a=nb$, $c=nd$ находимъ $a\pm c=n(b\pm d)$, и отсюда $\frac{a\pm c}{b\pm d}=n=\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$, т. е. *суммы или разности предъидущихъ и послѣдующихъ членовъ относятся какъ ихъ предъидущіе къ соотвѣтствующимъ послѣдующимъ.* Очевидно, что эта теорема распространяется на всякое число равныхъ частныхъ, т. е. если имѣемъ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$ и пр., то $\frac{a+c+e+\text{ и пр.}}{d+d+f+\text{ и пр.}}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$ и пр.

6) Когда даны двѣ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $\frac{e}{f}=\frac{h}{i}$, тогда $\frac{ae}{bf}=\frac{ch}{di}$, потому что если $\frac{a}{b}=n$, $\frac{e}{f}=m$, то $\frac{ae}{bf}=nm$ и $\frac{ch}{di}=nm$. — Также очевидно, что изъ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можно составить новую $\frac{a^r}{b^r}=\frac{c^r}{d^r}$, потому что тогда $\frac{a^r}{b^r}=n^r$.

7) *Изъ двухъ пропорцій* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=n$, $\frac{e}{b}=\frac{f}{d}=m$, *имѣющихъ равные послѣдующіе члены можно составить пропорцію изъ ихъ членовъ предъидушихъ:* $\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$, потому что здѣсь $a=bn$, $e=bm$, $c=nd$ и $f=md$; слѣд. $\frac{a}{e}=\frac{n}{m}$, $\frac{e}{f}=\frac{n}{m}$.

6) Наконецъ, если въ пропорціи $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$ средніе члены равны между собою, то пропорція называется *непрерывною*, и какъ въ ней $b^2=ad$, то $b=\sqrt{ad}$, т. е. *среднiй членъ равняется квадратному корню изъ произведенія крайнихъ членовъ.*

(87). Если имѣемъ рядъ непрерывныхъ геом. пропорцій

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\text{ и пр.},$$

въ которыхъ $\frac{a}{b}=\frac{1}{q}$; то изъ него получимъ

$$b=qa,\ c=bq=aq^2,\ d=cq=aq^3,\ e=dq=aq^4,$$
$$f=eq=aq^5,\text{ и пр.}$$

рядъ членовъ, изъ которыхъ каждый составляется изъ предъидущаго, помножаемаго на постоянное число. Такой рядъ называется *прогрессіею геометрической*, а постоянный множитель — *знаменателемъ прогрессіи.* Геом. прогрессія пишется въ такомъ видѣ:

$$\because a : qa : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5 : \text{ и пр.}$$

Если знаменатель прогрессіи есть число цѣлое, то члены ея возрастаютъ; если же этотъ знаменатель есть дробь, ме́ньшая единицы, то члены прогрессіи уменьшаются. Разсмотрѣвъ написанный рядъ, тотчасъ увидимъ, что $(n-1)$-ый членъ $= aq^{n-2}$, и n-ый или послѣдній членъ

$$z = a \,.\, q^{n-1} \tag{1}$$

(88). Сумма членовъ геом. прогрессіи

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots. + aq^{n-2} + aq^{n-1}.$$

Если отнимемъ съ обѣихъ сторонъ a, и во второй части уравненія отдѣлимъ общій производитель; то получимъ

$$S - a = q\,(a + aq + aq^2 + \ldots. + aq^{n-3} + aq^{n-2}),$$

гдѣ количество, содержащееся въ скобкахъ, есть сумма той же прогрессіи безъ послѣдняго члена; слѣд. имѣемъ уравненіе

$$S - a = q\,(S - z) = qS - qz,$$

изъ котораго

$$S - qS = a - qz,$$

и отсюда

$$S = \frac{a - qz}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}. \tag{2}$$

Посредствомъ формулъ (1) и (2) разрѣшаются всѣ вопросы, относящіеся къ геометр. прогрессіямъ.

(89). Когда знаменатель прогрессіи $q = \frac{1}{m}$, тогда

$$z = aq^{n-1} = \frac{a}{m^{n-1}}.$$

Явно, что чѣмъ болѣе возьмется членовъ, тѣмъ менѣе будетъ z, который безпрестанно приближается къ *нулю*. По этому говорятъ, что въ уменьшающейся или *сходящейся* геом. прогрессіи *предѣлъ* послѣдняго члена есть нуль. Чтожъ касается до суммы членовъ такой прогрессіи, то формула (2) даетъ

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{qz}{1 - q} = \frac{ma}{m - 1} - \frac{z}{m - 1},$$

гдѣ видно, что дробь $\frac{z}{m-1}$ съ увеличиваніемъ числа членовъ приближается къ нулю; слѣд.

$$\textit{пред. } S = \frac{ma}{m-1}.$$

Если $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $m = 2$; то прогрессія будетъ

$$\div\!\!\div 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{16} : \text{ и пр.}$$

и

$$\textit{пред. } S = \frac{2}{2-1} = 2.$$

Если $a = 1$, $q = -\frac{1}{2}$, $m = -2$; то прогрессія будетъ

$$\div\!\!\div 1 : (-\tfrac{1}{2}) : (+\tfrac{1}{4}) : (-\tfrac{1}{8}) : (+\tfrac{1}{16}) : \text{ и пр.,}$$

сумма ея членовъ

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \text{ и пр.}$$

и

$$\textit{пред. } S = \frac{-2}{-2-1} = \frac{2}{3}.$$

Періодическая дробь $x = o{,}ppp\ldots$, въ которой p есть періодъ, содержащій n цифръ, выражается суммою членовъ геометр. прогрессіи:

$$x = \frac{p}{10^n} + \frac{p}{10^{2n}} + \frac{p}{10^{3n}} + \frac{p}{10^{4n}} + \text{ и пр.,}$$

въ которой первый членъ есть $\frac{p}{10^n}$, знаменатель $\frac{1}{10^n}$, и потому предѣлъ этой суммы или величина періодической дроби будетъ

$$x = \frac{10^n \cdot \frac{p}{10^n}}{10^n - 1} = \frac{p}{10^n - 1}.$$

Если $p = 34$, то $n = 2$, $x = 0{,}3434\ldots = \frac{34}{99}$.

(90). Когда дается сумма геом. прогрессіи, первый членъ и знаменатель; тогда въ формулѣ (2) неизвѣстное количество будетъ n, и которое опредѣляется изъ уравненія

$$q^n = \frac{(q-1)S}{a} + 1,$$

или вообще изъ уравненія

$$q^n = c,$$

гдѣ по степени c и корню q надобно опредѣлить показатель степени n. Рѣшеніе этого вопроса составляетъ предметъ слѣдующей статьи.

XIII.

ЛОГАРИѲМЫ.

(91). Если въ уравненіи

$$q^x = c,$$

число q есть постоянное, впрочемъ произвольно взятое; то величина степени c измѣняется вмѣстѣ съ ея показателемъ x, который въ этомъ случаѣ, т. е. при неизмѣняемости корня q, называется уже *логариѳмомъ* степени c, постоянный же корень q — основаніемъ *логариѳмовъ*. Логариѳмъ изображается чрезъ *log*, такъ что

$$x = \log c.$$

(92). Когда $x = 1$, тогда $c = q^1$, и $\log c = \log q = 1$, т. е. *логариѳмъ основанія равняется единицѣ*.

(93). Въ уравненіяхъ

$$c = q^x,\ b = q^z,$$

показатели x и z суть логариѳмы степеней c и b, именно: $x = \log c$, $z = \log b$. Произведеніе этихъ уравненій есть

$$c \,.\, b = q^{x+z},$$

гдѣ $x + z = \log(cb)$; слѣд.

$$\log(cb) = x + z = \log c + \log b,$$

т. е. *логариѳмъ произведенія равняется суммѣ логариѳмовъ производителей*.

(94). Если уравненіе $c = q^x$ раздѣлимъ на уравненіе $b = q^z$, то въ частномъ получимъ

$$\frac{c}{b} = q^{x-z}.$$

Здѣсь видимъ, что

$$\log\frac{c}{b} = x - z = \log c - \log b,$$

т. е. *логариѳмъ дроби или частнаго равняется разности логариѳмовъ числителя или дѣлимаго безъ логариѳма знаменателя или дѣлителя.*

Доказанныя три теоремы составляютъ основаніе логариѳмическихъ вычисленій. Изъ нихъ слѣдуетъ:

1) Если въ $\log.(c.b.d.f....) = \log c + \log b + \log d + \log f +$ и пр. всѣ производители будутъ равны между собою: $c = b = d = f =$ и пр.; то принявъ, что въ произведеніи n производителей, получимъ

$$\log(c^n) = \log c + \log c + \log c + \text{ и пр. } = n\log c.$$

2) Если въ

$$\log\left(\frac{c}{b}\right) = \log c - \log b$$

будетъ $c = b$, то

$$\log\left(\frac{c}{c}\right) = \log 1 = \log c - \log c = o,$$

т. е. *логариѳмъ единицы равняется нулю.*

3) Поелику

$$\log\left(\frac{1}{c^n}\right) = \log(c^{-n}) = \log 1 - n\log c = -n\log c.$$

4) Когда $h = \sqrt[n]{c}$, тогда $c = h^n$, $\log c = n\log h$; отсюда

$$\log h = \frac{\log c}{n};$$

но какъ

$$h = \sqrt[n]{c} = \log(c^{\frac{1}{n}});$$

то

$$\log(c^{\frac{1}{n}}) = \frac{\log c}{n}.$$

Также если $h = \sqrt[n]{c^m}$, то $c^m = h^n$, $m \log c = n \log h$; отсюда

$$\log h = \log(\sqrt[n]{c^m}) = \log(c^{\frac{m}{n}}) = \frac{n}{m} \log c.$$

Правила, предложенныя въ 1, 3 и 4 случаяхъ, соединяются въ одну общую теорему: *логариѳмъ степени равняется логариѳму корня, помноженному на показатель степени.*

Правило, предложенное въ 4 случаѣ выражается такимъ образомъ: *логариѳмъ корня равняется логариѳму степени, раздѣленному на показатель корня.*

(95). Ежели основаніе логариѳмовъ q есть число цѣлое, или вообще, число, бóльшее единицы, и если логариѳмы составляютъ ар. прогрессію натуральныхъ чиселъ; то соотвѣтствующія имъ числа или степени составятъ возрастающую геометрическую прогрессію, начинающуюся съ единицы, и которой знаменатель есть основаніе логариѳмовъ. Именно:

$$x = o,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n,$$
$$c = 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots\ q^n.$$

По этому, при основаніи $q > 1$, логариѳмы всѣхъ чиселъ содержатся между o и числомъ безконечно-большимъ, къ которому они приближаются весьма медленно. Но если

$$x = o,\ (-1),\ (-2),\ (-3),\ \ldots\ (-n),$$

то

$$c = 1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q^3},\ \ldots\ \frac{1}{q^n},$$

и какъ съ увеличиваніемъ n, дробь $\frac{1}{q^n}$ или q^{-n} приближается къ *нулю;* то говорятъ, что *логариѳмъ нуля есть число безконечно-большое, взятое отрицательно:* $\log o = -\infty$. — Тѣже двѣ прогрессіи показываютъ еще, что логариѳмы отрицательныхъ чиселъ невозможны, когда основаніе есть число положительное.

(96). Съ перемѣною основанія, перемѣняются и величины логариѳмовъ. Такимъ образомъ въ уравненіяхъ

$$c = q^x,\ c = e^{x'},$$

въ которыхъ q и e суть разныя основанія логариѳмовъ, показатели x и x' суть различные. Ежели логариѳмы, относящіеся къ основанію e изобразимъ чрезъ Log, то будетъ

$$\operatorname{Log} c = x'.$$

Но какъ тоже второе уравненіе, по основанію q, даетъ

$$\log c = x' \log e;$$

то

$$\log c = \log e \,.\, \operatorname{Log} c \qquad (1)$$

этою формулою выражается отношеніе между логариѳмами, принадлежащими разнымъ основаніямъ. Число $\log e$ называется *модулемъ* логариѳмовъ. Если примемъ $c =$ основ. q, то $\log c = \log q = 1$, и

$$1 = \log e \,.\, \operatorname{Log} q.$$

Отсюда

$$\log e = \frac{1}{\operatorname{Log} q}. \qquad (2)$$

(97). Въ общеупотребительной системѣ логариѳмовъ за основаніе q принимается число 10, служащее и основаніемъ *нумераціи*. Въ этой системѣ, прогрессіи чл. 95 превращаются въ слѣдующія:

$$x = o,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots n,$$
$$c = 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \ldots 10^n,$$

показывающія, что $\log 10 = 1$, $\log 10^2$ или $\log 100 = 2$, $\log 10^5$ или $\log 100000 = 5, \ldots \log 10^n = n$, такъ что въ общеупотребительной системѣ логариѳмовъ извѣстны логариѳмы всѣхъ чиселъ, выражаемыхъ единицею съ нулями: *они равняются числу нулей*. Потомъ видимъ, что логариѳмы чиселъ, содержащихся между 1 и 10, суть < 1 и > 0, между 10 и 100, суть > 1 и < 2, между 100 и 1000, суть > 2, но < 3, и т. д.; слѣд. эти логариѳмы суть дроби, выражаемыя обыкновенно десятичными долями единицы; находящіяся при нихъ цѣлыя числа называются *характеристиками* логариѳмовъ, которыя рѣдко помѣщаются въ таблицахъ логариѳмовъ, потому что они всегда извѣстны: поелику, по вышезамѣченному, log (1 циф.) < 1, log (2 циф.) > 1 и < 2, log (3 циф.) > 2 и < 3, и т. д. слѣд. характеристики логариѳмовъ цѣлыхъ чиселъ равняются числу цифръ безъ 1. Такъ характеристика логариѳмовъ чиселъ 56734, 56000 и 50000 есть одна и таже 4, характеристика логариѳма числа 85963400 есть 7, и пр.

(98). Путь къ опредѣленію логариѳмовъ показываютъ тѣже прогрессіи, потому что ариѳ. среднія пропорціональныя между членами первой прогрессіи суть логариѳмы геометр. среднихъ пропорціональныхъ между членами второй. На примѣръ, въ этой послѣдней средній геометр. пропорціональный между 1 и 10 есть $\sqrt{1.10}$ или $\sqrt{10}$, и средній ариѳ. пропорціональный между 0 и 1 есть $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, и $0{,}5 = \log\sqrt{10} = \frac{\log 10}{2} = \frac{1}{2}$. Также геометр. средній пропорціональный между 10^4 и 10^5 есть $\sqrt{10^9}$, средній ариѳ. пропорціональный между 4 и 5 есть $\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$, и $4{,}5 = \log\sqrt{10^9} = \frac{9}{2}\log 10 = \frac{9}{2}$, и пр. Зная логариѳмъ $\sqrt{10}$, найдемъ геометр. средній пропорціональный между 1 и $\sqrt{10}$, который $= \sqrt{\sqrt{10}}$; логариѳмъ его будетъ средній ариѳ. пропорціональный между 0 и 0,5, который $= \frac{0+0{,}5}{2} = 0{,}25$. Очевидно, что такимъ образомъ можно составить таблицы логариѳмовъ всѣхъ чиселъ отъ 1 до какого угодно числа; но вмѣстѣ съ тѣмъ видно, что этотъ способъ весьма неудобенъ, какъ требующій множество извлеченія корней изъ десятичныхъ дробей: по этой причинѣ считаемъ совершенно безполезнымъ входить объ немъ въ подробности, желающихъ получить основныя свѣдѣнія о составленіи логариѳмическихъ таблицъ отсылаемъ къ послѣдней статьѣ этой книги, и предположивъ, что таблицы уже составлены, прилагаемъ здѣсь необходимыя замѣчанія объ ихъ употребленіи.

(99). Во всѣхъ этихъ замѣчаніяхъ имѣемъ предъ собою логариѳмическія таблицы Каллета. О характеристикахъ цѣлыхъ чиселъ уже сказано. Характеристики дробей десятичныхъ, какъ составляемыхъ на общихъ правилахъ нумераціи, также всѣ извѣстны, потому что если $\log 23456 = 4{,}3702540$, то

$$\log 234{,}56 = \log \tfrac{23456}{100} = 4{,}3702540 - 2$$
$$= 2{,}3702540,$$
$$\log 2{,}3456 = \log \tfrac{23456}{10000} = 4{,}3702540 - 4$$
$$= 0{,}3702540,$$
$$\log 0{,}23456 = \log \tfrac{23456}{100000} = 4{,}3702540 - 5$$
$$= \bar{1}{,}3702540$$
$$\log 0{,}00023456 = \log \tfrac{23456}{100000000} = 4{,}3702540 - 8$$
$$= \bar{4}{,}3702540.$$

и пр.

Изъ этого видно: 1) Десятичная дробь логариѳма (*мантисса*) десятичной дроби есть таже, что цѣлаго числа.

2) Характеристики десятичныхъ дробей безъ цѣлыхъ чиселъ суть отрицательныя, почему и знакъ (—) ставится не предъ всѣмъ логариѳмовъ, но только надъ характеристикою.

3) Число отрицательной характеристики единицею больше числа нулей, стоящихъ по правую руку запятой въ десятичныхъ дробяхъ.

Каллетовы таблицы логариѳмовъ содержатъ всѣ числа отъ 1 до 108000 или отъ 1 до 107999 включительно. Взглянувъ на любую ихъ страницу, всякой пойметъ, какимъ образомъ находятся въ нихъ логариѳмы, и обратно по логариѳмамъ числа, тѣхъ чиселъ, которыя въ нихъ содержатся. Такъ $\log 70959 = 4{,}8510075$, для котораго первыя три цифры десятичной дроби взяты въ столбцѣ, означенномъ чрезъ 0 и противъ четырехъ цифръ столбца, означеннаго цифрою 9, послѣднею въ данномъ числѣ. Обратно: желая имѣть число, соотвѣтствующее логариѳму 0,7833675, нахожу въ столбцѣ 0 первыя три цифры логариѳма, т. е. 783, спускаюсь по немъ до четырехъ цифръ 3318, ближайшихъ къ даннымъ 3675, и отъ этихъ ближайшихъ цифръ иду по горизонтальной строкѣ до столбца 5, въ которомъ находятся цифры 3675. Такимъ образомъ нахожу, что данному логариѳму соотвѣтствуетъ число 60725; но какъ при данномъ логариѳмѣ характеристика есть *нуль*, то искомое число должно содержать только одну цѣльную цифру, а прочія суть десятичныя, т. е. $0,7833675 = \log 6,0725$. Теперь слѣдовало бы объяснить, какимъ образомъ отъискиваются въ таблицахъ логариѳмы чиселъ, не содержащихся въ таблицахъ, и обратно; но этотъ способъ основывается на теоремахъ, которыя надобно доказать предварительно.

(100). 1) Пусть $x + \delta$ и x будутъ логариѳмы чиселъ $n + 1$ и n, т. е. пусть

$$n + 1 = 10^{x+\delta},\ n = 10^x.$$

Раздѣливъ первое выраженіе на второе, получимъ

$$\frac{n+1}{n} = x^\delta, \text{ или } 1 + \frac{1}{n} = x^\delta,$$

или

$$\delta = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Здѣсь видно, что чѣмъ больше n, тѣмъ сумма $1 + \frac{1}{n}$ будетъ ближе къ 1, а $\log 1 = 0$, слѣд. съ увеличиваніемъ числа n, разность логариѳмовъ δ становится все менѣе. *И такъ большія числа имѣютъ весьма малыя разности ихъ логариѳмовъ.*

2) Возьмемъ три числа n, $n + \frac{1}{k}$, $n + 1$, гдѣ k есть какое нибудь цѣлое число, т. е. число $n + \frac{1}{k}$ содержится между n и $n + 1$, и положимъ, что

$$n = 10^\alpha,\ n + \frac{1}{k} = 10^{\alpha+\gamma},\ n + 1 = 10^{\alpha+\delta}.$$

Потомъ обратимъ вниманіе на дроби

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},\ \frac{\alpha+\delta}{\alpha}=1+\frac{\delta}{\alpha}:$$

первая изъ нихъ показываетъ, что она приближается къ 1 съ увеличиваніемъ числа n; но, по предъидущей теоремѣ, съ увеличиваніемъ n уменьшается δ, т. е. и вторая дробь приближается также къ 1; слѣд. можно принять, что

$$\frac{n+1}{n}=\frac{\alpha+\delta}{\alpha},$$

и эта пропорція будетъ тѣмъ справедливѣе, чѣмъ болѣе число n. Допустивъ эту пропорцію, найдемъ изъ нея, что

$$\frac{(n+1)-n}{n}=\frac{(\alpha+\delta)-\alpha}{\alpha}.$$

На томъ же основаніи составляемъ другую пропорцію:

$$\frac{\left(n+\frac{1}{k}\right)-n}{n}=\frac{(\alpha+\gamma)-\alpha}{\alpha}.$$

Отсюда ясно уже, что

$$\frac{(n+1)-n}{\left(n+\frac{1}{k}\right)-n}=\frac{(\alpha+\delta)-\alpha}{(\alpha+\gamma)-\alpha}=\frac{\log(n+1)-\log n}{\log\left(n+\frac{1}{k}\right)-\log n},$$

т. е. *разности чиселъ почти пропорціональны разностямъ ихъ логариѳмовъ.*

(101). Теперь можемъ уже рѣшить задачу предложенную въ концѣ чл. 99. Отъищемъ логариѳмъ числа 82967996. По таблицамъ нахожу

$$\log 82968000=7{,}9189106,$$
$$\log 82967000=7{,}9189054;$$

разности этихъ чиселъ и ихъ логариѳмовъ суть 1000 и 0,0000052; а какъ $82967996-82967000=996$; то, по принятой теоремѣ, составляю пропорцію

$$\frac{996}{1000}=\frac{x}{0{,}0000052},$$

гдѣ x есть то число, которое должно придать къ log 82967000 или къ 7,9189054, и

$$x = \frac{0,0000052 \times 996}{1000} = 0,0000051792;$$

слѣд. искомый логариѳмъ съ семью десятичными цифрами есть 7,9189105 или 7,9189106, потому что отбрасывая 792, надобно къ послѣдней цифрѣ разности придать 1, т. е. надобно принять, что она есть 0,0000052.

Обратно: найти число, соотвѣтствующее данному логариѳму 7,5963926. Въ таблицахъ нахожу логариѳмы ближайшій меньшой, и ближайшій большой:

$$7,5963881 = \log 39481000,$$
$$7,5963991 = \log 39482000;$$

разности этихъ чиселъ и логариѳмовъ суть 1000 и 0,0000110; а какъ 7,5963926 — 7,5963881 = 0,0000045; то составляю пропорцію

$$\frac{0,0000110}{0,0000045} = \frac{1000}{x},$$

гдѣ x есть то число, которое должно придать къ 39481000; вычисленіе даетъ $x = 409$; слѣд. искомое число есть 39481409.

Къ этимъ подробностямъ остается прибавить, что въ таблицахъ Каллета разности 0,0000052 и 0,0000110 помѣщены въ столбцахъ, отмѣченныхъ посредствомъ *dif*, и подъ ними находятся ихъ подраздѣленія; такъ что посредствомъ ихъ послѣдній примѣръ слѣдовало бы разрѣшить такимъ образомъ: нашедши разность 45 между даннымъ логариѳмомъ и ближайшимъ меньшимъ, должно обратиться къ ближайшей къ нимъ разности 110: въ находящемся подъ нею столбцѣ увидали бы, что 44 соотвѣтствуетъ 4; вычитаю 44 изъ 45 и къ разности 1 приписываю 0, и въ томъ же столбцѣ подраздѣленій разностей вижу, что 11 соотвѣтствуетъ 1; слѣд. къ числу 39481000 должно было бы придать 410: явно, что такимъ образомъ найденное число было бы больше надлежащаго; поэтому, чтобъ отъискать точное число, надобно къ разности приписать *три нуля* и 4500 раздѣлить на разность 110: такое дѣйствіе есть сокращеніе предложенныхъ вычисленій, потребныхъ для опредѣленія x. Послѣ этого всякой уже пойметъ, какъ сокращается вычисленіе x въ первомъ примѣрѣ.

(102). Покажемъ теперь употребленіе логариѳмическихъ формулъ.

I. $\log\sqrt{(a^2-x^2)}=\log\sqrt{(a+x)(a-x)}=\frac{1}{2}\log(a+x)+\frac{1}{2}\log(a-x)$.

II. $\log\,(a^3\sqrt[4]{a^3})=\log\,(a^3)+\log\sqrt[4]{a^3}=3\log a+\frac{3}{4}\log a=\frac{15}{4}\log a$.

III. Если $m=h^{b^x}$, и требуется опредѣлить x, то положимъ сперва, что $y=b^x$; выйдетъ $m=h^y$, и $\log m=y\log h$; отсюда $y=b^x=\frac{\log m}{\log h}$; послѣ этого находимъ $\log y=x\log b=\log(\log m)-\log(\log h)$, и

$$x=\frac{\log(\log m)-\log(\log h)}{\log b}.$$

VI. Во сколько лѣтъ капиталъ въ 12678 руб. возрастетъ до 25043,83 руб., считая ростъ по 5 руб. со ста? — Ежели искомое число лѣтъ изобразимъ чрезъ x, то безъ труда получимъ, что

$$25043{,}83=\left(\tfrac{105}{100}\right)^x.12678,$$

и

$$x=\frac{\log 25043{,}83-\log 12678}{\log 105-\log 100}.$$

Вычислимъ эту формулу, довольствуясь логариѳмами съ пятью десятичными:

$$\begin{array}{rl} \log 25043{,}83 & =4{,}39870 \\ \log 12678 & =4{,}10305 \\ \hline \text{разн.} & =0{,}29565, \end{array}$$

$$\log 105-\log 100=0{,}02119,$$

и потому

$$x = \frac{0,29565}{0,02119} = 13,95.$$

V. Какъ возрастетъ капиталъ A къ t лѣтъ, по p процентовъ, и когда каждый годъ придается къ нему b рублей? — Поелику данный капиталъ чрезъ годъ превратится въ

$$\frac{100+p}{100} A + b;$$

слѣд. чрезъ два года онъ будетъ

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 + \frac{100+p}{100} b + b,$$

чрезъ три года:

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 A + \left(\frac{100+p}{100}\right)^2 b + \frac{100+p}{100} b + b,$$

и пр. Такъ положивъ, для краткости, $\frac{100+p}{100} = k$, величину капитала чрезъ t лѣтъ выразимъ чрезъ

$$S = Ak^t + bk^{t-1} + bk^{t-2} + \ldots + bk + b.$$

Этотъ рядъ, кромѣ перваго члена, есть геометр. прогрессія, въ которой первый членъ $= b$, знаменатель $= k$, послѣдній членъ $= bk^{n-1}$; слѣд.

$$S = Ak^t + \frac{bk^t - b}{k-1} = Ak^t + \frac{b(k^t-1)}{k-1} \tag{3}$$

Если b будетъ ежегодный вычетъ изъ возрастающаго капитала, то уже

$$S = Ak^t - \frac{b(k^t-1)}{k-1}. \tag{4}$$

На примѣръ пусть $A = 10000$, $t = 10$, $b = 1000$, $k = \frac{105}{100}$. По формулѣ (3), найдемъ

$$S = 10000\left(\tfrac{105}{100}\right)^{10} + \frac{1000\left[\left(\tfrac{105}{100}\right)^{10} - 1\right]}{0,05} = 30000\left(\tfrac{105}{100}\right)^{10} - 2000.$$

Сдѣлавъ $y = 30000\left(\frac{105}{100}\right)^{10}$, вычислимъ

$$\log y = \log 30000 + 10(\log 105 - \log 100) = 4,68902,$$

$$y = 48868, \; S = 28868 \text{ руб.}$$

VI. Когда искомое число будетъ t, и S данное, тогда изъ формулы (3) выведемъ

$$S(k-1)+b=k^t(Ak-A+b),$$

$$k^t=\frac{S(k-1)+b}{Ak-A+b},$$

$$t\log k=\log[S(k-1)+b)]-\log[A(k-1)+b],$$

и

$$t=\frac{\log[S(k-1)+b)]-\log[A(k-1)+b]}{\log k}.$$

Принявъ предъидущія данныя, вычисляемъ

$$S(k-1)+b=2443{,}4,\ A(k-1)+b=1500,$$

$$t=\frac{\log 2443{,}4-\log 1500}{\log 105-\log 100}=10.$$

VII. Ежели въ формулѣ (4) примемъ $S=o$, то выйдетъ

$$t=\frac{\log b-\log[b-A(k-1)]}{\log k}. \qquad (5)$$

По этой формулѣ вычисляется время, въ которое истощится весь капиталъ A отъ издержекъ b.

XIV.

ПЕРЕМѢЩЕНІЯ И СОЧЕТАНІЯ. НЬЮТОНОВА ТЕОРЕМА. ФИГУРНЫЯ ЧИСЛА.

(103). Общая теорія *перемѣщеній* и *сочетаній* принадлежитъ къ числу важнѣйшихъ изслѣдованій высшаго анализа; на ней основывается теорія вѣроятностей: заимствуемъ изъ нея только двѣ первыя теоремы, посредствомъ которыхъ обыкновенно доказываютъ Ньютонову теорему о возвышеніи во всякую степень двухчленнаго количества.

1) Если нѣсколько количествъ a, b, c, d, и пр. перемножаются между собою алгебраически, то въ ихъ тожественныхъ

произведеніяхъ или *перемѣщеніяхъ* они могутъ занимать различныя мѣста; такъ алгебраическое произведеніе изъ a и b можетъ быть ab и ba, т. е. имѣетъ два вида или $1 . 2$. Произведеніе изъ трехъ a, b, c имѣетъ 6 видовъ или $1 . 2 . 3$, потому что при производителѣ a, поставленномъ на первомъ мѣстѣ, другіе два множителя даютъ два произведеніи bc, cb; при b, поставленномъ на первомъ мѣстѣ, производители a и c даютъ опять два произведенія ac и ca, и наконецъ при c, поставленномъ на первомъ мѣстѣ, a и b даютъ еще два произведенія ab и ba; слѣд. всѣхъ произведеній выйдетъ 6 или $1 . 2 . 3$ (чл. 59). Продолжая подобныя разсужденія, увидимъ, что четыре производителя даютъ 24 или $1 . 2 . 3 . 4$, пять производителей — 120 или $1 . 2 . 3 . 4 . 5$ произведеній; такъ что для каждаго новаго производителя число произведеній увеличивается во столько разъ, какой прибавляется множитель по счету отъ перваго, и потому *вообще n производителей могутъ имѣть* $1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots (n-1) . n$ *тожественныхъ произведеній или перемѣщеній.*

2) Разныя алгебраическія произведенія изъ данныхъ n производителей a, b, c, d, e, и пр., какъ на примѣръ ab, ac, и пр., abc, abd, и пр., называются *сочетаніями* по двѣ, по три, по четыре, и пр. буквы.

Изъ n буквъ число сочетаній по двѣ есть

$$\frac{n(n-1)}{1 . 2},$$

$$\text{по три, } \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3},$$

$$\text{по четыре, } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4},$$

и пр.

Вотъ доказательство или расчетъ этихъ сочетаній. Когда составляемъ сочетанія двойныя или по двѣ изъ n буквъ, тогда къ первой буквѣ прочія $n-1$ приложенныя образуютъ $n-1$ произведеній; столько же произведеній дадутъ $n-1$ буквъ, приложенныя ко второй, — столько же $n-1$ буквъ, приложенныя къ третьей, и пр. и видно, что всѣхъ двойныхъ произведеній выйдетъ $n(n-1)$; но явно, что въ этомъ числѣ каждое произведеніе повторится два раза; слѣд. однихъ сочетаній будетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Если будемъ составлять тройныя сочетанія, то поставивъ первую букву на первомъ мѣстѣ, изъ прочихъ $n-1$, по объясненному, можно будетъ сдѣлать $(n-1)(n-2)$ двойныхъ произведеній, которыя, для полученія тройныхъ произведеній, должно присоединить къ первой буквѣ; слѣд. съ этою буквою выйдетъ $(n-1)(n-2)$ произведеній; столько же произведеній дастъ вторая буква, столько же — третья, и пр.; слѣд. всѣхъ тройныхъ произведеній изъ n буквъ выйдетъ $n(n-1)(n-2)$; но въ нихъ, по первой теоремѣ, каждое произведеніе повторится $1.2.3$ раза, и потому однихъ сочетаній будетъ только $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$. Нѣтъ надобности продолжать такой расчетъ, чтобъ понять, что число четверныхъ сочетаній должно быть $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, пятерныхъ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$, и т. д.; такъ что вообще число сочетаній изъ n по m буквъ выразится чрезъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.[n-(m-2)]\,[n-(m-1)]}{1.2.3.4\quad\ldots.\quad(m-1).m}.$$

(104). Перемножая двухчленные производители $(x+a)$, $(x+b)$, $(x+c)$, $(x+d)$, $(x+e)$, и пр., будемъ получать слѣдующія произведенія:

$$(x+a)(x+b)=x^2\begin{array}{l|l}+a & x+ab,\\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3\begin{array}{l|l|l}+a & x^2+ab & x+abc,\\ +b & \quad\;+ac & \\ +c & \quad\;+bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{l|l|l|l}+a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd,\\ +b & \quad\;+ac & \quad\;+abd & \\ +c & \quad\;+bc & \quad\;+acd & \\ +d & \quad\;+ad & \quad\;+bcd & \\ & \quad\;+bd & & \\ & \quad\;+cd & & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e)=x^5\begin{array}{l|l|l|l|l} +a & x^4+ab & x^3+abc & x^2+abcd & x+abcde, \\ +b & \quad +ac & \quad +abd & \quad +abce & \\ +c & \quad +ad & \quad +acd & \quad +abde & \\ +d & \quad +bd & \quad +bcd & \quad +acde & \\ +e & \quad +cd & \quad +abe & \quad +bcde & \\ & \quad +ea & \quad +ace & & \\ & \quad +eb & \quad +bce & & \\ & \quad +ec & \quad +ade & & \\ & \quad +ed & \quad +bde & & \\ & & \quad +cde & & \end{array}$$

и пр.

Въ этихъ произведенiяхъ видимъ: 1) Показатели степеней главной буквы, начиная со старшаго, уменьшаются единицею въ каждомъ слѣдующемъ членѣ. 2) Первый членъ имѣетъ коэффицiентомъ единицу. 3) Коэффицiентъ втораго члена есть сумма вторыхъ членовъ производителей. 4) Коэффицiенты третьяго, четвертаго, и т. д. членовъ суть суммы двойныхъ, тройныхъ, четверныхъ, и пр. сочетанiй тѣхъ же вторыхъ членовъ данныхъ производителей. Наконецъ 5) послѣднiй членъ есть произведенiе всѣхъ этихъ вторыхъ членовъ. Такимъ образомъ, если дано будетъ n двухчленныхъ производителей съ главною буквою x, и если изобразимъ

чрезъ S_1 сумму вторыхъ ихъ членовъ,

S_2 » двойныхъ сочетанiй,

S_3 » тройныхъ сочетанiй

и пр.

и чрезъ P произведенiе всѣхъ вторыхъ членовъ;

то произведенiе всѣхъ n данныхъ производителей выразится чрезъ

$$x^n+S_1.x^{n-1}+S_2.x^{n-2}+S_3.x^{n-3}+S_4.x^{n-4}+\ldots.+S_{n-1}.x+P\ldots.(A)$$

Эта формула, составленная по *наведенiю*, требуетъ повѣрки, для чего положимъ, что имѣемъ уже произведенiе изъ двухчленныхъ $n-1$ производителей, которое есть

$$x^{n-1}+\alpha x^{n-2}+\beta x^{n-3}+\gamma x^{n-4}\ldots.;$$

помноживъ его на n-ый производитель $x + \nu$, получимъ

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \gamma x^{n-3} + \dots$$
$$+ \nu x^{n-1} + \nu\alpha x^{n-2} + \nu\beta x^{n-3} + \dots$$

Когда эти частныя произведенія сложимъ, тогда увидимъ: 1) Расположеніе показателей степеней подчинено тому же порядку, какъ и въ произведеніи данномъ. 2) Къ коэффиціенту α, содержащему сумму $n - 1$ членовъ, присоединяется n-ый членъ. 3) Къ суммѣ β двойныхъ сочетаній прибавляется сумма $\nu\alpha$ всѣхъ $n - 1$ производителей, помноженныхъ на ν, т. е. сумма всѣхъ двойныхъ сочетаній изъ $n - 1$ членовъ и n-го члена ν. 4) Къ суммѣ γ тройныхъ сочетаній изъ $n - 1$ членовъ придается сумма $\nu\beta$ всѣхъ двойныхъ сочетаній изъ $n - 1$ производителей, помноженныхъ на n-ый производитель ν, т. е. придаются тройныя сочетанія изъ производителя ν и прочихъ $n - 1$ членовъ, и т. д. И такъ точность формулы (A) для каждаго новаго двухчленнаго производителя зависитъ отъ точности предъидущихъ произведеній; а какъ эта точность очевидно изъ вышепредложенныхъ произведеній изъ двухъ, трехъ, четырехъ и пяти производителей; то, по изъясненному, она несомнѣнна и въ произведеніи изъ шести производителей, потомъ изъ семи, и пр., и вообще изъ n производителей.

Послѣ этого, на основаніи второй теоремы чл. 103, въ формулѣ (A)

$$S_2 = \frac{n(n-1)}{1 . 2},$$
$$S_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3},$$
$$S_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4},$$
и пр.
$$S_m = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(m-2)][n-(m-1)]}{1 . 2 . 3 . 4 \dots (m-1) . m}.$$

(105). Теперь переходъ къ Ньютоновой теоремѣ очевиденъ самъ собою. Когда положимъ, что всѣ вторые члены n двухчленныхъ производителей равны между собою, $a=b=c=d=$ и пр., тогда

S_1 превратится въ na

S_2 » » $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$,

S_3 » » $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3$,

S_4 » » $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^4$,

и пр.

S_m » » $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-2)][n-(m-1)]}{1.2.3.4\ldots(m-1)m}a^m$

P превратится въ a^n,

и формула Ньютона будетъ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\ldots.$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-2)][n-(m-1)]}{1.2.3\ldots(m-1).m}a^mx^{n-m}+\ldots+a^n.$$

(106). Эта формула показываетъ:

1) Сумма показателей обѣихъ буквъ въ каждомъ ея членѣ равняется главному показателю.

2) Ежели, на примѣръ, m означаетъ четверныя, пятерныя, шестерныя, и пр. сочетанія, то S_m будетъ коэффиціентъ пятаго, шестаго, седьмаго, и пр. члена формулы; показатели же степеней буквы a будутъ 4, 5, 6, и пр.; такъ что m-ый или общій ея членъ изобразится чрезъ

$$N=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(m-2)]}{1.2.3.4\ldots(m-1)}a^{m-1}x^{n-(m-1)}.$$

Такъ пятый членъ будетъ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^4x^{n-4}$,

шестой » » $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}a^5x^{n-5}$,

и пр.

предпослѣдній или n-ый членъ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2}{1.2.3.4\ldots n-1}a^{n-1}x^{n-(n-1)}$

или $na^{n-1}.x$,

послѣднiй или $n+1$-ый членъ $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1}{1.2.3.4\ldots n} a^n . x^{n-n}$ или a^n.

Отсюда слѣдуетъ: 3) Коэффицiентъ третьяго члена отъ начала ряда будетъ $\frac{n(n-1)}{1.2}$, и коэффицiентъ третьяго члена отъ конца ряда есть $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 4.3}{1.2.3.4\ldots n-2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$; слѣд. коэффицiенты членовъ, находящихся въ равныхъ разстоянiяхъ отъ начала и конца ряда, равны между собою, и потому рядъ, выражающiй четную степень и содержащiй нечетное число членовъ ряда, имѣетъ среднiй членъ съ наибольшимъ коэффицiентомъ, и рядъ, выражающiй нечетную степень и содержащiй четное число членовъ, имѣетъ два среднихъ члена съ равными и наибольшими коэффицiентами.

4) Если a сдѣлается количествомъ отрицательнымъ, то въ Ньютоновой формулѣ надобно перемѣнить знаки при членахъ четнаго порядка; именно:

$$(x-a)^n = x^n - nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^n x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2}{1.2.3} a^3 x^{n-3} + \ldots$$

5) Если a есть положительное и $x=a$, то выйдетъ

$$(2x)^n = x^n \left\{ 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + 1 \right\}$$

или

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + 1,$$

т. е. сумма коэффицiентовъ каждой степени равняется 2, возвышенному въ туже степень.

6) Если a отрицательно и $x=a$, то уже

$$o = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots \pm 1,$$

т. е. сумма коэффицiентовъ нечетнаго порядка равняется суммѣ коэффицiентовъ четнаго порядка.

Наконецъ, 7) надобно объяснить случай, въ которомъ Ньютонова теорема кажется ложною. Когда предположимъ, что $n = 0$, тогда x^n и a^n превратятся въ *единицы*, а всѣ прочіе члены въ *нули;* слѣд. $(x + a)^0$ будетъ $= 2$, а не 1, какъ бы слѣдовало по чл. 16. Такое противорѣчіе происходитъ отъ того, что въ этомъ случаѣ коэффиціентъ послѣдняго члена превращается не въ нуль, но въ $\frac{0}{0}$, т. е. дѣлается неопредѣленнымъ: чтобъ опредѣлить значеніе $\frac{0}{0}$, надобно принять въ расчетъ, что n-ая степень отъ $x + a$ имѣетъ $n + 1$ членовъ, и потому если $n = 0$, то всѣхъ членовъ будетъ *одинъ;* слѣд. здѣсь $\frac{0}{0}$ должно $= 0$, отъ чего послѣдній членъ $a^0 = 1$ уничтожается и рядъ, какъ слѣдуетъ, превращается въ 1.

(107). Такова есть Ньютонова теорема для степеней двухчленнаго количества, которыхъ показатели n суть цѣлыя числа: но можно ли распространить ее на степени съ отрицательными и дробными показателями, т. е. можно ли разлагать въ той же формѣ выраженія $(x + a)^{-n}$ или $\frac{1}{(x+a)^n}$, и $(x + a)^{\frac{n}{m}}$ или $\sqrt[m]{(x + a)^n}$? — На этотъ вопросъ должно отвѣчать утвердительно. *Вопервыхъ*, объяснено уже, что такіе показатели подлежатъ въ вычисленіяхъ тѣмъ же правиламъ, по которымъ вычисляются цѣлые показатели. *Вовторыхъ* Эйлеръ далъ для этого нижеслѣдующее строгое доказательство.

Выраженіе, составленное изъ какого нибудь количества такъ, что съ перемѣною его величины перемѣняется величина и самаго выраженія, называется *функціею* этого количества. Функціи изображаются буквами f, F, φ, и пр. которыя *характеризуютъ* функцію, потому что $f(m)$ и $f(n)$ показываютъ, что обѣ функціи изъ количествъ m и n составлены одинаковымъ образомъ; но $f(m)$ и $F(m)$ суть различныя функціи одного и того же количества.

Теперь положимъ, что m и n суть количества неопредѣленныя, т. е. такія, которыхъ величинами можемъ располагать произвольно, принимать ихъ и цѣлыми и дробными, положительными и отрицательными числами, и что

$$f(m) = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \ldots.$$
$$f(n) = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3 + \ldots.$$

Перемноживъ эти выраженія получимъ

$$f(m) \times f(n) = \left(1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots.\right)\left(1 + nz + \frac{n(n-1)}{1.2}z^2 + \ldots.\right).$$

Но какъ видъ этого произведенія не зависитъ отъ величинъ количестъ m и n, то для его опредѣленія примемъ m и n за числа цѣлыя: тогда

$$f(m) = (1+z)^m,\ f(n) = (1+z)^n,$$

и

$$f(m) \times f(n) = (1+z)^{m+n} = 1 + (m+n)z + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}z^2 + \ldots.$$

слѣд. при всякихъ величинахъ m и n, будетъ

$$f(m) \times f(n) = f(m+n) \qquad (1)$$

Изъ этой теоремы выходятъ многія слѣдствія:

1) $f(m) \times f(n) \times f(q) \ldots. = f(m+n+q+\ldots.)$,

и если $m = n = q =$ и пр., то уже, въ предположеніи s производителей,

$$[f(m)]^s = f(sm) \qquad (2)$$

2) Поелику $f(m-n) \times f(n) = f(m)$; слѣд.

$$\frac{f(m)}{f(n)} = f(m-n). \qquad (3)$$

3) Ежели $sm = q$, или $m = \frac{q}{s}$, то формула (2) даетъ

$$\sqrt[s]{[f(q)]} = f\left(\frac{q}{s}\right) \text{ или } [f(q)]^{\frac{1}{s}} = f\left(\frac{q}{s}\right). \qquad (4)$$

Отсюда вообще

$$[f(q)]^{\frac{r}{s}} = f\left(\frac{r}{s}q\right). \qquad (5)$$

4) Наконецъ

$$\frac{[f(m)]^r}{[f(m)]^{r+s}}=[f(m)]^{-s}=\frac{f(rm)}{f(mr+ms)}=f(rm-mr-ms)=f(-ms). \quad (6)$$

Послѣ этого формулы (2), (4) и (6) соединяются въ одну общую

$$[f(m)]^p=f(pm), \quad (7)$$

гдѣ p есть всякое число, цѣлое, дробное, положительное и отрицательное.

На основаніи этихъ теоремъ, получимъ

$$(1+mz+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2+....)^p=1+pmz+\frac{pm(pm-1)}{1.2}z^2+....$$

Сдѣлавъ $m=1$, найдемъ

$$(1+z)^p=1+pz+\frac{p(p-1)}{1.2}z^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}z^3+....$$

Помноживъ этотъ рядъ на a^p и положивъ $zb=a$ или $z=\frac{a}{b}$, дадимъ ему слѣдующій видъ:

$$(a+b)^p=a^p+pa^{p-1}b+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}a^{p-2}b^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}a^{p-3}b^3+....$$

для всякаго показателя p.

Если p есть дробь <1, или число отрицательное, то показатели буквы a возрастаютъ отрицательно; слѣд. $(a+b)^p$ выразится безконечнымъ рядомъ, который только въ томъ случаѣ будетъ вѣренъ, когда члены его уменьшаются. Для этой цѣли видъ ряда должно перемѣнить. Поелику

$$(a+b)^p=a^p\left(\frac{a+b}{a}\right)^p=a^p\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-p}=a^p\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{-p};$$

слѣд.

$$(a+b)^p=a^p(1+\frac{b}{a+b}+\frac{p(p+1)}{1.2}\left(\frac{b}{a+p}\right)^2+....). \quad (B)$$

Для примѣра, положимъ $p=\frac{1}{2}$, $a+b=28$, $a=25$; выйдетъ

$$\sqrt{28}=5(1+\frac{3}{2.28}+\frac{3.3^2}{2^3.28^2}+\frac{5.3^3}{2^4.28^3}+\frac{5.7.3^4}{2^7.28^4}+....).$$

(108). Ежели для начинающихъ это доказательство покажется затруднительнымъ, хотя не безполезно сообщить имъ главныя понятія о функціяхъ и тѣмъ приготовить ихъ къ высшему анализу; то вотъ какимъ образомъ можно повѣрить приложеніе Ньютоновой формулы къ степенямъ съ отрицательными и дробными показателями.

Когда въ Ньютоновой формулѣ перемѣнимъ n на $-n$, тогда получимъ

$$(x+a)^{-n}=x^{-n}-nax^{-n-1}+\frac{n(n+1)}{1.2}a^2.x^{-n-2}+\frac{n)n+1)(n+2)}{1.2.3}a^3.\alpha^{-n-3}+\ldots.$$

Если этотъ рядъ справедливъ, то онъ, помноженный на выраженіе степени $(x+a)^n$, долженъ дать въ произведеніи 1. Вычисленіе очень легко, и потому производство его предоставляется самимъ начинающимъ.

Относительно степеней съ дробными показателями, должно поступить такимъ образомъ: перемѣнивъ въ формулѣ $(x+a)^n$ показатель n на $\frac{\alpha}{m}=i$ и $\frac{\alpha'}{m}=k$, перемножимъ результаты: въ произведеніи надобно будетъ получить опять формулу степени $(x+a)^n$, если предположимъ $i+k=n$. Вычисленіе опять не трудно, и для начинающихъ представитъ полезное упражненіе.

(109). Теорія такъ называемыхъ *фигурныхъ чиселъ* тѣсно соединена съ Ньютоновою теоремою; одну должно считать слѣдствіемъ другой; даже можно подозрѣвать, что *Паскалевъ треугольникъ* привелъ Ньютона къ его теоремѣ, и потому считаемъ не безполезнымъ предложить здѣсь, какъ примѣръ употребленія этой теоремы, по крайней мѣрѣ суммированіе всякихъ степеней членовъ ариѳ. прогрессіи, т. е. основную теорему для изслѣдованій о фигурныхъ числахъ.

Возьмемъ ариѳ. прогрессію, въ которой первый членъ есть a, второй $b=a+d$, третій $c=b+d$, и пр. до послѣдняго члена $q=p+d$, гдѣ p есть членъ предпослѣдній, и изобразивъ чрезъ S_n сумму n-хъ степеней членовъ, S_{n-1} — сумму $n-1$-хъ степеней, и т. д., найдемъ

$$b^{n+1} = a^{n+1} + (n+1)a^n d + \frac{(n+1)n}{1.2} d^2 a^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} d^3 a^{n-2} + \ldots$$

$$c^{n+1} = b^{n+1} + (n+1) d b^n + \frac{(n+1)n}{1.2} d^2 b^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} d^3 b^{n-2} + \ldots$$

и пр.

$$q^{n+1} = p^{n+1} + (n+1) d p^n + \frac{(n+1)n}{1.2} d^2 p^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} d^3 p^{n-2} + \ldots$$

Сумма этихъ рядовъ есть

$$S_{n+1} - a^{n+1} = S_{n+1} - q^{n+1} + (n+1) d (S_n - q^n) + \frac{(n+1)}{1.2} d^2 (S_{n-1} - q^{n-1}) + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} d^3 (S_{n-2} - q^{n-2}) + \ldots$$

Отсюда

$$S_n = q^n + \frac{q^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)d} - \frac{n}{2} d (S_{n-1} - q^{n-1}) - \frac{n(n-1)}{2.3} d^2 (S_{n-2} - q^{n-2}) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} d^3 (S_{n-3} - q^{n-3}) - \text{ и пр.}$$

Эта формула показываетъ, что для опредѣленія суммы членовъ какой нибудь степени, надобно знать суммы предъидущихъ степеней.

Если $n = o$, то

$$S_o = 1 + \frac{q-a}{d} = \frac{q-a+d}{d},$$

$n = 1$, то

$$S_1 = \frac{q^2 - a^2}{2d} + \frac{q+a}{2},$$

$n = 2$, то

$$S_2 = \frac{q^3 - a^3}{3d} + \frac{q^2 + a^2}{2} + \frac{(q-a)d}{6},$$

$n = 3$, то

$$S_3 = \frac{q^4 - a^4}{4d} + \frac{q^3 + a^3}{2} + \frac{(q^2 - a^2)d}{4},$$

и пр.

Положимъ теперь, что $a = 1$, $d = 1$; q будетъ равняться числу членовъ прогрессіи $= m$, и

$$S_o = m,$$

$$S_1 = \frac{m^2 + m}{2},$$

$$S_2 = \frac{m(2m^2 + 3m + 1)}{6},$$

Сравнивъ $2m^2 + 3m + 1$ съ формулою чл. 18, найдемъ

$$x = m,\ n = 2,\ p = 3,\ q = 1,$$

и потому

$$2m^2 + 3m + 1 = (m + 1)(2m + 1),$$

такъ что

$$S_2 = \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6}$$

и пр.

Поелику всякое число въ степени, которой показатель $= o$, представляетъ 1; слѣд. S_o выражаетъ сумму членовъ ряда

1, 1, 1, 1, и пр.

S_1 выражаетъ сумму членовъ ряда натуральныхъ чиселъ

1, 2, 3, 4, 5, 6, и пр.

или S_1 есть формула чиселъ *треугольныхъ*.

S_2 выражаетъ сумму квадратовъ натуральныхъ чиселъ, или S_2 есть сумма ряда чиселъ

1, 4, 9, 16, 25, и пр.

По ней вычисляются кучи ядеръ, состоящія изъ квадратныхъ слоевъ, гдѣ m есть число слоевъ. Если, на примѣръ всѣхъ слоевъ 18, то $m = 18$, и $S_2 = 2109$.

XV.

ГЛАВНЫЯ ФОРМУЛЫ СОСТАВЛЕНІЯ ТАБЛИЦЪ ЛОГАРИѲМОВЪ.

(110). Въ уравненіи

$$y = q^x$$

положимъ $q = 1 + c$, $y = 1 + z$, и найдемъ

$$(1 + c)^{\frac{x}{n}} = 1 + \frac{x}{n}c + \frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n} - 1\right)}{1.2}c^2 + \frac{\frac{x}{n}\left(\frac{x}{n} - 1\right)\left(\frac{x}{n} - 2\right)}{1.2.3}c^3 + \ldots.,$$

$$(1 + z)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}z + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2}z^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(\frac{1}{n} - 2\right)}{1.2.3}z^3 + \ldots..$$

Если примемъ, что произвольное число n есть безконечно-большое, то безконечно-малыя числа $\frac{x}{n}$, $\frac{1}{n}$ могутъ быть опущены сравнительно съ опредѣленными числами 1, 2, 3, и пр. По этому будетъ

$$(1 + c)^{\frac{x}{n}} = 1 + \frac{x}{n}\left(c - \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{3}c^3 - \tfrac{1}{4}c^4 + \tfrac{1}{5}c^5 - \text{и пр.}\right), \qquad (\alpha)$$

$$(1 + z)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 - \text{и пр.}\right).$$

Отсюда

$$x\left(c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \frac{c^4}{4} + \frac{c^5}{5} - \ldots.\right) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots.$$

Теперь, положивъ

$$k = c - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3} - \ldots. = (q - 1) - \frac{(q-1)^2}{2} + \frac{(q-1)^3}{3} - \frac{(q-1)^4}{4} + \ldots \qquad (1)$$

получимъ

$$x = \log y = \log(1 + z) = \frac{1}{k}\left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots.\right). \qquad (2)$$

Изъ выраженія (α) слѣдуетъ, что

$$(1 + c)^{\frac{1}{n}} = q^{\frac{x}{n}} = 1 + \frac{kx}{n},$$

и

$$q^x = y = \left(1 + \frac{kx}{n}\right)^n = 1 + kx + \frac{n(n-1)}{1.2.3} \cdot \frac{k^2x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{k^3x^3}{n^3} + \ldots,$$

и какъ n есть безконечно-большое количество, то

$$q^x = y = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \frac{k^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots \quad (3)$$

По выраженію (2) вычисляется логариѳмъ даннаго числа, а по выраженію (3) — обратно число по его логариѳму.

(111). Если $x = 1$, то формула (3) дастъ

$$q = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} \ldots \quad (4)$$

Этотъ рядъ есть обратный ряду (3). — Когда въ немъ $k = 1$, тогда основаніе логариѳмовъ q изображается постоянно чрезъ e, и найдемъ

$$e = 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{120} + \ldots \quad (5)$$
$$= 2{,}718281828459.$$

Система логариѳмовъ, въ которой e принимается за основаніе, называется *Неперовою* или *гиперболическою*. Логариѳмы, относящіяся къ этой системѣ, почти постоянно изображаются чрезъ *Log* (чл. 95). По этому формула (2) показываетъ, что

$$\log(1 + z) = \frac{1}{k} \operatorname{Log}(1 + z). \quad (6)$$

Если примемъ $1 + z =$ основ. q, то отсюда получимъ

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\operatorname{Log} q} = \log e \text{ (чл. 95)};$$

слѣд. $\frac{1}{k}$ есть *модуль*, который для употребляемой системы логариѳмовъ, т. е. принимающей за основаніе $q = 10$, есть

$$\frac{1}{\operatorname{Log} 10}.$$

(112). Формула (2) даетъ

$$\operatorname{Log}(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots,$$
$$\operatorname{Log}(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \ldots;$$

отсюда

$$\mathrm{Log}(1+z)-\mathrm{Log}(1-z)=\mathrm{Log}\frac{1+z}{1-z}=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\ldots\right).$$

Если сдѣлаемъ $z=\frac{2}{m^3-3m}$, то $\frac{1+z}{1-z}=\frac{(m+2)(m-1)^2}{(m-2)(m+1)^2}$ (чл. 78), и потому

$$\mathrm{Log}(m+2)+2\mathrm{Log}(m-1)-\mathrm{Log}(m-2)-2\mathrm{Log}(m+1)=2\Big[\frac{2}{m^3-3m}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{m^3-3m}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{m^3-3m}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{2}{m^3-3m}\right)^7+\ldots\Big]. \quad (7)$$

Принимая $m=3, 4, 7$, изъ этой формулы составимъ

$$\mathrm{Log}\,5-2\,\mathrm{Log}\,2=2\left[\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9^3}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{9^5}+\ldots\right]=2A,$$

$$3\,\mathrm{Log}\,3-2\,\mathrm{Log}\,5=2\left[\tfrac{1}{26}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{(26)^3}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{(26)^5}+\ldots\right]=2B,$$

$$4\,\mathrm{Log}\,3-4\,\mathrm{Log}\,2=2\left[\tfrac{1}{161}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{(161)^3}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{(161)^3}+\ldots\right]=2C.$$

Изъ этихъ выраженій выходитъ

$$5\,\mathrm{Log}\,5-10\,\mathrm{Log}\,2=10\,A,\ 12\,\mathrm{Log}\,3-8\,\mathrm{Log}\,5=8B,$$

$$12\,\mathrm{Log}\,3-12\,\mathrm{Log}\,2-3\,\mathrm{Log}\,5=6C.$$

Потомъ

$$8\,\mathrm{Log}\,3-8\,\mathrm{Log}\,2-2\,\mathrm{Log}\,5=4C,$$

$$5\,\mathrm{Log}\,3=8\,\mathrm{Log}\,2+4C-2B,$$

$$\mathrm{Log}\,3=8A+6B-4C.$$

Наконецъ

$$\mathrm{Log}\,5=2\,\mathrm{Log}\,2+2A=12A+8B-6C.$$

Послѣ этого

$$\mathrm{Log}\,6=\mathrm{Log}\,2+\mathrm{Log}\,3,$$

$$\mathrm{Log}7=\mathrm{Log}3+2\mathrm{Log}6-2\mathrm{Log}4+2\left[\tfrac{1}{55}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{(55)^3}+\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{(55)^5}+\ldots\right],$$

$$\mathrm{Log}\,8=3\,\mathrm{Log}\,2,\ \mathrm{Log}\,9=2\,\mathrm{Log}\,3,$$

$$\mathrm{Log}\,10=\mathrm{Log}\,5+\mathrm{Log}\,2=2{,}302585092994,$$

и

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{\mathrm{Log}\,10}=0{,}4342944819.$$

КОНЕЦЪ.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

Стран.	Строк.	*Напечатано.*	*Должно читать.*
1	12	особеиные	особенные
4	22	$(\times)$	$(+)$
7	26	$2\sqrt[3]{b}$	$2\sqrt[4]{b}$
27	28	$Q=7,11.13-2$	$Q=7.11.13-2$
38	13	$\frac{512b^6}{37a^3}$	$\frac{512b^6}{27a^9}$
69	19	равдѣлимъ	раздѣлимъ
120	3	къ	въ
120	23	-2000	-20000
124	9	$+ed$	$+ed$ $+bc$
127	15	$\frac{n(n-1)}{1.2}a^nx^{n-2}$	$\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}$

500-00

500.-

Основания
алгебры.
500 г
25-03.