Жозефъ Бертранъ.

АЛГЕБРА.

ДЛЯ ГИМНАЗІЙ И РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ.

Составилъ, преимущественно по Бертрану и по другимъ,

Н. БИЛИВИНЪ,

директоръ С.-Петербургскаго Перваго Реальнаго Училища.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.

Первое изданіе удостоено преміи Императора Петра I.

Изданіе И. И. Биливина.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія М. М. Стасюлевича, Вас. Остр., 5 л., д. 28.

ТИПОГРАФІЯ М. СТАСЮЛЕВИЧА
В. О., 5 ЛИН., 28.

2437

Предисловіе къ русскому второму изданію.

Классическая алгебра знаменитаго французскаго геометра Жозефа Бертрана состоитъ изъ двухъ частей. Первая часть содержитъ матеріалъ, изучаемый въ 3, 4, 5 и 6 классахъ нашихъ гимназій, не заключая, впрочемъ, теоріи квадратныхъ и кубическихъ корней и рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій. Большая часть теорій, изложенныхъ во второй части, не изучается въ нашихъ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ. Предлагаемое второе русское изданіе отчасти представляетъ переводъ нѣкоторыхъ главъ первой части алгебры Бертрана, отчасти—самостоятельное изложеніе. Переведенныя главы суть: первая, вторая, третья и четвертая книги I, причемъ, однако, теорія отрицательныхъ чиселъ изложена самостоятельно; четвертая и пятая книги II; первая и третья книги IV. Все остальное составлено мною. При составленіи я руководствовался Алгеброю Бертрана, Введеніемъ въ теорію функцій отъ одной перемѣнной—Таннери, Алгеброю Комбетта и лекціями по „Введенію въ анализъ" академиковъ Е. И. Золотарева и А. А. Маркова. Все, не входящее въ курсъ гимназій, отмѣчено звѣздочками. Весь этотъ отмѣченный матеріалъ, за исключеніемъ книги V, представляетъ курсъ дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Книга V, посвященная изложенію нѣкоторыхъ признаковъ сходимости рядовъ, способовъ вычисленія логариѳмовъ данныхъ чиселъ и вычисленія чиселъ по даннымъ ихъ логариѳмамъ, и содержащая выводъ обобщеннаго Бинома Ньютона, составлена мною для любознательныхъ учениковъ восьмаго класса гимназій и дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Впрочемъ, нѣкоторые изъ этихъ вопросовъ требуются и при поступленіи, напримѣръ, въ Горный Институтъ.

Предлагаемое изданіе содержитъ 444 упражненія, взятыя изъ алгебръ Бертрана, Комбетта и Тодгентера.

Н. Вилибинъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

КНИГА III.

Уравненія высшихъ степеней.

КНИГА IV.

Прогрессии и Логариѳмы.

* КНИГА V.

Ряды.

АЛГЕБРА.

Предварительныя понятія.

1. Опредѣленіе алгебры.—Предметъ алгебры состоитъ въ *сокращеніи*, *упрощеніи* и, главнымъ образомъ, въ *обобщеніи* рѣшеній вопросовъ, которые могутъ быть предложены относительно чиселъ. Для достиженія этой цѣли алгебра употребляетъ *буквы* и *знаки* дѣйствій.

2. Употребленіе буквъ. — Буквы представляютъ числа. Ариѳметика разсуждаетъ и производитъ дѣйствія надъ опредѣленными числами, назначенными заранѣе; алгебра разсуждаетъ и производитъ дѣйствія надъ буквами a, b, c, . . . , x, y, . . . Введеніе буквъ дѣлаетъ общими всѣ доказательства, даваемыя въ алгебрѣ, и всѣ правила, къ которымъ алгебра приходитъ.

3. Алгебрическіе знаки.—Такъ какъ числа, надъ которыми алгебра производитъ свои дѣйствія, должны оставаться неопредѣленными, то дѣйствія эти не могутъ быть доведены до конца и могутъ только обозначаться при помощи нѣкоторыхъ условныхъ знаковъ.

Знаки, употребляемые въ алгебрѣ, слѣдующіе:

$+$ есть знакъ сложенія; онъ произносится *плюсъ;* $7+5$ означаетъ сумму чиселъ 7 и 5.

$-$ есть знакъ вычитанія; онъ произносится *минусъ;* $7-5$ означаетъ разность чиселъ 7 и 5.

$\times$ есть знакъ умноженія; онъ произносится *умноженное на;* 4×5 означаетъ произведеніе чиселъ 4 и 5. Умноженіе означается также точкою; напримѣръ $4 \, . \, 5$.

Если сомножители произведенія суть буквы, то обыкновенно для обозначенія произведенія не употребляютъ никакого знака и пишутъ одного изъ множителей подлѣ другаго; такъ, напримѣръ, произведеніе буквъ a и b пишутъ въ видѣ ab.

: есть знакъ дѣленія; 5 : 7 означаетъ частное отъ дѣленія числа 5 на число 7.

Дѣленіе означается иногда горизонтальною чертою, надъ которою помѣщаютъ дѣлимое и подъ которою—дѣлителя; $\frac{5}{7}$ означаетъ частное отъ дѣленія 5 на 7.

Произведеніе нѣсколькихъ сомножителей, равныхъ числу a, называется *степенью* числа a. Число сомножителей, равныхъ a, называется *показателемъ* степени. Степень обозначается такъ: пишутъ число a и надъ нимъ нѣсколько правѣе—показателя. Такимъ образомъ a^3 представляетъ $a.a.a$, или кубъ числа a; a^m представляетъ произведеніе m множителей, равныхъ a, или m-овую степень a.

$\sqrt{}$ означаетъ квадратный корень; $\sqrt{9}$ означаетъ квадратный корень изъ числа 9. $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ... означаютъ соотвѣтственно кубическій корень, корень четвертой степени, . . . изъ a. И вообще, $\sqrt[m]{a}$, гдѣ m есть нѣкоторое цѣлое число, означаетъ m-овый корень изъ a, т.-е. такое число, которое, будучи возвышено въ m-ую степень, воспроизведетъ a.

$=$ означаетъ равенство выраженій, помѣщенныхъ направо и налѣво отъ знака; $a=b$ выражаетъ равенство чиселъ, представленныхъ буквами a и b.

$>$ произносится *болѣе чѣмъ;* $a>b$ выражаетъ, что число, представленное буквою a, болѣе числа, обозначеннаго буквою b, т.-е. что число a равно числу b, сложенному съ нѣкоторымъ числомъ, отличнымъ отъ нуля.

$<$ произносится *менѣе чѣмъ;* $a<b$ означаетъ, что число a менѣе числа b, т.-е. что число b равно числу a, сложенному съ нѣкоторымъ числомъ, отличнымъ отъ нуля.

Если нѣкоторое выраженіе заключено въ скобкахъ, то дѣйствія, обозначенныя въ этихъ скобкахъ, предполагаются выполненными, такъ что скобки разсматриваются, какъ одно число.

Выраженіе $19-(4+2-1)$ означаетъ разность между числомъ 19 и числомъ $(4+2-1)$, равнымъ 5.

Выраженіе $(a+b)(c-d)$ представляетъ произведеніе суммы чиселъ a и b на разность c и d.

Если, въ нѣкоторомъ вопросѣ, извѣстныя количества представлены буквами, то аналогичныя количества представляются очень часто тѣми же буквами со значками наверху и внизу.

Пишутъ

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ \ldots .$$

и произносятъ: a, *а примъ, а два, а три*, ... , или пишутъ:

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots$$

и произносятъ: a, a со значкомъ одинъ, a со значкомъ два, a со значкомъ три, ...

Покажемъ теперь на нѣкоторыхъ примѣрахъ, какимъ образомъ знаки дѣйствій и буквы вліяютъ на сокращеніе и обобщеніе рѣшеній.

4. Употребленіе знаковъ, какъ средство сокращенія. — *Требуется раздѣлить* 540^f *между тремя лицами такъ, чтобы часть перваго превышала часть втораго на* 48^f *и часть втораго превышала часть третьяго на* 75^f.

Задача была бы рѣшена, если бы знали часть третьяго лица. Положимъ, что эта часть найдена. Назовемъ ее буквою x. Условія задачи позволяютъ намъ составить слѣдующую таблицу:

Часть третьяго лица		x
Часть втораго		$x+75$.
Часть перваго	$x+75+48$, или	$x+123$.
Сумма трехъ частей	$x+x+75+x+123$, или	$3x+198$.
Имѣемъ	$3x+198=540$.	

Отнявъ отъ двухъ равныхъ количествъ $3x+198$ и 540 число 198, мы получимъ равные остатки $3x$ и 342, такъ что

$$3x = 342,$$

откуда

$$x = \frac{342}{3} = 114.$$

Этотъ примѣръ показываетъ, насколько сократилось и облегчилось рѣшеніе вопроса введеніемъ знаковъ и буквы x.

5. Употребленіе буквъ, какъ средство обобщенія. Изложенная метода рѣшенія предъидущаго вопроса дала результатъ въ такой формѣ, который не указываетъ всѣхъ тѣхъ дѣйствій, которыя мы произвели надъ числами данными для полученія числа искомаго. Если бы данныя вопроса были измѣнены, то, для полученія рѣшенія, мы должны были бы снова повторить тѣ разсужденія, которыя уже сдѣлали. Обозначивъ же данныя вопроса буквами, мы получимъ результатъ въ формѣ, указывающей намъ путь для рѣшенія всѣхъ вопросовъ того рода, къ которому принадлежитъ разсмотрѣнная задача.

Назовемъ буквою n число, данное для раздѣленія; пусть буквы

d_1 и d_2 означаютъ соотвѣтственно избытки первой и второй частей надъ третьею. Повторивъ надъ этими буквами разсужденія § 4, мы образуемъ слѣдующую таблицу:

Третья часть	x
Вторая часть	$x+d_2$
Первая часть	$x+d_2+d_1$
Сумма трехъ частей	$3x+2d_2+d_1$.

Условіе задачи даетъ намъ равенство:

$$3x+2d_2+d_1=n.$$

Вычитая d_1 и $2d_2$ изъ обѣихъ частей, получимъ:

$$3x=n-d_1-2d_2,$$

откуда, раздѣливъ на 3,

$$x=\frac{n-d_1-2d_2}{3}. \qquad [1]$$

Результатъ этотъ показываетъ, что *для нахожденія третьей части нужно вычесть послѣдовательно изъ числа, даннаго для раздѣленія, первую разность и удвоенную вторую и полученный остатокъ раздѣлить на* 3.

Получается такимъ образомъ *общее правило* для рѣшенія всѣхъ вопросовъ одного и того-же рода, т.-е. всѣхъ тѣхъ вопросовъ, которые отличаются другъ отъ друга не условіями, а только численными значеніями числа, даннаго для раздѣленія, и послѣдовательными разностями его частей.

6. Алгебрическія формулы.—Совокупность буквъ, соединенныхъ знаками дѣйствій, называется алгебрическимъ выраженіемъ или *алгебрическою формулою.* Выраженіе [1] есть алгебрическая формула. Она указываетъ рядъ дѣйствій, которыя нужно выполнить надъ данными вопроса для полученія искомаго, если эти данныя представлены буквами.

Алгебру называютъ иногда *наукою формулъ.*

7. Польза формулъ.—То преимущество, которое вытекаетъ изъ заключенія въ одной общей формулѣ безчисленнаго числа частныхъ случаевъ, очевидно само по себѣ. Не безполезно, однако, выяснить пользу формулъ еще на нѣкоторыхъ примѣрахъ. Такъ, напримѣръ, вмѣсто того, чтобы говорить: *сумма двухъ чиселъ не зависитъ отъ того порядка, въ какомъ они складываются; произведеніе двухъ сомножителей не зависитъ отъ порядка ихъ перемноженія; произведеніе двухъ степеней одного и того же числа равно степени того же числа,* *показатель которой равенъ суммѣ показателей данныхъ степеней*, мы можемъ писать:

$$a+b=b+a,\ ab=ba,\ a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

Для всякаго, знакомаго съ алгебрическимъ языкомъ, теоремы одинаково хорошо выражены и этими формулами и написанными выше фразами.

8. Классификація формулъ.—Алгебрическія выраженія могутъ заключать указаніе шести дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степени, извлеченія корней. Такимъ образомъ

$$\frac{13a^3b(2c+d)\sqrt{g}}{a-\sqrt{b}}$$

представляетъ алгебрическое выраженіе. Выраженіе называется *раціональнымъ*, если оно не заключаетъ указанія извлеченія корня. Изъ двухъ выраженій:

$$\frac{7(x+3)(2+b)}{5c},\ \sqrt[3]{a^2+b^2}-\sqrt{a+b+c}+k$$

первое—раціонально, второе—*ирраціонально*. Алгебрическое выраженіе называется *одночленомъ* или *мономомъ*, если послѣднее дѣйствіе, производимое въ немъ, не есть ни сложеніе, ни вычитаніе. *Коэффиціентомъ* называется численный множитель, помѣщенный передъ одночленомъ.

Выраженія:

$$\frac{3}{4}(a+b)c^2,\ \frac{7(a^3-b)}{a^2+b^2+c^2}$$

суть *одночлены*, множитель $\frac{3}{4}$ есть коэффиціентъ.

Если одночленъ не имѣетъ коэффиціента, если буква не обладаетъ показателемъ, то этотъ одночленъ и эта буква разсматриваются, какъ одночленъ и буква, имѣющіе соотвѣтственно коэффиціентъ и показатель равными 1.

Многочленомъ или *полиномомъ* называется формула, представляющая соединеніе одночленовъ знаками сложенія и вычитанія. Одночлены называются *членами* многочлена.

Въ полиномѣ

$$\frac{a^2}{b}-\sqrt{a}+8(a+b)^2-3(a+b^2)$$

члены суть:

$$\frac{a}{b},\ \sqrt{a},\ 8(a+b)^2,\ 3(a+b^2).$$

Члены, которымъ предшествуетъ знакъ $+$, называются *положительными*; члены, предшествуемые знакомъ $-$, называются *отрицательными*. Членъ, передъ которымъ не помѣщенъ знакъ, разсматривается, какъ положительный. Въ предъидущемъ полиномѣ первый и третій члены—положительные, второй и четвертый—отрицательные. Полиномъ называется: *двучленомъ* или *биномомъ*, если онъ состоитъ изъ двухъ членовъ; *трехчленомъ*, если состоитъ изъ трехъ членовъ, и т. д.

Измѣреніемъ одночлена, представляющаго произведеніе степеней буквъ, называется сумма показателей этихъ буквъ. Выраженіе $7a^3b^2c$ есть одночленъ 6-го измѣренія. Полиномъ, составленный изъ одночленовъ, представляющихъ произведенія степеней буквъ, называется *однороднымъ*, если всѣ члены его имѣютъ одно измѣреніе; это измѣреніе называется *измѣреніемъ однородности;* такъ, напримѣръ, полиномъ $5x^4-3abx^2+4ac^2x-2a^2bc$ есть однородный полиномъ 4-го измѣренія.

9. Численное значеніе. *Численнымъ значеніемъ* алгебрическаго выраженія называется число, которое найдемъ, если, замѣнивъ буквы опредѣленными числами, выполнимъ послѣдовательно всѣ дѣйствія, указанныя въ выраженіи. *Привести* выраженіе *къ числу*, значитъ найти численное значеніе выраженія. Численное значеніе многочлена разсматривается, какъ разность между суммою численныхъ значеній членовъ положительныхъ и суммою численныхъ значеній членовъ отрицательныхъ. Если случится, что вторая сумма превыситъ первую, то полиномъ для назначенныхъ значеній буквъ теряетъ смыслъ. Мы увидимъ скоро, какимъ образомъ должно разсматривать подобные результаты.

10. Подобные члены. Ихъ приведеніе. Члены, образующіе многочленъ, называются подобными, если они или совершенно одинаковы, или отличаются другъ отъ друга только коэффиціентами. *Подобные члены всегда могутъ быть приведены къ одному.* И въ самомъ дѣлѣ, если мы встрѣтимъ въ полиномѣ два положительныхъ члена, $+7a^2b+9a^2b$ напримѣръ, то они могутъ быть замѣнены однимъ $+16a^2b$; вмѣсто двухъ отрицательныхъ членовъ $-7a^2b-9a^2b$ можно поставить $-16a^2b$; если знаки членовъ противоположны, какъ напримѣръ $+9a^2b-7a^2b$ или $+7a^2b-9a^2b$, то, очевидно, эти члены могутъ быть приведены къ $+2a^2b$, или къ $-2a^2b$.

И вообще, для приведенія нѣсколькихъ подобныхъ членовъ къ одному составляемъ сумму коэффиціентовъ членовъ положительныхъ и сумму коэффиціентовъ членовъ отрицательныхъ; вычитаемъ большую сумму изъ меньшей, передъ разностью ставимъ знакъ большей суммы и, наконецъ, приписываемъ къ полученному коэффиціенту буквенную часть, общую всѣмъ членамъ.

Полиномъ

$$5a^3b^2 + 12a^3b^2 - 6a^3b^2 - a^3b^2 - 4ab^3 - 7ab^3 + 2ab^3$$

приводится къ полиному

$$10a^3b^2 - 9ab^3.$$

Полиномъ

$$-8(a-1) + (a-1)n^2 + 4(a-1) + 4a - 1 - a - 2(a-1) - \frac{3}{8}(a-1)n^2 - 7$$

приводится къ полиному

$$-6(a-1) + \frac{5}{8}(a-1)n^2 + 3a - 8.$$

КНИГА I.

Алгебрическое исчисленіе.

11. Выраженія тождественныя. Два выраженія называются *тождественными*, если они даютъ равныя численныя значенія при замѣнѣ однѣхъ и тѣхъ же буквъ, входящихъ въ эти выраженія, одними и тѣми же числами, но совершенно произвольными. Выраженія $(a+b)^2$ и $a^2+2ab+b^2$ тождественны между собою; выраженія $4x+8$ и $2x+16$ не тождественны, ибо хотя они и даютъ одинаковыя численныя значенія при $x=4$, но не даютъ равныхъ численныхъ значеній при всякомъ значеніи буквы x.

12. Алгебрическія дѣйствія. *Алгебрическимъ дѣйствіемъ называется преобразованіе формулы дѣйствія въ другую, тождественную данной.*

Замѣняя, напримѣръ, формулу $a^2 \cdot a^3$ формулою a^5 и выраженіе $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ выраженіемъ $a+b$, мы производимъ алгебрическія дѣйствія. Говорятъ иногда, что *выполнили* умноженіе a^2 на a^3 и извлеченіе квадратнаго корня изъ выраженія $a^2+2ab+b^2$.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Алгебраическія сложеніе и вычитаніе.

---

§ I. Сложеніе и вычитаніе одночленовъ.

13. Сложеніе одночленовъ. *Суммою* одночленовъ называется многочленъ, который получимъ, соединивъ данные одночлены знакомъ $+$.

Если эта сумма содержитъ подобные одночлены, то они могутъ быть соединены въ одинъ

Примѣръ 1. Сумма одночленовъ $4a$, $3b$, $5c$, $2a$, $6b$, $8c$ равна

$$4a + 3b + 5c + 2a + 6b + 8c$$

и приводится къ многочлену

$$6a + 9b + 13c.$$

Примѣръ 2. Сумма одночленовъ

$$2(a + nx^2),\ 3(a + n)x^2,\ 8(a + n)x^2,\ 4(a + nx)^2,\ 7(a + nx^2),\ (a + xn)^2$$

равна

$$2(a + nx^2) + 3(a + n)x^2 + 8(a + n)x^2 + 4(a + nx)^2 + 7(a + nx^2) + (a + nx)^2$$

и приводится къ многочлену

$$9(a + nx^2) + 11(a + n)x^2 + 5(a + nx)^2.$$

14. Вычитаніе одночленовъ. *Разностью* двухъ одночленовъ называется двучленъ, который получимъ, соединивъ данные одночлены знакомъ $-$.

Если эти одночлены подобны, то они могутъ быть приведены къ одному.

Примѣръ. Разность одночленовъ $\sqrt{7a}$ и $\sqrt[3]{3b}$ равна

$$\sqrt{7a}-\sqrt[3]{3b}.$$

Разность одночленовъ: $4(2p^3-1)$ и $2(2p^3-1)$ равна многочлену

$$4(2p^3-1)-2(2p^3-1)$$

и преобразовывается въ тождественный одночленъ

$$2(2p^3-1).$$

§ II. Сложеніе и вычитаніе многочленовъ.

15. Предложенія, на которыхъ основываются сложеніе и вычитаніе многочленовъ. Преобразованія формулъ сложенія и вычитачія многочленовъ основываются на слѣдующихъ предложеніяхъ:

1°. *Численное значеніе суммы не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ складываются ея слагаемыя.*

2°. *Численное значеніе многочлена не зависитъ отъ того порядка, въ которомъ написаны его члены.* Оно равно, въ самомъ дѣлѣ, избытку суммы членовъ положительныхъ надъ суммою членовъ отрицательныхъ.

3°. *Для того, чтобы прибавить къ числу сумму нѣсколькихъ чиселъ, достаточно прибавить къ этому числу всѣ слагаемыя послѣдовательно.*

4°. *Для того, чтобы прибавить къ какому ни есть числу разность двухъ чиселъ, достаточно прибавить къ нему уменьшаемое и изъ результата вычесть вычитаемое.*

5°. *Для того, чтобы вычесть изъ числа сумму чиселъ, достаточно вычесть изъ этого числа всѣ слагаемыя послѣдовательно.*

6°. *Для того, чтобы вычесть изъ числа a разность $(b-c)$, достаточно прибавить къ числу a вычитаемое c и изъ результата отнять уменьшаемое b.*

И въ самомъ дѣлѣ, искомая разность не измѣнится, если мы прибавимъ число c и къ уменьшаемому a и къ вычитаемому $(b-c)$, такъ что

$$a-(b-c)=(a+c)-(b-c+c)=(a+c)-b=a+c-b.$$

Предложенія эти выражаются слѣдующими равенствами:

$$a+b+c+d=d+c+b+a, \tag{1}$$
$$a-b+c-d=c+a-b-d, \tag{2}$$
$$a+(b+c+d)=a+b+c+d, \tag{3}$$
$$a+(b-c)=a+b-c, \tag{4}$$
$$a-(b+c)=a-b-c, \tag{5}$$
$$a-(b-c)=a+c-b. \tag{6}$$

16. Сложеніе многочленовъ. *Формула сложенія многочленовъ тождественна многочлену, члены котораго суть всѣ члены данныхъ многочленовъ, написанные съ тѣми знаками, съ какими они входятъ въ данные многочлены.*

Пусть требуется сложить два многочлена:

$$m-n+p-q+v-s \quad \text{и} \quad a-b+c-d-e+f.$$

Пишемъ формулу:

$$(m-n+p-q+v-s)+(a-b+c-d-e+f).$$

Формула эта называется *суммою* данныхъ многочленовъ. Преобразуемъ ее. Второй многочленъ тождественъ двучлену:

$$(a+c+f)-(b+d+e),$$

а потому преобразуемая сумма тождественна выраженію:

$$(m-n+p-q+v-s)+[(a+c+f)-(b+d+e)],$$

или, на основаніи четвертаго предложенія, выраженію:

$$(m-n+p-q+v-s)+(a+c+f)-(b+d+e),$$

или, на основаніи предложеній третьяго и пятаго, выраженію:

$$(m-n+p-q+v-s)+a+c+f-b-d-e.$$

Отбросивъ скобки, помѣщенныя въ началѣ, и измѣнивъ порядокъ членовъ въ полученномъ многочленѣ, найдемъ:

$$m-n+p-q+v-s+a-b+c-d-e+f.$$

Это преобразованіе мы и хотѣли доказать.

17. Вычитаніе многочленовъ. *Формула вычитанія двухъ многочленовъ тождественна многочлену, члены котораго суть члены уменьшаемаго многочлена, написанные съ тѣми же знаками, и члены вычитаемаго многочлена, написанные со знаками противоположными.*

Даны два многочлена:

$$m-n+p-q+v-s \quad \text{и} \quad a-b+c-d-e+f.$$

Формула

$$(m-n+p-q+v-s)-(a-b+c-d-e+f)$$

называется *разностью* многочленовъ. Преобразуемъ ее.

Вычитаемый полиномъ тождественъ разности

$$(a+c+f)-(b+d+e),$$

а потому преобразуемая формула можетъ написаться такъ:

$$(m-n+p-q+v-s)-[(a+c+f)-(b+d+e)],$$

или, на основаніи предложеній шестаго, третьяго и пятаго,

$$\begin{aligned}(m-n+p-q+v-s)+(b+d+e)-(a+c+f)=\\=(m-n+p-q+v-s)+b+d+e-a-c-f.\end{aligned}$$

Отбросивъ скобки въ началѣ и перемѣнивъ порядокъ членовъ, найдемъ:

$$m-n+p-q+v-s-a+b-c+d+e-f.$$

Преобразованіе это мы и хотѣли доказать.

18. *Примѣры.* На практикѣ многочлены, данные для сложенія или вычитанія, пишутъ одинъ подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены, если таковые существуютъ, помѣщались въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и потомъ производятъ совмѣстно и преобразованіе, и приведеніе.

1°. Выполнить сложеніе:

$$(4x^3-5a^2x-8a^3-4ax^2)+(2a^2x-3x^3+7a^3)+(9a^3-5ax^2+5x^3).$$

Измѣнивъ приличнымъ образомъ порядокъ членовъ, располагаемъ дѣйствіе такимъ образомъ:

$$\begin{array}{rrrr} 4x^3 & -4ax^2 & -5a^2x & -8a^3 \\ -3x^3 & & +2a^2x & +7a^3 \\ 5x^3 & -5ax^2 & & +9a^3 \\ \hline \end{array}$$

и имѣемъ: $6x^3-9ax^2-3a^2x+8a^3.$

2°. Выполнить вычитаніе:

$$(7a^3b-8a^2b^2+5a^4-2b^4)-(2a^4-4ab^3+4a^3b-2b^4).$$

Пишемъ, измѣнивъ знаки членовъ вычитаемаго полинома,

$$\begin{array}{rrrrr} 5a^4 & +7a^3b & -8a^2b^2 & & -2b^4 \\ -2a^4 & -4a^3b & & +4ab^3 & +2b^4 \\ \hline \end{array}$$

и имѣемъ: $3a^4+3a^3b-8a^2b^2+4ab^3.$

§ III. Отрицательныя числа.

19. Въ ариѳметикѣ мы получили представленія о числѣ цѣломъ, какъ результатѣ счета, и числѣ дробномъ, которое ввели для изображенія частнаго въ тѣхъ случаяхъ, когда частное это не способно выражаться цѣлымъ числомъ. Первое дѣйствіе, производимое

въ ариѳметикѣ надъ числами, есть *сложеніе*. При помощи этого дѣйствія ищется *сумма* чиселъ. Мы знаемъ, что сумма какого ни есть числа слагаемыхъ, цѣлыхъ или дробныхъ, выражается числомъ цѣлымъ или дробнымъ. Отсюда слѣдуетъ, что понятіе о суммѣ не требуетъ отъ насъ никакихъ новыхъ представленій о числѣ.

Второе дѣйствіе, производимое въ ариѳметикѣ надъ числами, есть *вычитаніе*. При помощи этого дѣйствія ищется *разность* двухъ чиселъ a и b, т.-е. такое третье число, которое, будучи сложено съ b, даетъ a. Это понятіе о разности требуетъ для возможности существованія подобной разности, чтобы число a было не менѣе числа b. И въ самомъ дѣлѣ, всякое число, будучи сложено съ числомъ b, даетъ въ суммѣ число, не меньшее b.

Отсюда слѣдуетъ, что, разсматривая формулу

$$a - b,$$

мы или должны будемъ предполагать, что число a не менѣе числа b, т.-е. нарушить *общность* формулы, или, желая сохранить эту общность, ввести числа новой природы, подобно тому, какъ мы вводимъ числа дробныя для изображенія частнаго въ тѣхъ случаяхъ, когда частное это не способно выражаться цѣлымъ числомъ. Мы введемъ *отрицательныя числа*.

Назовемъ тѣ цѣлыя и дробныя числа, понятіе о которыхъ составлено въ ариѳметикѣ, числами *положительными*. Передъ положительными числами ставятъ иногда, когда это понадобится, знакъ $+$.

Отрицательнымъ числомъ мы будемъ называть *алгебрическій символъ*:

$$-d,$$

гдѣ d произвольное ариѳметическое число, при чемъ число d будемъ называть *модулемъ* отрицательнаго числа. Модулемъ положительнаго числа будемъ называть само число.

Условимся считать численное значеніе разности $a - b$ въ тѣхъ случаяхъ, когда число a менье числа b на число d, отрицательнымъ числомъ, модуль котораго есть разность $b - a$, равная d. Итакъ, *условимся* въ слѣдующемъ равенствѣ:

$$a - b = -(b - a) = -d.$$

Напримѣръ,

$$3 - 7 = -(7 - 3) = -4, \quad \frac{3}{2} - \frac{21}{4} = -\left(\frac{21}{4} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{15}{4}.$$

Два отрицательныхъ числа будемъ называть равными тогда и только тогда, когда ихъ модули равны. Отсюда слѣдуетъ, что

$$a - b = (a \pm p) - (b \pm p).$$

Соглашеніе это не противорѣчитъ тому основному свойству разности, по которому она не мѣняется, когда уменьшаемое и вычитаемое увеличиваются или уменьшаются на одно и то-же число.

20. Введя отрицательныя числа въ алгебру, мы будемъ производить надъ ними дѣйствія.

Обратимся къ сложенію.

Условимся называть:

1) *Суммою* числа положительнаго и числа отрицательнаго разность между числомъ положительнымъ и модулемъ отрицательнаго числа.

2) *Суммою* числа отрицательнаго и числа положительнаго разность между положительнымъ числомъ и модулемъ числа отрицательнаго.

3) *Суммою* двухъ отрицательныхъ чиселъ отрицательное число, модуль котораго равенъ суммѣ модулей слагаемыхъ. Опредѣленія эти выражаются слѣдующими тремя *условными* равенствами:

$$a+(-b)=a-b \tag{2}$$
$$-b+a=a-b \tag{3}$$
$$-a+(-b)=-(a+b) \tag{4}$$

Равенства эти и то соглашеніе, которое мы сдѣлали относительно равныхъ отрицательныхъ чиселъ, показываютъ, что значеніе суммы двухъ слагаемыхъ не зависитъ отъ порядка слагаемыхъ.

Примѣры:

$$3+(-7)=3-7=-4,\ (-6)+11=11-6=5,$$
$$(-8)+(-7)=-(8+7)=-15,\ -6+5=5-6=-1.$$

Равенство (2) показываетъ, что понятіе о разности $a-b$, выражаемое равенствомъ (1), не противорѣчитъ тому понятію о разности, которое мы имѣемъ въ ариѳметикѣ. И въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы равенство (1) не противорѣчило этому понятію, необходимо и достаточно, чтобы

$$b+(-d)=a.$$

Это же равенство имѣетъ мѣсто, ибо, на основаніи равенства (2), можемъ писать:

$$b+(-d)=b-d=b-(b-a)=b-b+a=a.$$

21. Вычитаніе отрицательныхъ чиселъ. Перейдемъ теперь къ *вычитанію.*

Разсмотримъ здѣсь такіе случаи.

1°. *Разностью чиселъ a и $(-b)$ назовемъ число, которое, будучи сложено съ $(-b)$, даетъ a.*

Искомое число x должно, по опредѣленію, удовлетворять равенству:

$$x+(-b)=a,$$

которое, на основаніи (2), можетъ написаться такъ:

$$x-b=a.$$

Равенство это говоритъ, что искомое число x есть число положительное, равное $a+b$.

2°. *Разностью чиселъ* $(-a)$ *и* b *назовемъ число, которое, будучи сложено съ* b, *дастъ* $(-a)$.

Искомое число x должно, по опредѣленію, удовлетворять равенству:

$$x+b=-a.$$

Число x должно быть числомъ отрицательнымъ, ибо, въ противномъ случаѣ, сумма положительныхъ чиселъ x и b была бы положительная, а не отрицательная $(-a)$. Назовемъ модуль этого числа буквою y, такъ что $x=-y$.

Предъидущее равенство напишется такъ: $-y+b=-a$ или, на основаніи (3), $b-y=-a$.

Результатъ этотъ показываетъ, что число y превышаетъ число b на число a, т.-е. $y=a+b$, слѣд. $x=-(a+b)$.

3° *Разностью отрицательныхъ чиселъ* $-a$ *и* $-b$ *называется число* x, *которое, будучи сложено съ* $-b$, *даетъ* $-a$.

Искомое число x должно, по опредѣленію, удовлетворять равенству:

$$x+(-b)=-a. \qquad (a)$$

Число x можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ. Положимъ сперва, что x есть число положительное.

Тогда, на основаніи (2), получимъ: $x-b=-a$.

Равенство это говоритъ, что число x менѣе числа b на число a, т.-е. $x=b-a$,

или, на основаніи (3), $\qquad x=-a+b.$

Положимъ теперь, что x есть число отрицательное. Назовемъ его модуль буквою y, такъ что $x=-y$.

Равенство (a) перепишется такъ: $(-y)+(-b)=-a$,

или, на основаніи (4), $\qquad -(y+b)=-a,$

отсюда: $\qquad y+b=a$, т.-е. $y=a-b$,

и, слѣдовательно,

$$x = -(a-b) = b - a = -a + b.$$

Полученные нами результаты даютъ слѣдующія равенства, выражающія разности чиселъ положительныхъ и отрицательныхъ:

$$a - (-b) = a + b \tag{5}$$

$$-a - b = -(a+b) \tag{6}$$

$$-a - (-b) = -a + b = b - a. \tag{7}$$

Примѣры.

$8 - (-6) = 8 + 6 = 14$, $-6 - 9 = -(6+9) = -15$, $-5 - (-7) = -5 + 7 = 7 - 5 = 2$, $-5 - (-2) = -5 + 2 = 2 - 5 = -3$.

*** 22** Условимся въ слѣдующихъ равенствахъ:

$$-b = -(+b),\ +(-b) = -b,\ -(-b) = b, \tag{8}$$

гдѣ b есть число положительное.

Эти условныя равенства могутъ быть однако доказаны, если символы:

$$-(+b),\ +(-b) \text{ и } -(-b)$$

разсматривать соотвѣтственно, какъ результаты дѣйствій:

$$0 - (+b),\ 0 + (-b) \text{ и } 0 - (-b).$$

И въ самомъ дѣлѣ, сдѣлавъ въ предъидущихъ формулахъ число a равнымъ нулю, получимъ:

$$0 - b = -(b - 0) = -b,\ 0 + (-b) = 0 - b = -b,\ 0 - (-b) = 0 + b = b.$$

Равенства (8) обобщаются и для отрицательнаго b. Положимъ, что число b отрицательное. Назовемъ модуль его буквою c, такъ что $b = -c$.

Имѣемъ:

$$-(+b) = -[+(-c)] = -(-c) = -b.$$

$$+(-b) = +[-(-c)] = +c = -(-c) = -b.$$

$$-(-b) = -[-(-c)] = -c = b.$$

*** 23. Обобщенія.** Займемся теперь обобщеніемъ равенствъ **§§ 19, 20 и 21.**

Обратимся сперва къ равенству (I), которое имѣло мѣсто для положительныхъ a и b, причемъ число a было менѣе числа b.

Положимъ:

1) a и b суть числа положительныя, причемъ a болѣе b.

Пусть

$$a - b = d,\ b - a = -d.$$

Можемъ писать:

$$a - b = -(-d) = -(b - a).$$

2) a отрицательное, модуль котораго есть c, такъ что $a = -c$; b положительное.

Имѣемъ:

$$a - b = -c - b = -(b + c) = -[b - (-c)] = -(b - a).$$

3) a положительное; b отрицательное, модуль котораго есть c, такъ что $b = -c$.

Имѣемъ:

$$a - b = a - (-c) = a + c = -[-(a + c)] = -(-c - a) = \\ = -(b - a).$$

4) a и b отрицательныя, модули которыхъ соотвѣтственно суть c и d, такъ что

$$a = -c,\ b = -d.$$

Имѣемъ:

$$a - b = -c - (-d) = -c + d = d - c = -(c - d) = -[-a + \\ + (-d)] = -(-a + b) = -(b - a).$$

Итакъ, равенство $a - b = -(b - a)$ имѣетъ мѣсто при всякихъ a и b.

*** 24. Обобщенія.** Перейдемъ къ равенствамъ (5), (6) и (7).

Положимъ сперва, что a отрицательное, модуль котораго есть c, такъ что $a = -c$.

Имѣемъ:

$$a - (-b) = (-c) - (-b) = -c + b = a + b.$$
$$-a - b = -(-c) - b = c - b = -(b - c) = -[b + \\ + (-c)] = -(b + a) = -(a + b).$$
$$-a - (-b) = c - (-b) = c + b = -a + b.$$

Предположимъ, что a положительное; b отрицательное, модуль котораго есть c, такъ что $b = -c$.

Имѣемъ:

$$a-(-b)=a-c=a+(-c)=a+b.$$
$$-a-b=-a-(-c)=-a+c=c-a=-(a-c)=$$
$$=-[a+(-c)]=-(a+b).$$
$$-a-(-b)=-a-c=-(a+c)=-a+(-c)=-a+b.$$

Положимъ, что a и b суть числа отрицательныя, равныя соотвѣтственно $(-c)$ и $(-d)$, гдѣ c и d суть соотвѣтственно модули чиселъ a и b.

Имѣемъ:

$$a-(-b)=-c-d=-c+(-d)=a+b.$$
$$-a-b=c-(-d)=c+d=-[-(c+d)]=-[(-c)+$$
$$+(-d)]=-(a+b).$$
$$-a-(-b)=c-d=c+(-d)=-a+b.$$

Отсюда заключаемъ, что наши равенства справедливы для всевозможныхъ значенiй a и b.

* 25. Обратимся къ формуламъ (2), (3) и (4).

Положимъ сперва, что a отрицательное $=-c$, гдѣ c есть модуль a; b положительное.

Имѣемъ:

$$a+(-b)=-c+(-b)=-(c+b)=-[-a+b]=$$
$$=-(b-a)=a-b.$$
$$(-b)+a=-b+(-c)=-(b+c)=-[b+(-a)]=$$
$$=-(b-a)=a-b.$$
$$(-a)+(-b)=c+(-b)=c-b=-(b-c)=-(b+a)=$$
$$=-(a+b).$$

Положимъ, что a положительное, b отрицательное $=-c$, гдѣ c есть модуль b.

Имѣемъ:

$$a+(-b)=a+c=a-(-c)=a-b.$$
$$(-b)+a=c+a=a+c=a-(-c)=a-b.$$
$$(-a)+(-b)=-a+c=-(a-c)=-[a+(-c)]=$$
$$=-(a+b).$$

Пусть, наконецъ, a отрицательное $=-c$, b отриц. $=-d$, гдѣ c и d суть соотвѣтственно модули чиселъ a и b.

Имѣемъ:

$$a+(-b)=-c+d=-c-(-d)=-c-b=a-b.$$
$$(-b)+a=d+(-c)=-c+d=-c-(-d)=a-b.$$
$$(-a)+(-b)=c+d=-[-(c+d)]=-[(-c)+$$
$$+(-d)]=-(a+b).$$

Отсюда заключаемъ, что равенства (2), (3) и (4) остаются справедливыми для всевозможныхъ значеній a и b.

26. Обобщеніе преобразованій. Введя отрицательныя числа въ Алгебру, займемся обобщеніемъ тѣхъ преобразованій, которыя мы имѣли выше.

Опредѣляя численное значеніе многочлена, мы сказали, что многочленъ теряетъ смыслъ для такихъ значеній буквъ, при которыхъ сумма численныхъ значеній положительныхъ членовъ будетъ менѣе суммы численныхъ значеній членовъ отрицательныхъ.

Введя отрицательныя числа, мы можемъ сказать, что въ тѣхъ случаяхъ, когда сумма численныхъ значеній членовъ отрицательныхъ превышаетъ сумму численныхъ значеній членовъ положительныхъ, численное значеніе многочлена есть отрицательное число, модуль котораго есть разность между суммою численныхъ значеній членовъ отрицательныхъ и суммою численныхъ значеній членовъ положительныхъ.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ мы можемъ писать:

$$a-b+c-d+e-f=(a+c+e)-(b+d+f).$$

27. Покажемъ, что преобразованіе

$$a+(b-c)=a+b-c,$$

имѣвшее прежде смыслъ для $b \geqslant c$, останется справедливымъ и для $b<c$.

И въ самомъ дѣлѣ, пусть $b-c$ есть отрицательное число, модуль котораго есть d, такъ что

$$b-c=-d.$$

Имѣемъ:

$$a+(b-c)=a+(-d)=a-d=a-(c-b)=a+b-c,$$

т.-е. преобразованіе остается справедливымъ.

28. Разсмотримъ преобразованіе:

$$a-(b-c)=a+c-b.$$

Положимъ, что $b-c$ есть отрицательное число, модуль котораго есть d, такъ что

$$b-c=-d.$$

Имѣемъ:

$$a-(b-c)=a-(-d)=a+d=a+(c-b)=a+c-b,$$

т.-е. преобразованіе остается справедливымъ.

*** 29.** Эти преобразованія продолжаютъ имѣть мѣсто и въ тѣхъ случаяхъ, когда числа a, b, c, или нѣкоторыя изъ нихъ, сами по себѣ отрицательныя.

Пусть, напримѣръ, b есть отрицательное число, модуль котораго есть m, такъ что $b=-m$.

Имѣемъ:

$$a+(b-c)=a+(-m-c)=a+[-(m+c)]=a-(m+c)=$$
$$=a-m-c=a+(-m)-c=a+b-c.$$

Далѣе,

$$a-(b-c)=a-[-(m+c)]=a-[-(c+m)]=a+$$
$$+(c+m)=a+c+m=a+c-b.$$

*** 30.** Обобщивъ предъидущія преобразованія, мы имѣемъ право утверждать, что правила преобразованія суммъ и разностей многочленовъ остаются справедливыми и въ тѣхъ случаяхъ, когда члены многочленовъ суть числа отрицательныя.

Самыя правила получаютъ, при помощи введенія отрицательныхъ чиселъ, болѣе простое формулированіе. И въ самомъ дѣлѣ, мы имѣли:

$$A+(a-b+c-d+e-f)=A+a-b+c-d+e-f.$$

Принимая во вниманіе, что слагаемый многочленъ $a-b+c-$ $-d+e-f$ и сумма могутъ быть написаны соотвѣтственно въ видѣ:

$$a+(-b)+c+(-d)+e+(-f)$$
$$A+a+(-b)+c+(-d)+e+(-f),$$

приходимъ къ слѣдующему правилу сложенія многочленовъ:

Для того, чтобы къ какому нибудь числу прибавить многочленъ, достаточно прибавить къ этому числу всѣ члены многочлена, каковы бы ни были ихъ знаки.

Принимая же во вниманіе, что

$$A-(a-b+c-d+e-f)=A-a+b-c+d-e+f=$$
$$=A-a-(-b)-c-(-d)-e-(-f),$$

можемъ сказать:

Для того, чтобы изъ какого нибудь числа вычесть многочленъ, достаточно вычесть изъ этого числа всѣ члены многочлена, каковы бы ни были ихъ знаки.

*** 31. Замѣчаніе.** Въ вопросахъ алгебры численныя значенія буквъ не назначаются заранѣе. Производя какое-нибудь алгебрическое дѣйствіе, основанное на тождественныхъ преобразованіяхъ, доказанныхъ для извѣстныхъ случаевъ, мы можемъ утверждать, что полученный результатъ справедливъ только для тѣхъ значеній буквъ, для которыхъ доказана справедливость разсматриваемыхъ формулъ. Весьма будетъ хорошо, если эти формулы имѣютъ мѣсто для всѣхъ случаевъ. Отсюда понятна та польза, которая вытекаетъ изъ соглашеній, сдѣланныхъ нами относительно чиселъ отрицательныхъ.

Упражненія.

I. Два тѣла M и N движутся по нѣкоторой прямой. Въ началѣ движенія одно изъ нихъ расположено въ A, другое въ B на разстояніяхъ a и b отъ точки 0. Они удаляются со скоростями v и u въ направленіи OB. Найти формулы, выражающія разстояніе x, отдѣляющее тѣла въ концѣ промежутка t, и разстояніе y точки 0 отъ средины прямой, соединяющей тѣла.

Находимъ:

$$x=b-a+(u-v)t, \quad \text{или же} \quad x=a-b+(v-u)t,$$

смотря по тому, находится ли N впереди или позади M; далѣе,

$$y=\frac{a+b}{2}+\frac{v+u}{2}\cdot t$$

II. Три вазы содержатъ смѣсь воды и вина: первая — a литровъ воды, b литровъ вина; вторая — a' литровъ воды, b' литровъ вина; третья — a'' литровъ воды, b'' литровъ вина. Беремъ половину жидкости, содержащейся въ первой вазѣ, и переливаемъ во вторую; беремъ затѣмъ треть жидкости, которую содержитъ теперь вторая ваза, и переливаемъ въ третью.

Найти формулы, выражающія количество воды и количество вина, содержащіяся въ каждой вазѣ послѣ этихъ переливаній.

Находимъ:

	Вода.	Вино.
1-я ваза	$\frac{a}{2}$,	$\frac{b}{2}$;
2-я ваза	$\frac{2a'+a}{3}$,	$\frac{2b'+b}{3}$;
3-я ваза	$\frac{6a''+2a'+a}{6}$,	$\frac{6b''+2b'+b}{6}$.

III. Двѣ вазы A и A', емкости которыхъ суть v и v', наполнены: одна—водою, другая—виномъ.

При помощи двухъ сосудовъ одной и той же емкости мы беремъ изъ каждой вазы одинъ и тотъ же объемъ u жидкости и вливаемъ въ A то количество жидкости, которое взяли изъ A', и обратно. Три раза совершаемъ это переливаніе.

Найти формулы, выражающія количества вина и воды, содержащіяся въ каждой изъ вазъ.

Находимъ, для вазы A,

$$\text{количество воды} = \left(\frac{(v-u)^2}{v} + \frac{u^2}{v'}\right)\frac{v-u}{v} + \left(\frac{v'-u}{v'} + \frac{v-u}{v}\right)\frac{u^2}{v'},$$

$$\text{количество вина} = \left(\frac{v-u}{v} + \frac{v'-u}{v'}\right)\frac{u(v-u)}{v} + \left(\frac{(v'-u)^2}{v'} + \frac{u^2}{v}\right)\frac{u}{v'}.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Алгебрическое умноженіе.

32. Алгебрическое умноженіе заключаетъ три случая: 1° умноженіе одночлена на одночленъ; 2° умноженіе многочлена на одночленъ, и *обратно;* 3° умноженіе многочлена на многочленъ.

§ I. Умноженіе одночленовъ.

33. Правило умноженія одночленовъ. Произведеніе двухъ одночленовъ M и N есть одночленъ MN.

Мы разсмотримъ здѣсь такіе одночлены, которые представлены въ видѣ произведеній, напримѣръ $\frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{b}{c}$, $\frac{3}{7}\left(a+\frac{b}{c}\right)^2 \cdot c^3 \cdot \left(\sqrt{d}\right)^5$.

Замѣнивъ множителей, составляющихъ одночленъ, буквами, мы представимъ одночленъ въ видѣ произведенія степеней различныхъ буквъ.

Замѣнивъ, въ данныхъ примѣрахъ, выраженія:

$$\frac{b}{c},\, a+\frac{b}{c},\, \sqrt{d}$$

соотвѣтственно буквами:

$$m,\ n,\ p,$$

представимъ одночлены въ видѣ:

$$\frac{2}{3}a^2m,\ \frac{3}{7}n^2c^3p^5.$$

Итакъ, положимъ, что одночлены M и N суть произведенія степеней буквъ. Если эти одночлены содержатъ общія буквы, то формула MN можетъ быть преобразована въ одночленъ, тождественный съ формулою. Преобразованіе это основывается на слѣдующихъ теоремахъ, доказываемыхъ въ ариѳметикѣ: [1])

1° Для того, чтобы перемножить два произведенія, достаточно перемножить множителей этихъ произведеній.

2° Въ какомъ ни есть произведеніи какіе ни есть множители могутъ быть замѣнены ихъ произведеніемъ.

3° Произведеніе степеней числа равно степени того же числа, показатель которой равенъ суммѣ показателей перемножаемыхъ степеней.

Пусть теперь даны два одночлена:

$$M = 5a^4 b^3 c, \ N = 7a^5 c^3 d^2.$$

Произведеніе

$$M . N = 5a^4 b^3 c . 7a^5 c^3 d^2,$$

на основаніи первой теоремы, тождественно произведенію

$$5a^4 b^3 c\, 7a^5 c^3 d^2.$$

Въ этомъ произведеніи мы можемъ замѣнить: множителей 5 и 7 ихъ произведеніемъ 35 — на основаніи второй теоремы; множителей a^4 и a^5 ихъ произведеніемъ a^9 — на основаніи второй и третьей теоремъ; множителей c и c^3 — произведеніемъ c^4.

Сдѣлавъ это замѣненіе, преобразуемъ формулу MN въ тождественный одночленъ:

$$35a^9 b^3 c^4 d^2.$$

Метода общая и приводитъ насъ къ слѣдующему правилу:

Произведеніе одночленовъ, представляющихъ произведенія степеней буквъ, тождественно одночлену, который образуемъ такъ: 1° перемножаемъ коэффиціенты данныхъ одночленовъ; 2° выписываемъ подрядъ, одинъ разъ каждую, всѣ буквы, входящія въ одночлены; 3° каждой буквѣ присвоиваемъ показателя, равнаго суммѣ показателей, съ какими буква эта входила въ данные одночлены. Если буква входитъ только въ одинъ одночленъ, то помѣщаемъ ее съ ея показателемъ.

34. Предъидущее преобразованіе распространяется на какое ни есть число одночленовъ.

---

[1]) См. Теоретическая ариѳметика Бертрана, пер. Н. Билибина.

Для его выполненія преобразовываемъ произведеніе перваго одночлена на второй, далѣе произведеніе полученнаго одночлена на третій, и т. д.

Такимъ образомъ:

$$7a^3 b^3 e \cdot 5a^2 b c^3 \cdot 8a^4 c^3 d^2 \cdot 2ade = 560a^{10} b^3 c^5 d^3 e^2.$$

Отсюда вытекаетъ, что мы преобразуемъ $m^{\text{-овую}}$ степень одночлена въ одночленъ, если возвысимъ въ эту степень коэффиціентъ и умножимъ на m всѣхъ показателей. Такимъ образомъ:

$$(5a^3 b^2 c)^m = 5^m a^{3m} b^{2m} c^m.$$

§ II. Умноженіе многочлена на одночленъ.

35. Правило умноженія. Нужно умножить многочленъ:

$$P = a - b + c - d$$

на одночленъ m (a, b, c, d какіе ни есть одночлены).

Пишемъ формулу:

$$P \cdot m = (a - b + c - d)m,$$

и умноженіе окончено. Постараемся преобразовать это произведеніе въ тождественный ему многочленъ.

Для большей ясности различимъ нѣсколько случаевъ.

1°. m есть цѣлое положительное число. Произведеніе тождественно суммѣ:

$$P \cdot m = (a - b + c - d) + (a - b + c - d) + \ldots + (a - b + c - d).$$

Эта же сумма, на основаніи правила сложенія многочленовъ, тождественна многочлену:

$$P \cdot m = am - bm + cm - dm.$$

Итакъ, каждый членъ многочлена умножается на одночленъ и сохраняетъ знакъ.

2°. m есть дробное число вида $\frac{1}{r}$ (r число цѣлое).

Умножить число P на $\frac{1}{r}$ значитъ взять $r^{\text{-овую}}$ часть числа P. Эта часть, очевидно, равна многочлену:

$$\frac{a}{r} - \frac{b}{r} + \frac{c}{r} - \frac{d}{r},$$

ибо, будучи умножена на r по правилу (1°), даетъ:

$$\frac{a}{r}\cdot r-\frac{b}{r}\cdot r+\frac{c}{r}\cdot r-\frac{d}{r}\cdot r=a-b+c-d,$$

т.-е. воспроизводитъ число P. Итакъ, имѣемъ:

$$P\cdot m=P\cdot\frac{1}{r}=\frac{a}{r}-\frac{b}{r}+\frac{c}{r}-\frac{d}{r}=a\cdot\frac{1}{r}-b\cdot\frac{1}{r}+$$
$$+c\cdot\frac{1}{r}-d\cdot\frac{1}{r}=am-bm+cm-dm,$$

т.-е. каждый членъ многочлена P умножился на одночленъ m, сохранивъ свой знакъ.

3°. m число дробное вида $\frac{p}{r}$. Для преобразованія формулы $P.m$ въ этомъ случаѣ мы можемъ повторить p разъ r-овую часть множимаго P, т.-е. повторить p разъ многочленъ:

$$a\cdot\frac{1}{r}-b\cdot\frac{1}{r}+c\cdot\frac{1}{r}-d\cdot\frac{1}{r},$$

что дастъ:

$$a\cdot\frac{1}{r}\cdot p-b\cdot\frac{1}{r}\cdot p+c\cdot\frac{1}{r}\cdot p-d\cdot\frac{1}{r}\cdot p,$$

или же

$$a\cdot\frac{p}{r}-b\cdot\frac{p}{r}+c\cdot\frac{p}{r}-d\cdot\frac{p}{r}.$$

И въ этомъ, слѣдовательно, случаѣ произведеніе $P.m$ преобразовывается въ многочленъ:

$$P\cdot m=am-bm+cm-dm.$$

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ, *произведеніе многочлена на одночленъ тождественно многочлену, который найдемъ, умноживъ каждый членъ множимаго на этотъ одночленъ.*

Это же правило позволяетъ преобразовывать произведеніе одночлена на многочленъ. Произведенія:

$$(3a^4b-5a^3b^2-6abc^3-4b^2c)\cdot 5ab^2,$$
$$5ab^2\cdot(3a^4b-5a^3b^2-6abc^3-4b^2c)$$

тождественны многочлену:

$$15a^5b^3-25a^4b^4-30a^2b^3c^3-20ab^4c.$$

36. Выведеніе множителя за скобки. Мы доказали равенство:

$$(a-b+c-d)m=am-bm+cm-dm,$$

отсюда, наоборотъ,

$$am-bm+cm-dm=(a-b+c-d)m.$$

Равенство это показываетъ намъ, что если члены многочлена $(am-bm+cm-dm)$ содержатъ общаго множителя m, то мы можемъ сдѣлать такое преобразованіе: уничтожить этого множителя m во всѣхъ членахъ многочлена, что дастъ многочленъ $(a-b+c-d)$, и умножить затѣмъ полученное выраженіе на уничтоженнаго множителя m, т.-е. написать $(a-b+c-d).\ m$. Преобразованіе это называется *выведеніемъ множителя за скобки.* Такъ, напримѣръ, члены многочлена $12a^3x^4-8a^5x^2+16a^2x^5$ содержатъ общимъ множителемъ одночленъ $4a^2x^2$, а потому мы можемъ писать:

$$12a^3x^4-8a^5x^2+16a^2x^5=(3ax^2-2a^3+4x^3)\ .\ 4a^2x^2.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ:

$$3a(a-1)-3(a-1)=(3a-3)(a-1)=3(a-1)(a-1)=$$
$$=3(a-1)^2.$$
$$ad-ah+bd-bh+cd-ch=a(d-h)+b(d-h)+c(d-h)=$$
$$=(a+b+c)(d-h).$$

§ III. Умноженіе многочлена на многочленъ.

37. Случай, когда всѣ члены многочленовъ положительные. Требуется умножить многочленъ $P=a+b+c$ на многочленъ $Q=p+q+r$, въ которыхъ буквы a, b, c, p, q, r представляютъ какія ни есть выраженія. Пишемъ формулу:

$$P\ .\ Q=(a+b+c)\ .\ (p+q+r),$$

и умноженіе окончено. Преобразуемъ эту формулу, если возможно, въ тождественный ей многочленъ. Преобразованіе $n^0 35$ даетъ:

$$P\ .\ Q=P\ .\ (p+q+r)=Pp+Pq+Pr,$$

или

$$P\ .\ Q=(a+b+c)p+(a+b+c)q+(a+b+c)r.$$

Прилагая опять преобразованіе n^035, найдемъ:

$$PQ = ap + bp + cp + aq + bq + cq + ar + br + cr.$$

Результатъ этотъ показываетъ намъ, что *произведеніе двухъ многочленовъ, всѣ члены которыхъ положительные, тождественно многочлену, равному суммѣ произведеній, которыя найдемъ, умноживъ всѣ члены перваго многочлена на каждый членъ втораго.*

38. Случай, когда многочлены содержатъ отрицательные члены. И множимое, и множитель могутъ быть представлены разностями, въ которыхъ уменьшаемое равно суммѣ всѣхъ членовъ предшествуемыхъ знакомъ $+$, вычитаемое же равно суммѣ всѣхъ членовъ, предшествуемыхъ знакомъ $-$. Итакъ, положимъ:

$$P = A - B, \quad Q = C - D,$$

гдѣ A, B, C, D суть многочлены, всѣ члены которыхъ положительные.

Преобразованіе n^035 даетъ:

$$P \,.\, Q = P \,.\, (C - D) = PC - PD = (A - B)\,C - (A - B) \,.\, D =$$
$$= (AC - BC) - (AD - BD),$$

отсюда, на основаніи правила вычитанія многочленовъ, имѣемъ:

$$P \,.\, Q = AC - BC - AD + BD.$$

Въ этой формулѣ выраженія AC, BC, AD, BD суть произведенія многочленовъ, всѣ члены которыхъ положительные; мы преобразуемъ ихъ по правилу n^037 и выполнимъ потомъ указанныя сложенія и вычитанія. Въ концѣ концовъ получится многочленъ, тождественный произведенію PQ.

39. Правило умноженія двухъ многочленовъ. Разсматривая образованіе полученнаго многочлена изъ членовъ данныхъ многочленовъ, мы замѣчаемъ, что всѣ его члены суть произведенія каждаго изъ членовъ множимаго на каждый изъ членовъ множителя. Что же касается знаковъ, предшествующихъ его членамъ, то видимъ: 1^0 всѣмъ членамъ произведенія AC предшествуютъ знаки $+$, и члены эти получаются отъ умноженія каждаго изъ положительныхъ членовъ множимаго на каждый изъ положительныхъ членовъ множителя; 2^0 всѣмъ членамъ произведенія BD предшествуютъ знаки $+$, и члены эти получаются отъ умноженія каждаго изъ отрицательныхъ членовъ множимаго на каждый изъ отрицательныхъ членовъ множителя; 3° всѣмъ членамъ произведеній BC и AD предшествуютъ знаки (—), и члены эти получаются отъ умноженія каждаго изъ положительныхъ членовъ множимаго на каждый изъ отрицательныхъ членовъ множителя и каждаго изъ отрицательныхъ членовъ множимаго на каждый изъ положительныхъ членовъ множителя.

Отсюда получаемъ слѣдующее правило;

Произведеніе двухъ многочленовъ тождественно многочлену, который найдемъ такимъ образомъ: умножаемъ каждый членъ множимаго на каждый членъ множителя, соблюдая слѣдующее правило знаковъ: отъ перемноженія членовъ съ одинаковыми (различными) знаками въ произведеніи получается положительный (отрицательный) членъ.

Это правило знаковъ представляется такою таблицею:

$$
\begin{aligned}
+a \,.\, +b &= +ab,\\
-a \,.\, +b &= -ab,\\
+a \,.\, -b &= -ab,\\
-a \,.\, -b &= +ab.
\end{aligned}
$$

40. Умноженіе отрицательныхъ чиселъ. Мы ввели въ алгебру отрицательныя числа и опредѣлили дѣйствія сложенія и вычитанія, производимыя надъ ними. Займемся теперь умноженіемъ отрицательныхъ чиселъ.

Условимся называть:

1°. *Произведеніемъ* числа положительнаго a на отрицательное число $(-b)$ такое отрицательное число, модуль котораго равенъ произведенію модулей данныхъ чиселъ.

2°. *Произведеніемъ* числа отрицательнаго $(-a)$ на положительное число b такое отрицательное число, модуль котораго равенъ произведенію модулей данныхъ чиселъ.

3°. *Произведеніемъ* двухъ отрицательныхъ чиселъ $(-a)$ и $(-b)$ такое положительное число, модуль котораго равенъ произведенію модулей данныхъ чиселъ.

Опредѣленія эти выражаются слѣдующими равенствами:

$$a \,.\, (-b) = -(ab) \tag{1}$$
$$(-a) \,.\, b = -(ab) \tag{2}$$
$$(-a) \,.\, (-b) = +ab = ab \tag{3}$$

Равенства эти говорятъ намъ, что

$$
\begin{aligned}
a \,.\, (-b) &= (-b) \,.\, a\\
(-a) \,.\, (-b) &= (-b) \,.\, (-a);
\end{aligned}
$$

т. е. произведенія сомножителей не зависятъ отъ порядка множителей, каковы бы они не были — положительные или отрицательные.

Равенства (1), (2), (3) остаются справедливыми и для отрицательныхъ a и b.

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ сперва, что a положительное; b отрицательное, модуль котораго равенъ c, такъ что $b = -c$.

Имѣемъ:

$$a \,.\, (-b) = ac = -(-ac) = -(a \,.\, -c) = -(ab);$$
$$(-a) \,.\, (b) = (-a) \,.\, (-c) = ac = -(-ac) =$$
$$= -(a \,.\, -c) = -(ab).$$
$$(-a) \,.\, (-b) = -a \,.\, c = -(ac) = -(a \,.\, -b) =$$
$$= -[-(ab)] = ab.$$

Положимъ, что b положительное; a отрицательное, модуль котораго равенъ c, такъ что $a = -c$.

Имѣемъ:

$$a \,.\, (-b) = (-c) \,.\, (-b) = cb = -(-cb) =$$
$$= -(-c \,.\, b) = -(ab);$$
$$(-a) \,.\, b = c \,.\, b = -(-cb) = -(-c \,.\, b) = -(ab).$$
$$(-a) \,.\, (-b) = c \,.\, -b = -(cb) = -(-a \,.\, b) =$$
$$= -(-ab) = ab.$$

Пусть, наконецъ, a и b отрицательныя, модули которыхъ соотвѣтственно суть c и d, такъ что $a = -c$, $b = -d$.

Имѣемъ:

$$a \,.\, (-b) = -c \,.\, d = -(cd) = -(-c \,.\, -d) = -(ab).$$
$$-a \,.\, b = c \,.\, (-d) = -(cd) = -(-c \,.\, -d) = -(ab);$$
$$(-a) \,.\, (-b) = c \,.\, d = (-c) \,.\, (-d) = ab.$$

Возьмемъ два положительныхъ числа a и b и, представивъ ихъ въ видѣ:

$$a = -(-a), \quad b = -(-b),$$

перемножимъ эти числа, принявъ во вниманіе наши соглашенія; мы получимъ тотъ же результатъ, какой получается и въ ариѳметикѣ при умноженіи чиселъ a и b. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$a \,.\, b = -(-a) \,.\, -(-b) = +(-a \,.\, -b) = +(ab).$$

41. Мы видѣли (**38**), что

$$PQ, \text{ или } (A-B)(C-D)=AC-BC-AD+BD. \qquad (4)$$

Доказательство предполагало, что A и C соотвѣтственно болѣе B и D; тѣ соглашенія, которыя мы сдѣлали, позволяютъ обобщить это преобразованіе на всѣ случаи.

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ сперва, что одинъ изъ множителей отрицательный; пусть, напримѣръ,

$$A<B, \quad C>D.$$

Такъ какъ $A-B$ есть количество отрицательное, равное $-(B-A)$, то, вслѣдствіе соглашенія перваго (**40**), получимъ:

$$PQ, \text{ или } (A-B)(C-D)=-(B-A)(C-D).$$

Выполнивъ умноженіе по правилу (**39**), найдемъ:

$$PQ=-(BC-AC-BD+AD),$$

или, на основаніи соглашенія (**19**),

$$PQ=BD+AC-BC-AD,$$

т.-е. получимъ результатъ, одинаковый съ формулою (4).

Предположимъ теперь, что обѣ разности $A-B$ и $C-D$ отрицательныя.

Произведеніе ихъ, на основаніи соглашенія, будетъ равно произведенію ихъ модулей $B-A$ и $D-C$, такъ что

$$PQ, \text{ или } (A-B)(C-D)=(B-A)(D-C)=$$
$$=BD-AD-BC+AC;$$

опять получили результатъ, согласный съ формулою (4).

*** 42. Замѣчаніе II.** Разсмотримъ два многочлена:

$$a-b+c, \quad m-n+p.$$

Произведеніе ихъ тождественно многочлену:

$$am-bm+cm-an+bn-cn+ap-bp+cp.$$

Представивъ перемножаемые многочлены и ихъ произведеніе соотвѣтственно въ видѣ суммъ:

$$a+(-b)+c, \quad m+(-n)+p,$$
$$am+(-b\,.\,m)+cm+(a\,.\,-n)+(-b\,.\,-n)+(c\,.\,-n)+$$
$$+ap+(-b\,.\,p)+cp,$$

мы можемъ выразить правило умноженія многочленовъ въ такомъ видѣ:

Произведеніе двухъ многочленовъ, изображенныхъ въ видѣ суммъ, тождественно многочлену, который найдемъ, перемноживъ всѣ слагаемыя одного многочлена на всѣ слагаемыя другаго и сложивъ полученныя произведенія.

Отсюда будетъ слѣдовать, напримѣръ, что равенство

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

вытекающее непосредственно изъ правила умноженія, остается справедливымъ, если a и b суть количества отрицательныя.

Пусть b есть количество отрицательное, модуль котораго равенъ $-b_1$, такъ что $b=-b_1$.

Предъидущее равенство даетъ:

$$(a-b_1)^2=a^2+2a\,.\,(-b_1)+(-b_1)^2,$$

или

$$(a-b_1)^2=a^2-2ab_1+b_1^{\,2}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что формулы, дающія квадраты суммы и разности, заключаются въ одной формулѣ.

Подобнымъ же образомъ формула

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

получаемая непосредственнымъ умноженіемъ, приводитъ къ формулѣ

$$(a-b_1)^3=a^3-3a^2b_1+3ab_1^{\,2}-b_1^{\,2},$$

т.-е. формулы, дающія кубы суммы и разности, заключаются въ одной формулѣ.

43. Замѣчаніе III. *Произведеніе нѣсколькихъ множителей,* положительныхъ или отрицательныхъ, опредѣляется такимъ же образомъ, какъ и въ ариѳметикѣ.

Это есть результатъ, который найдемъ, умноживъ перваго множителя на втораго, полученное произведеніе на третьяго и т. д.

Отсюда вытекаетъ: *Модуль произведенія равенъ произведенію модулей множителей; произведенію предшествуетъ знакъ* $+$, *если число множителей, которымъ предшествуетъ знакъ* $(-)$, *четное, и знакъ* $(-)$, *если число этихъ множителей нечетное.*

Для доказательства замѣтимъ, что мы можемъ ввести въ разсматриваемое произведеніе первымъ множителемъ $+1$. При послѣдовательныхъ перемноженіяхъ первый знакъ $(+)$ измѣнится столько разъ, сколько встрѣтимъ отрицательныхъ множителей, и такъ какъ два послѣдовательныхъ измѣненія приведутъ насъ къ знаку $(+)$, то очевидно, что окончательный знакъ будетъ $(+)$, если число измѣненій четное, и $(-)$ въ противномъ случаѣ.

Предъидущее показываетъ, что *четныя степени отрицательнаго числа суть числа положительныя, нечетныя же степени его суть числа отрицательныя.*

44. Опредѣленіе дѣленія въ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель, или одинъ изъ нихъ, отрицательные.

Частнымъ двухъ чиселъ A и B, положительныхъ или отрицательныхъ, называется третье число, которое, будучи умножено на дѣлителя B, воспроизведетъ дѣлимое A. Предъидущія соглашенія говорятъ намъ, что *модуль частнаго двухъ чиселъ не зависитъ отъ знаковъ этихъ чиселъ; частное есть число положительное, если знаки дѣлимаго и дѣлителя одинаковые, и отрицательное — въ противномъ случаѣ.*

И въ самомъ дѣлѣ, если дѣлимое положительное, то частное должно обладать знакомъ дѣлителя; если дѣлимое отрицательное, то частное должно имѣть знакъ, противоположный знаку дѣлителя (**40**). Это *правило знаковъ* выражается слѣдующею таблицею:

$$+a : +b = +\frac{a}{b},$$

$$+a : -b = -\frac{a}{b},$$

$$-a : +b = -\frac{a}{b},$$

$$-a : -b = +\frac{a}{b}.$$

*** 45. Умноженіе какого ни есть числа многочленовъ.** Произведеніе нѣсколькихъ многочленовъ есть многочленъ, который найдемъ, умноживъ первый многочленъ на второй, полученное произведеніе на третій, и т. д.

Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 суть данные многочлены. Умноживъ P_1 на

P_2, получимъ многочленъ Q_1, члены котораго суть произведенія всѣхъ членовъ P_1 на всѣ члены P_2; умноживъ затѣмъ Q_1 на P_3, образуемъ произведеніе Q_2, которое представитъ сумму всѣхъ произведеній трехъ множителей, изъ которыхъ одинъ есть нѣкоторый членъ многочлена P_1, другой — многочлена P_2, третій — многочлена P_3. Произведеніе многочлена Q_2 на P_4 представитъ сумму всѣхъ произведеній четырехъ множителей, взятыхъ соотвѣтственно изъ многочленовъ P_1, P_2, P_3, P_4.

И вообще, *произведеніе многочленовъ P_1, P_2, P_3 . . . , P_n есть сумма всѣхъ произведеній n множителей, которые суть: нѣкоторый членъ многочлена P_1, нѣкоторый членъ многочлена P_2,... и, наконецъ, нѣкоторый членъ многочлена P_n.*

§ IV. Произведеніе расположенныхъ многочленовъ.

46. Расположенные многочлены. Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь буквы значитъ размѣстить его члены такимъ образомъ, чтобы показатели этой буквы шли, или все возрастая, или все убывая. Многочленъ:

$$8x^5+3x^4+2x^3-x^2-11x+1$$

есть многочленъ, расположенный по *убывающимъ степенямъ буквы x*. Многочленъ:

$$5a^4-3a^3b-6ab^3+4b^4$$

есть многочленъ, расположенный по *возрастающимъ степенямъ* буквы b и по убывающимъ степенямъ буквы a.

Буква, по которой располагаютъ многочлены, называется *главною*. Многочленъ называется *полнымъ*, если главная буква входитъ во всѣхъ степенахъ, начиная съ высшей.

Первый изъ предъидущихъ многочленовъ полный; второй не полный, ибо въ немъ отсутствуетъ членъ, содержащій a^2b^2. Число членовъ полнаго многочлена единицею болѣе наивысшаго показателя главной буквѣ, ибо многочленъ содержитъ членъ, независимый отъ главной буквы, или, какъ говорятъ иногда, содержитъ членъ, въ которомъ показатель главной буквы равенъ нулю.

* Если нѣсколько членовъ многочлена содержатъ главную букву съ однимъ и тѣмъ же показателемъ, то ихъ соединяютъ въ одинъ,

вынося за скобки степень этой буквы; количество, помѣщенное въ скобкахъ, разсматриваютъ, какъ коэффиціентъ при этой степени.

Примѣръ. Многочленъ:

$$a^2x^5 - 2abx^5 + b^2x^5 + 2a^3x^4 - 4b^3x^4 - a^4x^3 - a^2b^2x^3 + b^4x^3 + 3a^2b^3x^2 - 2ab^4x^2$$

пишется такимъ образомъ:

$$(a^2 - 2ab + b^2)\,x^5 + (2a^3 - 4b^3)\,x^4 - (a^4 + a^2b^2 - b^4)\,x^3 + (3a^2b^3 - 2ab^4)\,x^2,$$

или

$$\begin{array}{r|r|r|r|l} a^2 & x^5 + 2a^3 & x^4 - a^4 & x^3 + 3a^2b^3 & x^2 \\ -2ab & -4b^3 & -a^2b^2 & -2ab^4 & \\ +b^2 & & +b^4 & & \end{array}$$

Вертикальная черта отдѣляетъ каждую степень главной буквы отъ ея коэффиціента.

47. Примѣры расположенныхъ умноженій. На практикѣ располагаютъ перемножаемые многочлены по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ общей главной буквы, если таковая въ нихъ заключается, и, написавъ множителя подъ множимымъ, производятъ перемноженіе, при чемъ подобные члены, по мѣрѣ ихъ полученія, помѣщаютъ другъ подъ другомъ.

Примѣръ I. Оба многочлена полные.

$$\begin{array}{ll} \text{Множимое} \ldots\ldots & 3x^4-5ax^3-4a^2x^2+7a^3x-2a^4 \\ \text{Множитель} \ldots\ldots & 2x^3-5ax^2-3a^2x+4a^3 \\ \hline \text{Прозведенія множимаго на} \left\{\begin{array}{l} 2x^3 \\ -5ax^2 \\ -3a^2x \\ +4a^3 \end{array}\right. & \begin{array}{llllllll} 6x^7 & -10ax^6 & -8a^2x^5 & +14a^3x^4 & -4a^4x^3 & & & \\ & -15ax^6 & +25a^2x^5 & +20a^3x^4 & -35a^4x^3 & +10a^5x^2 & & \\ & & -9a^2x^5 & +15a^3x^4 & +12a^4x^3 & -21a^5x^2 & +6a^6x & \\ & & & +12a^3x^4 & -20a^4x^3 & -16a^5x^2 & +28a^6x & -8a^7 \end{array} \\ \hline \text{Упрощ. произведеніе} & 6x^7-25ax^6+8a^2x^5+61a^3x^4-47a^4x^3-27a^5x^2+34a^6x-8a^7. \end{array}$$

Примѣръ II. Полиномы неполные.

Оставляемъ промежутки для помѣщенія подобныхъ членовъ другъ подъ другомъ.

$$\begin{array}{ll} \text{Множимое} \ldots & 5a^5-3a^4b-2a^2b^3+b^5 \\ \text{Множитель} \ldots & 3a^3-5ab^2+2b^3 \\ \hline \text{Произвед. множим. на} \left\{\begin{array}{l} 3a^3 \\ -5ab^2 \\ +2b^3 \end{array}\right. & \begin{array}{lllllllll} 15a^8 & -9a^7b & & -6a^5b^3 & & +3a^3b^5 & & & \\ & & -25a^6b^2 & +15a^5b^3 & & +10a^3b^5 & & -5ab^7 & \\ & & & +10a^5b^3 & -6a^4b^4 & & -4a^2b^6 & & +2b^8 \end{array} \\ \hline \text{Упрощ. произв.} & 15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8. \end{array}$$

* *Примѣръ III.* Коэффиціенты многочленовъ—многочлены.

Множимое . . .	a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3 $+2a^3$ $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	x $+3a^2b^3$ $-2ab^4$
Множитель . . .	a $-b$	x^2 $+a^2$ $-ab$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b^3$	

Отдѣльныя произведенія на						
ax^2 . . .	a^3 $-2a^2b$ $+ab^2$	x^5+2a^4 $-4ab^3$	x^4-a $-a^3b^2$ $+ab^4$	$x^3+3a^2b^3$ $-2a^2b^4$	x^2	x
$-bx^2$ . . .	$-a^2b$ $+2ab^2$ $-b^3$	$-2a^3b$ $+4b^4$	$+a^4b$ $+a^2b^3$ $-b^5$	$-3a^2b^4$ $+2ab^5$		
a^2x . . .		$+a^4$ $-2a^3b$ $+a^2b^2$	$+2a^5$ $-4a^2b^3$	$-a^6$ $-a^4b^2$ $+a^2b^4$	$+3a^4b^3$ $-2a^3b^4$	
$-abx$ . . .		$-a^3b$ $+2a^2b^3$ $-ab^3$	$-2a^4b$ $+4ab^4$	$+a^5b$ $+a^3b^3$ $-ab^5$	$-3a^3b^4$ $+2a^2b^5$	
$-b^2x$ . . .		$-a^2b^2$ $+2ab^3$ $-b^4$	$-2a^3b^2$ $+4b^5$	$+a^4b^2$ $+a^2b^4$ $-b^6$	$-3a^2b^5$ $+2ab^6$	
$-a^3$			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$	$-2a^6$ $+4a^3b^3$	$+a^7$ $+a^5b^2$ $-a^3b^4$	$-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$
b^3			$+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	$+2a^3b^3$ $-4b^6$	$-a^4b^3$ $-a^2b^5$ $+b^7$	$+3a^2b^6$ $2ab^7$
Полное упрощен. произведеніе.	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

Мы видимъ, что въ этомъ случаѣ вычисленія нѣсколько длинны; правило преобразованія остается то же: умножаемъ всѣ члены множимаго на всѣ члены множителя и соединяемъ подобные члены.

§ V. Теоремы и приложенія.

48. Minimum числа членовъ произведенія. Если произведеніе двухъ многочленовъ содержитъ подобные члены, то члены эти могутъ иногда взаимно уничтожаться. *Каждое произведеніе содержитъ по крайней мѣрѣ два члена, не уничтожающіеся ни съ однимъ изъ прочихъ членовъ.* Если полиномы расположены по степенямъ главной буквы, то эти неуничтожающіеся члены суть: произведеніе перваго члена множимаго на первый членъ множителя и произведеніе послѣдняго члена множимаго на послѣдній членъ множителя.

И въ самомъ дѣлѣ, показатель главной буквы каждаго члена произведенія равенъ суммѣ показателей, съ которыми буква эта входитъ въ тѣ члены множимаго и множителя, отъ которыхъ произошелъ разсматриваемый членъ произведенія. Отсюда слѣдуетъ, что показатель въ произведеніи первыхъ членовъ множимаго и множителя представляетъ сумму наивысшихъ или наинизшихъ показателей; онъ, слѣдовательно, самый высшій или самый низшій въ произведеніи. Подобнымъ же образомъ въ произведеніи послѣднихъ членовъ показатель есть сумма низшихъ или высшихъ показателей; онъ, слѣдовательно, менѣе или болѣе остальныхъ показателей главной буквы въ произведеніи. Два члена, такимъ образомъ полученные, не соединяются съ-другими, а слѣдовательно не могутъ и уничтожиться.

Итакъ, *произведеніе двухъ многочленовъ состоитъ, по крайней мѣрѣ, изъ двухъ членовъ.* Оно можетъ иногда состоять только именно изъ двухъ членовъ.

Примѣръ:

Множимое . . .	$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1$
Множитель . . .	$x-1$
	$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x$
	$-x^7-x^6-x^5-x^4-x^3-x-1$
Упрощ. Произв.	$x^8 \qquad\qquad -1.$

Видимъ, что всѣ члены, за исключеніемъ x^8 и -1, уничтожились; члены x^8 и -1 представляютъ соотвѣтственно произведенія первыхъ и послѣднихъ членовъ между собою.

49. Замѣчаніе. Если члены многочлена содержатъ нѣсколько общихъ буквъ, то, располагая послѣдовательно эти многочлены относительно каждой изъ буквъ и прилагая каждый разъ предъидущее замѣчаніе, мы опредѣлить minimum числа членовъ въ произведеніи, который можетъ быть болѣе 2-хъ.

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что многочлены суть:

$$a^4-a^3b^5+a^2b^3-b^4,\quad a^6+a^2b-a^3b^7-ab^2.$$

Члены произведенія: a^{10} и ab^6 не имѣютъ себѣ подобныхъ, а потому неприводимы. Расположивъ многочлены по степенямъ буквы b:

$$-a^3b^5-b^4+a^2b^3+a^4 \quad \text{и} \quad -a^3b^7-ab^2+a^4b+a^6,$$

увидимъ, что члены a^6b^{12} и a^{10} неприводимы. Отсюда слѣдуетъ, что три различныхъ члена: a^{10}, ab^6 и a^6b^{12} не испытываютъ приведенія.

50. Maximum числа членовъ въ произведеніи. Если произведеніе двухъ многочленовъ не содержитъ подобныхъ членовъ, то *число его членовъ равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя,* ибо произведеніе множимаго на каждый членъ множителя содержитъ столько членовъ, сколько ихъ находится въ множимомъ.

51. Однородныя произведенія. Мы можемъ установить слѣдующую теорему:

Произведеніе нѣсколькихъ однородныхъ многочленовъ (8) *есть однородный многочленъ, измѣреніе котораго равно суммѣ измѣреній множителей.*

52. Теорема. *Произведеніе суммы двухъ выраженій a и b на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ выраженій.*

Приложивъ правило умноженія къ произведенію $(a+b)$ на $(a-b)$, непосредственно находимъ:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Равенство это, будучи написано въ видѣ:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

покажетъ, что *разность квадратовъ двухъ выраженій разлагается на произведеніе двухъ сомножителей, изъ которыхъ одинъ есть сумма этихъ выраженій, а другой — разность ихъ.*

Примѣры:

$$1^0. \quad (a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=(2a^2+2b^2)2ab=$$
$$=4ab(a^2+b^2).$$

$$2^0. \quad \left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=\frac{2m}{2}\cdot\frac{2n}{2}=mn.$$

53. Теорема. *Квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ его членовъ, сложенной съ удвоенной суммой ихъ двойныхъ произведеній.*

Теорема извѣстна для двучлена:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Она легко доказывается для трехчлена $(a+b+c)$. И въ самомъ дѣлѣ, назвавъ буквою s сумму $a+b$ и принявъ во вниманіе предъидущее равенство, получимъ:

$$(a+b+c)^2=(s+c)^2=s^2+2sc+c^2.$$

Замѣнивъ букву s ея значеніемъ и выполнивъ вычисленія, найдемъ:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

* Легко распространить эту теорему на многочленъ, состоящій изъ n членовъ:

$$P=a+b+c+\ldots+k+l.$$

Представивъ буквою s сумму первыхъ $(n-1)$ членовъ, получимъ:

$$P^2=(a+b+c+\ldots+k+l)^2=(s+l)^2=s^2+2sl+l^2.$$

Предположимъ, что теорема наша справедлива для многочлена s, т.-е. предположимъ, что s^2 состоитъ изъ суммы квадратовъ членовъ $a, b, c, \ldots, k$ и ихъ удвоенныхъ произведеній по два; $2sl$ представляетъ сумму удвоенныхъ производеній членовъ $a, b, c, \ldots k$, на послѣдній членъ l и, наконецъ, l^2 есть квадратъ этого послѣдняго члена. Отюда заключаемъ, что P^2 содержитъ квадраты всѣхъ членовъ многочлена P и ихъ удвоенныя произведенія по два.

Итакъ, предположивъ, что доказываемая теорема имѣетъ мѣсто для многочлена, состоящаго изъ $(n-1)$ членовъ, мы приходимъ къ заключенію, что она справедлива и для многочлена, содержащаго n членовъ, т.-е. однимъ членомъ болѣе. Но мы уже доказали нашу теорему для трехчлена, а потому утверждаемъ, что она будетъ справедлива и для четырехчлена; показавъ ея справедливость для четырехчлена, заключаемъ, что она справедлива и для пятичлена, и т. д. Теорема, слѣдовательно, общая.

Теорема эта выражается такимъ равенствомъ:

$$\left(\sum a\right)^2=\sum a^2+2\sum ab,$$

гдѣ знакъ $\sum$ выражаетъ сумму членовъ, аналогичныхъ тому, передъ которымъ этотъ знакъ помѣщенъ.

Предъидущее разсужденіе, при помощи котораго восходимъ отъ теоремы, доказанной для частнаго случая, къ общей теоремѣ, должно быть замѣчено. Оно часто употребляется въ алгебрѣ.

При составленіи на практикѣ квадрата многочлена слѣдуютъ пути, указываемому доказательствомъ, т.-е. составляютъ квадратъ перваго члена, потомъ удвоенное произведеніе перваго члена на второй и квадратъ втораго; далѣе, удвоенное произведеніе суммы первыхъ двухъ на третій и квадратъ третьяго; потомъ, удвоенное произведеніе суммы первыхъ трехъ на четвертый и квадратъ четвертаго и т. д. Для болѣе удобнаго соединенія подобныхъ членовъ располагаютъ вычисленія такъ, чтобы каждая горизонтальная строчка оканчивалась квадратомъ.

Требуется составить квадратъ многочлена:

$$3x^4 - 4ax^3 - 5a^2x^2 + 2a^3x - a^4.$$

Имѣемъ:

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & 9x^8 & & & & & & & & \\
 & & -24ax^7 & +16a^2x^6 & & & & & & \\
 & & & -30a^2x^6 & +40a^3x^5 & +25a^4x^4 & & & & \\
 & & & & +12a^3x^5 & -16a^4x^4 & -20a^5x^3 & +4a^6x^2 & & \\
 & & & & & -6a^4x^4 & +8a^5x^3 & +10a^6x^2 & -4a^7x & +a^8 \\
\hline
\text{Упрощ. квадр.} & 9x^8 & -24ax^7 & -14a^2x^6 & +52a^3x^5 & +3a^4x^4 & -12a^5x^3 & +14a^6x^2 & -4a^7x & +a^8.
\end{array}$$

*** 54. Замѣчаніе.** *Квадратъ многочлена содержитъ по крайней мѣрѣ четыре неприводимыхъ члена.*

Членами этими, въ случаѣ расположеннаго многочлена, будутъ два первыхъ и два послѣднихъ члена квадрата. И въ самомъ дѣлѣ, если α и β означаютъ показателей главной буквы въ двухъ первыхъ членахъ многочлена, то 2α и $\alpha + \beta$ представятъ показателей этой буквы въ двухъ первыхъ членахъ квадрата; показатели эти различны, ибо, по предложенію, α не равно β; они выше всѣхъ показателей, съ которыми главная буква входитъ въ остальные члены квадрата. Итакъ, два первыхъ члена не испытываютъ приведеній. Легко видѣть, что удвоенное произведеніе двухъ послѣднихъ членовъ многочлена и квадратъ послѣдняго члена также неприводимы.

Упражненія.

1. Доказать, что кубъ многочлена равенъ суммѣ кубовъ его членовъ, сложенной съ утроенной суммою всѣхъ произведеній одного изъ членовъ на квадратъ другаго и сложенной съ ушестеренною суммою тройныхъ произведеній его членовъ, т.-е.

$$\left(\sum a\right)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6\sum abc.$$

Доказательство аналогично доказательству $n^o 53$.

II. Повѣрить формулу

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

III. Повѣрить равенство

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=(ap+bq+cr+ds)^2+$$
$$+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-cp+dq-bs)^2+(as-dp+br-cq)^2.$$

IV. Обозначимъ:

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=A\\ a+b-c-d&=B\\ a-b+c-d&=C\\ a-b-c+d&=D. \end{aligned}$$

Доказать, что имѣетъ мѣсто равенство:

$$AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2),$$

если имѣетъ мѣсто равенство:

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2).$$

V. Пусть

$$m=\frac{x-y}{x+y},\ p=\frac{y-z}{y+z},\ q=\frac{z-u}{z+u},\ r=\frac{u-v}{u+v},\ s=\frac{v-w}{v+w},\ t=\frac{w-x}{w+x}.$$

Доказать, что

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)=(1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t).$$

VI. Доказать, что выраженіе $2y^2+3z^2+6t^2$ есть сумма трехъ квадратовъ.

VII. Упростить выраженіе

$$\frac{1}{6}\left\{x(x+1)(x+2)+x(x-1)(x-2)\right\}+\frac{3}{2}(x-1)x(x+1).$$

Найдемъ:

$$\frac{x(11x^2-5)}{7}.$$

VIII. Повѣрить равенство:

$$4\left\{(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab\right\}^2+\left\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\right\}^2=$$
$$=\left(a^2+b^2\right)^2\left(c^2+d^2\right)^2.$$

IX. Показать, что

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{3}-\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

равно

$$\frac{x(x+1)}{2}.$$

X. Показать, что многочленъ:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

послѣ замѣны:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \alpha' x' + \beta' y', \end{aligned}$$

принимаетъ форму:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2,$$

при чемъ

$$B^2 - AC = (b^2 - ac)(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2.$$

XI. Повѣрить равенства:

$$1 + x^4 = (1 + x^2 + x\sqrt{2})(1 + x^2 - x\sqrt{2}),$$
$$1 + x^6 = (1 + x^2)(1 + x^2 + x\sqrt{3})(1 + x^2 - x\sqrt{3}).$$

XII. Если

$$B = b^2 + bc + c^2, \quad C = b^2c + bc^2,$$

то

$$4B^3 - 27C^2 = (b - c)^2(2b^2 + 5bc + 2c^2)^2;$$

такъ что $4B^3 - 27C^2$ всегда положительное.

XIII. Доказать, на основанiи теоремы (**53**), что $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$ есть сумма двухъ квадратовъ, если a и b суть цѣлыя числа: оба четныя или оба нечетныя.

XIV. Если a, b, m суть цѣлыя числа, если $a^2 + 2mb^2$ есть квадратъ, то $a^2 + mb^2$ равно суммѣ двухъ квадратовъ (на основанiи предъидущей теоремы).

XV. Показать, что выраженiе:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

есть сумма квадратовъ трехъ цѣлыхъ полиномовъ.

XVI. Показать, что многочленъ:

$$6x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 2xy - 4zy$$

есть сумма квадратовъ трехъ цѣлыхъ полиномовъ.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Алгебрическое дѣленіе.

55. Алгебрическое дѣленіе обнимаетъ собою три случая: 1° дѣленіе одночлена на одночленъ; 2° дѣленіе многочлена на одночленъ; 3° дѣленіе многочлена на многочленъ.

§ 1. Дѣленіе одночленовъ.

56. Правило дѣленія. Даны цѣлые одночлены $75a^7b^4c^2d^5$ и $25a^3bc^2$; требуется раздѣлить ихъ другъ на друга, т.-е. найти цѣлый одночленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизведетъ дѣлимое. Положимъ, что преобразованіе возможно, и искомый одночленъ найденъ. Тогда, на основаніи правила умноженія одночленовъ (**33**), заключаемъ, что коэффиціентъ 75 дѣлимаго представляетъ произведеніе коэффиціента 25 дѣлителя на коэффиціентъ частнаго; отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ частнаго получается отъ раздѣленія 75 на 25. Далѣе, на основаніи того же правила, находимъ, что показатель 7 буквы a дѣлимаго представляетъ сумму показателя 3 буквы a дѣлителя и показателя той же буквы частнаго; отсюда слѣдуетъ, что этотъ послѣдній показатель есть разность показателей 7 и 3, т.-е. онъ равенъ 4; совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ, что показатель буквы b частнаго равенъ 3; такъ какъ буква c входитъ и въ дѣлимое и въ дѣлителя съ однимъ и тѣмъ же показателемъ 2, то она не войдетъ въ частное; буква d, входя въ дѣлимое и не входя въ дѣлителя, войдетъ въ частное съ тѣмъ же показателемъ, съ какимъ она входитъ въ дѣлимое. Искомое частное есть, слѣдовательно, одночленъ $3a^3b^4d^5$.

Разсужденіе общее и приводитъ насъ къ слѣдующему правилу:

Для раздѣленія цѣлаго одночлена на другой цѣлый одночленъ поступаемъ такимъ образомъ: 1° *дѣлимъ коэффиціентъ дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя;* 2° *пишемъ, одинъ разъ каждую, тѣ буквы, которыя входятъ въ дѣлимое съ показателями, большими тѣхъ, съ какими онѣ входятъ въ дѣлителя;* 3° *присвоиваемъ каждой изъ этихъ буквъ показателя, равнаго разности показателей, которые присвоены ей въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ;* 4° *не пишемъ тѣхъ буквъ, которыя входятъ и въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ съ однимъ и тѣмъ же показателемъ. Если буква входитъ только въ дѣлимое, то она входитъ въ частное съ тѣмъ же показателемъ.*

57. Условія возможности. Предъидущее разсужденіе основывалось на предположеніи о существованіи искомаго частнаго.

Оно приводитъ насъ къ слѣдующимъ *необходимымъ* условіямъ подобнаго существованія:

1° *Коэффиціентъ дѣлимаго долженъ дѣлиться на коэффиціентъ дѣлителя.*

2° *Всѣ буквы дѣлителя должны входить въ дѣлимое.*

3° *Показатель каждой изъ нихъ въ дѣлителѣ по большей мѣрѣ равенъ показателю ея въ дѣлимомъ.*

Высказанныя условія будутъ условія *достаточныя* для существованія искомаго частнаго, т.-е. если они выполнены, то, слѣдуя вышеданному правилу, найдемъ такой одночленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизведетъ дѣлимое.

58. Показатель нуль. Если буква a входитъ въ дѣлимое и въ дѣлителя соотвѣтственно съ показателями m и n, то она войдетъ въ частное съ показателемъ $m-n$. Доказательство требуетъ, чтобы $m>n$. Если же $m=n$, то буква a исчезаетъ въ частномъ, и правило не прилагается. Условимся, однако, приложить его и къ этому случаю и тогда получимъ: a^{m-m} или a^0. Съ другой стороны, частное отъ раздѣленія a^m на a^m равно единицѣ; отсюда слѣдуетъ, что мы сохранимъ правилу показателей его общность, если *согласимся разсматривать* *символъ a^0, какъ выраженіе, представляющее единицу, каково ни было a.* Вслѣдствіе этого мы можемъ писать:

$$75a^7b^4c^2d^5 : 25a^3bc^2 = 3a^4b^3c^0d^5,$$

и частное это не измѣнено соглашеніемъ, ибо множитель $c^0 = 1$.

§ II. Дѣленіе многочлена на одночленъ.

59. Правило дѣленія. Частное отъ раздѣленія многочлена на одночленъ не есть одночленъ, ибо произведеніе двухъ одночленовъ представляетъ всегда одночленъ (**33**). Если частное существуетъ въ цѣломъ видѣ, то оно можетъ представлять только многочленъ. Преобразованіе состоитъ въ нахожденіи такого многочлена, который, будучи умноженъ на одночленнаго дѣлителя, воспроизведетъ многочленное дѣлимое. Мы видѣли (**35**), что произведеніе многочлена на одночленъ есть сумма произведеній каждаго члена множимаго на множителя.

Итакъ, *искомое частное получается раздѣленіемъ каждаго члена дѣлимаго на дѣлителя; знакъ каждаго отдѣльнаго частнаго одинаковъ со знакомъ соотвѣтствующаго члена дѣлимаго.*

60. Условія возможности. Предъидущее разсужденіе требуетъ, чтобы *каждый членъ дѣлимаго, взятый отдѣльно, дѣлился на дѣлителя.*

Условіе это необходимо. Оно достаточно, ибо если оно выполнено, то, слѣдуя правилу, найдемъ такой многочленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизведетъ дѣлимое.

§ III. Дѣленіе многочленовъ.

61. Даны два многочлена A и B. Требуется раздѣлить ихъ другъ на друга, т.-е. *найти третій многочленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя B, воспроизвелъ бы дѣлимое A.* Преобразованіе это удается очень рѣдко. Если дѣлимое и дѣлитель содержатъ общую букву, то случается *иногда*, что искомое частное существуетъ въ этомъ видѣ. Мы предположимъ здѣсь, что данные полиномы A и B расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, и найдемъ, *если возможно*, частное въ видѣ многочлена, расположеннаго по убывающимъ степенямъ той же буквы.

Преобразованіе основывается на слѣдующихъ теоремахъ:

62. Теорема I. *Если данные полиномы расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы; если частное равно полиному, расположенному такимъ же образомъ; то первый членъ искомаго частнаго представляетъ частное отъ раздѣленія перваго члена дѣлимаго на первый членъ дѣлителя.*

Положимъ, слѣдовательно, что существуетъ частное, т.-е. существуетъ такой расположенный многочленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, даетъ дѣлимое. Мы знаемъ уже, что, при умноженіи расположенныхъ многочленовъ, первый членъ произведенія получается отъ умноженія перваго члена множимаго на первый членъ множителя. Отсюда слѣдуетъ, что первый членъ дѣлимаго представляетъ произведеніе перваго члена дѣлителя на первый членъ частнаго. Результатъ этотъ говоритъ намъ, что первый членъ частнаго получается отъ раздѣленія перваго члена дѣлимаго на первый членъ дѣлителя.

Замѣтимъ (**44**), что первый членъ частнаго будетъ положительный или отрицательный, смотря по тому, будутъ ли знаки первыхъ членовъ дѣлимаго и дѣлителя одинаковы или различны.

63. Теорема II. *Если умножимъ дѣлителя на первый членъ частнаго и вычтемъ полученное произведеніе изъ дѣлимаго, то найдемъ остатокъ, который, будучи раздѣленъ на дѣлителя, дастъ совокупность остальныхъ членовъ частнаго.*

И въ самомъ дѣлѣ, дѣлимое представляетъ сумму произведеній дѣлителя на каждый изъ членовъ частнаго; вычтя изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, мы найдемъ остатокъ, который представитъ произведеніе дѣлителя на сумму всѣхъ остальныхъ членовъ частнаго.

Отсюда слѣдуетъ, что эта сумма получится отъ раздѣленія остатка на дѣлителя.

64. Правило дѣленія. Предъидущія теоремы позволяютъ выполнить какое ни есть дѣленіе. И въ самомъ дѣлѣ, первая теорема даетъ средство найти первый членъ частнаго, вторая приводитъ нахожденіе остальныхъ членовъ частнаго къ новому дѣленію. Первая теорема, будучи приложена къ этому новому дѣленію, позволяетъ найти первый членъ новаго частнаго, т.-е. второй членъ искомаго частнаго; вторая же теорема приводитъ нахожденіе слѣдующихъ членовъ къ новому дѣленію, и такъ далѣе.

Отсюда вытекаетъ правило:

Для раздѣленія одного полинома на другой поступаемъ такъ: располагаемъ полиномы по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы и дѣлимъ первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя; дѣленіе это опредѣлитъ первый членъ частнаго. Умножаемъ дѣлителя на этотъ первый членъ и вычитаемъ произведеніе изъ дѣлимаго, т.-е. мѣняемъ знаки у каждаго члена вычитаемаго и соединяемъ подобные члены.

Дѣлимъ первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя; дѣленіе это даетъ второй членъ частнаго; умножаемъ дѣлителя на этотъ второй членъ и вычитаемъ произведеніе изъ остатка. Получаемъ второй остатокъ, первый членъ котораго, будучи раздѣленъ на первый членъ дѣлителя, опредѣлитъ третій членъ частнаго. Умножаемъ дѣлителя на этотъ третій членъ и вычитаемъ произведеніе изъ втораго остатка. Продолжаемъ поступать такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не получимъ въ остаткѣ нуля.

Полученный такимъ образомъ полиномъ представитъ искомое частное. И въ самомъ дѣлѣ, дѣйствуя по правилу, мы вычтемъ изъ дѣлимаго послѣдовательно произведенія дѣлителя на различные члены этого полинома. Такъ какъ въ остаткѣ получается нуль, то необходимо, чтобы дѣлимое представляло произведеніе дѣлителя на этотъ полиномъ, т.-е. чтобы этотъ полиномъ былъ частное.

65. *Примѣръ I.* Требуется раздѣлить $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ на x^2+x-1. Пишемъ дѣлителя направо отъ дѣлимаго, отдѣляя ихъ вертикальною чертою.

Дѣлимое	$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$	x^2+x-1 дѣлитель
	$-x^5-x^4+x^3$	x^3+5x^2+1 частное
1-ый остатокъ . .	$5x^4+5x^3-4x^2+x-1$	
	$-5x^4-5x^3+5x^2$	
2-ый остатокъ . .	x^2+x-1	
	$-x^2-x+1$	
	0	

Первый членъ частнаго есть x^3: частное отъ раздѣленія x^5 на x^2. Произведеніе дѣлителя на x^3 равно $x^5+x^4-x^3$; перемѣнивъ у этого произведенія знакъ, приведемъ вычитаніе къ простому соединенію подобныхъ членовъ; первый остатокъ будетъ $5x^4+5x^3-4x^2+x-1$.

Второй членъ частнаго есть $5x^2$: частное отъ раздѣленія $5x^4$ на x^2.

Умножаемъ дѣлителя на $5x^2$, что даетъ $5x^4+5x^3-5x^2$; мѣняемъ у этого произведенія знакъ, подписываемъ подъ первымъ остаткомъ и дѣлаемъ приведеніе. Получаемъ второй остатокъ x^2+x-1.

Третій членъ частнаго равенъ 1: частному отъ дѣленія x^2 на x^2.

Умноживъ дѣлителя на 1 и вычтя произведеніе изъ втораго остатка, получимъ въ остаткѣ 0. Искомое частное равно

$$x^3+5x^2+1.$$

Должно пріучиться сразу выполнять: умноженіе каждаго члена дѣлителя на найденный членъ частнаго, вычитаніе соотвѣтствующаго члена изъ дѣлимаго и приведеніе подобныхъ членовъ. Таблица вычисленія будетъ слѣдующая:

$$\begin{array}{lr|l}
\text{Дѣлимое . . .} & x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 & \underline{x^2+x-1 \;\; \text{дѣлитель}} \\
\text{1-ый остатокъ .} & 5x^4+5x^3-4x^2+x-1 & x^3+5x^2+1 \;\; \text{частное} \\
\text{2-й остатокъ .} & x^2+x-1 & \\
 & 0. &
\end{array}$$

66. *Примѣръ II.* Коэффиціенты главной буквы суть буквенные одночлены.

Требуется раздѣлить многочленъ

$$15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$$

на многочленъ

$$3a^3-5ab^2+2b^3.$$

Таблица вычисленій будетъ слѣдующая:

$$\begin{array}{lr|r}
\text{Дѣл. .} & 15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8 & \underline{3a^3-5ab^2+2b^3} \\
\text{1-й ос.} & -9a^7b \qquad\qquad +9a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8 & 5a^5-3a^4b-2a^2b^3 \\
\text{2-й ос.} & -6a^5b^3 \qquad\qquad +13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8 & +b^5 \\
\text{3-й ос.} & +3a^3b^5 \qquad\qquad -5ab^7+2b^8. &
\end{array}$$

* **67.** *Примѣръ III.* Предъидущее правило не требуетъ, чтобы коэффиціенты степеней главной буквы были численные или одночлены. Коэффиціенты эти могутъ быть полиномы (**46**), при чемъ и разсужденіе и вычисленія остаются тѣми-же. Замѣтимъ только, что придется здѣсь выполнять отдѣльныя дѣленія при нахожденіи каждаго новаго члена частнаго, ибо коэффиціентъ перваго члена каждаго дѣлимаго и коэффиціентъ перваго члена дѣлителя суть полиномы. Вотъ примѣръ:

Дѣлимое.	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^4$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2b^7$
1-й остатокъ.		$+a^4$ $-3a^3b$ $+2a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$	x^4+a^5 $-3a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+2ab^4$ $+5b^5$	x^3-3a^5 $+a^5b$ $+7a^3b^3$ $-2a^2b^4$ $-ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
2-й остатокъ.			$-a^5$ $+2a^4b$ $-a^3b^2$ $+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	x^3-2a^6 $+6a^3b^3$ $-4b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $-a^4b^3$ $-a^3b^4$ $-a^2b^5$ $+b^7$ 0	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+2a^2b^6$ $-2ab^7$

дѣлитель.	a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^3 $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x+3a^2b^2$ $-2ab^4$
частное.	a $-b$	x^2	$+a^2$ $-ab$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b^3$

1-е отдѣльное дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} -\;a^2b+2ab^2-b^3 & a-b \\ 0 & \end{array}$$

2-е отдѣльное дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} -\;a^3b+a^2b^2+ab^3-b^4 & a^2-ab-b^2 \\ -\;a^2b^2+2ab^3-b^4 & \\ 0 & \end{array}$$

3-е отдѣльное дѣленіе.

$$\begin{array}{r|l} -a^5+2a^4b-a^3b^2+a^2b^3-2ab^4+b^5 & a^2-2ab+b^2 \\ \cline{2-2} +a^2b^3-2ab^4+b^5 & -a^3+b^3 \\ 0 & \end{array}$$

Дѣлимъ сперва $(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$, коэффиціентъ перваго члена дѣлимаго, на $(a^2-2ab+b^2)$, коэффиціентъ перваго члена дѣлителя, (первое частное дѣленіе), что даетъ $(a-b)$. Такъ какъ x^5, раздѣленное на x^3, даетъ x^2, то первый членъ частнаго равенъ $(a-b)x^2$. Умножаемъ дѣлителя на этотъ членъ, что потребуетъ выполненія нѣсколькихъ умноженій полиномовъ; вычитаемъ потомъ произведеніе это изъ дѣлимаго и получаемъ первый остатокъ. Дѣлимъ далѣе $(a^4-3a^3b+2a^2b^2+ab^3-b^4)$, коэффиціентъ перваго члена остатка, на $(a^2-2ab+b^2)$, (второе отдѣльное дѣленіе), что даетъ a^2-ab-b^2. Второй членъ частнаго равенъ, слѣдовательно, $(a^2-ab-b^2)x$. Умноженіе дѣлителя на этотъ членъ и вычитаніе приведутъ къ новому остатку, надъ которымъ дѣйствуемъ подобно предъидущему; приходимъ наконецъ къ искомому частному.

68. Условія возможности. Разсужденія, приведшія насъ къ методѣ дѣленія, предполагаютъ, что искомое частное выражается многочленомъ. Найдемъ теперь необходимыя и достаточныя условія существованія частнаго въ этой формѣ. Условія эти открываются самою методою полученія частнаго.

И въ самомъ дѣлѣ, если дѣленіе возможно, то

1° *первый членъ дѣлимаго дѣлится на первый членъ дѣлителя и послѣдній членъ дѣлимаго дѣлится на послѣдній членъ дѣлителя* (**48**).

2° *первый членъ каждаго остатка дѣлится на первый членъ дѣлителя,* ибо этотъ членъ представляетъ произведеніе перваго члена дѣлителя на соотвѣтственный членъ частнаго.

3° *послѣ опредѣленнаго числа послѣдовательныхъ отдѣльныхъ дѣленій получается въ частномъ такой членъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизведетъ тотъ остатокъ, отъ дѣленія перваго члена котораго на первый членъ дѣлителя получается въ частномъ разсматриваемый членъ,* ибо въ концѣ концовъ долженъ получиться остатокъ, равный нулю.

Условія эти необходимы: если одно изъ этихъ условій не выполнено, то частное не существуетъ въ формѣ полинома.

Условія эти достаточны: если они выполнены, то изложенная метода даетъ полиномъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, воспроизведетъ дѣлимое.

69. Признаки, по которымъ можно судить, выполняются ли дѣленія или нѣтъ. Если полиномы расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, то показатели этой буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, убывая, ибо приведеніе подобныхъ членовъ уничтожаетъ по крайней мѣрѣ одинъ членъ каждаго отдѣльнаго дѣлимаго произведенія. Отсюда вытекаетъ, что мы, слѣдуя методѣ дѣленія, *необходимо придемъ къ такому остатку, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ, меньшимъ того, съ какимъ она входитъ въ первый членъ дѣлителя.* Если этотъ остатокъ равенъ нулю, дѣленіе возможно; если же нѣтъ, то оно невозможно.

Примѣръ IV. Раздѣлить $x^5+5x^4+2x^3$ на x^2+x.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{Дѣлимое} \quad x^5+5x^4+2x^3 & x^2+x \quad \text{дѣлитель} \\
+4x^4+2x^3 & x^3+4x^2-2x+2 \quad \text{частное.} \\
-2x^3 & \\
+2x^2 & \\
-2x. &
\end{array}
$$

Приходимъ къ остатку $-2x$, первый членъ котораго содержитъ главную букву съ показателемъ, меньшимъ того, съ какимъ она входитъ въ первый членъ дѣлителя.

Если дѣленіе не выполняется, то существуетъ другой признакъ, который позволяетъ узнать тотъ моментъ, на которомъ нужно остановиться.

И въ самомъ дѣлѣ, если дѣленіе возможно, то послѣдній членъ дѣлимаго долженъ представлять произведеніе послѣдняго члена дѣлителя на послѣдній членъ частнаго. Отсюда слѣдуетъ, что, раздѣливъ послѣдній членъ дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя, мы заранѣе можемъ опредѣлить послѣдній членъ частнаго. *Если, слѣдовательно, образовывая послѣдовательные члены частнаго, найдемъ такой членъ, въ которомъ показатель главной буквы менѣе показателя этой буквы въ заранѣе опредѣленномъ членѣ, или же найдемъ такой членъ, который, хотя и содержитъ главную букву съ тѣмъ же показателемъ, съ какимъ она входитъ въ заранѣе опредѣленный членъ, но не тождественъ этому члену, то скажемъ, что никакой многочленъ желаемой формы не можетъ представить частнаго.*

Въ примѣрѣ IV, если бы частное существовало, то его послѣдній членъ равнялся бы $2x^2$.

А между тѣмъ, образовывая члены частнаго, мы приходимъ къ члену $4x^2$, не тождественному съ $2x^2$; отсюда, не идя далѣе, заключаемъ, что дѣленіе невозможно.

Если, образовывая послѣдовательные члены частнаго, мы найдемъ такой членъ, который тождественъ заранѣе опредѣленному, то отсюда мы еще не имѣемъ права сдѣлать обратныхъ заключеній, т.-е. не имѣемъ права сказать, что дѣленіе будетъ возможно.

Примѣръ V. Раздѣлить $x^5-3x^3+x^2$ на x^2+x-1.

$$
\begin{array}{r|l}
\text{Дѣлимое} \quad x^5 \qquad -3x^3+x^2 & x^2+x-1 \quad \text{дѣлитель.} \\
-x^4-2x^3+x^2 & x^3-x^2-x+1 \quad \text{частное.} \\
-x^3 & \\
x^2-x & \\
-2x+1. &
\end{array}
$$

Послѣдній членъ частнаго долженъ быть $-x^2$.

Образовывая послѣдовательные члены частнаго, мы, дѣйствительно, находимъ членъ $-x^2$, а между тѣмъ дѣленіе невозможно.

70. Дѣленіе многочленовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы. Иногда многочлены, данные для раздѣленія, располагаются по возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы. Частное будетъ расположено также по возрастающимъ степенямъ той же буквы, причемъ метода его нахожденія совершенно одинакова съ предъидущею. Замѣтимъ здѣсь только, что показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, возрастая; слѣдовательно, въ случаѣ невозможнаго дѣленія, мы можемъ продолжать дѣйствіе неопредѣленно, не встрѣтивъ такого остатка, первый членъ котораго не дѣлился бы на первый членъ дѣлителя.

Для примѣра возьмемъ дѣленіе, выполненное въ параграфѣ (**65**), расположивъ оба полинома по возростающимъ степенямъ x.

Примѣръ VI.

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Дѣлимое . . .} & -1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & -1+x+x^2 \text{ дѣлитель.} \\
 & -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & +1+5x^2+x^3 \text{ частное.} \\
 & -x^3+x^4+x^5 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Говоримъ: такъ какъ дѣлимое представляетъ произведеніе дѣлителя на частное, то членъ съ наименьшимъ показателемъ буквы x получается, безъ приведенія, отъ умноженія аналогичныхъ членовъ дѣлителя и частнаго (**49**), а потому первый членъ частнаго есть частное отъ дѣленія перваго члена дѣлимаго на первый членъ дѣлителя; онъ равенъ $+1$.

Доказываемъ подобно тому, какъ это дѣлали въ (**63**), что, умноживъ дѣлителя на полученный членъ частнаго и вычтя произведеніе изъ дѣлимаго, получимъ остатокъ $-5x^2+4x^3+6x^4+x^5$, который, будучи раздѣленъ на дѣлителя, дастъ остальные члены частнаго.

Первый изъ этихъ членовъ равенъ, на основаніи соображеній, выше данныхъ, частному отъ раздѣленія $-5x^2$ на -1, т.-е. онъ равенъ $+5x^2$.

Умноживъ $+5x^2$ на дѣлителя и вычтя результатъ изъ перваго остатка, найдемъ второй остатокъ $-x^3+x^4+x^5$, который, будучи раздѣленъ на дѣлителя, даетъ остальные члены частнаго.

Первый изъ этихъ членовъ равенъ, на основаніи выше данныхъ соображеній, частному отъ раздѣленія $-x^3$ на -1, т.-е. онъ равенъ $+x^3$.

Умноживъ его на дѣлителя и вычтя произведеніе изъ предъидущаго остатка, получимъ въ остаткѣ нуль, и дѣйствіе окончено.

71. Признакъ, по которому узнаемъ невозможность дѣленія, такимъ образомъ расположеннаго. Въ предъидущемъ примѣрѣ дѣйствіе окончилось, и результатъ, какъ и слѣдовало ожидать, тождественъ съ тѣмъ, который дается первымъ способомъ. Будетъ нѣчто иное въ томъ случаѣ, когда предложенное дѣленіе невозможно.

Пусть, напримѣръ, требуется раздѣлить

$$(1+x+x^2+2x^3) \quad \text{на} \quad (1+2x).$$

Примѣръ VII.

$$
\begin{array}{rl|l}
\text{Дѣлимое} \ldots & 1+x+x^2+2x^3 & 1+2x \quad \text{дѣлитель.} \\
 & -x+x^2+2x^3 & 1-x+3x^2-4x^3+\ldots \quad \text{частное.} \\
 & +3x^2+2x^3 & \\
 & -4x^3 & \\
 & & +8x^4
\end{array}
$$

Прилагая методу къ этому примѣру, мы получимъ послѣдовательные остатки, въ которыхъ показатели главной буквы въ первыхъ членахъ идутъ, возрастая, такъ что раздѣленіе перваго члена каждаго остатка на первый членъ дѣлителя всегда выполнимо.

Отсюда слѣдуетъ, что первый признакъ невозможности (**69**) не даетъ здѣсь ничего.

Существуетъ признакъ, аналогичный второму, который, въ случаѣ невозможнаго дѣленія, рѣшаетъ вопросъ. И въ самомъ дѣлѣ, если дѣленіе возможно, то послѣдній членъ дѣлимаго есть произведеніе послѣдняго члена дѣлителя на послѣдній членъ частнаго, а потому послѣдній членъ частнаго получается непосредственно отъ раздѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя. Такъ какъ показатели главной буквы въ членахъ частнаго идутъ, возрастая, *то дѣленіе будетъ невозможно, когда мы получимъ въ частномъ членъ, въ которомъ показатель главной буквы будетъ болѣе показателя главной буквы въ заранѣе вычисленномъ членѣ, или-же получимъ такой членъ, который, при равенствѣ показателей, не будетъ тождественъ члену, заранѣе вычисленному.*

Въ примѣрѣ VII, послѣдній членъ частнаго, если оно существуетъ, равенъ частному отъ раздѣленія $2x^3$ на $2x$, т.-е. онъ равенъ x^2, а между тѣмъ мы получаемъ членъ $3x^2$, на которомъ должно остановиться; дѣленіе не выполняется.

Вообще видимъ, что самая метода дѣленія приводитъ къ признакамъ возможности или невозможности раздѣленія.

§ IV. Дѣленія, точно невыполнимыя.

*** 72. Опредѣленія.** Если въ полиномѣ буква x не входитъ ни въ знаменателяхъ, ни подъ знакомъ корня, то полиномъ называется *цѣлымъ* относительно этой буквы. Выраженіе:

$$\frac{3a^2x^3}{4}-\frac{2b^3x^2}{5a}+3x\sqrt{c}-\frac{4}{5}$$

есть полиномъ, цѣлый относительно x.

Измѣреніемъ полинома, цѣлаго относительно буквы x, называется наивысшій показатель, присвоенный этой буквѣ въ полиномѣ. Если это измѣреніе равно единицѣ, то полиномъ называется *линейнымъ* относительно буквы x. Предъидущій полиномъ есть полиномъ 3-го измѣренія относительно x.

Полиномъ $3b^4x - b^2 - b$ есть многочленъ линейный относительно буквы x и 4-го измѣренія относительно буквы b

Если частное отъ раздѣленія полиномовъ A и B, цѣлыхъ относительно буквы x, есть многочленъ, цѣлый относительно этой буквы, то говорятъ, что многочленъ A *дѣлится* на многочленъ B, причемъ коэффиціенты могутъ быть какіе угодно; такъ, напримѣръ, полиномъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2} \text{ дѣлится на } \frac{x}{a} - \frac{1}{b}, \text{ частное равно } \frac{x}{a} + \frac{1}{b}.$$

Если же подобнаго частнаго не существуетъ, то говорятъ, что полиномъ A не дѣлится на полиномъ B. Дѣйствіе можетъ быть только обозначено: $\frac{A}{B}$. Мы дадимъ сейчасъ теорему, при помощи которой формула $\frac{A}{B}$ можетъ быть приведена къ другому виду.

*** 73. Теорема I.** *Если полиномы A и B суть полиномы цѣлые относительно x (измѣреніе A не менѣе измѣренія B), то частное $\frac{A}{B}$ тождественно нѣкоторому многочлену Q, цѣлому относительно x, сложенному съ дробью $\frac{R}{B}$, знаменатель которой есть дѣлитель B, причемъ числитель представляетъ полиномъ R, цѣлый относительно x, измѣреніе котораго менѣе измѣренія B.*

Расположимъ многочлены A и B по убывающимъ степенямъ буквы x и приложимъ къ нимъ методу дѣленія **(64)**. Такъ какъ мы ищемъ частное цѣлое *только* относительно буквы x, то коэффиціенты при различныхъ степеняхъ этой буквы въ получаемыхъ членахъ частнаго могутъ быть какіе угодно.

Отсюда слѣдуетъ, что мы можемъ продолжать дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ остатка, измѣреніе котораго будетъ менѣе измѣренія B.

Полученные члены частнаго не будутъ содержать буквы x въ знаменателяхъ, ибо измѣренія тѣхъ дѣлимыхъ, которыя дадутъ эти члены, не менѣе измѣренія дѣлителя B, и, слѣдовательно, показатели буквы x ихъ первыхъ членовъ не менѣе показателя буквы x въ первомъ членѣ дѣлителя B.

Означимъ буквою Q совокупность тѣхъ членовъ частнаго, которые мы нашли до того момента, пока не получили отдѣльнаго дѣлимаго R, измѣреніе котораго менѣе измѣренія B. R есть остатокъ, который получится, если вычтемъ изъ A послѣдовательно произведенія дѣлителя B на различные члены Q; онъ равенъ, слѣдовательно, $A—BQ$, такъ что

$$R = A - BQ.$$

Равенство это даетъ:

$$A = BQ + R.$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на число B, найдемъ:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Результатъ этотъ показываетъ, что частное $\frac{A}{B}$ представлено въ той формѣ, какая назначена теоремою.

*** 74. Теорема II.** *Преобразованіе теоремы I можетъ быть совершено только однимъ образомъ.*

Положимъ наоборотъ, что, дѣля A на B, мы получили съ одной стороны частное Q и остатокъ R, и съ другой—частное Q' и остатокъ R'. R и R' суть многочлены, измѣренія которыхъ менѣе измѣренія B.

На основаніи предъидущаго получаемъ тождественно:

$$A = BQ + R, \quad A = BQ' + R',$$

отсюда заключаемъ, что

$$BQ + R = BQ' + R'$$

тождественно.

Равенство это даетъ:

$$B(Q - Q') = R' - R$$

тождественно.

Такъ какъ измѣренія R' и R менѣе измѣренія B, то разность $R' - R$ представляетъ многочленъ, измѣреніе котораго *менѣе* измѣренія B. Съ другой стороны, произведеніе $B\ (Q—Q')$ представляетъ многочленъ, измѣреніе котораго *не менѣе* измѣренія B. Мы увидимъ впослѣдствіи, что два многочлена $B\ (Q - Q')$ и $R' - R$ различныхъ измѣреній не могутъ быть тождественно равны между собою.

* **75.** *Примѣры.* Предъидущая метода даетъ намъ:

1°. $\dfrac{x^5-2x^3+x-1}{x^2-3}=x^3+x+\dfrac{4x-1}{x^2-3};$

2°. $\dfrac{2x^4+3x^2-5x+7}{7x^3+x-1}=\dfrac{2}{7}x+\dfrac{\frac{19}{7}x^2-\frac{33}{7}x+7}{7x^3+x-1};$

3°. $\dfrac{x^2\sqrt{\frac{2}{3}}+3x-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}+\dfrac{3x+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}}{3x^2-\frac{1}{2}}.$

Если измѣреніе полинома A менѣе измѣренія полинома B, то частное Q равно нулю и остатокъ R равенъ самому дѣлимому.

* **76. Замѣчаніе.** Полиномъ Q называется *цѣлымъ частнымъ* при дѣленіи A и B; полиномъ R называется *остаткомъ* при этомъ дѣленіи.

* **77. Случай, когда измѣняется главная буква.** Мы показали, что цѣлое частное и остатокъ при дѣленіи полиномовъ A и B, расположенныхъ относительно одной и той-же буквы x, могутъ имѣть только одну форму (**74**). Измѣнивъ-же главную букву, мы можемъ получить иное цѣлое частное и иной остатокъ. Разсмотримъ, напримѣръ, дробь

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Расположивъ числителя и знаменателя по буквѣ x, получимъ въ частномъ x^2-y^2 и въ остаткѣ $2y^4$. Расположивъ же по буквѣ y, мы найдемъ въ частномъ y^2-x^2 и въ остаткѣ $2x^4$. Имѣемъ:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$
$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x^2+\frac{2x^4}{y^2+x^2}.$$

§ V. Различія и сходства между дѣленіемъ ариѳметическимъ и дѣленіемъ алгебрическимъ.

* **78.** Полиномы, расположенные по степенямъ одной и той же буквы, представляютъ сходство съ цѣлыми числами, которое хорошо замѣтить. Цѣлое число, напримѣръ 783214, выражаетъ сумму:

$$7\,.\,10^5+8\,.\,10^4+3\,.\,10^3+2\,.\,10^2+1\,.\,10+4$$

и представляетъ частный случай полинома:

$$7 \,.\, x^5 + 8 \,.\, x^4 + 3 \,.\, x^3 + 2 \,.\, x^2 + 1 \,.\, x + 4,$$

въ которомъ $x = 10$. Цифры числа суть коэффиціенты членовъ полинома.

Отсюда однако нельзя заключить, что всякій ариөметическій вопросъ, относящійся къ цѣлымъ числамъ, представитъ вполнѣ частный случай алгебрическаго вопроса, когда мы замѣнимъ числа соотвѣтствующими полиномами.

Сравнимъ, напримѣръ, два слѣдующихъ вопроса:

раздѣлить 783214 на 321 и
раздѣлить $7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ на $3x^2+2x+1$.

Условія обѣихъ задачъ настолько между собою различны, что нельзя первую разсматривать, какъ частный случай второй.

1°. Различныя цифры частнаго при ариөметическомъ дѣленіи должны быть цѣлыя, между тѣмъ какъ частное при алгебрическомъ дѣленіи можетъ быть полиномомъ, въ которомъ коэффиціенты при степеняхъ x суть числа дробныя.

2°. Различныя цифры частнаго и остатка при дѣленіи ариөметическомъ должны быть менѣе 10, между тѣмъ какъ ничто не ограничиваетъ величины коэффиціентовъ различныхъ степеней x при дѣленіи алгебрическомъ.

3°. При ариөметическомъ дѣленіи остатокъ долженъ быть менѣе дѣлителя, при алгебрическомъ же дѣленіи онъ долженъ быть только меньшаго измѣренія.

4°. Въ алгебрѣ получаемые результаты имѣютъ мѣсто при всякомъ x; не существуетъ аналогичнаго условія въ ариөметикѣ. Замѣтимъ однако, что раздѣленіе двухъ цѣлыхъ чиселъ можетъ быть выполнено методою дѣленія многочленовъ, но только нѣсколько измѣненное. Пояснимъ это на предъидущемъ примѣрѣ, при чемъ разсужденіе будетъ общее. Дѣлимъ первый членъ дѣлимаго $7x^5$ на первый членъ дѣлителя $3x^2$, взявъ за первый членъ частнаго не $\frac{7}{3}x^3$, какъ взяли бы въ Алгебрѣ, а $2x^3$; остатокъ будетъ слѣдующій

$$x^5 + 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 4 = 14x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 4 \text{ (при } x=10).$$

Дѣлимъ первый членъ остатка, т.-е. $14x^4$, на первый членъ дѣлителя и беремъ за второй членъ частнаго не $\frac{14}{3}x^2$, а $4x^2$; остатокъ будетъ: $2x^4-7x^3-2x^2+x+4$; приводимъ его къ ариѳметической формѣ: $12x^3+8x^2+x+4$; за третій членъ частнаго могли бы взять $4x$, но тогда остатокъ получился бы отрицательный, а потому беремъ $3x$, и остатокъ $3x^3+2x^2-2x+4$ приводимъ къ ариѳметической формѣ: $31x^2+8x+4$; дѣлимъ первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя и получаемъ членъ частнаго, равный 9, и соотвѣтствующій остатокъ, равный $4x^2-10x-5$; остатокъ этотъ преобразовываемъ въ форму: $2x^2+9x+5$. Итакъ частное и остатокъ соотвѣтственно суть:

$$2x^3+4x^2+3x+9=2439 \quad \text{и} \quad 2x^2+9x+5=295.$$

§ VI. Теоремы и приложенія.

*** 79. Теорема.** *Остатокъ отъ дѣленія многочлена, расположеннаго по убывающимъ степенямъ буквы x, на двучленъ $(x-a)$ равенъ результату подстановки въ многочленъ вмѣсто буквы x числа a.*

Назовемъ данный многочленъ, расположенный по убывающимъ степенямъ буквы x, буквою X. Означимъ частное и остатокъ соотвѣтственно буквами Q и R. Частное Q есть многочленъ, цѣлый относительно x. Замѣтимъ, что остатокъ R не зависитъ отъ буквы x, т.-е. не содержитъ ея. И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ дѣлитель $x-a$ есть многочленъ перваго измѣренія относительно буквы x, или, какъ говорятъ иногда, *линейный* относительно этой буквы, то мы можемъ продолжать дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ остатка, не содержащаго буквы x.

Замѣтивъ это, напишемъ равенство:

$$X=(x-a)Q+R.$$

Равенство это представляетъ тождество, т.-е. оно имѣетъ мѣсто при всякомъ значеніи буквы x, ибо, выполнивъ всѣ дѣйствія, указанныя въ правой части, мы непремѣнно получимъ лѣвую часть, т.-е. X, каково бы ни было x. Мы можемъ, слѣдовательно, подставить въ это равенство вмѣсто буквы x число a. Подстановка эта не измѣнитъ R, ибо R не содержитъ x. Она обратитъ: многочленъ X въ число $(X)_{x=a}$, разность $(x-a)$ въ нуль, а слѣдовательно обратитъ въ нуль и произведеніе $(x-a)\,Q$. Отсюда слѣдуетъ, что замѣна буквы x числомъ a обращаетъ предъидущее тождество въ равенство:

$$R=(X)_{x=a}.$$

Равенство это мы и хотѣли доказать.

*** 80. Слѣдствія.** 1°. Если $(X)_{x=a}=0$, то предъидущее равенство говоритъ, что $R=0$. Отсюда находимъ: *если полиномъ X обращается въ нуль при $x=a$, то онъ дѣлится на $x-a$.*

2°. Если $R=0$, то $(X)_{x=a}=0$. Отсюда находимъ: *если полиномъ X дѣлится на $x-a$, то онъ обращается въ нуль при $x=a$.*

Значеніе буквы x, обращающее многочленъ X въ нуль, называется *корнемъ* этого многочлена.

Слѣдствіе (1) выражаетъ собою достаточное условіе дѣлимости полинома X на двучленъ $x-a$; слѣдствіе же (2) представляетъ необходимое условіе этой дѣлимости.

Оба слѣдствія, разсматриваемыя совмѣстно, говорятъ намъ:

1°. *Для того, чтобы многочленъ, цѣлый относительно x, дѣлился на $x-a$, достаточно и необходимо, чтобы число a было корнемъ этого многочлена.*

2°. *Для того, чтобы число a было корнемъ многочлена, цѣлаго относительно буквы x, необходимо и достаточно, чтобы многочленъ этотъ дѣлился на двучленъ $(x-a)$.*

*** 81.** Послѣднее предложеніе имѣетъ большое значеніе въ алгебрѣ. Зная, въ самомъ дѣлѣ, корень a многочлена, мы можемъ быть увѣрены, что многочленъ дѣлится на $(x-a)$ и, слѣдовательно, разлагается на множителей, изъ которыхъ одинъ есть $(x-a)$, а другой представляетъ частное, получаемое при дѣленіи многочлена на $(x-a)$. Разложеніе же многочленовъ на множителей играетъ большую роль при алгебрическихъ вычисленіяхъ.

Наоборотъ, зная, какими бы то ни было путями, что многочленъ X дѣлится на $x-a$, мы утверждаемъ, что число a есть корень многочлена X. Нахожденіе же корней многочленовъ играетъ также, какъ увидимъ впослѣдствіи, большую роль въ алгебрѣ.

*** 82. Законъ частнаго при дѣленіи многочлена на $(x-a)$.** Мы уже нашли законъ, по которому опредѣляется остатокъ при дѣленіи многочлена на $(x-a)$. Легко открыть законъ, по которому можно писать частное, не производя дѣленія. Представимъ многочленъ въ видѣ:

$$A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \ldots + A_mx + A_{m+1}$$

и начнемъ выполнять дѣленіе.

Первый членъ частнаго равенъ A_1x^{m-1}.

Умноживъ дѣлителя на этотъ членъ и вычтя произведеніе изъ дѣлимаго, получимъ остатокъ, первый членъ котораго равенъ $(A_1a + A_2)x^{m-1}$, а остальные члены суть члены дѣлимаго, слѣдующіе за вторымъ членомъ.

Второй членъ частнаго представляется выраженіемъ $(A_1a + A_2)x^{m-2}$; для полученія перваго члена втораго остатка умножаемъ на a второй членъ частнаго и прибавляемъ къ произведенію третій членъ дѣлимаго; получаемъ такимъ образомъ $(A_1a^2 + A_2a + A_3)x^{m-2}$.

Итакъ, третій членъ частнаго равенъ $(A_1a^2 + A_2a + A_3)x^{m-3}$. Продолжая поступать подобнымъ образомъ, мы сдѣлаемъ очевиднымъ слѣдующій законъ:

Частное отъ дѣленія на $(x - a)$ полинома, цѣлаго относительно x, измѣренія m, есть полиномъ, цѣлый относительно x измѣренія $(m-1)$. Оно расположено, подобно дѣлимому, по убывающимъ степенямъ буквы x. Коэффиціентъ перваго члена одинаковъ съ коэффиціентомъ перваго члена дѣлимаго. Остальные коэффиціенты опредѣляются такимъ образомъ: коэффиціентъ n-аго члена равенъ предъидущему коэффиціенту, умноженному на число a и сложенному съ коэффиціентомъ n-аго члена дѣлимаго. Если дѣлимое не представляетъ полнаго полинома, то его дополняютъ недостающими членами, считая коэффиціенты ихъ равными нулямъ.

$$\text{Дѣл.}\quad A_1x^m + A_2x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x^2 + A_mx + A_{m+1} \quad\Big|\quad x - a \quad \text{Дѣлит.}$$

$$\text{Част.}\quad A_1x^{m-1} + \begin{matrix}A_1a\\+A_2\end{matrix}\Big| x^{m-2} + \begin{matrix}A_1a^2\\+A_2a\\+A_3\end{matrix}\Big| x^{m-3} + \dots$$

$$\text{1-й ост.}\quad \begin{matrix}A_1a\\+A_2\end{matrix}\Big| x^{m-1} + A_3x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x^2 + A_mx + A_{m+1}$$

$$\text{2-й ост.}\quad \begin{matrix}+A_1a^2\\+A_2a\\+A_3\end{matrix}\Big| x^{m-2} + \dots + A_{m-1}x^2 + A_mx + A_{m+1}$$

Примѣры:

1°. Найти частное и остатокъ при дѣленіи многочлена $3x^5-4x^4-2x^2+7$ на $x-2$.

Пишемъ дѣлимое такимъ образомъ:

$$3x^5-4x^4+0x^3-2x^2+0x+7$$

и находимъ для частнаго $3x^4+2x^3+4x^2+6x+12$ и для остатка 31.

2°. Многочленъ $x^5-x^3+x^2-1$ обращается въ нуль при $x=-1$. Заключаемъ, что онъ дѣлится на $x-(-1)$, или на $x+1$. Частное представляется многочленомъ x^4-x^3+x-1.

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ $x^5-x^3+x^2-1$ представляется произведеніемъ двухъ множителей:

$$(x+1)(x^4-x^3+x-1).$$

Полученное частное обращается въ нуль при $x=1$, а потому дѣлится на $(x-1)$.

Новое частное равно x^3+1, такъ что

$$x^4-x^3+x-1=(x-1)(x^3+1);$$

а потому данный многочленъ представляется въ видѣ:

$$(x+1)(x-1)(x^3+1).$$

Замѣчая, что многочленъ x^3+1 обращается въ нуль при $x=-1$, заключаемъ, что онъ дѣлится на $x+1$, причемъ частное равно x^2-x+1. Отсюда слѣдуетъ, что

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$

и слѣдовательно данный многочленъ можетъ быть представленъ такъ:

$$(x+1)(x-1)(x+1)(x^2-x+1).$$

Легко показать, что многочленъ x^2-x+1 ни при какомъ x не обращается въ нуль. И въ самомъ дѣлѣ, многочленъ этотъ можетъ написаться такимъ образомъ:

$$x^2-x+1=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Первое слагаемое, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, представляя изъ себя квадратъ, есть число положительное при всякомъ x, а потому многочленъ, представляя сумму двухъ положительныхъ чиселъ: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ и $\frac{3}{4}$, не можетъ быть нулемъ ни при какомъ x. Отсюда заключаемъ, что многочленъ x^2-x+1 не дѣлится ни на какого дѣлителя, линейнаго относительно x.

Многочленъ нашъ $x^5-x^3+x^2-1$ можетъ представиться такимъ образомъ:

$$(x-1)(x+1)^2(x^2-x+1).$$

Этотъ видъ многочлена показываетъ, что многочленъ обращается въ нуль при $x=1$, $x=-1$. Числа 1 и -1 суть, слѣдовательно, корни многочлена. Замѣтимъ, что корень -1, которому соотвѣтствуетъ линейный множитель $(x+1)$, возвышенный въ квадратъ, называется *кратнымъ корнемъ 2-го порядка* даннаго многочлена. Та форма, въ которой мы представили нашъ многочленъ, показываетъ, что многочленъ не обладаетъ иными корнями, кромѣ 1 и -1. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, на оборотъ, что онъ обладаетъ корнемъ a, отличнымъ отъ 1 и -1.

Подставивъ вмѣсто x число a, мы должны получить

$$(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)=0.$$

Результатъ этотъ невозможенъ, ибо ни одинъ изъ множителей не обращается въ нуль, а слѣдовательно и произведеніе не можетъ быть равно нулю.

3°. Легко видѣть, что многочленъ x^4+5x^2+4 не обращается въ нуль ни при какомъ x, а слѣдовательно не дѣлится ни на какого дѣлителя, линейнаго относительно x. И въ самомъ дѣлѣ, многочленъ этотъ можетъ быть представленъ такимъ образомъ:

$$\left(x^4+5x^2+\frac{25}{4}\right)-\frac{9}{4}=\left(x^2+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=(x^2+1)(x^2+4).$$

Ни одинъ изъ множителей: (x^2+1) и (x^2+4), ни при какомъ x, не обращается въ нуль.

Разсматривая же нашъ многочленъ, какъ многочленъ, цѣлый относительно x^2, т.-е. представляя его въ видѣ

$$(x^2)^2+5(x^2)+4,$$

и замѣчая, что онъ обращается въ нуль и при $x^2=-1$, и при $x^2=-4$, заключаемъ, что онъ дѣлится на множителей, линейныхъ относительно x^2, т.-е. на множителей (x^2+1) и (x^2+4).

*** 83.** Укажемъ еще на нѣкоторыя слѣдствія, вытекающія изъ доказаннаго предложенія (79).

1° Полиномъ (x^m-a^m) обращается въ нуль при $x=a$ при какомъ ни есть m, а потому дѣлится на $x-a$.

Итакъ, *разность одинаковыхъ степеней двухъ выраженій дѣлится безъ остатка на разность первыхъ степеней этихъ выраженій.*

Частное выражается многочленомъ (82):

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ .\ .\ .\ +a^{m-3}x^2+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Отсюда вытекаетъ, что всякій двучленъ, представляющій разность одинаковыхъ степеней двухъ выраженій, разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ есть разность первыхъ степеней этихъ выраженій, а другой—частное, получаемое отъ дѣленія даннаго двучлена на этого множителя.

Примѣръ. Замѣчая, что выраженіе $8a^9 - 27a^3b^6$ есть разность третьихъ степеней выраженій: $2a^3$ и $3ab^2$, заключаемъ что оно дѣлится на $2a^3 - 3ab^2$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$8a^9 - 27a^3b^6 = (2a^3 - 3ab^2)(4a^6 + 6a^4b^2 + 9a^2b^4).$$

2° Полиномъ $x^m + a^m$ не обращается въ нуль при $x = a$, а потому не дѣлится на $(x - a)$. Отсюда слѣдуетъ, что *сумма одинаковыхъ степеней двухъ выраженій не дѣлится на разность первыхъ степеней этихъ выраженій.*

3° Полиномъ $x^m + a^m$ обращается въ нуль при $x = -a$, если m нечетное, и не обращается въ нуль при этомъ x, если m четное, и слѣдовательно дѣлится на $(x + a)$, если m нечетное, и не дѣлится на $(x + a)$, если m четное. Итакъ, *сумма одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ выраженій дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ выраженій. Сумма одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ выраженій не дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ выраженій.*

Частное выражается многочленомъ (**82**):

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1}.$$

Отсюда вытекаетъ, что всякій двучленъ, представляющій сумму одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ выраженій, разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ есть сумма первыхъ степеней этихъ выраженій, а другой частное, происходящее отъ дѣленія даннаго выраженія на этого множителя.

Примѣръ. Выраженіе $x^{10} + a^{10}$, представляя сумму пятыхъ степеней выраженій x^2 и a^2, дѣлится на $x^2 + a^2$ и можетъ быть представлено въ видѣ произведенія:

$$x^{10} + a^{10} = (x^2 + a^2)(x^8 - a^2x^6 + a^4x^4 - a^6x^2 + a^8).$$

4° Двучленъ $x^m - a^m$, обращаясь въ нуль при $x = -a$, если m число четное, и не обращаясь въ нуль при $x = -a$, если m число нечетное, дѣлится на $(x + a)$, если m четное, и не дѣлится на $(x + a)$, если m нечетное, т.-е. *разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ выраженій дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ выраженій; разность одинаковыхъ нечетныхъ степеней двухъ выраженій не дѣлится на сумму первыхъ степеней этихъ выраженій.*

Частное при этомъ дѣленіи выражается многочленомъ (**83**):

$$x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1}.$$

Если выраженіе представляетъ разность одинаковыхъ четныхъ степеней двухъ выраженій, то оно разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ есть сумма первыхъ степеней этихъ выраженій, а другой частное, получаемое отъ дѣленія даннаго выраженія на этого множителя.

Примѣръ. Двучленъ $x^{20}-a^{20}$, представляя разность четвертыхъ степеней выраженій: x^5 и a^5, дѣлится на сумму x^5+a^5 и можетъ быть изображенъ въ видѣ произведенія:

$$x^{20}-a^{20}=(x^5+a^5)(x^{15}-a^5x^{10}+a^{10}x^5-a^{15}).$$

Этотъ же двучленъ представляетъ разность квадратовъ выраженій x^{10} и a^{10}, а потому, дѣлясь на сумму $x^{10}+a^{10}$, можетъ быть написанъ такимъ образомъ:

$$x^{20}-a^{20}=(x^{10}+a^{10})(x^{10}-a^{10}).$$

* **84. Теорема.** *Если неравныя между собою числа a, b, c суть корни многочлена A, цѣлаго относительно x, то многочленъ этотъ дѣлится на произведеніе*

$$(x-a)(x-b)(x-c).$$

Такъ какъ число a есть корень многочлена A, то онъ дѣлится (**80**) на $(x-a)$. Обозначивъ частное, цѣлое относительно x, буквою Q, найдемъ

$$A=(x-a)\,.\,Q.$$

Равенство это представляетъ тождество, а потому мы можемъ замѣнить букву x числомъ b. Обозначивъ буквою Q_b значеніе Q послѣ этой замѣны и принявъ во вниманіе, что b есть корень полинома A, найдемъ:

$$0=(b-a)Q_b.$$

Такъ какъ разность $(b-a)$, по условію, не равна нулю, то $Q_b=0$. Результатъ этотъ показываетъ, что полиномъ Q дѣлится (**80**) на $(x-b)$. Обозначивъ частное буквою Q', найдемъ:

$$Q=(x-b)Q',$$

и, слѣдовательно,

$$A=(x-a)(x-b)Q'.$$

Замѣнивъ въ этомъ тождествѣ букву x числомъ c, означивъ буквою Q'_c значеніе Q' при этой замѣнѣ и принявъ во вниманіе, что c есть корень многочлена A, найдемъ:

$$0=(c-a)(c-b)Q'_c.$$

Такъ какъ разности $(c-a)$ и $(c-b)$ не суть нули, то должно быть: $Q'_c=0$, т.-е. полиномъ Q' долженъ дѣлиться на $(x-c)$. Обозначивъ частное буквою Q'', найдемъ:

$$Q'=(x-c)\,Q'',$$

а потому

$$A=(x-a)(x-b)(x-c)\,Q''.$$

Равенство это говоритъ, что полиномъ A дѣлится на произведеніе: $(x-a)$ $(x-b)$ $(x-c)$.

Упражненія.

I. Найти необходимое и достаточное условіе дѣлимости (x^m-a^m) на x^n-a^n.

Необходимо и достаточно, чтобы m дѣлилось на n.

II. Показать, что многочленъ:

$$x^q y^r+y^q z^r+z^q x^r-x^r y^q-y^r z^q-z^r x^q$$

дѣлится на произведеніе: $(x-y)(x-z)(y-z)$

III. Показать, что многочленъ:

$$x^p y^q z^r+y^p z^q x^r+z^p x^q y^r-x^r y^q z^p-y^r z^q x^p-z^r x^q y^p$$

дѣлится на то же произведеніе.

IV. Показать, что полиномъ:

$$(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m,$$

при нечетномъ m, дѣлится на $(a+b)$ $(a+c)$ $(b+c)$.

Доказательство упражненій II, III и IV основывается на теоремѣ (84).

V. Если коэффиціенты многочлена, цѣлаго относительно x, суть числа цѣлыя, и если многочленъ этотъ при $x=0$ и при $x=1$ принимаетъ нечетныя численныя значенія, то онъ не имѣетъ цѣлыхъ *корней*.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Алгебрическія дроби.

85. Опредѣленія. Формула $\frac{A}{B}$, въ которой послѣднее дѣйствіе есть дѣленіе и въ которой A и B суть два алгебрическія выраженія, называется *алгебрическою дробью.* Дѣлимое A есть *числитель* дроби, дѣлитель B есть ея *знаменатель.* Выраженія A и B называются *членами* дроби.

Алгебрическая дробь имѣетъ болѣе общій смыслъ, чѣмъ дробь ариѳметическая. Въ ариѳметической дроби и числитель, и знаменатель суть числа цѣлыя; въ дроби алгебрической члены ея суть какія угодно числа. Покажемъ, что правила преобразованій, относящихся къ дробямъ, одинаковы для обоихъ родовъ дробей.

§ I. Преобразованіе алгебрическихъ дробей.

86. Теорема. *Значеніе алгебрической дроби не измѣняется отъ умноженія обоихъ ея членовъ на одно и то же количество.*

Обозначимъ соотвѣтственно буквами q и m значеніе данной дроби $\frac{a}{b}$ и значеніе того множителя, на который умножаются числитель и знаменатель.

По опредѣленію дроби получимъ:

$$a = bq.$$

Умноживъ равныя количества a и bq на одно и то же число m, найдемъ:

$$am = bq \,.\, m = (bm) \,.\, q.$$

Равенство это показываетъ, что количество q, т.-е. значеніе дроби $\frac{a}{b}$, представляетъ также значеніе дроби $\frac{am}{bm}$.

Итакъ:

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm},$$

что и требовалось доказать.

Написавъ предъидущее равенство въ видѣ:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b},$$

найдемъ, что *значеніе алгебрической дроби не измѣняется отъ раздѣленія ея членовъ на одно и то же количество.*

87. Сокращеніе дробей. *Сократить дробь значитъ раздѣлить оба ея члена на одно и то же количество.*

Если члены дроби суть цѣлые одночлены или цѣлые многочлены, содержащіе общихъ цѣлыхъ множителей, то сокращеніе дроби на этихъ множителей *упрощаетъ* видъ дроби.

Легко найти этихъ множителей, когда числитель и знаменатель дроби суть одночлены.

Пусть, напримѣръ, дана дробь: $\frac{36a^4b^3c^2d}{28ab^5cd^3}$.

Общій наибольшій дѣлитель коэффиціентовъ равенъ 4; что же касается до общихъ буквенныхъ множителей, то видимъ, что числитель и знаменатель содержатъ общими множителями: одного множителя a, трехъ множителей b, одного множителя c и одного множителя d. Уничтоживъ ихъ, получимъ упрощенную дробь: $\frac{9a^3c}{7b^2d^2}$.

Если члены дроби суть многочлены, то непосредственно находимъ ихъ общихъ одночленныхъ множителей.

Въ членахъ дроби: $\frac{12a^4b^3-8a^3b^2}{16a^5b-20a^2b^4}$ замѣчаемъ общаго множителя $4a^2b$; уничтоживъ его, приводимъ дробь къ виду: $\frac{3a^2b^2-2ab}{4a^3-5b^3}$.

Если числитель и знаменатель дроби суть цѣлые многочлены, содержащіе цѣлыхъ многочленныхъ множителей, то нахожденіе ихъ представляетъ вообще задачу трудную, относящуюся къ теоріи общаго наибольшаго алгебрическаго дѣлителя, которая будетъ изложена впослѣдствіи. Но и теперь мы можемъ иногда открыть этихъ множителей.

Примѣры:

1°. Дана дробь: $\dfrac{a^4-2a^3+4a^2-7a+4}{a^2+5a-6}$.

Замѣчая, что числитель и знаменатель обращаются въ нули при $a=1$, заключаемъ, что оба они дѣлятся на $(a-1)$. Уничтоживъ этого множителя, приводимъ дробь къ виду: $\dfrac{a^3-a^2+3a-4}{a+6}$.

2°. Возьмемъ дробь:

$$\frac{8a^2c^2d^3-72b^2c^2d^3}{6ac^3d^2-18bc^3d^2}.$$

Отдѣляя одночленныхъ множителей, найдемъ:

$$\frac{8c^2d^3(a^2-9b^2)}{6c^3d^2(a-3b)};$$

принимая во вниманіе, что множитель (a^2-9b^2), представляя разность квадратовъ выраженій: a и $3b$, дѣлится на $(a-3b)$, находимъ, что $2c^2d^2(a-3b)$ представляетъ множителя, общаго обоимъ членамъ. Дробь приводится къ формѣ:

$$\frac{4d(a+3b)}{3c}.$$

3°. Дана дробь:

$$\frac{a^{10}+b^{10}}{a^4-b^4}.$$

И числитель, и знаменатель дроби дѣлятся на a^2+b^2. Уничтоживъ этого общаго множителя, приведемъ дробь къ виду:

$$\frac{a^8-a^6b^2+a^4b^4-a^2b^6+b^8}{a^2-b^2}.$$

88. Приведеніе дробей къ одному знаменателю. *Умноживъ числителя и знаменателя каждой изъ дробей на произведеніе знаменателей остальныхъ дробей, мы приведемъ дроби къ общему знаменателю.*

Дроби:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h},$$

при помощи этого преобразованія, приводятся къ дробямъ:

$$\frac{adfh}{bdfh},\ \frac{cbfh}{bdfh},\ \frac{ebdh}{bdfh},\ \frac{gbdf}{bdfh}.$$

Предложенныя дроби не измѣнили своихъ значеній; онѣ имѣютъ общимъ знаменателемъ произведеніе первоначальныхъ знаменателей.

Иногда общій знаменатель получается въ болѣе простомъ видѣ. И въ самомъ дѣлѣ, если знаменатели суть цѣлые одночлены, то за общій знаменатель можно взять *общее наименьшее кратное* знаменателей, т.-е. произведеніе наивысшихъ степеней всѣхъ буквенныхъ сомножителей, изъ тѣхъ степеней, въ какихъ они, т.-е. сомножители, входятъ въ данные одночлены, умноженное на какого ни есть числоваго сомножителя; если коэффиціенты знаменателей суть числа цѣлыя, то за этотъ числовой сомножитель удобно взять общее наименьшее кратное коэффиціентовъ.

Пусть даны дроби:

$$\frac{A}{12a^3bc},\ \frac{B}{16a^2b^4},\ \frac{C}{18abc^3}.$$

Общее наименьшее кратное знаменателей есть одночленъ: $144a^3b^4c^3$. Частныя отъ дѣленія этого одночлена на знаменателей соотвѣтственно суть: $12b^3c^2$, $9ac^3$, $8a^2b^3$.

Дроби приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{A\,.\,12b^3c^2}{144a^3b^4c^3},\ \frac{B\,.\,9ac^3}{144a^3b^4c^3},\ \frac{C\,.\,8a^2b^3}{144a^3b^4c^3}.$$

Если знаменатели суть цѣлые многочлены, то нахожденіе ихъ общаго наименьшаго кратнаго представляетъ задачу сложную.

Въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ задача можетъ быть рѣшена легко.

Даны, напримѣръ, дроби:

$$\frac{2a}{3b^2},\ \frac{a+b}{2b(a-b)},\ \frac{a-b}{4a(a+b)},\ \frac{a^3+2b^3}{9a^2(a^2-b^2)}.$$

Мы видимъ, что выраженіе $36a^2b^2(a^2-b^2)$ дѣлится на каждаго изъ знаменателей, ибо $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Частныя соотвѣтственно суть:

$$12a^2(a^2-b^2),\quad 18a^2b(a+b),\quad 9ab^2(a-b),\quad 4b^2.$$

Дроби приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{24a^3(a^2-b^2)}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{18a^2b(a+b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{9ab^2(a-b)^2}{36a^2b^2(a^2-b^2)},\ \frac{4b^2(a^3+2b^3)}{36a^2b^2(a^2-b^2)}.$$

§ II. Дѣйствія надъ алгебраическими дробями.

89. Сложеніе. *Сумма алгебрическихъ дробей, имѣющихъ одинаковыхъ знаменателей, тождественна дроби, числитель которой есть сумма числителей данныхъ дробей и знаменатель которой равенъ знаменателю данныхъ дробей.*

И въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a+b+c+d}{m},$$

ибо произведенія каждой части этого равенства на количество m равны (35) выраженію $(a+b+c+d)$.

Если знаменатели дробей различны, то приводятъ дроби къ одному знаменателю и прилагаютъ предъидущее правило.

90. Вычитаніе. *Разность дробей, имѣющихъ одинаковыхъ знаменателей, тождественна дроби, числитель которой представляетъ разность между числителями уменьшаемой и вычитаемой дробей и знаменатель которой равенъ знаменателю данныхъ дробей.*

И въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m},$$

ибо произведенія обѣихъ частей этого равенства на количество m равны $(a-b)$.

Если знаменатели дробей различны, то приводятъ дроби къ общему знаменателю и прилагаютъ предъидущее правило.

91. Умноженіе. *Произведеніе дробей тождественно дроби, числитель и знаменатель которой равны соотвѣтственно произведеніямъ числителей и знаменателей предложенныхъ дробей.*

Положимъ, что даны дроби: $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$. Означивъ буквами q и q' соотвѣтственно значенія этихъ дробей, найдемъ, по опредѣленію,

$$a=bq,\quad a'=b'q'.$$

Перемноживъ эти равенства по частямъ, получимъ:

$$aa'=bq\,.\,b'q',\quad \text{или}\quad (33)\ aa'=bb'\,.\,qq'.$$

Равенство это, на основаніи опредѣленія дроби, показываетъ, что qq' есть значеніе дроби $\frac{aa'}{bb'}$, т.-е.

$$\frac{aa'}{bb'}=\frac{a}{b}\,.\,\frac{a'}{b'}.$$

Это мы и хотѣли доказать.

И вообще, *произведеніе нѣсколькихъ дробей представляетъ дробь,* *равную произведенію числителей, раздѣленному на произведеніе знаменателей*, такъ что:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}\cdot\ldots\ldots=\frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots},$$

и, слѣдовательно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

92. Дѣленіе. *Частное отъ раздѣленія двухъ дробей равно произведенію дѣлимой дроби на обращенную дѣлящую.*

Требуется раздѣлить: $\frac{a}{b}$ на $\frac{a'}{b'}$. Положивъ:

$$a=bq,\quad a'=b'q'$$

и раздѣливъ эти равенства по частямъ, найдемъ:

$$\frac{a}{a'}=\frac{bq}{b'q'}.$$

Умноживъ обѣ части на $\frac{b'}{b}$, получимъ (**91**):

$$\frac{ab'}{a'b}=\frac{bqb'}{b'q'b},$$

или, упрощая правую часть,

$$\frac{ab'}{a'b}=\frac{q}{q'},$$

т.-е.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b'}{a'}=\frac{a}{b}:\frac{a'}{b'},$$

что и требовалось доказать.

§ III. Отрицательные показатели.

93. Опредѣленіе. Мы видѣли (58), что частное отъ раздѣленія a^m на a^n равно a^{m-n}; доказательство предполагало, что $m>n$. Если же, обратно, $m<n$, то частное можетъ написаться только въ видѣ дроби: $\frac{a^m}{a^n}$. Уничтоживъ въ числителѣ и знаменателѣ этой дроби m множителей, равныхъ a, приведемъ дробь къ виду: $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Съ другой стороны, если условимся прилагать правило показателей и къ этому случаю, то можемъ написать:

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-(n-m)}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что правило показателей сохранитъ общность, если *согласимся разсматривать выраженіе* a^{-p}, *какъ символъ дроби* $\frac{1}{a^p}$.

Мы примемъ, какъ опредѣленіе, что *буква съ показателемъ отрицательнымъ выражаетъ дробь, имѣющую числителемъ единицу, а знаменателемъ ту же букву, показатель которой равенъ модулю отрицательнаго показателя.*

Понятіе это позволяетъ обобщить нѣкоторыя теоремы.

Во первыхъ, равенство:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \qquad [1]$$

имѣвшее, по опредѣленію, мѣсто для положительнаго m, остается справедливымъ и для m отрицательнаго. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что m есть отрицательное число, модуль котораго равенъ p такъ что $m = -p$. Такъ какъ p есть число положительное, то можемъ писать:

$$a^p = \frac{1}{\frac{1}{a^p}} = \frac{1}{a^{-p}},$$

отсюда

$$a^{-m} = \frac{1}{a^{-(-m)}} = \frac{1}{a^m}.$$

94. Обобщеніе правила показателей при умноженіи. Мы доказали (33), для положительныхъ показателей, равенство:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \qquad [2]$$

Докажемъ, что равенство это остается справедливымъ и тогда, когда одинъ изъ показателей, или оба вмѣстѣ, отрицательные. Положимъ сперва, что m положительное и n отрицательное, равное $-n'$; получимъ:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-n'} = a^m \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'} = a^{m+(-n')} = a^{m+n}.$$

Предположимъ теперь, что m и n отрицательные, равные соотвѣтственно: $-m'$ и $-n'$; будемъ имѣть:

$$a^m \cdot a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-m'-n'} = a^{m+n},$$

что и требовалось доказать.

95. Обобщеніе правила показателей при дѣленіи. Мы имѣли **(93)**, для положительныхъ m и n, равенство:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad [3]$$

Оно остается справедливымъ и тогда, когда одинъ изъ показателей, или оба отрицательные.

Положимъ сперва, что $m = -m'$ и n положительное; будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^n = \frac{1}{a^{m'}} : a^n = \frac{1}{a^{m'+n}} = a^{-m'-n} = a^{m-n}.$$

Если, напротивъ, m положительное и n отрицательное, равное $-n'$, то:

$$a^m : a^n = a^m : a^{-n'} = a^m : \frac{1}{a^{n'}} = a^m \cdot a^{n'} = a^{m+n'} = a^{m-n}.$$

Если, наконецъ, $m = -m'$, $n = -n'$, то:

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} : \frac{1}{a^{n'}} = a^{n'-m'} = a^{m-n}.$$

96. Обобщеніе правила показателей при возвышеніи въ степень. Мы доказали, для положительныхъ m и n, равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad [4]$$

Оно остается справедливымъ и тогда, когда одно изъ чиселъ: m или n, или оба вмѣстѣ, отрицательныя.

Положимъ сперва, что m положительное и n отрицательное, равное $-n'$; будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{m(-n')} = a^{mn}.$$

Предположимъ теперь, что $m = -m'$ и n положительное; получимъ:

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^n = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m'n}} = a^{-m'n} = a^{(-m')n} = a^{mn}.$$

Пусть, наконецъ, $m = -m'$, $n = -n'$; найдемъ:

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^{-n'} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'n'}}\right)} = a^{m'n'} = a^{mn}.$$

Правило общее.

§ IV. Теоремы.

97. Теоремы. *Дробь, числитель и знаменатель которой соотвѣтственно равны суммамъ числителей и знаменателей равныхъ дробей, равна этимъ дробямъ.*

Даны равныя дроби: $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, . . . Обозначивъ буквою q общее значеніе этихъ дробей, найдемъ, по опредѣленію,

$$a=bq,\quad a'=b'q,\quad a''=b''q,\ \ldots;$$

сложивъ эти равенства почленно и взявъ q за скобки, получимъ:

$$a+a'+a''+\ldots=(b+b'+b''+\ldots)q.$$

Равенство это говоритъ, что

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=q=\frac{a}{b}. \qquad [5]$$

Это мы и хотѣли доказать.

Слѣдствія. 1°. Можно, до сложенія, умножить оба члена дроби на одно какое ни есть число. Пусть:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\lambda}{b\lambda},\quad \frac{a'}{b'}=\frac{a'\lambda'}{b'\lambda'},\quad \frac{a''}{b''}=\frac{a''\lambda''}{b''\lambda''},\ \ldots$$

Такъ какъ дроби не измѣнили своихъ значеній, то заключаемъ:

$$\frac{a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''+\ldots}{b\lambda+b'\lambda'+b''\lambda''+\ldots}=\frac{a\lambda}{b\lambda}=\frac{a}{b}. \qquad [6]$$

* 2°. Положимъ, что дроби положительныя.

Возвысивъ каждую дробь въ квадратъ, найдемъ:

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots=\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots};$$

откуда, извлекая квадратный корень изъ обѣихъ частей, получимъ:

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}} \qquad [7],\ \text{т.-е.:}$$

Каждая изъ равныхъ дробей равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ числителей этихъ дробей, раздѣленному на корень квадратный изъ суммы квадратовъ ихъ знаменателей.

Упражненія

I. Повѣрить равенство:

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=$$
$$=x^2+y^2+z^2-b^2-c^2.$$

II. Повѣрить равенство:

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1.$$

III. Повѣрить равенство:

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}=\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}.$$

IV. Повѣрить равенство:

$$\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{(p+q)^2}\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right]+\frac{2}{(p+q)^3}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right].$$

V. Повѣрить равенство:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=$$
$$=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

VI. Упростить выраженіе:

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}.$$

Находимъ: $\frac{1}{1-x^2}$.

VII. Упростить выраженіе:

$$\frac{1}{1-\left[\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}\cdot$$
$$\cdot\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}.$$

Находимъ: $\frac{1}{1-x^2}$.

VIII. Повѣрить пропорцію:

$$\frac{\frac{c}{a+b}-\frac{c}{a+2b}}{\frac{c}{a+2b}-\frac{c}{a+3b}}=\frac{\frac{c}{a+b}}{\frac{c}{a+3b}}.$$

IX. Показать, что выраженіе:

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1}-\frac{x^{2n}}{x^n+1}-\frac{1}{x^n-1}+\frac{1}{x^n+1}$$

есть полиномъ, цѣлый относительно x.

IX. Показать, что сумма:

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2)$$

не содержитъ знаменателей.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Теорія квадратовъ и квадратныхъ корней.

§ I. Нѣкоторыя свойства неравенствъ.

98. Опредѣленія. Если разность двухъ чиселъ a и b, положительныхъ или отрицательныхъ, есть число положительное, то говорятъ, что a болѣе b.

99. Слѣдствія. 1°. *Каждое положительное число болѣе каждаго отрицательнаго числа.* Такимъ образомъ: $1 > -8$, ибо разность $1-(-8)$, равная 9, положительна.

2°. *Отрицательное число будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ его модуль менѣе.* Такимъ образомъ: $-7 > -20$, ибо разность $-7-(-20)$, равная 13, положительна.

3°. *Нуль можно разсматривать, какъ число, большее всякаго отрицательнаго числа.* Такимъ образомъ: $0 > -4$, ибо разность $0-(-4)$, равная 4, положительна.

Отсюда слѣдуетъ, что въ рядѣ чиселъ:

$$\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

какое ни есть число болѣе всякаго предшествующаго числа и менѣе всякаго послѣдующаго.

Для обозначенія того, что числа a и b суть соотвѣтственно положительное и отрицательное числа, пишутъ: $a > 0$, $b < 0$.

100. Свойство I. *Можно, не нарушая условій, выражаемыхъ неравенствомъ, увеличить или уменьшить обѣ его части на одно и то же* *число*. И въ самомъ дѣлѣ, неравенство: $a > b$ равносильно неравенству: $a - b > 0$. Но каково бы ни было m, мы можемъ писать:

$$a - b = a + m - b - m = (a + m) - (b + m),$$

слѣдовательно,

$$(a + m) - (b + m) > 0,$$

или, по опредѣленію,

$$a + m > b + m.$$

101. Свойство II. *Можно умножать обѣ части неравенства на одно и то же положительное число.*

И въ самомъ дѣлѣ, неравенство $a > b$ равносильно неравенству: $a - b > 0$. Умноживъ положительное число $(a - b)$ на положительнаго множителя m, мы получимъ положительное произведеніе:

$$(a - b)m > 0, \quad \text{или} \quad am - bm > 0,$$

т.-е., по опредѣленію, $am > bm$.

Можно умножить обѣ части неравенства на отрицательное число, измѣнивъ смыслъ неравенства. Ибо умноживъ положительное число $a - b$ на отрицательнаго множителя m, мы получимъ отрицательное произведеніе:

$$(a - b)m < 0, \quad \text{или} \quad am - bm < 0,$$

т.-е., наконецъ,

$$am < bm.$$

Аналогичные результаты получаются и при дѣленіи обѣихъ частей неравенства на m, ибо дѣленіе на m приводится къ умноженію на $\frac{1}{m}$, при чемъ знаки чиселъ m и $\frac{1}{m}$ одинаковы.

102. Свойство III. *Если обѣ части неравенства суть числа положительныя, то можно возвышать ихъ въ одну и ту же степень, каковъ бы ни былъ ея показатель, лишь бы онъ былъ положительнымъ.*

Такимъ образомъ неравенство: $7 > 3$ даетъ: $7^4 > 3^4$.

Если одна изъ частей неравенства, или обѣ вмѣстѣ, отрицательныя, то должно различать нѣсколько случаевъ.

1°. *Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей, можно возвышать ихъ въ одну и ту же степень, если только показатель ея m есть* *число нечетное.* Ибо, послѣ выполненія дѣйствія, обѣ части сохранятъ знаки, а слѣдовательно, сохранится исмыслъ неравенства.

Напримѣръ,

если $7 > -13$, то $7^3 > (-13)^3$;

если $-7 > -13$, то $(-7)^3 > (-13)^3$.

2°. *Если же обѣ части неравенства возвышаются въ степень, показатель которой есть число четное,* то:

a) *Неравенство измѣняетъ смыслъ, когда обѣ части его отрицательныя,* ибо, послѣ выполненія дѣйствія, обѣ части становятся положительными; напримѣръ, неравенство:

$$-7 > -13$$

даетъ послѣдовательно:

$$13 > 7,\ \ 13^4 > 7^4,\ \ (-13)^4 > (-7)^4,$$

а потому

$$(-7)^4 < (-13)^4.$$

b) *Нельзя дать правила, когда обѣ части различныхъ знаковъ:* неравенство можетъ измѣнить смыслъ, можетъ его не измѣнить и можетъ превратиться въ равенство; напримѣръ:

$$7 > -3, \qquad 7^4 > (-3)^4.$$
$$7 > -13, \qquad 7^4 < (-13)^4.$$
$$7 > -7, \qquad 7^4 = (-7)^4.$$

103. Свойство IV. *Отъ сложенія по частямъ двухъ неравенствъ одного и того же смысла получаемъ новое неравенство того же смысла.*

Даны два неравенства:

$$a > b,\ \ c > d;$$

они равносильны соотвѣтственно слѣдующимъ:

$$a - b > 0,\ \ \ c - d > 0.$$

Такъ какъ сумма двухъ положительныхъ чиселъ есть число положительное, то:

$$a - b + c - d > 0,$$

или

$$a + c > b + d.$$

Если же смыслъ неравенствъ различенъ, то нѣтъ правила. Имѣемъ, въ самомъ дѣлѣ,

$$\left.\begin{array}{l}7 > 3\\ 8 < 13\end{array}\right\} \text{ и } 7+8 < 3+13,$$

$$\left.\begin{array}{l}7 > 3\\ 8 < 12\end{array}\right\} \text{ и } 7+8 = 3+12,$$

$$\left.\begin{array}{l}7 > 3\\ 8 < 10\end{array}\right\} \text{ и } 7+8 > 3+10.$$

104. Свойство V. *Можно вычитать по частямъ неравенства различныхъ смысловъ; новое неравенство существуетъ въ смыслѣ перваго неравенства.*

Пусть будутъ, въ самомъ дѣлѣ, два неравенства:

$$a > b, \quad c < d;$$

они равносильны соотвѣтственно слѣдующимъ:

$$a > b, \quad d > c$$

и даютъ

$$a + d > b + c,$$

или

$$a - c > b - d.$$

105. Свойство VI. *Можно перемножать по частямъ два неравенства одного и того же смысла, если всѣ части неравенствъ положительныя; новое неравенство имѣетъ смыслъ перемножаемыхъ неравенствъ.*

Положимъ, что даны неравенства:

$$a > b, \quad c > d.$$

Такъ какъ c и b, по условію, положительные, то будемъ имѣть:

$$ac > bc, \quad bc > bd,$$

откуда $ac > bd$.

Если всѣ члены неравенствъ отрицательные, то смыслъ новаго неравенства противоположенъ смыслу предложенныхъ. И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ c и b отрицательныя, то:

$$ac < bc, \quad bc < bd,$$

и, слѣдовательно, $$ac < bd.$$

Не существуетъ общаго правила, когда не всѣ члены положительные или когда не всѣ члены отрицательные. Ничего нельзя сказать также и тогда, когда смыслъ неравенствъ различенъ.

106. Свойство VII. *Можно дѣлить по частямъ два неравенства различныхъ смысловъ, если всѣ части положительныя; новое неравенство имѣетъ смыслъ перваго неравенства.*

Положимъ, что дано: $a > b$, $c < d$; можно писать: $a > b$, $d > c$, и, слѣдовательно, $ad > bc$; раздѣливъ обѣ части этого неравенства на cd, найдемъ: $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Если всѣ части отрицательныя, то новое неравенство имѣетъ смыслъ втораго неравенства, ибо, сдѣлавъ перемноженіе, найдемъ: $ad < bc$; раздѣливъ обѣ части этого неравенства на положительное число cd, получимъ: $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Нельзя дать общаго правила въ другихъ случаяхъ.

§ II. Теоремы, относящіяся къ квадратамъ.

107. Теорема I. *Цифра единицъ квадрата цѣлаго числа не можетъ быть ни* 2, *ни* 3, *ни* 7, *ни* 8.

И въ самомъ дѣлѣ, квадратъ цѣлаго числа оканчивается на ту же цифру, на какую оканчивается и квадратъ цифры единицъ числа. Какова бы ни была цифра единицъ числа, ея квадратъ есть одно изъ чиселъ: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и, слѣдовательно, не имѣетъ цифрою единицъ ни 2, ни 3, ни 7, ни 8.

108. Замѣчаніе. Если цифры единицъ чиселъ суть: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то цифры единицъ ихъ квадратовъ соотвѣтственно суть: 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1.

Отсюда вытекаетъ, наоборотъ, что число оканчивается 0 или 5, если его квадратъ оканчивается соотвѣтственно 0 или 5. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ, мы, зная цифру единицъ квадрата, можемъ сдѣлать два возможныхъ предположенія о цифрѣ единицъ самаго числа: квадраты, оканчивающіеся на 1, 4, 9, 6, происходятъ соотвѣтственно отъ чиселъ, оканчивающихся на 1 или на 9, на 2 или на 8, на 3 или на 7, на 4 или на 6.

109. Теорема II. *Квадратъ цѣлаго числа не можетъ оканчиваться нечетнымъ числомъ нулей.* Для того, чтобы квадратъ числа оканчивался нулемъ, необходимо, чтобы само число также оканчивалось нулемъ. Это число, слѣдовательно, можетъ быть представлено формулою: $A \cdot 10^n$, гдѣ A и n соотвѣтственно суть: цѣлое число, не оканчивающееся нулемъ, и число нулей, сопровождающихъ A. Квадратъ этого числа, т.-е. $A^2 \cdot 10^{2n}$, оканчивается, очевидно, $2n$ нулями. Теорема доказана, ибо число $2n$ есть число четное.

110. Теорема III. *Для того, чтобы цѣлое число было квадратомъ другаго цѣлаго числа, необходимо и достаточно, чтобы показатели его простыхъ множителей были четные.*

1°. Условіе это необходимо. И въ самомъ дѣлѣ, образуя квадратъ цѣлаго числа, разложеннаго на простыхъ множителей, мы удвоиваемъ его показателей, вслѣдствіе чего они дѣлаются четными.

2°. Условіе это достаточно. И въ самомъ дѣлѣ, если оно выполнено, то, раздѣливъ на 2 показателей даннаго числа, мы образуемъ новое число, которое, будучи возвышено въ квадратъ, воспроизведетъ данное число.

111. Замѣчаніе. Цѣлое число не можетъ быть квадратомъ, если, дѣлясь на простаго дѣлителя p, не дѣлится на его квадратъ p^2. И въ самомъ дѣлѣ, разложивъ число на простыхъ множителей, мы увидимъ, что оно содержитъ множителя p съ показателемъ нечетнымъ, равнымъ единицѣ.

Напримѣръ, квадратъ не можетъ дѣлиться на 2, не дѣлясь на 4; онъ не дѣлится на 3, не дѣлясь на 9; не дѣлится на 5, не дѣлясь на 25.

112. Теорема IV. *Никакая дробь не имѣетъ квадратомъ цѣлаго числа.*

Пусть $\frac{a}{b}$ есть дробь, приведенная къ простѣйшей формѣ; квадратъ ея равенъ $\frac{a^2}{b^2}$; такъ какъ a есть число простое съ b, то a^2 есть также простое съ b^2, а потому невозможно, чтобы дробь $\frac{a^2}{b^2}$ была числомъ цѣлымъ.

113. Замѣчаніе. Дробь $\frac{a^2}{b^2}$ неприводима, ибо ея члены a^2 и b^2 суть числа взаимно простыя. Но они суть квадраты, а потому квадратъ дроби, приведенный къ простѣйшей формѣ, имѣетъ членами квадраты.

§ III. Опредѣленіе квадратнаго корня.

114. *Квадратнымъ корнемъ числа A называется такое число B, квадратъ котораго равенъ A.*

Примѣры. 2 есть квадратный корень 4; $\frac{3}{5}$ есть квадратный корень $\frac{9}{25}$.

Квадратный корень числа A обозначается такимъ образомъ:

$$B = \sqrt{A},$$

такъ что $2 = \sqrt{4}$, $\frac{3}{5} = \sqrt{\frac{9}{25}}$.

Замѣтимъ, что изъ понятія о квадратномъ корнѣ числа A вытекаетъ: *если число B есть квадратный корень числа A, то и число $(-B)$ есть квадратный корень этого числа,* ибо равенство $B^2 = A$ можетъ быть написано и такимъ образомъ: $(-B)^2 = A$.

Итакъ, напримѣръ,

$$\sqrt{4} = \pm 2, \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}.$$

Понятіе о квадратномъ корнѣ числа A требуетъ, чтобы число A было положительнымъ и представляло квадратъ.

* **115.** Если же положительное число A не есть квадратъ, то опредѣленіе понятія о его квадратномъ корнѣ требуетъ развитій, которыя мы сдѣлаемъ ниже.

§ IV. Квадратный корень числа съ точностью до единицы.

116. Разсмотримъ какое ни есть положительное число A, представляющее квадратъ или не представляющее его. Два цѣлыхъ положительныхъ числа x и $x+1$, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$x^2 \leqslant A < (x+1)^2,$$

называются *квадратными корнями числа A, съ точностью до единицы, при чемъ число x называется корнемъ съ недостаткомъ, число же $(x+1)$ называется корнемъ съ избыткомъ.*

Написанныя неравенства говорятъ, что x^2 представляетъ наибольшій цѣлый квадратъ, содержащійся въ числѣ A. Слѣдовательно, *квадратный корень числа A, съ точностью до единицы, съ недо-*

статкомъ, есть цѣлое положительное число, равное квадратному корню наибольшаго цѣлаго квадрата, заключеннаго въ числѣ A.

Примѣры. Если $A=5$, то его корни, съ точностью до единицы, суть 5 и 6; если $A=27$, то эти корни суть 5 и 6; если $A=\frac{32}{2}$, то они суть 3 и 4.

117. Теорема I. *Квадратные корни, съ точностью до единицы, числа нецѣлаго равны квадратнымъ корнямъ, съ точностью до единицы, его цѣлой части.*

Положимъ, что число A не есть цѣлое число и его цѣлая часть равна N, такъ что $A=N+\alpha$, гдѣ α положительное число, меньшее единицы. Квадратные корни, съ точностью до единицы, числа $N+\alpha$ удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$(1) \qquad x^2 \leqslant N+\alpha, \quad N+\alpha < (x+1)^2. \qquad (2)$$

Первое неравенство говоритъ, что разность $N+\alpha-x^2$, равная суммѣ $(N-x^2)+\alpha$, положительна; принимая же во вниманіе, что въ этой суммѣ первое слагаемое есть число цѣлое, а второе менѣе единицы, заключаемъ, что первое слагаемое должно быть не менѣе нуля. Итакъ, $x^2 \leqslant N$. Что касается до неравенства (2), то оно даетъ:

$$N < (x+1)^2.$$

Имѣемъ, слѣдовательно,

$$x^2 \leqslant N < (x+1)^2.$$

Неравенства эти говорятъ, что x и $x+1$ суть квадратные корни, съ точностью до единицы, числа N.

118. Теорема II. *Если цѣлое число состоитъ изъ $2n$ или $2n-1$ цифръ, то его квадратный корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, состоитъ изъ n цифръ.*

Цѣлое число A, изображенное $2n-1$ или $2n$ цифрами, заключено между числомъ, изображеннымъ цифрою 1, сопровождаемою $(2n-2)$ нулями, и числомъ, изображеннымъ цифрою 1, сопровождаемою $2n$ нулями, т.-е. это число A заключено между 10^{2n-2} и 10^{2n}. Имѣемъ, слѣдовательно, два неравенства:

$$10^{2n-2} \leqslant A, \quad A < 10^{2n},$$

или же

$$(g) \qquad (10^{n-1})^2 \leqslant A, \quad A < (10^n)^2.$$

Назвавъ буквою x квадратный корень числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, и принявъ во вниманіе, что x^2 не болѣе A, найдемъ:

$$x^2 < (10^n)^2, \quad \text{откуда} \quad x < 10^n.$$

Принявъ далѣе во вниманіе, что x представляетъ квадратный корень наибольшаго цѣлаго квадрата, заключеннаго въ числѣ A, который, какъ показываетъ первое неравенство (g), не менѣе числа $(10^{n-1})^2$, заключаемъ, что

$$(10^{n-1})^2 \leqslant x^2, \quad \text{откуда} \quad 10^{n-1} \leqslant x.$$

Итакъ, слѣдовательно,

$$10^{n-1} \leqslant x < 10^n.$$

Эти неравенства и доказываютъ теорему.

119. Замѣчаніе. Предъидущая теорема позволяетъ опредѣлить число цифръ въ корнѣ числа A по данному числу цифръ этого числа. И въ самомъ дѣлѣ, разобьемъ совокупность цифръ числа A на грани отъ правой руки къ лѣвой по двѣ цифры въ каждой грани, при чемъ послѣдняя грань можетъ содержать одну цифру; если число граней равно n, то число цифръ въ числѣ A равно или $2n-1$, или $2n$; въ обоихъ случаяхъ *число цифръ въ корнѣ равно* n, т.-е. *равно числу граней.*

120. Если число не болѣе 100, то таблица умноженія непосредственно даетъ наибольшій квадратъ, въ немъ заключенный, и, слѣдовательно, опредѣляетъ его квадратный корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ.

Примѣръ. Квадратный корень 73, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, есть 8, ибо 64 есть наибольшій квадратъ, заключенный въ 73.

Если число превышаетъ 100, то его квадратный корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, содержитъ болѣе одной цифры; метода его полученія основана на двухъ теоремахъ, которыя будутъ доказаны сейчасъ.

Для сокращенія рѣчи въ нижеслѣдующихъ параграфахъ (**121**, **122**, **123**, **124**), условимся называть квадратный корень числа N, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, просто квадратнымъ корнемъ числа N и обозначать его знакомъ: $E\sqrt{N}$.

Примѣръ. $E\sqrt{4}=2, \quad E\sqrt{62}=7, \quad E\sqrt{\frac{23}{3}}=2.$

Условимся обозначать наибольшее цѣлое число, заключенное въ дроби $\frac{a}{b}$, знакомъ $E\frac{a}{b}$.

Примѣръ. $E\frac{2}{3}=0$, $E(13,47)=13$, $E\frac{26}{9}=2$.

Условимся называть соотвѣтственно: числами десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д., заключенныхъ въ данномъ цѣломъ числѣ N, числа, получаемыя послѣ откидыванія въ этомъ числѣ одной, двухъ, трехъ и т. д. цифръ справа.

Примѣръ. Числа десятковъ, сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ числа 34278 соотвѣтственно суть: 3427, 342, 34 и 3.

Условимся называть *значенія* цифръ числа просто *цифрами* числа.

121. Теорема III. *Число десятковъ, заключенныхъ въ квадратномъ корнѣ цѣлаго числа N, равно квадратному корню числа его сотенъ.*

Назвавъ *число* десятковъ, заключенныхъ въ $E\sqrt{N}$, буквою a, и *число* сотенъ, заключенныхъ въ числѣ N, буквою A, получимъ:

$$N=A\cdot 10^2+y\cdot 10+z,$$
$$E\sqrt{N}=a\cdot 10+b,$$

гдѣ y и z суть *цифры* десятковъ и единицъ числа N и b *цифра* единицъ числа $E\sqrt{N}$.

По опредѣленію числа $E\sqrt{N}$ (**116**), найдемъ:

$$(a\cdot 10+b)^2\leqslant N<(a\cdot 10+b_1)^2,$$

гдѣ число b_1, равное $b+1$, не превышаетъ 10; неравенства эти даютъ:

$$a^2\cdot 10^2\leqslant A\cdot 10^2+y\cdot 10+z<(a+1)^2\cdot 10^2,$$

гдѣ $(y\ ,\ 10+z)$ не превышаетъ 99. Раздѣливъ всѣ части этихъ неравенствъ на 10^2, найдемъ:

$$a^2\leqslant A+\frac{y\cdot 10+z}{100}<(a+1)^2.$$

Неравенства эти говорятъ, что (**116, 117**)

$$a=E\sqrt{\left(A+\frac{y\cdot 10+z}{100}\right)}=E\sqrt{A},$$

ч. и т. д.

122. Теорема IV. *Если вычтемъ изъ числа сотенъ даннаго цѣлаго числа N квадратъ числа десятковъ его корня, къ разности припишемъ цифры десятковъ и единицъ числа N и число десятковъ образованнаго такимъ образомъ числа R раздѣлимъ на удвоенное число десятковъ корня, то получимъ въ частномъ число, цѣлая часть котораго болѣе цифры единицъ корня или равна ей.*

Положимъ:

$$N = A \cdot 10^2 + B \cdot 10 + C, \quad E\sqrt{N} = a \cdot 10 + b,$$

гдѣ буквы означаютъ слѣдующее: A и a соотвѣтственно суть числа сотенъ и десятковъ, заключенныхъ въ числѣ N и его корнѣ; буква B есть цифра десятковъ числа N; буквы C и b соотвѣтственно суть цифры единицъ числа N и его корня.

По опредѣленію числа $E\sqrt{N}$, получимъ (**116**):

$$(a \cdot 10 + b)^2 \leqslant N, \quad N < (a \cdot 10 + b_1)^2,$$

гдѣ $b_1 = b + 1$.

Неравенства эти могутъ написаться такимъ образомъ:

$$a^2 \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10 + b^2 \leqslant N, \quad N < a^2 \cdot 10^2 + 2ab_1 \cdot 10 + b_1^2.$$

Вычтя изъ обѣихъ частей каждаго изъ этихъ неравенствъ число $a^2 \cdot 10^2$; принявъ далѣе во вниманіе, что

$$N - a^2 \cdot 10^2 = (A - a^2)10^2 + B \cdot 10 + C = [(A - a^2)10 + B]10 + \\ + C = R,$$

причемъ $(A - a^2)10 + B$ представляетъ число десятковъ числа R, и, наконецъ, обозначивъ это число десятковъ черезъ K, найдемъ:

$$(i) \quad 2ab \cdot 10 + b^2 \leqslant K \cdot 10 + C, \ K \cdot 10 + C < 2ab_1 \cdot 10 + b_1^2.$$

Первое изъ неравенствъ (i) даетъ:

$$2ab \cdot 10 \leqslant K \cdot 10 + C;$$

это неравенство показываетъ, что разность: $K \cdot 10 + C - 2ab \cdot 10$, равная числу: $10 \cdot (K - 2ab) + C$, должна быть числомъ положительнымъ; для этого необходимо и достаточно, чтобы цѣлое число $K - 2ab$ не было отрицательнымъ, т.-е. чтобы:

$$2ab \leqslant K.$$

отсюда

$$b \leqslant \frac{K}{2a};$$

такъ какъ число b есть число цѣлое, не превышающее 9, то

$$b \leqslant E\frac{K}{2a},\ b < 10.$$

Неравенства эти и доказываютъ теорему.

123. Замѣчаніе. Для полученія точнаго значенія b цифры единицъ корня, беремъ для b число

$$E\frac{K}{2a},$$

если оно не болѣе 9, или беремъ 9, если оно болѣе 9, и составляемъ число:

$$2ab\ .\ 10 + b^2 = (2a\ .\ 10 + b)b,$$

т.-е. *къ удвоенному числу десятковъ корня приписываемъ испытуемую цифру и образованное такимъ образомъ число умножаемъ на эту испытуемую цифру; если полученное произведеніе не превыситъ числа R, то удовлетворятся оба неравенства (i), ибо испытуемое число есть наибольшее значеніе цифры b; если же это произведеніе превыситъ число R, то уменьшаемъ это число на единицу и опять производимъ указанное испытаніе.*

Примѣръ. $N = 6237$. Число десятковъ числа $E\sqrt{N}$ равно числу $E\sqrt{62}$, т.-е. равно 7. Для полученія цифры единицъ числа $E\sqrt{N}$ поступаемъ такимъ образомъ: изъ числа сотенъ числа 6237, т.-е. изъ 62, вычитаемъ квадратъ числа десятковъ его корня, равный 49; къ разности 13 приписываемъ цифры десятковъ и единицъ числа N, т.-е. цифры 3 и 7, и число десятковъ полученнаго числа $R = 1337$, т.-е. число 133, дѣлимъ на удвоенное число десятковъ корня, т.-е. на число 14; цѣлая часть этого частнаго, равная 8, будетъ болѣе цифры единицъ корня или равна ей. Испытываемъ эту цѣлую часть; для этой цѣли приписываемъ къ удвоенному числу десятковъ корня, т.-е. къ 14, испытуемое число 8, и число 148 умножаемъ на испытуемое число 8; получаемъ произведеніе: $148\ .\ 8 = 1184$, не большее $R = 1337$; слѣдовательно, испытуемое число 8 представляетъ истинное значеніе цифры единицъ корня, такъ что

$$E\sqrt{6237} = 78.$$

И легко, дѣйствительно, видѣть, что

$$78^2 < 6237 < 79^2.$$

§ V. Метода извлеченія квадратнаго корня, съ точностью до единицы, изъ цѣлаго числа.

124. Дѣйствіе, при помощи котораго находится квадратный корень числа A, называется извлеченіемъ квадратнаго корня изъ числа A.

Дадимъ методу извлеченія квадратнаго корня изъ числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, при чемъ, на основаніи предъидущаго, можемъ предполагать, что число A есть число цѣлое (**117**).

Метода эта, какъ увидимъ, основывается на предъидущихъ двухъ теоремахъ.

Данное цѣлое положительное число разобьемъ на грани отъ правой руки къ лѣвой по двѣ цифры въ каждой грани; положимъ, что число граней равно p.

Назовемъ буквами:

$$N_p,\quad N_{p-1},\quad N_{p-2},\quad N_{p-3},\ \ldots,\ N_3,\quad N_2,\quad N_1 \qquad (1)$$

соотвѣтственно само число и числа, которыя получимъ, отбрасывая въ числѣ N послѣдовательно одну, двѣ, три, ..., $p-3$, $p-2$, $p-1$ грани справа. Число N_1 представитъ, слѣдовательно, первую грань слѣва даннаго числа N_p.

Значки у чиселъ означаютъ числа граней, заключенныхъ въ соотвѣтственныхъ числахъ.

Очевидно, что каждое изъ чиселъ ряда (1), въ отношеніи своего непосредственно предшествующаго, представляетъ *число сотенъ*, заключенныхъ въ этомъ предшествующемъ числѣ.

Разсмотримъ рядъ чиселъ:

$$E\sqrt{N_p},\quad E\sqrt{N_{p-1}},\quad E\sqrt{N_{p-2}},\ \ldots,\ E\sqrt{N_2},\quad E\sqrt{N_1} \qquad (2)$$

и назовемъ *числа десятковъ*, заключенныхъ въ каждомъ изъ этихъ чиселъ, соотвѣтственно буквами:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\ \ldots,\ a_{p-2},\quad a_{p-1},\quad 0; \qquad (3)$$

послѣднее число есть O, ибо N_1 представляетъ двузначное число, слѣдовательно число $E\sqrt{N_1}$ есть число однозначное.

Назовемъ *цифры* единицъ чиселъ ряда (2) соотвѣтственно буквами:

$$x_p,\quad x_{p-1},\quad x_{p-2},\quad x_{p-3},\ \ldots,\ x_3,\quad x_2,\quad x_1.$$

Теорема III даетъ намъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$
(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{array}{llll}
\Omega & = E\sqrt{N_p} & = a_1 \,.\, 10 + x_p, & (1)\\
a_1 & = E\sqrt{N_{p-1}} & = a_2 \,.\, 10 + x_{p-1}, & (2)\\
a_2 & = E\sqrt{N_{p-2}} & = a_3 \,.\, 10 + x_{p-2}, & (3)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
a_{p-3} & = E\sqrt{N_3} & = a_{p-2} \,.\, 10 + x_3, & (p-2)\\
a_{p-2} & = E\sqrt{N_2} & = a_{p-1} \,.\, 10 + x_2, & (p-1)\\
a_{p-1} & = E\sqrt{N_1} & = x_1. & (p-3)
\end{array}\right.
$$

Сдѣлавъ послѣдовательныя подстановки, найдемъ:

$$
(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{lll}
a_{p-1} & = E\sqrt{N_1} & = x_1\\
a_{p-2} & = E\sqrt{N_2} & = x_1 \,.\, 10 + x_2,\\
a_{p-3} & = E\sqrt{N_3} & = x_1 \,.\, 10^2 + x_2 \,.\, 10 + x_3,\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
a_2 & = E\sqrt{N_{p-2}} & = x_1 \,.\, 10^{p-3} + x_2 \,.\, 10^{p-4} + \ldots + x_{p-2},\\
a_1 & = E\sqrt{N_{p-1}} & = x_1 \,.\, 10^{p-2} + x_2 \,.\, 10^{p-3} + \ldots + x_{p-2} \cdot 10 + x_{p-1},\\
\Omega & = E\sqrt{N_p} & = x_1 \,.\, 10^{p-1} + x_2 \,.\, 10^{p-2} + \ldots + x_{p-2} \cdot 10^2 + x_{p-1} \cdot 10 + x_p.
\end{array}\right.
$$

Послѣднее изъ равенствъ говоритъ, что цифры: $x_1, x_2, \ldots, x_p$ суть цифры числа Ω, т.-е. искомаго корня.

Изложимъ методу опредѣленія этихъ цифръ. Метода эта основана на равенствахъ (I), даваемыхъ теоремою III, и на теоремѣ IV.

Мы увидимъ, что, прилагая теорему IV, должны будемъ составлять слѣдующія разности:

$$
\Delta_1 = N_1 - x_1{}^2, \quad \Delta_2 = N_2 - (x_1 \,.\, 10 + x_2)^2,
$$
$$
\Delta_3 = N_3 - (x_1 \,.\, 10^2 + x_2 \,.\, 10 + x_3)^2, \ldots
$$

т.-е. вычитать соотвѣтственно изъ чиселъ, образованныхъ первою гранью, двумя первыми гранями, тремя первыми гранями, и т. д., даннаго числа, квадраты чиселъ, образованныхъ: первою цифрою корня, двумя первыми цифрами корнями, тремя первыми цифрами корня, и т. д.

Вычитанія эти будемъ совершать слѣдующимъ образомъ: первая разность получается непосредственно; вторая разность составляется такъ:

$$N_2-(x_1\cdot 10+x_2)^2=(N_1\cdot 10^2+\text{вторая грань})-(x_1^2\cdot 10^2+$$
$$+2x_1x_2\cdot 10+x_2^2)=N_1\cdot 10^2+\text{вторая грань}-x_1^2\cdot 10^2-$$
$$-(2x_1\cdot 10+x_2)x_2=[(N_1-x_1^2)\cdot 10^2+\text{вторая грань}]-$$
$$-(2x_1\cdot 10+x_2)x_2,$$

т.-е. къ первой разности приписывается вторая грань; получается число, которое мы называемъ черезъ R_1; изъ полученнаго числа R_1 вычитается число $(2x_1\cdot 10+x_2)x_2$, образованное такимъ образомъ: къ удвоенной первой цифрѣ корня приписывается вторая цифра корня и полученное число умножается на эту вторую цифру. Для образованія третьей разности поступаемъ по тому же правилу, а именно: къ предъидущей разности приписываемъ слѣдующую грань и изъ полученнаго числа R_2 вычитаемъ число, образованное слѣдующимъ образомъ: къ удвоенному числу, образованному первыми двумя цифрами корня, приписываемъ третью цифру корня и полученное число умножаемъ на эту третью цифру.

Итакъ, слѣдовательно, если назовемъ:

$$(N_1-x_1^2)10^2+\text{вторая грань}=R_1,$$

то вторая разность:

$$\Delta_2=R_1-(2x_1\cdot 10+x_2)x_2;$$

если назовемъ:

$$\Delta_2\cdot 10^2+\text{третья грань}=R_2,$$

то третья разность:

$$\Delta_3=R_2-[2(x_1\cdot 10+x_2)\cdot 10+x_3]\cdot x_3,$$

и т. д.

Перейдемъ теперь къ изложенію методы.

1°. Первая цифра x_1 корня опредѣляется непосредственно: *она есть*, какъ показываетъ послѣднее изъ равенствъ (I), *квадратный корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, числа* N_1, *т.-е. числа, образованнаго первою гранью слѣва даннаго числа.*

Примѣръ. $N_4 = 8450649$, $N_3 = 84506$, $N_2 = 845$, $N_1 = 8$. Первая цифра x_1 корня равна $E\sqrt{N_1} = E\sqrt{8} = 2$.

2°. Переходимъ теперь къ опредѣленію второй цифры искомаго корня, т.-е. къ опредѣленію x_2. Она, какъ показываетъ равенство $(p-1)$-ое изъ равенствъ (I), представляетъ цифру единицъ корня $E\sqrt{N_2}$, число десятковъ котораго извѣстно и равно x_1.

Для опредѣленія этой цифры единицъ поступаемъ по *теоремѣ IV*, а именно:

Для полученія второй цифры корня вычитаемъ изъ числа сотенъ, заключающихся въ числѣ N_2, т.-е. изъ числа N_1, т.-е. изъ первой грани даннаго числа, квадратъ числа x_1, т. е. квадратъ найденной первой цифры корня, и къ полученной разности приписываемъ цифры десятковъ и единицъ числа N_2, т.-е. вторую грань предложеннаго числа; число десятковъ образованнаго такимъ образомъ числа R_1 дѣлимъ на удвоенную цифру x_1; принимаемъ цѣлую часть частнаго, если она не превышаетъ девяти, или принимаемъ 9, если эта цѣлая часть превышаетъ 9, за вторую цифру x_2 корня и составляемъ число: къ удвоенной первой цифрѣ корня приписываемъ испытуемую вторую цифру x_2 корня и это число умножаемъ на x_2; если произведеніе не превышаетъ числа R_1, то число x_2 есть истинное значеніе второй цифры корня; въ противномъ случаѣ уменьшаемъ его постепенно на единицу и дѣлаемъ указанныя испытанія до тѣхъ поръ, пока эти испытанія не опредѣлятъ истиннаго значенія второй цифры корня.

Примѣръ. $N_4 = 8450649$. Изъ первой его грани, т.-е. изъ 8, вычитаемъ квадратъ первой цифры корня, т.-е. квадратъ 2, равный 4; къ полученной разности, равной 4, приписываемъ слѣдующую грань 45 и число десятковъ числа $R_1 = 445$, т.-е. число 44, дѣлимъ на удвоенную первую цифру корня, т.-е. на 4; цѣлая часть частнаго равна 11; начинаемъ испытаніе съ 9, принимая $x_2 = 9$; составляемъ для этой цѣли число: $(2x_1 10 + x_2)x_2 = 49 \cdot 9 = 441$; оно менѣе $R_1 = 445$, слѣдовательно число 9 представляетъ истинное значеніе второй цифры числа $E\sqrt{8450649}$, такъ что $E\sqrt{8450649} = 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + x_3 \cdot 10 + x_4$.

3°. Переходимъ къ опредѣленію третьей цифры искомаго корня, т.-е. къ опредѣленію x_3. Она, какъ показываетъ равенство $(p-2)$-ое изъ равенствъ (I), представляетъ цифру единицъ корня $E\sqrt{N_3}$, число десятковъ котораго извѣстно и равно $a_{p-2} = x_1 \cdot 10 + x_2$, т.-е. равно числу, образованному найденными двумя первыми цифрами искомаго корня.

Для полученія этой цифры поступаемъ по *теоремѣ IV*, а именно:

Для полученія третьей цифры корня вычитаемъ изъ числа сотенъ, заключающихся въ числѣ N_3, т.-е. изъ числа N_2, квадратъ числа десятковъ, заключенныхъ въ $E\sqrt{N_3}$, т.-е. квадратъ числа a_{p-2} или квадратъ числа $(x_1 \cdot 10 + x_2)$, т.-е. составляемъ разность Δ_2, которая получится, если изъ числа R_1 вычтемъ число $(2x_1 \cdot 10 + x_2)x_2$; эта разность уже образована нами при испытаніи цифры x_2; къ полученной разности приписываемъ слѣдующую третью грань и число десятковъ опредѣленнаго такимъ образомъ числа R_2 дѣлимъ на число $2a_{p-2}$, т.-е. на число $2(x_1 \cdot 10 + x_2)$, т.-е. на удвоенное число, образованное первыми двумя цифрами корнями; принимаемъ за третью цифру корня цѣлую часть частнаго, если она не превышаетъ девяти, или принимаемъ за эту цифру число 9, если эта цѣлая часть превышаетъ 9, и составляемъ число:

$$(2a_{p-2} \cdot 10 + x_3)x_3 = [2(x_1 \cdot 10 + x_2) \cdot 10 + x_3]x_3,$$

образованное такимъ образомъ: къ удвоенному числу, образованному первыми двумя цифрами корня, приписана третья цифра, и это число умножено на третью цифру; если произведеніе не превыситъ числа R_2, то принятое значеніе третьей цифры корня представляетъ истинное значеніе этой цифры; въ противномъ случаѣ уменьшаемъ его постепенно на единицу и дѣлаемъ указанныя испытанія до тѣхъ поръ, пока эти испытанія не опредѣлятъ истиннаго значенія третьей цифры корня.

Примѣръ. $N_4 = 8450649$. Изъ числа $R_1 = 445$ вычитаемъ число $(2x_1 \cdot 10 + x_2)x_2 = 441$, получаемъ $\Delta_2 = 4$; приписываемъ къ числу 4 третью грань 06, и число десятковъ числа $R_2 = 406$, т.-е. число 40, дѣлимъ на удвоенное число, образованное двумя первыми цифрами корня, т.-е. на $29 \cdot 2 = 58$; цѣлая часть частнаго $= 0$, и ясно, безъ испытаній, что третья цифра корня есть 0. Итакъ:

$$E\sqrt{8450649} = 290 \cdot 10 + x_4.$$

4°. *Совершенно подобнымъ же образомъ, пользуясь равенствами* (I), *и теоремою IV, опредѣляемъ остальныя цифры корня.*

Примѣръ. $N_4 = 8450649$. Изъ числа $R_2 = 406$ вычитаемъ число $[2(x_1 \cdot 10 + x_2) \cdot 10 + x_3]x_3 = 0$, получаемъ $\Delta_3 = 406$; приписываемъ къ числу 406 слѣдующую и послѣднюю грань 49 и число десятковъ числа $R_3 = 40649$, т.-е. число 4064, дѣлимъ на удвоенное число, образованное найденными тремя цифрами корня, т.-е. дѣлимъ на $290 \cdot 2 = 580$; цѣлая часть частнаго равна 7; испытываемъ 7, составляя число:

$$[2(x_1 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_3) \cdot 10 + 7]7 = (580 \cdot 10 + 7)7 = 40649.$$

Мы видимъ, что получилось число *равное* R_3; это показываетъ не только, что цифра 7 хороша, но еще, что данное число 8450649 представляетъ квадратъ своего корня, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, такъ что:

$$2907^2 = 8450649 < 2908^2.$$

*** 125. Теорема VI.** *Остатокъ, получаемый при извлеченіи корня, никогда не превышаетъ удвоеннаго корня.*

Положимъ, что N есть цѣлое число и R его квадратный корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ. Остатокъ дѣйствія есть разность $N-R^2$; если бы этотъ остатокъ превысилъ $2R$, то N, по меньшей мѣрѣ, было бы равно R^2+2R+1, т.-е. $(R+1)^2$, и, слѣдовательно, его корень, по меньшей мѣрѣ, былъ бы равенъ $R+1$. Обратно, если квадратъ числа R менѣе N, при чемъ разность $N-R^2$ не превышаетъ $2R$, то число R есть квадратный корень числа N, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ.

И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $N-R^2$ менѣе $2R+1$, то N менѣе R^2+2R+1, т.-е. менѣе $(R+1)^2$. Отсюда слѣдуетъ, что R^2 есть наибольшій цѣлый квадратъ, заключенный въ N.

126. Замѣчаніе. Случается иногда, что привычка въ вычисленіяхъ позволяетъ сразу угадать, что испытуемая цифра велика, и, слѣдовательно, позволяетъ уменьшить ее на одну или нѣсколько единицъ. Если, послѣ уменьшенія, цифра осталась еще слишкомъ большою, то мы убѣдимся въ этомъ непосредственно; если же мы уменьшили ее болѣе, чѣмъ нужно, то предъидущая теорема покажетъ это, ибо соотвѣтствующій остатокъ непремѣнно превыситъ удвоенное число, образованное найденными уже цифрами корня.

§ VI. Расположеніе дѣйствія.

127. Возьмемъ еще для примѣра число 412234, къ которому приложимъ предъидущее правило:

$$\begin{array}{l|l}
412234 & 642 \\
\underline{36} & \\
\;\;522 & 124 \cdot 4 \\
\;\;\underline{496} & \\
\;\;\;\;2634 & 1282 \cdot 2 \\
\;\;\;\;\underline{2564} & \\
\;\;\;\;\;\;\;70 &
\end{array}$$

1°. Раздѣляемъ число на грани по двѣ цифры въ каждой грани; число граней равно 3, а потому корень состоитъ изъ трехъ цифръ.

2°. Квадратный корень послѣдней грани 41 есть 6; 6 представляетъ, слѣдовательно, первую цифру корня.

3°. Вычитаемъ изъ 41 квадратъ 6, остатокъ равенъ 5. Направо отъ 5 пишемъ вторую грань 22 и дѣлимъ 52, число десятковъ 522, на удвоенную цифру 6 корня т.-е. на 12. Частное 4 равно второй цифрѣ корня или же болѣе этой цифры.

4°. Для испытанія цифры 4 пишемъ ее направо отъ удвоенной первой цифры и умножаемъ образованное число 124 на 4. Такъ какъ произведеніе 496 можетъ вычитаться изъ 522 и даетъ въ остаткѣ 26, то цифра 4 хороша.

5°. Направо отъ остатка 26 пишемъ третью грань предложеннаго числа и дѣлимъ 263, число десятковъ образованнаго числа 2634, на удвоенное число, образованное найденными двумя цифрами корня, т.-е. на 128. Частное 2, получаемое при этомъ дѣленіи, равно третьей цифрѣ или же болѣе ея.

6°. Для испытанія цифры 2 пишемъ ее направо отъ удвоеннаго числа, изображеннаго двумя первыми цифрами, и умножаемъ образованное число 1282 на 2. Произведеніе 2564 можетъ вычитаться изъ 2634, цифра 2 хороша, корень равенъ 642; остатокъ есть 70.

Примѣръ. Опредѣлить квадратный корень числа 285970396644.

28 . 59 . 70 . 39 . 66 . 44	534762				
359	103	1064	10687	106946	1069522
50 70	3	4	7	6	2
8 14 39					
66 30 66					
2 13 90 44					

Искомый корень равенъ 534762, при чемъ остатокъ равенъ нулю; это показываетъ, что данное число есть квадратъ корня.

§ VII. Квадратные корни съ данною точностью.

128. Двѣ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, съ одинаковымъ знаменателемъ n, числители которыхъ суть два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2,$$

называются *квадратными корнями числа A съ точностью до* $\frac{1}{n}$, при чемъ первая дробь называется *корнемъ съ недостаткомъ*, вторая — *корнемъ съ избыткомъ*.

Найдемъ числа x и $x+1$, удовлетворяющія предъидущимъ неравенствамъ. Неравенства эти могутъ быть написаны такимъ образомъ:

$$\frac{x^2}{n^2} \leqslant A < \frac{(x+1)^2}{n^2}.$$

Умноживъ всѣ части неравенствъ на положительное число n^2, получимъ равносильныя неравенства:

$$x^2 \leqslant A \cdot n^2 < (x+1)^2.$$

Эти неравенства говорятъ намъ, что искомыя числа x и $x+1$ суть квадратные корни числа An^2 съ точностью до единицы, т.-е., согласно съ обозначеніями вышеданными,

$$x = E\sqrt{An^2},\ \ x+1 = E\sqrt{An^2}+1.$$

Мы, можемъ, слѣдовательно, сказать:

Квадратные корни числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$, суть квадратные корни числа An^2, съ точностью до единицы, раздѣленные на n.

Извлечь квадратный корень изъ числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$, значитъ найти его квадратный корень, съ точностью до $\frac{1}{n}$, съ недостаткомъ.

Примѣръ I. Требуется извлечь квадратный корень изъ $\frac{73}{5}$ съ точностью до $\frac{1}{7}$; умножаемъ $\frac{73}{5}$ на квадратъ 7, т.-е. на 49, и получаемъ произведеніе $\frac{3577}{5}$ или 715 $\frac{2}{3}$; квадратный корень этого числа, съ точностью до единицы, одинаковъ съ квадратнымъ корнемъ, съ точностью до единицы, изъ числа 715 и равенъ, слѣдовательно, 26. Итакъ, квадратные корни числа $\frac{73}{5}$, съ точностью до $\frac{1}{7}$, суть $\frac{26}{7}$ и $\frac{27}{7}$.

Примѣръ II. Найдемъ квадратные корни изъ $\frac{739}{5}$ съ точностью до $\frac{5}{17}=\frac{1}{\frac{17}{5}}$. Умножаемъ $\frac{73}{5}$ на квадратъ $\frac{17}{5}$, т.-е. на число $\frac{289}{25}$, и получаемъ произведеніе $\frac{21097}{125}=168\frac{97}{125}$; квадратные корни этого числа, съ точностью до единицы, равны 12 и 13. Отсюда слѣдуетъ, что искомые корни равны числамъ 12 и 13, раздѣленнымъ на $\frac{17}{5}$, т.-е. равны числомъ $\frac{60}{17}$ и $\frac{65}{17}$. И въ самомъ дѣлѣ:

$$\left(\frac{60}{17}\right)^2<\frac{739}{5}<\left(\frac{65}{17}\right)^2.$$

129. Замѣчаніе. Если знаменатель дроби есть точный квадратъ b^2, то квадратные корни этой дроби, съ точностью до $\frac{1}{b}$, получаются очень просто: достаточно извлечь квадратные корни, съ точностью до единицы, изъ числителя дроби и раздѣлить ихъ на число b. Это непосредственно вытекаетъ изъ предъидущаго привила, ибо для полученія корней изъ $\frac{a}{b^2}$, съ точностью до $\frac{1}{b}$, нужно умножить $\frac{a}{b^2}$ на b^2, извлечь квадратные корни, съ точностью до единицы, изъ произведенія a и полученные результаты раздѣлить на b.

При извлеченіи квадратнаго корня изъ дроби начинаютъ очень часто съ того, что дѣлаютъ ея знаменателя точнымъ квадратомъ и затѣмъ пользуются предъидущимъ замѣчаніемъ.

Для того, чтобы знаменатель превратился въ квадратъ, достаточно умножить оба члена дроби на знаменателя.

Примѣръ. Требуется извлечь квадратный корень изъ $\frac{73}{5}$. Дробь эта равна дроби $\frac{73\,.\,5}{5\,.\,5}$, или дроби $\frac{365}{25}$. Для полученія ея квадратныхъ корней, съ точностью до $\frac{1}{5}$, достаточно извлечь, съ точностью до единицы, квадратные корни изъ 365, что дастъ 19 и 20, и результаты раздѣлить на 5; искомые корни равны: $\frac{19}{5}$ и $\frac{20}{5}$.

130. Иногда знаменатель дѣлается полнымъ квадратомъ посредствомъ умноженія членовъ дроби на число, меньшее знаменателя. И въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы число было полнымъ квадратомъ, достаточно, чтобы показатели всѣхъ его простыхъ множителей были четные; мы достигнемъ этого, если умножимъ число на произведеніе тѣхъ простыхъ множителей, которымъ присвоены нечетные показатели.

Пусть, напримѣръ, дана дробь $\frac{1275}{300}$ или $\frac{1275}{3\,.\,2^2\,.\,5^2}$.

Умноживъ числителя и знаменателя на 3, приведемъ дробь къ виду: $\frac{3\,.\,1275}{3^2\,.\,2^2\,.\,5^2}$, или къ виду $\frac{3825}{30^2}$; квадратные корни 3825, съ точностью до единицы, равны 61 и 62, а потому квадратные корни $\frac{3825}{30^2}$, съ точностью до $\frac{1}{30}$, равны $\frac{61}{30}$ и $\frac{62}{30}$.

131. Нахожденіе квадратнаго корня съ точностью до $\frac{1}{10^n}$. Положимъ, что число N, квадратный корень котораго долженъ быть опредѣленъ, изображено десятичнымъ числомъ. Для полученія его квадратныхъ корней, съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, должно, по предъидущему правилу, умножить число на 10^{2n}, извлечь квадратные корни, съ точностью до единицы, изъ произведенія и раздѣлить результаты на 10^n. Для того, чтобы умножить N на 10^{2n}, переносимъ въ числѣ N запятую на $2n$ знаковъ вправо и, для извлеченія корней изъ полученнаго числа съ точностью до единицы, дѣйствуемъ надъ его цѣлою частью. Отсюда слѣдуетъ, что *для опредѣленія корней изъ числа, съ точностью до* $\frac{1}{10^n}$, *достаточно знать* $2n$ *первыхъ десятичныхъ знака числа, выраженнаго десятичною дробью.*

Примѣръ. Для извлеченія квадратныхъ корней изъ числа 3,7157248932, съ точностью до $\frac{1}{100}$, достаточно сохранить первые четыре десятичныхъ знака въ предложенномъ числѣ, т.-е. взять число 3,7157. Умноживъ число это на 10000, получимъ число 37157, квадратные корни корни котораго, съ точностью до единицы, суть 193 и 194; раздѣливъ ихъ на 100, найдемъ числа 1,93 и 1,94, представляющія квадратные корни предложеннаго числа, съ точностью до $\frac{1}{100}$.

§ VIII. Квадратные корни алгебрическихъ выраженій.

132. Квадратнымъ корнемъ алгебрическаго выраженія A называется такое выраженіе B, которое, будучи возвышено въ квадратъ, воспроизведетъ A. Найти это выраженіе B, значитъ извлечь квадратный корень изъ выраженія A. Замѣтимъ здѣсь, что если это выраженіе B найдено, то выраженіе $-B$ будетъ также квадратнымъ корнемъ выраженія A, ибо

$$(\pm B)^2 = B^2 = A;$$

итакъ,

$$\sqrt{A} = \pm B.$$

Алгебрическое извлеченіе корней обнимаетъ два случая: 1° извлеченіе корней изъ одночленовъ и 2° извлеченіе корней изъ многочленовъ.

133. Извлеченіе корней изъ одночленовъ. Мы видѣли (**34**), что для возвышенія цѣлаго одночлена во 2-ую степень должно возвысить во вторую степень его коэффиціентъ и умножить на 2 всѣхъ показателей его буквъ. Отсюда слѣдуетъ, что *если коэффиціентъ даннаго одночлена представляетъ квадратъ, при чемъ показатели его буквъ дѣлятся на* 2, *то для извлеченія квадратнаго корня изъ этого одночлена извлекаемъ квадратный корень изъ коэффиціента и дѣлимъ на* **2** *всѣхъ его показателей*. Такимъ образомъ:

$$\sqrt{25a^2b^4c^{-6}} = \pm 5ab^2c^{-3}, \quad \sqrt{36(a^2-c^2)^2d^4} = \mp 6(a^2-c^2)d^2,$$

$$\sqrt{\frac{25a^2b^6}{9c^6(a-c)^{-4}}} = \pm\frac{5ab^3}{3c^3(a-c)^{-2}} = \pm\frac{5ab^3(a-c)^2}{3c^3}.$$

134. Извлеченіе корней изъ многочленовъ. Весьма рѣдко случается, чтобы можно было извлечь квадратный корень изъ полинома, т.-е. *найти новый полиномъ, который, будучи возвышенъ въ квадратъ, воспроизвелъ бы данный полиномъ.* Мы предположимъ, что данный полиномъ есть полиномъ, расположенный по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, и найдемъ, *если возможно*, корень въ видѣ полинома, расположеннаго такимъ же образомъ.

Выяснимъ методу на примѣрѣ, при чемъ разсужденіе будетъ общее и приведетъ насъ къ общему правилу. Положимъ, что данъ многочленъ:

$$16x^4 + 16x^3 - 36x^2 - 20x + 25.$$

Предположимъ, что искомый квадратный корень существуетъ. Назовемъ его члены буквами A, B, C, ..., такъ что корень будетъ $A + B + C + \ldots$ По опредѣленію корня получимъ равенство:

$$[1]\quad 16x^4 + 16x^3 - 36x^2 - 20x + 25 = A^2 + 2AB + B^2 + 2AC + \\ + 2BC + C^2 + \ldots$$

Мы знаемъ, что первый членъ квадрата равенъ квадрату перваго члена корня (**54**). Отсюда слѣдуетъ, что

$$A^2 = 16x^4, \quad A = \pm\sqrt{16x^4} = \pm 4x^2.$$

Результатъ этотъ показываетъ намъ, что *первый членъ корня равенъ корню изъ перваго члена даннаго полинома*. Если, слѣдовательно, этотъ первый членъ не представляетъ квадрата, то искомый корень не существуетъ. Обратнаго заключенія мы не имѣемъ права дѣлать.

Вычтя изъ обѣихъ частей равенства [1] равныя величины: $16x^4$ и A^2, найдемъ:

[2] $16x^3 - 36x^2 - 20x + 25 = 2AB + B^2 + 2AC + 2BC + \ldots$

Для полученія втораго члена корня B, пишемъ тождество:

$$B = \frac{2AB}{2A}.$$

Замѣтивъ, что первый членъ $2AB$ правой части равенства [2] не имѣетъ себѣ подобныхъ и содержитъ букву x съ наивысшимъ показателемъ, заключаемъ, что

$$2AB = 16x^3,$$

а потому

$$B = \frac{16x^3}{\pm 8x^2} = \pm 2x.$$

Отсюда заключаемъ, что *второй членъ корня равенъ частному, получаемому отъ раздѣленія перваго члена остатка, полученнаго отъ вычитанія изъ даннаго полинома квадрата перваго члена корня, на удвоенный первый членъ корня.*

Если, слѣдовательно, показатель буквы x въ первомъ членѣ остатка будетъ менѣе показателя буквы x въ первомъ членѣ корня, то искомый корень не существуетъ. Обратныхъ заключеній не имѣемъ права дѣлать.

Найдя B, составляемъ:

$$2AB + B^2 = (2A + B) \cdot B = (\pm 8x^2 \pm 2x) \cdot \pm 2x = 16x^3 + 4x^2.$$

Вычтя изъ обѣихъ частей равенства [2] равныя количества: $(16x^3 + 4x^2)$ и $(2AB + B^2)$, получимъ:

[3] $\quad -40x^2 - 20x + 25 = 2AC + 2BC + \ldots\ldots$

Для опредѣленія третьяго члена корня C пишемъ тождество:

$$C = \frac{2AC}{2A}.$$

Принимая во вниманіе, что первый членъ $2AC$ правой части равенства [3] не имѣетъ себѣ подобныхъ и содержитъ букву x съ наивысшимъ показателемъ, заключаемъ, что

$$2AC = -40x^2,$$

а потому

$$C = \frac{-40x^2}{\pm 8x^2} = \mp 5.$$

Итакъ, для полученія третьяго члена корня поступаемъ такимъ образомъ:

Удвоиваемъ первый членъ корня; приписываемъ къ этому произведенію второй членъ корня съ тѣмъ знакомъ, съ какимъ онъ получился; полученный многочленъ умножаемъ на второй членъ корня, произведеніе это вычитаемъ изъ перваго остатка и первый членъ этого втораго остатка дѣлимъ на удвоенный первый членъ корня.

Частное представитъ третій членъ корня.

Отсюда слѣдуетъ, что если показатель буквы x въ этомъ членѣ будемъ менѣе показателя буквы x въ первомъ членѣ корня, то задача будетъ невозможна.

Обратныхъ заключеній не имѣемъ права дѣлать.

Продолжая поступать подобнымъ образомъ, мы опредѣлимъ последовательно всѣ члены корня. Замѣтимъ, что показатели буквы x въ первыхъ членахъ остатковъ идутъ, убывая, ибо приведеніе подобныхъ членовъ уничтожаетъ, по крайней мѣрѣ, одинъ членъ каждаго остатка.

Отсюда слѣдуетъ, что случится одно изъ двухъ:

1° или мы придемъ къ такому остатку, который будетъ равенъ нулю, и тогда полученный многочленъ:

$$A + B + C + \ldots,$$

будетъ искомымъ корнемъ, ибо, поступая по предъидущимъ правиламъ, мы вычтемъ послѣдовательно изъ даннаго многочлена всѣ члены квадрата многочлена:

$$A + B + C + \ldots,$$

т.-е. вычтемъ квадратъ $(A + B + C + \ldots)^2$;

2° или придемъ къ такому остатку, первый членъ котораго содержитъ букву x съ показателемъ, меньшимъ того, съ какимъ она входитъ въ первый членъ корня, и тогда задача будетъ невозможна.

Въ разсматриваемомъ нами примѣрѣ, найдя C, образовываемъ:

$$2AC+2BC+C^2=(2A+2B+C)\,.\,C=(\pm 8x^2\pm 4x\mp 5)\,.\mp 5=$$
$$=-40x^2-20x+5.$$

Вычтя эти равныя количества изъ обѣихъ частей равенства [3], получаемъ въ лѣвой части нуль. Отсюда заключаемъ, что искомый корень существуетъ и равенъ:

$$\pm 4x^2\pm 2x\mp 5=\pm(4x^2+2x-5).$$

135. Замѣчаніе. Мы знаемъ, что если корень существуетъ, то первый и послѣдній члены даннаго полинома получаются безъ приведеній отъ возвышенія въ квадратъ перваго и послѣдняго члена корня (**54**). Казалось бы, слѣдовательно, что мы найдемъ непосредственно первый и послѣдній члены корня, извлекая квадратный корень изъ перваго и послѣдняго члена квадрата. Но поступивъ такимъ образомъ, мы можемъ впасть въ ошибку относительно знака. И въ самомъ дѣлѣ, корень имѣетъ два значенія, отличающіяся другъ отъ друга знаками; присвоивъ первому члену корня, напримѣръ, знакъ $+$, мы не можемъ, à *priori*, рѣшить, какой знакъ послѣдняго члена корня соотвѣтствуетъ принятому знаку $(+)$ у перваго члена.

Въ предъидущемъ примѣрѣ знаку $(+)$ перваго члена соотвѣтствуетъ знакъ $(-)$ послѣдняго члена, и наоборотъ.

Видимъ далѣе, что и первый, и послѣдній члены полинома должны быть положительные и представлять изъ себя квадраты для того, чтобы возможно было существованіе корня.

136. Дѣйствіе располагается такимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{16x^4+16x^3-36x^2-20x+25}=4x^2+2x-5} \\
\quad 16x^4 & \\
\hline
\qquad\qquad 16x^3-36x^2 & (8x^2+2x)2x \\
\qquad\qquad 16x^3+\ \ 4x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -40x^2-20x+25 & (8x^2+4x-5)\,.\,-5 \\
\qquad\qquad\qquad -40x^2-20x+25 & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

137. *Примѣръ II.* Требуется извлечь квадратный корень изъ многочлена:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r}
a^2 & x^4+2a^2 & x^3-a^2 & x^2-2a^2 & x+a^2 \\
-2ab & -2b^2 & +2ab & -4ab & +2ab \\
+b^2 & & +3b^2 & -2b^2 & +a^2
\end{array}$$

Поступаемъ такимъ образомъ:

1°. Первый членъ корня равенъ квадратному корню изъ перваго члена даннаго многочлена, т.-е. онъ равенъ $(a-b)x^2$.

2°. Вычтя изъ многочлена квадратъ этого члена, получимъ первый остатокъ, первый членъ котораго равенъ:

$$2(a^2-b^2)x^3.$$

3°. Дѣлимъ этотъ первый членъ на удвоенный первый членъ корня, т.-е. на $2(a-b)x^2$; находимъ второй членъ корня, равный $(a+b)x$.

4°. Найдя второй членъ, приписываемъ его къ удвоенному первому члену и сумму умножаемъ на второй членъ, что даетъ:

$$[2(a-b)x^2+(a+b)x](a+b)x=(2a^2-2b^2)x^3+(a^2+2ab+b^2)x^2.$$

5°. Вычтя произведеніе это изъ перваго остатка, найдемъ второй остатокъ.

$$\begin{array}{r|r|l} -2a^2 & x^2-2a^2 & x+a^2 \\ & -4ab & +2ab \\ +2b^2 & -2b^2 & +b^2 \end{array}$$

6°. Раздѣливъ первый членъ этого остатка, т.-е. $-2(a^2-b^2)x^2$, на удвоенный первый членъ корня, т.-е. на $2(a-b)x$, найдемъ третій членъ корня $-(a+b)$.

7°. Найдя третій членъ, удвоиваемъ сумму первыхъ двухъ, къ результату приписываемъ третій членъ, полученный многочленъ умножаемъ на этотъ третій и произведеніе вычитаемъ изъ втораго остатка. Третій остатокъ равенъ нулю, и искомый корень равенъ:

$$\pm[(a-b)x^2+(a+b)x-(a+b)].$$

138. Извлеченіе корней изъ полиномовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы. Если полиномъ расположенъ по возрастающимъ степенямъ главной буквы, то нахожденіе его корня можетъ быть совершено предъидущею методою. Если искомаго корня не существуетъ, то мы не придемъ къ остатку, равному нулю: показатели главной буквы въ первыхъ членахъ остатковъ будутъ идти, возрастая, и, слѣдовательно, мы никогда не придемъ къ остатку, первый членъ котораго не дѣлился бы на удвоенный первый членъ корня; дѣйствіе можетъ продолжаться неопредѣленно.

Мы можемъ дать признакъ невозможности, который позволитъ опредѣлить тотъ моментъ, на которомъ должны остановиться. И въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ опредѣлить заранѣе показателя главной буквы въ послѣднемъ членѣ корня, извлекая квадратный корень изъ послѣдняго члена даннаго полинома. Если, извлекая квадратный корень, мы придемъ къ члену, содержащему главную букву съ показателемъ большимъ заранѣе опредѣленнаго, то мы можемъ сказать, что искомый корень не существуетъ. Аналогичный признакъ имѣетъ мѣсто и для полинома, расположеннаго по убывающимъ степенямъ главной буквы.

Примѣръ.

$$\sqrt{x^2 - 2x^3 - x^4 + 3x^6 + 2x^7 + 4x^8} = x - x^2 - x^3 - x^4 + \frac{3}{2}x^7.$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 & \\
\hline
-2x^3 - x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & (2x - x^2) \,.\, -x^2 \\
-2x^3 + x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-2x^4 \qquad\quad + 3x^6 \qquad\qquad & (2x - 2x^2 - x^3) \,.\, -x^3 \\
-2x^4 + 2x^5 + x^6 \qquad\qquad & \\
\hline
-2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 & (2x - 2x^2 - 2x^3 - x^4) \,.\, -x^4 \\
-2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 & \\
\hline
3x^8 & 2x - 2x^2 - 2x^3 - 2x^4
\end{array}$$

Прилагая къ этому примѣру предъидущую методу, мы получаемъ въ корнѣ членъ, содержащій букву x съ показателемъ 7, а между тѣмъ наивысшій показатель буквы x въ корнѣ долженъ быть равенъ 4. Заключаемъ отсюда, что искомый корень не существуетъ.

Упражненія.

I. Всякій нечетный квадратъ, при дѣленіи на 8, даетъ въ остаткѣ единицу.

II. Если, при извлеченіи квадратнаго корня изъ числа N, мы получили остатокъ, не превышающій корня, то корень этотъ есть квадратный корень числа N съ точностью до $\frac{1}{2}$.

III. Квадратный корень числа $\frac{n-1}{n}$, съ точностью до $\frac{1}{n}$, равенъ самому числу $\frac{n-1}{n}$. Единственное ли это число, которое равно своему корню съ точностью до $\frac{1}{n}$?

IV. Если четное число представляетъ сумму двухъ квадратовъ, то половина числа также равна суммѣ двухъ квадратовъ.

V. Если a и b представляютъ два числа взаимно простыхъ, при чемъ одно изъ нихъ четное, другое нечетное, то разность ихъ квадратовъ можетъ быть квадратомъ только тогда, когда $a+b$ и $a-b$ суть квадраты.

VI. Доказать, при помощи предъидущей теоремы, что всѣ квадраты, равные суммѣ двухъ другихъ квадратовъ, заключены въ формулѣ:

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)^2+(xy)^2,$$

гдѣ x и y означаютъ какія ни есть цѣлыя числа.

VII. Если a, b, c суть три неравныхъ числа, то $a+b+c$ менѣе

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

VIII. a, b, α, β суть какія ни есть четыре числа; $(a\alpha+b\beta)^2$ менѣе произведенія $(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$.

Равенство возможно въ одномъ только случаѣ. Въ какомъ именно?

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Теорія кубовъ и кубическихъ корней.

§ I. Нѣкоторыя теоремы, относящіяся къ кубамъ.

139. Теорема I. *Кубъ цѣлаго числа и кубъ цифры его единицъ оканчиваются одною и тою же цифрою.* И въ самомъ дѣлѣ, цифра единицъ произведенія двухъ цѣлыхъ чиселъ зависитъ только отъ послѣднихъ цифръ этихъ чиселъ.

Замѣчаніе. Кубы девяти первыхъ чиселъ суть: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729. Всѣ они оканчиваются различными цифрами. Отсюда слѣдуетъ, что простой взглядъ на кубъ числа покажетъ, на какую цифру оканчивается это число.

Если кубъ оканчивается одною изъ цифръ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то само число оканчивается на: 0, 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9.

140. Теорема II. *Если кубъ цѣлаго числа оканчивается нулями, то число нулей дѣлится на 3.*

Для того, чтобы кубъ числа оканчивался нулемъ, необходимо, чтобы само число оканчивалось также нулемъ (**131**). Число это можетъ быть, слѣдовательно, представлено въ видѣ $A \cdot 10^n$, гдѣ A есть цѣлое число, не оканчивающееся нулемъ, n число нулей, слѣдующихъ за A.

Кубъ этого числа, равный $A \cdot 10^{3n}$, очевидно, оканчивается $3n$ нулями; такъ какъ $3n$ дѣлится на три, то теорема доказана.

141. Теорема III. *Для того, чтобы цѣлое число было кубомъ другаго цѣлаго числа, необходимо и достаточно, чтобы показатели его простыхъ множителей дѣлились на три.*

1°. Условіе это необходимо: для образованія куба числа, представленнаго въ видѣ произведенія степеней простыхъ множителей, достаточно утроить его показателей.

2°. Условіе это достаточно: если оно выполнено, то, раздѣливъ показателей на 3, образуемъ новое число, которое, будучи возвышено въ кубъ, воспроизведетъ данное число.

Замѣчаніе. Если число, обладая простымъ дѣлителемъ p, не дѣлится на его кубъ p^3, то оно не есть кубъ. И въ самомъ дѣлѣ, разложивъ его на простыхъ множителей, мы найдемъ, что множитель p войдетъ съ показателями 1 или 2, которые не дѣлятся на 3.

Напримѣръ, кубъ не можетъ дѣлиться на 2, не дѣлясь на 8, а слѣдовательно, и на 4; не дѣлится на 3, не дѣлясь на 27, а слѣдовательно, и на 9.

142. Теорема IV. *Кубъ дроби не есть цѣлое число.* Дана дробь $\frac{a}{b}$, приведенная къ простѣйшему виду. Кубъ ея равенъ $\frac{a^3}{b^3}$. Такъ какъ a простое съ b, то и a^3 простое съ b^3, а потому a^3 не можетъ дѣлиться на b^3.

Замѣчаніе. Такъ какъ a^3 простое съ b^3, то дробь $\frac{a^3}{b^3}$ неприводима. Отсюда вытекаетъ, что члены куба дроби, приведеннаго къ простѣйшему виду, суть кубы.

§ II. Опредѣленіе кубическаго корня.

143. *Кубическимъ корнемъ числа A называется такое число B, кубъ котораго равенъ A.*

Примѣры. 2 есть кубическій корень 4; $\frac{3}{5}$ есть кубическій корень $\frac{27}{125}$.

Кубическій корень числа A обозначается такимъ образомъ:

$$B=\sqrt[3]{A},$$

такъ что

$$2=\sqrt[3]{8},\ \frac{3}{5}=\sqrt[3]{\frac{27}{125}}.$$

§ III. Кубическій корень изъ положительнаго числа, съ точностью до единицы.

144. Разсмотримъ положительное число A, представляющее кубъ или не представляющее его. Два цѣлыхъ положительныхъ числа x и $x+1$, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$x^3 \leqslant A < (x+1)^3,$$

называются: *число x — кубическимъ корнемъ числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ; число $(x+1)$ — кубическимъ корнемъ числа A, съ точностью до единицы, съ избыткомъ.*

Написанныя неравенства говорятъ, что x^3 представляетъ изъ себя наибольшій цѣлый кубъ, содержащійся въ числѣ A. Слѣдовательно, *кубическій корень числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, есть цѣлое положительное число, равное кубическому корню наибольшаго цѣлаго куба, заключеннаго въ числѣ A.*

Примѣры. Если $A=5$, то его корни, съ точностью до единицы, суть 1 и 2; если $A=27$, то его корни суть 3 и 4; если $A=\frac{127}{3}$, то его корни суть 3 и 4.

145. Теорема I. *Кубическіе корни, съ точностью до единицы, числа нецѣлаго равны кубическимъ корнямъ, съ точностью до единицы, его цѣлой части.*

Положимъ, что число A не есть цѣлое число, и его цѣлая часть равна N, такъ что $A=N+\alpha$, гдѣ α положительное число, меньшее единицы. Кубическіе корни, съ точностью до единицы, числа $N+\alpha$ удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$(1) \qquad x^3 \leqslant N+\alpha, \quad N+\alpha < (x+1)^3. \qquad (2)$$

Первое неравенство говоритъ, что разность $N+\alpha-x^3$, равная суммѣ $(N-x^3)+\alpha$, есть положительное число; принимая же во вниманіе, что въ этой суммѣ первое слагаемое есть число цѣлое, а второе менѣе единицы, заключаемъ, что для положительности этой суммы необходимо и достаточно, чтобы первое слагаемое было не менѣе нуля. Итакъ, $x^3 \leqslant N$. Что касается до неравенства (2), то оно даетъ:

$$N < (x+1)^3.$$

Имѣемъ, слѣдовательно,

$$x^3 \leqslant N < (x+1)^3.$$

Неравенства эти говорятъ, что числа x и $x+1$ суть кубическіе корни числа N, съ точностью до единицы.

146. Теорема II. *Если цѣлое число B состоитъ изъ $3n$, или $3n-1$, или $3n-2$ цифръ, то его кубическій корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, состоитъ изъ n цифръ.*

По условію теоремы данное цѣлое число B заключено между наименьшимъ числомъ, состоящемъ изъ $(3n-2)$ цифръ, и наименьшимъ числомъ, состоящемъ изъ $(3n+1)$ цифръ. Эти числа соотвѣтственно суть: 10^{3n-3} и 10^{3n}. Имѣемъ, слѣдовательно, два неравенства:

$$10^{3n-3} \leqslant A, \quad A < 10^{3n},$$

или же

$$(1) \qquad (10^{n-1})^3 \leqslant A, \quad A < (10^n)^3. \qquad (2)$$

Назвавъ буквою x кубическій корень числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, и принявъ во вниманіе, что x^3 не болѣе A, найдемъ, при помощи неравенства (2),

$$x^3 < (10^n)^3, \quad \text{откуда} \quad x < 10^n.$$

Принявъ далѣе во вниманіе, что x представляетъ кубическій корень изъ наибольшаго цѣлаго куба, заключеннаго въ числѣ A, который, какъ показываетъ неравенство (1), не менѣе числа $(10^{n-1})^3$, заключаемъ, что

$$(10^{n-1})^3 \leqslant x^3, \quad \text{откуда} \quad 10^{n-1} \leqslant x.$$

Итакъ, слѣдовательно,

$$10^{n-1} \leqslant x < 10^n.$$

Эти неравенства и доказываютъ теорему.

147. Замѣчаніе. Предъидущая теорема позволяетъ опредѣлить число цифръ въ искомомъ корнѣ даннаго числа A по числу цифръ этого числа. И въ самомъ дѣлѣ, разобьемъ совокупность цифръ числа A на грани отъ правой руки къ лѣвой по три цифры въ каждой грани, при чемъ послѣдняя грань слѣва можетъ содержать одну цифру или двѣ; если число граней равно n, то число цифръ въ числѣ A равно или $3n-2$, или $3n-1$, или $3n$; во всѣхъ случаяхъ *число цифръ въ корнѣ равно n, т.-е. равно числу граней.*

148. Зная наизусть кубы первыхъ девяти чиселъ, а именно:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,$$

мы можемъ непосредственно находить кубическіе корни, съ точностью до единицы, чиселъ, не превышающихъ тысячи.

Примѣръ. Кубическіе корни, съ точностью до единицы, числа 613, равны 8 и 9, ибо наибольшій цѣлый кубъ, заключенный въ 613, есть 512.

Если данное число болѣе 1000, то его кубическій корень, съ точностью до единицы, имѣетъ болѣе одной цифры. Метода его нахожденія основана на слѣдующихъ двухъ теоремахъ [здѣсь сдѣлаемъ тѣ же соглашенія, которыя были сдѣланы въ **(120)**].

149. Теорема III. *Число десятковъ, заключенныхъ въ кубическомъ корнѣ цѣлаго числа N, равно кубическому корню числа его тысячъ.*

Пусть

$$N = A\cdot 10^3 + x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z,$$

$$E\sqrt[3]{N} = a\cdot 10 + b,$$

гдѣ A и a соотвѣтственно суть: *число тысячъ*, содержащихся въ числѣ N, и число десятковъ, содержащихся въ кубическомъ корнѣ числа N. По опредѣленію числа $E\sqrt[3]{N}$, имѣемъ:

$$(a\cdot 10 + b)^3 \leqslant N < (a\cdot 10 + b_1)^3, \quad \text{гдѣ} \quad b_1 = b + 1,$$

или подавно:

$$a^3\cdot 10^3 \leqslant A\cdot 10^3 + x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z < (a+1)^3\cdot 10^3,$$

гдѣ число: $x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z$ не превышаетъ 999. Раздѣливъ всѣ части этихъ неравенствъ на 10^3, получимъ:

$$a^3 \leqslant A + \frac{x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z}{10^3} < (a+1)^3.$$

Неравенства эти говорятъ, что (**145**)

$$a = E\sqrt[3]{\left(A + \frac{x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z}{10^3}\right)} = E\sqrt[3]{A},$$

ч. и. т. д.

150. Теорема IV. *Если вычтемъ изъ числа тысячъ даннаго цѣлаго числа N кубъ числа десятковъ его корня, къ разности припишемъ цифры сотенъ, десятковъ и единицъ корня и число сотенъ образованнаго такимъ образомъ числа R раздѣлимъ на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, то получимъ въ частномъ число, цѣлая часть котораго болѣе цифры единицъ корня или равна ей.*

Положимъ:

$$N = A \cdot 10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D, \quad E\sqrt[3]{N} = a \cdot 10 + b,$$

здѣсь A, B, C, D означаютъ соотвѣтственно: *число* тысячъ заключенныхъ въ данномъ числѣ N и *цифры* его сотенъ, десятковъ и единицъ.

По опредѣленію числа $E\sqrt[3]{N}$, получимъ:

$$(g) \qquad (a \cdot 10 + b)^3 \leqslant N, \quad N < (a \cdot 10 + b_1)^3, \quad \text{гдѣ} \quad b_1 = b + 1.$$

Неравенства эти могутъ написаться такимъ образомъ:

$$a^3 \cdot 10^3 + 3a^2b \cdot 10^2 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3 \leqslant N,$$
$$N < a^3 \cdot 10^3 + 3a^2b_1 \cdot 10^2 + 3ab_1^2 \cdot 10 + b_1^3.$$

Вычтя изъ обѣихъ частей каждаго изъ этихъ неравенствъ число $a^3 \cdot 10^3$; принявъ во вниманіе, что

$$N - a^3 \cdot 10^3 = (A - a^3)10^3 + B \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D =$$
$$= [(A - a^3)10 + B]10^2 + C \cdot 10 + D = R,$$

причемъ число $(A - a^3)10 + B$ представляетъ число сотенъ числа R, и обозначивъ это число черезъ K, получимъ:

$$(i) \; 3a^2b \cdot 10^2 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3 \leqslant K \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D < 3a^2b_1 \cdot 10^2 + 3ab_1^2 \cdot 10 + b_1^3.$$

Первое изъ равенствъ (i) даетъ:

$$3a^2b \cdot 10^2 \leqslant K \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D$$

и показываетъ, что разность:

$$K \cdot 10^2 + C \cdot 10 + D - 3a^2b \cdot 10^2 = 10^2 \cdot (K - 3a^2b) + C \cdot 10 + D$$

должна быть положительною; для этого необходимо и достаточно, чтобы цѣлое положительное число $(K - 3a^2b)$ не было отрицательнымъ, т.-е. чтобы:

$$3a^2b \leqslant K.$$

Принявъ во вниманіе, что b есть число цѣлое, не превышающее 9, изъ послѣдняго неравенства получимъ:

$$b \leqslant E\frac{K}{3a^2},\ b < 10. \qquad (h)$$

Неравенства эти и доказываютъ теорему.

151. Замѣчаніе. Для полученія точнаго значенія цифры единицъ корня нужно испытать послѣдовательно наибольшее значеніе, получаемое для этой цифры изъ неравенствъ (h), и числа объ одной цифрѣ, меньшія этого наибольшаго значенія. Испытанія эти должны состоять, какъ показываютъ неравенства (g), въ образованіи куба намѣченнаго корня; если этотъ кубъ не превыситъ даннаго числа N, т.-е. если удовлетворится первое изъ неравенствъ (g), то удовлетворится и второе изъ этихъ неравенствъ, ибо испытывается значеніе, не меньшее цифры единицъ; и тогда испытуемое значеніе представитъ истинное значеніе цифры единицъ; если же кубъ намѣченнаго корня превыситъ данное число, то уменьшаемъ наибольшее значеніе на единицу и опять производимъ испытаніе.

Примѣръ. $N = 637231$. Число десятковъ числа $E\sqrt[3]{N}$ равно $E\sqrt[3]{637} = 8$. Для полученія цифры единицъ образовываемъ число $R = (637 - 512)10^3 + 231$, и число его сотенъ, равное 1252, дѣлимъ на утроенный квадратъ числа десятковъ корня, т.-е. на $3 \cdot 8^2 = 192$; цѣлая часть частнаго, равная 6, будетъ болѣе цифры единицъ корня или же равна ей; испытываемъ 6, составляя:

$$86^3 = 636056 < N,$$

слѣдовательно число 6 представляетъ истинное значеніе цифры единицъ корня, такъ что:

$$E\sqrt[3]{637231} = 86.$$

И легко, дѣйствительно, видѣть, что

$$86^3 < 637231 < 87^3.$$

§ IV. Метода извлеченія кубическаго корня, съ точностью до единицы, изъ цѣлаго числа.

152. *Дѣйствіе, при помощи котораго находится кубическій корень числа A, называется извлеченіемъ кубическаго корня изъ числа A.*

Дадимъ методу извлеченія кубическаго корня изъ числа A, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, при чемъ, на основаніи предъидущаго, можемъ предполагать, что число A есть число цѣлое (**145**). Метода эта, какъ увидимъ, основывается на предъидущихъ двухъ теоремахъ.

Данное цѣлое положительное число A разобьемъ на грани отъ правой руки къ лѣвой по *три* цифры въ каждой грани; положимъ, что число граней равно p.

Назовемъ буквами:

$$N_p,\quad N_{p-1},\quad N_{p-2},\quad \ldots,\quad N_3,\quad N_2,\quad N_1 \tag{1}$$

соотвѣтственно само число и числа, которыя получимъ, отбрасывая въ числѣ N_p послѣдовательно одну, двѣ, три, . . . , $p-3$, $p-2$, $p-1$ грань, такъ что число N_1 представитъ первую грань слѣва даннаго числа N_p. Значки у чиселъ означаютъ числа граней, заключенныхъ въ соотвѣтственныхъ числахъ. Очевидно, что каждое изъ чиселъ ряда (1), въ отношеніи своего непосредственно предшествующаго, представитъ число тысячъ, заключенныхъ въ этомъ предшествующемъ числѣ.

Разсмотримъ рядъ чиселъ:

$$E\sqrt[3]{N_p},\ E\sqrt[3]{N_{p-1}},\ E\sqrt[3]{N_{p-2}},\ \ldots,\ E\sqrt[3]{N_3},\ E\sqrt[3]{N_2},\ E\sqrt[3]{N_1} \tag{3}$$

и назовемъ *числа десятковъ*, заключенныхъ въ каждомъ изъ этихъ чиселъ, соотвѣтственно буквами:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_{p-2},\quad a_{p-1},\quad 0. \tag{2}$$

Послѣднее число есть 0, ибо N_1 представляетъ трехзначное число, слѣдовательно число: $E\sqrt[3]{N_1}$ есть число однозначное.

Назовемъ *цифры* единицъ чиселъ ряда (2) соотвѣтственно буквами:

$$x_p,\quad x_{p-1},\quad x_{p-2},\quad \ldots,\quad x_3,\quad x_2,\quad x_1.$$

Теорема III даетъ намъ слѣдующій рядъ равенствъ:

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{cases}
\Omega = E\sqrt[3]{N_p} = a_1 \,.\, 10 + x_p, & (1)\\
a_1 = E\sqrt[3]{N_{p-1}} = a_2 \,.\, 10 + x_{p-1}, & (2)\\
a_2 = E\sqrt[3]{N_{p-2}} = a_3 \,.\, 10 + x_{p-2}, & (3)\\
\dots\dots\dots\dots & \\
a_{p-3} = E\sqrt[3]{N_3} = a_{p-2} \,.\, 10 + x_3, & (p-2)\\
a_{p-2} = E\sqrt[3]{N_2} = a_{p-1} \,.\, 10 + x_2, & (p-1)\\
a_{p-1} = E\sqrt[3]{N_1} = x_1. & (p)
\end{cases}
$$

Сдѣлавъ послѣдовательныя подстановки, найдемъ:

$$
\begin{aligned}
a_{p-1} &= E\sqrt[3]{N_1} = x_1,\\
a_{p-2} &= E\sqrt[3]{N_2} = x_1 \cdot 10 + x_2,\\
a_{p-3} &= E\sqrt[3]{N_3} = x_1 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_2 &= E\sqrt[3]{N_{p-2}} = x_1 \cdot 10^{p-3} + x_2 \cdot 10^{p-4} + x_3 \cdot 10^{p-5} + \dots + x_{p-2},\\
a_1 &= E\sqrt[3]{N_{p-1}} = x_1 \cdot 10^{p-2} + x_2 \cdot 10^{p-3} + x_3 \cdot 10^{p-3} + \dots + x_{p-2} \cdot 10 + x_{p-1},\\
\Omega &= E\sqrt[3]{N_p} = x_1 \cdot 10^{p-1} + x_2 \cdot 10^{p-2} + x_3 \cdot 10^{p-3} + \dots + x_{p-2} \cdot 10^2 + x_{p-1} \cdot 10 + x_p
\end{aligned}
$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ показываетъ, что *цифры* x_1, x_2, x_3, ... , x_{p-1}, x_p суть цифры искомаго корня Ω.

Изложимъ методу опредѣленія этихъ цифръ; для этого будутъ служить равенства (I), даваемыя теоремою III, и теорема IV.

Мы увидимъ, что, прилагая теорему IV, должны будемъ составлять слѣдующія разности:

$$
\Delta_1 = N_1 - x_1^3, \quad \Delta_2 = N_2 - (x_1 \,.\, 10 + x_2)^3,
$$
$$
\Delta_3 = N_3 - (x_1 \cdot 10^2 + x_2 \,.\, 10 + x_3)^3,
$$

и будемъ должны приписывать къ этимъ разностямъ соотвѣтственно: вторую грань даннаго числа, третью грань даннаго числа и т. д.; образованныя такимъ образомъ числа назовемъ соотвѣтственно буквами:

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \quad . \; . \; .$$

Перейдемъ теперь къ изложенію методы.

1^0. Первая цифра x_1 корня опредѣляется непосредственно; *она есть*, какъ показываетъ послѣднее изъ равенствъ (I), *кубическій корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, числа* N_1, *т.-е. числа, образованнаго первою гранью, слѣва, даннаго числа*

Примѣръ. $N_3 = 22906304$, $N_2 = 22906$, $N_1 = 22$; первая цифра x_1 искомаго корня равна числу $E\sqrt[3]{22}$, т.-е. равна 2, такъ что

$$E\sqrt[3]{N_3} = 2 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_3.$$

2^0. Переходимъ теперь къ опредѣленію второй цифры x_2 искомаго корня. Она, какъ показываетъ равенство $(p-1)$-ое изъ равенствъ (I), представляетъ цифру единицъ корня: $E\sqrt[3]{N_2}$, число десятковъ котораго извѣстно и равно x_1.

Для опредѣленія этой цифры единицъ поступаемъ по *теоремѣ IV*, а именно:

Для полученія второй цифры корня вычитаемъ изъ числа тысячъ, заключающихся въ числѣ N_2, *т.-е. изъ числа* N_1, *т.-е. изъ первой грани даннаго числа, квадратъ числа* x_1, *т.-е. квадратъ найденной первой цифры корня; къ полученной разности, т.-е. къ* $\Delta_1 = N_1 - x_1^2$, *приписываемъ вторую грань предложеннаго числа; число сотенъ образованнаго такимъ образомъ числа, т.-е. число* R_1, *дѣлимъ на утроенный квадратъ первой цифры корня; принимаемъ цѣлую часть частнаго, если она не превышаетъ* 9, *или принимаемъ* 9, *если эта цѣлая часть превышаетъ* 9, *за вторую цифру* x_2 *корня и составляемъ кубъ числа, образованнаго первыми двумя цифрами; если этотъ кубъ не превышаетъ числа* N_2, *то число* x_2 *есть истинное значеніе второй цифры искомаго корня; въ противномъ случаѣ уменьшаемъ его постепенно на единицу и дѣлаемъ указанныя испытанія до тѣхъ поръ, пока эти испытанія не опредѣлятъ истиннаго значенія второй цифры корня.*

Примѣръ. $N_3 = 22906304$, $N_2 = 22906$, $N_1 = 22$, $x_1 = 2$. Составляемъ число: $N_1 - x_1^3 = 22 - 8 = 14$; приписываемъ слѣдующую грань числа N_3, т.-е. число 906; сотни образовавшагося числа 14906, т.-е. число 149, дѣлимъ на утроенный квадратъ первой цифры корня, т.-е. на число $2^2 \cdot 3 = 12$; цѣлая часть частнаго равна 14, т.-е. болѣе 9; испытываемъ 9, составляя число: $29^3=24389$; это число болѣе N_2; слѣдовательно, цифра 9 не годится; испытываемъ 8, составляя число $28^3=21952$; это число менѣе N_2, а потому цифра 8 хороша, и, слѣдовательно,

$$E\sqrt[3]{22906304}=2\cdot 10^2+8\cdot 10+x_3.$$

3°. Переходимъ къ опредѣленію третьей цифры искомаго корня, т.-е. къ опредѣленію x_3. Она, какъ показываетъ равенство $(p-2)$-ое изъ равенствъ (I), представляетъ цифру единицъ корня: $E\sqrt[3]{N_3}$, число десятковъ котораго извѣстно и равно $a_{p-2}=x_1\cdot 10+x_2$, т.-е. равно числу, образованному найденными двумя первыми цифрами искомаго корня.

Для полученія третьей цифры корня поступаемъ по теоремѣ IV такимъ образомъ: *вычитаемъ изъ числа тысячъ, заключающихся въ числѣ N_3, т.-е. изъ числа N_2, кубъ числа десятковъ, заключенныхъ въ $E\sqrt[3]{N_3}$, т.-е. кубъ числа $(x_1\cdot 10+x_2)$, образованнаго найденными двумя цифрами корня; къ полученной разности $\Delta_2=N_2-(x_1\cdot 10+ +x_2)^3$ приписываемъ третью грань даннаго числа и число сотенъ образованнаго такимъ образомъ числа R_2 дѣлимъ на утроенный квадратъ числа, образованнаго первыми двумя цифрами корня, т.-е. на число: $3(x_1\cdot 10+x_2)^2$; принимаемъ цѣлую часть частнаго, если она не превышаетъ 9, или принимаемъ 9, если цѣлая часть частнаго превышаетъ 9, за третью цифру x_3 корня и составляемъ число: $(x_1\cdot 10^2+ +x_2\cdot 10+x_3)^3$; если это число не превыситъ N_3, то число x_3 представитъ истинное значеніе третьей цифры корня; въ противномъ случаѣ уменьшаемъ это число постепенно на единицу и дѣлаемъ указанныя испытанія до тѣхъ поръ, пока эти испытанія не опредѣлятъ истиннаго значенія третьей цифры корня.*

Примѣръ. $N_3=22906304$, $N_2=22906$, $x_1=2$, $x_2=8$. Составляемъ: $\Delta_2= =N_2-28^3=954$, $R_2=954304$.

Принимаемъ: $x_3=E\dfrac{9543}{3\cdot 28^2}=E\dfrac{9543}{2352}=4$ и составляемъ число: 284^3; оно равно 22906304, т.-е. равно числу N_3. Это показываетъ не только, что цифра 4 хороша, но еще, что данное число N_3 есть кубъ своего корня, т.-е. числа 284. И въ самомъ дѣлѣ,

$$284^3=22906304<285^3.$$

4°. *Совершенно подобнымъ же образомъ, пользуясь равенствами* (I) *и теоремою IV, опредѣляемъ остальныя цифры искомаго корня.*

*** 153. Теорема.** *Остатокъ, получаемый при извлеченіи кубическаго корня, не превышаетъ никогда утроеннаго квадрата корня, сложеннаго съ утроеннымъ корнемъ.*

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, N и R представляютъ соотвѣтственно цѣлое число и его кубическій корень, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ. Остатокъ дѣйствія есть разность $N-R^3$. Разность эта менѣе $3R^2+3R+1$, ибо если бы эта разность была не менѣе $3R^2+3R+1$, то N было бы не менѣе R^3+3R^2+3R+1, т.-е. не менѣе $(R+1)^3$, и тогда кубическій корень N былъ бы не менѣе $R+1$.

Замѣчаніе. Случается иногда, что привычка въ вычисленіяхъ позволяетъ предвидѣть, что испытуемая цифра слишкомъ велика; уменьшаемъ ее непосредственно на одну или нѣсколько единицъ. Испытывая ее послѣ уменьшенія, мы можемъ убѣдиться, велика она или нѣтъ. Если она слишкомъ мала, то соотвѣтствующій остатокъ превыситъ утроенный квадратъ числа, образованнаго найденными уже цифрами корня, сложеннаго съ утроеннымъ числомъ.

§ V. Расположенія дѣйствія.

154. Возьмемъ для примѣра число 439496045227 и приложимъ къ нему предъидущее правило.

Вычисленія располагаются обыкновенно такимъ образомъ:

439496045227	7603
96496	147
520045	17328
520045227	1732800
0	

1°. Разбиваемъ число на грани по три цифры въ каждой грани; число граней равно 4, а потому корень состоитъ изъ четырехъ цифръ.

2°. Кубическій корень послѣдней грани, т.-е. 439, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, есть 7; 7 представляетъ, слѣдовательно, первую цифру корня.

3°. Вычитаемъ изъ первой грани кубъ первой цифры корня, т.-е. 343, къ остатку 96 приписываемъ слѣдующую грань 496 и число сотенъ образовавшагося числа, т.-е. 964, дѣлимъ на утроенный квадратъ первой цифры корня, т.-е. на 147. Частное 6 равно второй цифрѣ корня или же болѣе ея.

4°. Для испытанія цифры 6 пишемъ ее направо отъ первой цифры и составляемъ кубъ числа 76. Такъ какъ этотъ кубъ, равный 438976, можетъ вычитаться изъ числа, образованнаго первыми двумя гранями, т.-е. изъ числа 439496, и даетъ въ остаткѣ 520, то цифра 6 хороша.

5°. Къ остатку 520 приписываемъ справа третью грань, т.-е. 045, и дѣлимъ число сотенъ образованнаго числа, т.-е число 5200, на утроенный квадратъ числа, образованнаго найденными двумя цифрами корня, т.-е. на число 17328; цѣлая часть частнаго равна нулю, и, слѣдовательно, третья цифра корня есть 0.

6°. Вычитаемъ изъ числа, образованнаго первыми тремя гранями слѣва, т.-е. изъ числа 439496045, кубъ числа, образованнаго первыми тремя цифрами корня, т.-е. кубъ числа 760, равный 438976000; къ полученному остатку приписываемъ справа послѣднюю грань, т.-е. 227, и число сотенъ образованнаго такимъ образомъ числа, т.-е. число 5200452, дѣлимъ на утроенный квадратъ числа, образованнаго первыми тремя цифрами корня, т.-е. на число 1732800. Цѣлая часть частнаго 3 равна четвертой цифрѣ корня или же болѣе ея.

7°. Для испытанія цифры 3 пишемъ ее направо отъ числа, образованнаго первыми тремя цифрами корня, и составляемъ кубъ числа 7603. Такъ какъ этотъ кубъ равенъ 439496045227, т.-е. равенъ самому числу, то цифра 3 хороша. Искомый корень есть, слѣдовательно, число 7603. Остатокъ, равный нулю, показываетъ, что данное число представляетъ кубъ корня.

§ VI. Кубическіе корни съ данною точностью.

155. Двѣ дроби $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, съ одинаковымъ знаменателемъ n, числители которыхъ суть два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^3 \leqslant A < \left(\frac{x+1}{n}\right)^3,$$

называются кубическими корнями числа A съ точностью до $\frac{1}{n}$, при чемъ первая дробь называется *корнемъ съ недостаткомъ* вторая — *корнемъ съ избыткомъ*.

Найдемъ числа x и $x+1$, удовлетворяющія предъидущимъ неравенствамъ, или, что то же, неравенствамъ:

$$\frac{x^3}{n^3} \leqslant A < \frac{(x+1)^3}{n^3}.$$

Умноживъ обѣ части каждаго изъ этихъ неравенствъ на положительное число n^3, получаемъ равносильныя неравенства:

$$x^3 \leqslant A \cdot n^3 < (x+1)^3.$$

Эти неравенства говорятъ намъ, что искомыя цѣлыя числа: x и $(x+1)$ суть кубическіе корни числа An^3 съ точностью до 1, т.-е., согласно съ вышеданными обозначеніями,

$$x = E\sqrt[3]{An^3}, \quad x+1 = E\sqrt[3]{An^3}+1.$$

Мы можемъ, слѣдовательно, сказать:

Кубическіе корни числа A, съ точностью до $\frac{1}{n}$, суть кубическіе корни числа An^3, съ точностью до единицы, раздѣленные на n. Извлечь кубическій корень съ точностью до $\frac{1}{n}$ изъ числа A значитъ найти его кубическій корень, съ точностью до $\frac{1}{n}$, съ недостаткомъ.

Примѣръ. Требуется извлечь кубическій корень изъ $\frac{73}{5}$ съ точностью до $\frac{1}{7}$. Умножаемъ $\frac{73}{5}$ на 343, т.-е. на кубъ 7; произведеніе равно $5067\frac{4}{5}$; кубическій корень его, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, равенъ 17. Отсюда слѣдуетъ, что кубическій корень $\frac{73}{7}$, съ точностью до $\frac{1}{7}$, съ недостаткомъ, есть $\frac{17}{7}$.

156. Замѣчаніе. Если знаменатель дроби есть полный кубъ b^3, то, для полученія ея кубическаго корня съ точностью до $\frac{1}{b}$, достаточно извлечь кубическій корень съ точностью до единицы изъ числителя и раздѣлить результатъ на знаменателя b. И въ самомъ дѣлѣ, для извлеченія кубическаго корня съ точностью до $\frac{1}{b}$ изъ дроби $\frac{a}{b^3}$ должно (155) умножить $\frac{a}{b^3}$ на b^3, извлечь кубическій корень изъ произведенія a, съ точностью до единицы, и раздѣлить результатъ на b.

Если степень приближенія не назначена, то, для извлеченія кубическаго корня изъ дроби, очень часто приводятъ знаменателя къ полному кубу и пользуются затѣмъ предъидущимъ замѣчаніемъ. Для этого приведенія достаточно умножить оба члена дроби на квадратъ знаменателя.

Примѣръ. Дана дробь $\frac{73}{5}$. Приводимъ ее къ виду $\frac{73 \cdot 5^2}{5^3}=\frac{1825}{125}$; кубическій корень ея, съ точностью до $\frac{1}{5}$, съ недостаткомъ, равенъ $\frac{12}{5}$.

Иногда знаменатель приводится къ кубу умноженіемъ членовъ дроби на число, меньшее квадрата знаменателя. И въ самомъ дѣлѣ, достаточно умножить знаменателя на такое число, чтобы его простые множители получили показателей, дѣлящихся на 3; мы достигнемъ этого, если умножимъ знаменателя на произведеніе простыхъ множителей, показатели которыхъ имѣютъ форму $3n+2$, и на квадратъ произведенія тѣхъ простыхъ множителей, показатели которыхъ имѣютъ форму $3n+1$.

Примѣръ. Дана дробь $\frac{197}{360}=\frac{197}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$.

Приведемъ знаменателя къ полному кубу, если умножимъ оба члена дроби на $3 \cdot 5^2$. Дробь обратится въ $\frac{197 \cdot 3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}=\frac{14775}{(30)^3}$.

Для полученія ея кубическаго корня, съ точностью до $\frac{1}{30}$, извлекаемъ кубическій корень, съ точностью до единицы, изъ числителя, 14775, и результатъ, 24, дѣлимъ на знаменателя 30, что дастъ $\frac{24}{30}$.

157. Вычисленіе кубическаго корня съ точностью до $\frac{1}{10^n}$.

Положимъ, что число N, кубическій корень котораго вычисляется, выражено десятичною дробью.

Для извлеченія корня, съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, должно умножить число N на 10^{3n}, извлечь, съ точностью до единицы, кубическій корень изъ произведенія и результатъ раздѣлить на 10^n. Для того, чтобы умножить N на 10^{3n}, переносимъ запятую на $3n$ знаковъ вправо, а для полученія корня, съ точностью до единицы, извлекаемъ корень изъ цѣлой части. Итакъ, *для опредѣленія кубическаго корня числа N, съ точностью до $\frac{1}{10^n}$, достаточно знать $3n$ первыхъ десятичныхъ знака числа N, представленнаго въ видѣ десятичной дроби.*

Упражненія.

I. Дано цѣлое число. Какимъ образомъ можно убѣдиться въ томъ, что число это представляетъ разность двухъ послѣдовательныхъ кубовъ, и найти эти кубы?

II. a и b означаютъ два какихъ ни есть числа. Вопросъ состоитъ въ слѣдующемъ: число $b^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$ болѣе или менѣе куба числа $(a^2 + b^2)$?

III. Сумма кубовъ послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ единицы, равна квадрату суммы этихъ чиселъ.

IV. Если два цѣлыхъ числа A и B обладаютъ однимъ и тѣмъ же числомъ цифръ, при чемъ болѣе половины цифръ слѣва общихъ, то

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} < \frac{1}{3}.$$

V. Повѣрить равенство:

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4.$$

* ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Основанія ученія о предѣлахъ. Ирраціональныя числа. Непрерывныя дроби.

§ 1. Понятіе о предѣлѣ. Примѣры. Теоремы.

158. Раціональныя числа. *Раціональными* числами называются числа цѣлыя, включая сюда и нуль, и дроби, числители и знаменатели которыхъ суть цѣлыя числа; раціональное число можетъ быть положительнымъ и отрицательнымъ.

Дѣйствія сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую степень, производимыя надъ числами раціональными, приводятъ всегда къ числамъ раціональнымъ и не требуютъ, слѣдовательно, никакихъ новыхъ представленій о числѣ. Извлеченіе же корня m-овой степени изъ раціональнаго числа A, т.-е. нахожденіе такого числа, m-овая степень котораго равнялась бы числу A, потребуетъ иногда отъ насъ новыхъ представленій о числѣ. И въ самомъ дѣлѣ, если заданное положительное число A представляетъ изъ себя m-овую степень числа B, то корень m-овой степени изъ числа A представляется именно числомъ B. т.-е. входитъ въ категорію раціональныхъ чиселъ. Если же число A не представляетъ изъ себя m-ой степени никакого раціональнаго числа, то корень долженъ быть разсматриваемъ, какъ число особой природы. Это число входитъ въ категорію такъ называемыхъ *ирраціональныхъ* чиселъ. Представленіе объ ирраціональномъ числѣ составляется при помощи понятія о *предѣлѣ*.

159 Понятіе о предѣлѣ. Разсмотримъ неограниченный рядъ раціональныхъ чиселъ:

$$(1) \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_n, \ldots \quad x_{n+p}, \ldots,$$

слѣдующихъ другъ за другомъ по нѣкоторому опредѣленному закону, такъ что мы можемъ вычислить каждое число этого ряда, если будемъ знать нумеръ мѣста, занимаемаго этимъ числомъ въ рядѣ.

Положимъ, что X означаетъ каждое изъ чиселъ этого ряда; X называется перемѣннымъ числомъ, при чемъ числа ряда называются значеніями этого перемѣннаго числа, и та послѣдовательность, въ которой числа ряда (1) слѣдуютъ другъ за другомъ, указываетъ на послѣдовательность измѣненій, претерпѣваемыхъ перемѣннымъ числомъ X. Если мы въ числѣ x_n ряда будемъ понимать подъ знакомъ n цѣлое, положительное число, принимающее значенія: 1, 2, 3, 4, . . . , то можемъ писать:

$$X = x_n.$$

Возьмемъ какое-нибудь опредѣленное раціональное число L и разсмотримъ разность:

$$L - x_n.$$

Если для всякаго положительнаго числа ε, какъ бы оно ни было мало, можно указать такое цѣлое положительное число a, что, для значенія значка n, равнаго a, и для значенія значка n, большаго a, модуль разности $(L - x_n)$ будетъ менѣе ε, то говорятъ, что перемѣнное число x_n стремится къ предѣлу, при чемъ число L называютъ предѣломъ перемѣннаго числа.

Это же опредѣленіе выражаютъ иногда такимъ образомъ:

Если модуль разности $(L - x_n)$, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго заданнаго положительнаго числа ε, какъ бы оно ни было мало, то перемѣнное число x_n стремится къ предѣлу, при чемъ число L называютъ предѣломъ перемѣннаго числа.

Вмѣсто того, чтобы говорить, что число x_n стремится къ предѣлу, равному L, часто пишутъ:

$$lim\,(x_n)_{n=\infty} = L,$$

гдѣ знакъ *lim* означаетъ три начальныя буквы слова *limite* (предѣлъ), а значекъ $n=\infty$ означаетъ, что въ разности $L-x_n$ число n замѣняется послѣдовательно числами ряда:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Если для даннаго ряда (1) не существуетъ никакого числа, обладающаго указаннымъ свойствомъ, то говорятъ, что перемѣнное число x_n не стремится къ предѣлу.

Вмѣсто того, чтобы говорить: число x_n стремится къ предѣлу, говорятъ иногда условно: рядъ (1) имѣетъ предѣлъ.

Если число $L=0$, то говорятъ, что перемѣнное число x_n *безконечно мало*. Въ этомъ случаѣ разность:

$$L-x_n$$

обращается въ $(-x_n)$, и, слѣдовательно, ея модуль обращается въ модуль числа x_n, такъ что мы можемъ сказать, что *перемѣнное число x_n есть число безконечно малое, если модуль его становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго заданнаго положительнаго числа ϵ, какъ бы оно ни было мало.*

Если перемѣнное число x_n таково, что модуль его становится и продолжаетъ быть болѣе всякаго заданнаго положительнаго числа ω, какъ бы это число ни было велико, то говорятъ, что число x_n есть безконечно большое число.

160. *Примѣры:*

1°. Положимъ, что рядъ (1) есть:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$$

Здѣсь $x_n=\frac{1}{n}$, и очевидно, что $lim(x_n)_{n=\infty}=0$.

2°. Разсмотримъ рядъ:

$$(\alpha_1-\alpha_2),\ (\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3),\ (\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4), \ldots,$$

при чемъ: $lim(\alpha_n)_{n=\infty}=0$.

Очевидно, что этотъ рядъ имѣетъ предѣломъ α_1, ибо перемѣнная разность α_1-x_n принимаетъ значенія:

$$\alpha_2,\ \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

т. е. модуль ея становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго положительнаго числа, какъ бы оно ни было мало.

Сдѣлавъ въ предъидущемъ рядѣ:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \alpha_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ \alpha_n = \frac{1}{n}\ldots,$$

придемъ къ заключенію, что перемѣнное число x_n, принимающее значенія:

$$\frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3},\ \ldots,\ \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+,\ldots,$$

стремится къ предѣлу, равному единицѣ.

Положивъ:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{1}{2.3},\ \alpha_3 = \frac{1}{2.5},\ \ldots,\ \alpha_n = \frac{1}{2(2n-1)},\ \ldots,$$

придемъ къ заключенію, что рядъ:

$$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{15},\ \ldots,\ \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ \ldots,$$

стремится къ предѣлу, равному $\frac{1}{2}$.

3°. Перемѣнное число x_n, принимающее значенія:

$$\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right),\ \ldots,$$

если число безконечно большое.

И въ самомъ дѣлѣ, идя, по этому ряду, отъ лѣвой руки къ правой, мы будемъ встрѣчать числа;

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right),\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right),\ \ldots,$$

каждое слагаемое которыхъ будетъ не менѣе $\frac{1}{2}$, при чемъ число слагаемыхъ будетъ неопредѣленно возрастать, такъ что числа нашего ряда превзойдутъ всякое напередъ заданное число, какъ бы оно ни было велико.

4°. Разсмотримъ дробь $\frac{A}{B}$, числитель и знаменатель которой суть перемѣнныя числа, принимающія соотвѣтственно значенія:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

Сама дробь представитъ перемѣнное число, принимающее значенія:

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_3}{y_3},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots$$

Если $Mod\,(x_n) < a$, начиная съ нѣкотораго n, гдѣ a опредѣленное число, при чемъ $Mod(y_n)$ безконечно малъ, то легко показать, что, начиная съ нѣкотораго n, $Mod\left(\frac{x_n}{y_n}\right) > \omega$, гдѣ ω сколь угодно большое положительное число. И въ самомъ дѣлѣ, неравенство: $Mod\left(\frac{x_n}{y_n}\right) > \omega$ послѣдовательно даетъ слѣдующія неравенства:

$$\frac{Mod(x_n)}{Mod(y_n)} > \omega,\quad Mod(x_n) > \omega\,.\,Mod(y_n),\quad \omega\,.\,Mod(y_n) < Mod(x_n),$$
$$Mod(y_n) < \frac{Mod\,(x_n)}{\omega},$$

или, наконецъ,

$$Mod(y_n) < \frac{a}{\omega}.$$

Это же неравенство удовлетворяется, начиная съ нѣкотораго n. Итакъ, перемѣнное число $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ безконечно велико.

Говорятъ иногда условно, что частное $\frac{A}{B}$ стремится къ безконечности, и пишутъ: $\frac{A}{0} = \infty$.

5°. Рядъ:

$$1,\ 1-1,\ 1-1+1,\ 1-1+1-1,\ \ldots$$

не стремится ни къ какому предѣлу.

6°. Разсмотримъ рядъ:

$$By^1,\ By^2,\ By^3,\ \ldots,\ By^n,\ \ldots,$$

гдѣ B и y суть данныя числа, при чемъ $Mod\,(y)$ болѣе единицы. Легко показать, что перемѣнное число

$$x_n = By^n$$

безконечно велико, т.-е., его модуль, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть болѣе всякаго положительнаго числа ω, какъ бы оно ни было велико.

Докажемъ это. Положимъ, что

$$Mod\,y = 1 + \delta,$$

гдѣ δ положительное число. Напишемъ слѣдующее тождество:

$$\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} = \frac{(1+\delta)^n - 1}{(1+\delta) - 1} = (1+\delta)^{n-1} + (1+\delta)^{n-2} + \ldots +$$
$$+ (1+\delta) + 1.$$

Такъ какъ число слагаемыхъ въ суммѣ, помѣщенной во второй части равенства, равно n, при чемъ каждое слагаемое болѣе единицы, за исключеніемъ послѣдняго, которое равно единицѣ, то сумма эта болѣе n, и, слѣдовательно,

$$\frac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} > n, \text{ откуда } (1+\delta)^n > 1 + n\delta, \text{ т.-е.}$$
$$Mod(By^n) > (1 + n\delta) \,.\, Mod(B).$$

Взявъ для n цѣлое и положительное число, удовлетворяющее неравенству:

$$(1 + n\delta) \,.\, Mod\,(B) > \omega, \quad \text{т.-е.} \quad n > \frac{\frac{\omega}{Mod\,B} - 1}{\delta},$$

мы увидимъ, что для этого значенія n и для всѣхъ значеній, слѣдующихъ за нимъ, будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$Mod(By^n) > \omega,$$

ч. и т. д.

7°. Разсмотримъ рядъ:

$$Cx,\ Cx^2,\ Cx^3,\ \ldots,\ Cx^n,\ \ldots,$$

гдѣ C и x суть данныя числа, при чемъ $Mod(x)$ менѣе единицы.

Покажемъ, что перемѣнное число Cx^n безконечно мало, т.-е. его модуль становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго положительнаго ε, какъ бы оно ни было мало.

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $Mod x = \frac{1}{Mod(y)}$, гдѣ $Mod(y) > 1$, отсюда

$$Mod(Cx^n) = \frac{1}{Mod\left(\frac{1}{C}y^n\right)} = \frac{1}{Mod(By^n)}, \text{ гдѣ } B = \frac{1}{C}.$$

Мы доказали, что, начиная съ нѣкотораго n, всегда можно удовлетворить неравенству:

$$Mod(By^n) > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ или } \frac{1}{Mod(Cx^n)} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ откуда } Mod(Cx^n) < \varepsilon,$$

ч. и т. д.

8^0. Разсмотримъ рядъ:

$$x_1 = \frac{a(1-x)}{1-x}, \quad x_2 = \frac{a(1-x^2)}{1-x}, \ldots, x_n = \frac{a(1-x^n)}{1-x}, \ldots,$$

или, что то же, рядъ:

$$x_1 = a, \; x_2 = a + ax, \; x_3 = a + ax + ax^2, \ldots, x_n = a + ax + \ldots + ax^{n-1}, \ldots,$$

гдѣ a и x суть данныя числа.

Покажемъ, что если $Mod(x) < 1$, то рядъ стремится къ предѣлу, равному $\frac{a}{1-x}$, т.-е. покажемъ, что

$$\frac{a}{1-x} = lim\left[\frac{a(1-x^n)}{1-x}\right]_{n=\infty}.$$

Для доказательства напишемъ тождество:

$$Mod\left[\frac{a}{1-x} - \frac{a(1-x^n)}{1-x}\right] = Mod\left(\frac{a}{1-x} \cdot x^n\right).$$

Мы сейчасъ доказали, что если $Mod(x) < 1$, то $Mod\left(\frac{a}{1-x} \cdot x^n\right)$, при неопредѣленномъ возрастанiи n, стремится къ нулю; отсюда, на основанiи понятiя о предѣлѣ, заключаемъ, что постоянное число $\frac{a}{1-x}$ есть предѣлъ перемѣннаго числа $\frac{a(1-x^n)}{1-x}$ при $n = \infty$.

Предъидущій примѣръ позволяетъ намъ разсматривать всякое заданное *раціональное* число P, какъ предѣлъ нѣкотораго перемѣннаго раціональнаго числа. И въ самомъ дѣлѣ, напишемъ равенство:

$$P = \frac{a}{1-x}$$

и возьмемъ для x какое ни есть раціональное значеніе, лишь бы только $Mod x < 1$. Предъидущее равенство намъ дастъ:

$$a = P(1-x),$$

и

$$P = \frac{a}{1-x} = lim\left[\frac{a(1-x^n)}{1-x}\right]_{n=\infty} = lim\Big[P(1-x^n)\Big]_{n=\infty}.$$

Взявъ, напримѣръ, $P=2$ и $x=\frac{1}{2}$, найдемъ, что число 2 есть предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \ldots$$

Взявъ для x другое значеніе, мы получимъ иной рядъ чиселъ, который, однако, будетъ опять таки стремиться къ 2.

Предъидущій примѣръ имѣетъ примѣненіе при обращеніи періодическихъ дробей въ обыкновенныя. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, дана простая періодическая дробь

$$0,\ bbb\ \ldots,$$

гдѣ буква b означаетъ періодъ, состоящій изъ p цифръ.

Эта дробь можетъ быть разсматриваема, какъ предѣлъ чиселъ ряда:

$$\frac{b}{10^p},\ \frac{b}{10^p}+\frac{b}{10^{2p}},\ \frac{b}{10^p}+\frac{b}{10^{2p}}+\frac{b}{10^{3p}},\ \ldots$$

Сдѣлавъ въ предъидущихъ формулахъ: $a=\frac{b}{10^p}$ и $x=\frac{1}{10^p}$, найдемъ для предѣла нашего ряда число:

$$\frac{\frac{b}{10^p}}{1-\frac{1}{10^p}} = \frac{b}{10^p-1}.$$

Итакъ

$$0,\ bbb\ \ldots = \frac{b}{10^p-1}.$$

Этотъ же результатъ получается и въ ариѳметикѣ.

161. Понятіе о предѣлѣ, данное выше, позволитъ теперь расширить наши представленія о числѣ. Для этой цѣли докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Если перемѣнное раціональное число* X, *принимая, при своемъ измѣненіи, неограниченный рядъ значеній:*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

стремится къ предѣлу L, *то модуль разности*

$$x_{n+p} - x_n,$$

при неопредѣленномъ возрастаніи n *и при всякомъ цѣломъ и положительномъ* p, *стремится къ нулю.*

По условію теоремы и изъ понятія о предѣлѣ имѣемъ, что $Mod(L - x_n)$, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть менѣе $\frac{\varepsilon}{2}$, гдѣ ε сколь угодно малое положительное число. Итакъ, при достаточно большомъ n и при всякомъ p, получимъ слѣдующихъ два неравенства:

$$Mod(L - x_n) < \frac{\varepsilon}{2},\ Mod(L - x_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{2};$$

но

$$x_{n+} - x_n = (L - x_n) - (L - x_{n+p}),$$

слѣдовательно

$$Mod(x_{n+p} - x_n) \leqslant Mod(L - x_{n+p}) + Mod(L - x_n).$$

а потому, при достаточно большомъ n и при всякомъ p, будемъ имѣть:

$$Mod(x_{n+p} - x_n) < \varepsilon.$$

Неравенство это и доказываетъ теорему.

162. Предъидущая теорема даетъ намъ необходимое условіе существованія предѣла для перемѣннаго числа X при назначенномъ законѣ измѣненій.

Достаточность этого условія мы примемъ, какъ постулатъ, какъ допущеніе, какъ принципъ, какъ аксіому.

Допущеніе. *Если перемѣнное раціональное число X, измѣняясь, принимаетъ неограниченный рядъ такихъ значеній:*

(1) $$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

при которыхъ модуль разности:

$$x_{n+p} - x_n$$

стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи n и при всякомъ цѣломъ положительномъ p, то это число стремится къ предѣлу.

163. Для того, чтобы получить ясное представленіе о смыслѣ предъидущаго допущенія, разсмотримъ нѣкоторыя свойства чиселъ ряда:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

удовлетворяющихъ условію, по которому модуль разности $(x_{n+p} - x_n)$, съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ n, при всякомъ цѣломъ и положительномъ p, стремится къ нулю.

164. Докажемъ, во первыхъ, что *модули чиселъ этого ряда не возрастаютъ неопредѣленно, т.-е остаются менѣе нѣкотораго раціональнаго положительнаго числа A.*

И въ самомъ дѣлѣ, по условію имѣемъ:

$$Mod(x_{n+p} - x_n) < \varepsilon,$$

при всякомъ значеніи ε, начиная съ нѣкотораго n и при всякомъ цѣломъ и положительномъ p.

Если разность $(x_{n+p} - x_n)$ положительная, то

$$-\varepsilon < x_{n+p} - x_n < \varepsilon,$$

откуда

$$x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon. \qquad (a)$$

Если же разность $(x_{n+p} - x_n)$ отрицательная, то

$$-\varepsilon < x_n - x_{n+p} < \varepsilon,$$

и опять:

$$x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon. \qquad (a)$$

Неравенства (a) говорятъ намъ, что всѣ числа ряда, начиная съ x_n, заключены между двумя раціональными числами $x_n - \varepsilon$ и $x_n + \varepsilon$, разность между которыми равна 2ε [например, положимъ, что назначено $\varepsilon = \frac{1}{20}$ и пусть $Mod(x_{n+p} - x_p) < \frac{1}{20}$, начиная съ $n = 31$, т.-е. начиная съ числа x_{31}, которое, положимъ, равно 15; тогда всѣ числа $x_{31}, x_{32}, x_{33}, \ldots$ заключены между $15 - \frac{1}{20}$ и $15 + \frac{1}{20}$, т.-е. заключены между двумя числами, разность между которыми равна $\frac{1}{10}$].

Очевидно, что модуль каждаго изъ чиселъ нашего ряда не превышаетъ раціональнаго положительнаго числа A, гдѣ A есть наибольшій изъ модулей чиселъ:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_n \pm \varepsilon.$$

165. Докажемъ, во вторыхъ, *что если рядъ:*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+p}, \ldots$$

не имѣетъ предѣломъ нуля, то числа ряда, начиная съ нѣкотораго, принимаютъ одинъ и тотъ же знакъ, т.-е. или всѣ становятся положительными или всѣ становятся отрицательными, при чемъ модули ихъ остаются болѣе нѣкотораго положительнаго числа.

Мы имѣли неравенства:

$$(a) \qquad x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon.$$

Они говорятъ, что если два числа: $x_n - \varepsilon$ и $x_n + \varepsilon$ пріобрѣтаютъ одинъ и тотъ же знакъ при нѣкоторомъ ε и при соотвѣтствующемъ ему x_n, то очевидно, что числа:

$$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}, \ldots$$

суть или числа положительныя, или числа отрицательныя, при чемъ каждый изъ модулей этихъ чиселъ будетъ болѣе нѣкотораго положительнаго числа. [Напримѣръ, если при $\varepsilon = \frac{1}{20}$ соотвѣтствующій ему членъ есть x_{500}, равный, положимъ, $-\frac{1}{10}$, то

$$-\frac{1}{10} - \frac{1}{20} < x_{500+p} < -\frac{1}{10} + \frac{1}{20},$$

т.-е. число x_{500} и всѣ слѣдующія за нимъ будутъ отрицательныя].

Но положимъ, что, при безпредѣльномъ уменьшеніи ε, числа $x_n - \varepsilon$ и $x_n + \varepsilon$ остаются различныхъ знаковъ, такъ что:

$$x_n + \varepsilon > 0,\ x_n - \varepsilon < 0,$$

тогда

$$-\varepsilon < x_n < \varepsilon. \tag{b}$$

Неравенства (a), при помощи неравенствъ (b), могутъ написаться такимъ образомъ:

$$-2\varepsilon < x_{n+p} < 2\varepsilon,$$

т.-е.

$$Mod(x_{n+p}) < 2\varepsilon;$$

это неравенство говоритъ, что $Mod(x_{n+p})$ стремится къ нулю, что противорѣчитъ условію.

166. Доказанныя теоремы (**164**, **165**) достаточно выясняютъ наше допущеніе (**162**).

И въ самомъ дѣлѣ, теорема (**165**) показываетъ намъ, что всѣ числа разсматриваемаго ряда, начиная съ нѣкотораго, становятся и продолжаютъ быть или все положительными, или все отрицательными; теорема же (**164**) говоритъ, что всѣ числа нашего ряда, начиная съ нѣкотораго n, заключены между двумя конечными числами, разность между которыми можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою.

Эти двѣ теоремы позволяютъ интерпретировать наше допущеніе геометрически.

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ нашъ рядъ съ того числа, съ котораго всѣ числа становятся одного и того же знака; отнесемъ каждое изъ чиселъ къ какой-нибудь единицѣ линейной мѣры и вообразимъ каждое изъ нихъ отложеннымъ на неопредѣленной прямой отъ нѣкоторой опредѣленной точки; концы всѣхъ длинъ, начиная съ нѣкоторой, упадутъ между концами двухъ конечныхъ длинъ, при чемъ концы этихъ двухъ послѣднихъ длинъ могутъ быть приближены другъ къ другу сколь угодно близко. Это показываетъ, что концы всѣхъ длинъ нашего ряда стремятся къ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной точкѣ, лежащей на конечномъ разстояніи отъ начала. Отрѣзокъ прямой, заключенный между началомъ и этою опредѣленною точкою, и есть предѣлъ, къ которому стремятся длины нашего ряда.

167. Положительное и отрицательное ирраціональное число. Если рядъ (1) удовлетворяетъ необходимому и достаточному условію существованія предѣла, но раціональнаго предѣла не существуетъ, то предѣлъ разсматривается, какъ число особой природы, входящее въ категорію такъ называемыхъ *ирраціональныхъ* чиселъ. Числу этому можетъ быть присвоиваемъ въ каждомъ частномъ случаѣ приличествующій знакъ. Число это называется *положительнымъ*, если числа ряда (1) становятся и продолжаютъ быть болѣе нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго раціональнаго числа A; оно называется отрицательнымъ, если числа этого ряда становятся и продолжаютъ быть менѣе нѣкотораго опредѣленнаго отрицательнаго раціональнаго числа B. Если рядъ (1) не имѣетъ предѣломъ нуля, то одно изъ этихъ обстоятельствъ непремѣнно случится (165).

168. Равныя и неравныя ирраціональныя числа. Прежде чѣмъ приступимъ къ производству дѣйствій надъ числами ирраціональными, условимся, что мы будемъ понимать подъ *равными и неравными ирраціональными числами.*

Положимъ, что два числа L и M *опредѣлены* соотвѣтственно, какъ предѣлы рядовъ раціональныхъ чиселъ:

$$(L) \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+p}, \ldots$$

$$(M) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots, b_{n+p}, \ldots$$

Замѣтимъ, что рядъ:

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots, a_{n+p} - b_{n+p}, \ldots$$

стремится къ предѣлу; и въ самомъ дѣлѣ.

$$(a_{n+p} - b_{n+p}) - (a_n - b_n) = (a_{n+p} - a_n) - (b_{n+p} - b_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \; Mod(b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε сколь угодно малое число; слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго n и при всякомъ p,

$$Mod[(a_{n+p} - b_{n+p}) - (a_n - b_n)] < \varepsilon.$$

Будемъ называть:

1°. Числа L и M *равными* тогда и только тогда, когда предѣлъ числа $(a_n - b_n)$ есть нуль.

2°. Число L *большимъ* числа M тогда и только тогда, когда предѣлъ числа $(a_n - b_n)$ положителенъ **(167)**.

3°. Число L *меньшимъ* числа M тогда и только тогда, когда предѣлъ числа $(a_n - b_n)$ отрицателенъ.

169. Замѣчанія. 1°. Замѣтимъ, что если числа L и M суть числа раціональныя, то, при $L = M$, разность $(a_n - b_n)$, съ возрастаніемъ n до безконечности, дѣйствительно стремится къ нулю, и обратно.

И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ, при условіи $L = M$,

$$\Delta = a_n - b_n = (M - b_n) - (L - a_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(M - b_n) < \frac{\varepsilon}{2},\ Mod(L - a_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε сколь угодно малое положительное число; слѣдовательно, и подавно:

$$Mod\Delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},\ \text{т.-е.}\ Mod\Delta < \varepsilon.$$

Обратно,

$$L - M = (L - a_n) - (M - b_n) + (a_n - b_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(M - b_n) < \frac{\varepsilon}{3},\ Mod(L - a_n) < \frac{\varepsilon}{3},\ Mod(a_n - b_n) < \frac{\varepsilon}{3};$$

слѣдовательно, и подавно:

$$Mod(L - M) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},\ \text{т.-е.}\ Mod(L - M) < \varepsilon.$$

Такъ какъ $Mod(L - M)$ есть число постоянное, то послѣднее неравенство требуетъ, чтобы этотъ модуль былъ равенъ нулю, т.-е. требуетъ, чтобы $L = M$.

2°. Замѣтимъ во вторыхъ, что если числа L и M суть числа раціональныя, то, при $L > M$, разность $(a_n - b_n)$, при достаточно большомъ n, дѣйствительно становится и продолжаетъ быть болѣе одного и того же положительнаго числа, и обратно. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $L > M$, такъ что

$$L = M + k,$$

гдѣ k нѣкоторое положительное число.

Имѣемъ:

$$\Delta = a_n - b_n = (M - b_n) - (L - a_n) + k;$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(M - b_n) < \frac{k}{2},\ Mod(L - a_n) < \frac{k}{2},$$

слѣдовательно,

$$Mod[(M - b_n) - (L - a_n)] < k,$$

т.-е. Δ, при достаточно большомъ n, становится и продолжаетъ быть болѣе одного и того же положительнаго числа.

Обратно,

$$L - M = (L - a_n) - (M - b_n) + (a_n - b_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n, $a_n - b_n > \beta$, $mod\,(L - a_n) < \frac{\beta}{2}$, $mod(M - b_n) < \frac{\beta}{2}$, гдѣ β положительное число; слѣдовательно, $L - M$ становится и продолжаетъ быть болѣе одного и того же положительнаго числа, т.-е. $L - M$, какъ постоянное число, есть число положительное.

3°. Замѣтимъ въ третьихъ, что разсужденіями, аналогичными предъидущимъ, покажемъ, что если числа L и M суть числа раціональныя, то, при $L < M$, разность $(a_n - b_n)$, при достаточно большомъ n, дѣйствительно становится и продолжаетъ быть менѣе одного и того же отрицательнаго числа, и обратно.

Эти три замѣчанія показываютъ намъ, что тѣ соглашенія, которыя мы сдѣлали относительно равенства и неравенства чиселъ L и M, не противорѣчатъ понятіямъ о равенствѣ и неравенствѣ раціональныхъ чиселъ.

170. Установивъ предъидущія понятія о равенствѣ и неравенствѣ двухъ ирраціональныхъ чиселъ, докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Если ряды:*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,\ a_{n+p},\ \ldots,$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,\ b_{n+p},\ \ldots$$

таковы, что первый изъ нихъ стремится къ предѣлу L, *при чемъ* $lim\,(a_n - b_n)_{n=\infty} = 0$, *то второй рядъ стремится къ тому же предѣлу* L *и не стремится ни къ какому другому.*

По условію теоремы имѣемъ:

$$lim(a_{n+p} - a_n)_{n=\infty} = 0,\ lim(a_n)_{n=\infty} = L,\ lim(b_n - a_n)_{n=\infty} = 0.$$

Докажемъ сперва, что $\lim(b_n)_{n=\infty}$ существуетъ, т.-е. докажемъ, что модуль разности $(b_{n+p} - b_n)$ стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи n и при всякомъ p **(162)**. Это имѣетъ мѣсто. И въ самомъ дѣлѣ,

$$b_{n+p} - b_n = (b_{n+p} - a_{n+p}) + (a_n - b_n) + (a_{n+p} - a_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(b_{n+p} - a_{n+p}) < \frac{\varepsilon}{3},\ Mod\,(a_n - b_n) < \frac{\varepsilon}{3},\ Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{3},$$

гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, а потому:

$$Mod(b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},\ \text{или}\ Mod(b_{n+p} - b_n) < \varepsilon.$$

Неравенство это говоритъ, что число B стремится къ нѣкоторому предѣлу M.

Принимая теперь во вниманіе условіе: $lim(b_n - a_n)_{n=\infty} = 0$ и то соглашеніе **(168)**, которое мы сдѣлали относительно равенства чиселъ, опредѣленныхъ, какъ предѣлы, заключаемъ, что $L = M$.

Слѣдствіе. *Если два перемѣнныхъ числа таковы, что соотвѣтственныя значенія, принимаемыя ими, постоянно равны между собою, то эти числа не могутъ стремиться къ различнымъ предѣламъ.*

171. Дадимъ теперь двѣ теоремы, позволяющія *вычислять* ирраціональныя числа, т.-е. замѣнять эти числа числами раціональными съ недостаткомъ или съ избыткомъ и съ такою погрѣшностью, которая можетъ быть опредѣлена.

Теорема I. *Если неограниченный рядъ положительныхъ чиселъ:*

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

есть рядъ чиселъ возрастающихъ и остающихся менѣе нѣкотораго числа L, *то перемѣнное число* x_n *стремится къ предѣлу, при неопредѣленномъ возрастаніи* n.

И въ самомъ дѣлѣ, обратимъ каждое изъ чиселъ ряда (1) въ десятичную дробь (нѣкоторыя изъ этихъ дробей могутъ быть періодическія). Очевидно, что, идя по ряду (1) отъ лѣвой руки къ правой, мы встрѣтимъ такое число, которое и всѣ слѣдующія за которымъ имѣютъ одну и ту же цѣлую часть, ибо, въ противоположномъ случаѣ, числа эти, возрастая по условію, возрастали бы неопредѣленно, а они должны оставаться менѣе L. Положимъ, что это число x_m; оно удовлетворяетъ, слѣдовательно, неравенству:

$$x_{m+p} - x_m < 1$$

при всякомъ p.

И вообще, очевидно, что, идя по ряду (1) отъ лѣвой руки къ правой, мы встрѣтимъ такое число, которое и всѣ слѣдующія за которымъ будутъ имѣть общую цѣлую часть и общіе первые q десятичныхъ знаковъ, какъ бы ни было велико q, ибо числа:

$$(1') \quad x_1 \cdot 10^q,\ x_2 \cdot 10^q,\ x_3 \cdot 10^q,\ \ldots,\ x_n \cdot 10^q,\ \ldots,\ x_{n+p} \cdot 10^q,\ \ldots,$$

возрастаютъ, оставаясь менѣе $L \cdot 10^q$; слѣдовательно, идя по этому ряду отъ лѣвой руки къ правой, мы встрѣтимъ такое число, которое и всѣ слѣдующія за которымъ будутъ имѣть общую цѣлую часть; раздѣливъ каждое изъ этихъ чиселъ на 10^q и, слѣдовательно, приведя рядъ (1′) къ ряду (1), мы увидимъ, что получимъ то, что хотѣли получить, т.-е. увидимъ, что всѣ числа ряда (1), начиная съ нѣкотораго, имѣютъ общими цѣлую часть и первые q десятичныхъ знаковъ.

Положимъ, что первое изъ этихъ чиселъ есть x_n. Число это удовлетворитъ неравенству:

$$x_{n+p} - x_n < \frac{1}{10^q}.$$

Видимъ, слѣдовательно, что числа ряда (1) удовлетворяютъ достаточному условію существованія предѣла.

Этотъ предѣлъ, будетъ ли онъ раціоналенъ, или ирраціоналенъ, представляетъ, на основаніи предъидущаго (**168**), число, большее каждаго изъ чиселъ ряда (1).

Вслѣдствіе этого каждое изъ чиселъ ряда можетъ быть названо *приближеннымъ значеніемъ предѣла съ недостаткомъ*, при чемъ цѣлая часть того числа, начиная съ котораго всѣ числа имѣютъ общую цѣлую часть, называется *приближеннымъ значеніемъ предѣла, съ недостаткомъ, съ точностью до единицы*; и вообще, десятичная дробь, образованная цѣлою частью и q первыми десятичными знаками того числа, начиная съ котораго всѣ числа имѣютъ одинаковыми цѣлую часть и эти первыхъ q десятичныхъ знаковъ, можетъ быть названа *приближеннымъ значеніемъ предѣла, съ недостаткомъ, съ точностью до* $\frac{1}{10^q}$.

И въ самомъ дѣлѣ, представимъ, для большей ясности, эту десятичную дробь такимъ образомъ:

$$C,\ c_1c_2c_3\ .\ .\ .\ c_q,$$

гдѣ C есть цѣлая часть, $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_q$ суть десятичные знаки. Очевидно, что каждое изъ чиселъ ряда (1) будетъ менѣе числа:

$$C,\ c_1c_2c_3,\ .\ .\ .\ (c_q+1),$$

въ которомъ послѣдній десятичный знакъ есть (c_q+1).

Нашъ предѣлъ L представляетъ, на основаніи предъидущаго, число, меньшее этого числа, такъ что мы можемъ писать:

$$C,\ c_1c_2c_3\ .\ .\ .\ .\ c_q < L < C,\ c_1c_2c_3\ .\ .\ .\ .\ (c_q+1),$$

т.-е. нашъ предѣлъ заключенъ между двумя раціональными числами, разность между которыми равна $\frac{1}{10^q}$.

Разсужденіями, подобными предъидущимъ, можно доказать слѣдующую теорему.

Теорема II. *Если перемѣнное раціональное число X принимаетъ неограниченный рядъ положительныхъ значеній:*

(2) $$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,\ y_{n+p},\ \ldots,$$

убывающихъ и остающихся болѣе опредѣленнаго числа L, то это перемѣнное число стремится къ предѣлу.

Предѣлъ этотъ, будетъ ли онъ раціональный или ирраціональный, представляетъ, на основаніи предъидущаго (**168**), число, *меньшее* каждаго изъ чиселъ ряда (2).

Каждое изъ чиселъ этого ряда можетъ быть названо *приближеннымъ значеніемъ предѣла съ избыткомъ,* при чемъ цѣлая часть того числа, начиная съ котораго всѣ числа имѣютъ общую цѣлую часть, увеличенная на единицу, можетъ быть названа *приближеннымъ значеніемъ предѣла, съ избыткомъ, съ точностью до единицы*; и вообще, десятичная дробь, образованная цѣлою частью и q первыми десятичными знаками того числа, начиная съ котораго всѣ числа имѣютъ одинаковыми цѣлую часть и эти q первыхъ десятичныхъ знаковъ, въ которой только послѣдній десятичный знакъ увеличенъ на единицу, можетъ быть названа *приближеннымъ значеніемъ предѣла, съ избыткомъ, съ точностью до* $\frac{1}{10^q}$, и т. д.

Примѣръ. Данъ рядъ убывающихъ значеній:

$$0,7;\ 0,67;\ 0,667;\ 0,6667;\ 0,66667;\ \ldots$$

Всѣ числа, начиная со втораго числа, имѣютъ общую цифру десятыхъ, равную 6; отсюда заключаетъ, что 0,7 представляетъ значеніе предѣла съ избыткомъ съ точностью до $\frac{1}{10}$; всѣ числа, начиная съ четвертаго, имѣютъ общими первыхъ три десятичныхъ знака; отсюда заключаемъ, что 0,667 представляетъ значеніе предѣла съ избыткомъ съ точностью до $\frac{1}{1000}$, и т. д.

§ II. Понятіе о корнѣ r-овой степени числа. Ирраціональные корни.

172. Корень r-овой степени числа. Если данное положительное число A представляетъ изъ себя r-овую степень раціональнаго положительнаго числа B, то число B называется *корнемъ r-овой степени числа* A и обозначается такимъ образомъ:

$$B = \sqrt[r]{A}.$$

Число r называется *показателемъ* корня.

Легко показать, что число A не можетъ имѣть болѣе одного положительнаго корня. И въ самомъ дѣлѣ, если

$$A = B^r,\ A = C^r,$$

гдѣ B и C суть или оба положительныя числа, или оба отрицательныя, то $B^r - C^r = 0$, или (83):

$$(B-C)(B^{r-1}+B^{r-2}C+\ldots+BC^{r-2}+C^{r-1})=0;$$

второй сомножитель лѣвой части представляетъ изъ себя или сумму чиселъ положительныхъ, или сумму чиселъ отрицательныхъ, слѣдовательно не равенъ нулю (за исключеніемъ случая $B=C=0$, когда теорема повѣряется), а потому первый сомножитель $B-C$ долженъ быть равенъ нулю, т.-е. $B=C$.

Примѣры: $\sqrt[4]{16}=2$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}=-\frac{1}{2}$.

173. Теорема. *Для того, чтобы цѣлое число представляло r-овую степень другаго цѣлаго числа, необходимо и достаточно, чтобы показатели его простыхъ множителей дѣлились на r.*

1°. Условіе это необходимо. И въ самомъ дѣлѣ, образуя r-овую степень цѣлаго числа, разложеннаго на простыхъ множителей, мы умножаемъ его показателей на r, вслѣдствіе чего они дѣлаются кратными r.

2°. Условіе это достаточно. И въ самомъ дѣлѣ, если оно выполнено, то, раздѣливъ на r показателей даннаго числа, образуемъ новое число, которое, будучи возвышено въ r-овую степень, воспроизведетъ данное число.

Замѣчаніе. Цѣлое число не можетъ быть r-овою степенью, если, дѣлясь на простаго дѣлителя p, не дѣлится на p^r. И въ самомъ дѣлѣ, разложивъ число на простыхъ сомножителей, увидимъ, что оно содержитъ простаго множителя p съ показателемъ, меньшимъ p.

Напримѣръ, пятая степень не можетъ дѣлиться на 2, не дѣлясь на 32; не дѣлится на 3, не дѣлясь на 243.

174. Теорема. *Никакое цѣлое число не есть степень дроби.* Дана дробь $\frac{a}{b}$, приведенная къ простѣйшей формѣ. Ея r-овая степень равна $\frac{a^r}{b^r}$; такъ какъ a и b суть числа взаимно простыя, то a^r и b^r суть также взаимно простыя числа, а потому дробь $\frac{a^r}{b^r}$ не есть цѣлое число.

175. Корень r-овой степени съ точностью до единицы. Разсмотримъ какое ни есть положительное раціональное число A, представляющее или же не представляющее r-овой степени раціональнаго числа.

Корнями r*-овой степени положительнаго числа* A *съ точностью до единицы называются два цѣлыхъ положительныхъ числа* x *и* $x+1$*, удовлетворяющихъ неравенствамъ:*

$$x^r \leqslant A,\ (x+1)^r > A, \tag{1}$$

при чемъ числа x и $x+1$ называются соотвѣтственно *корнемъ съ недостаткомъ и корнемъ съ избыткомъ.* Отсюда вытекаетъ, что x^r есть наибольшая цѣлая r-овая степень, содержащаяся въ числѣ A. Слѣдовательно, *корень* r*-овой степени числа* A*, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, есть цѣлое число, равное корню* r*-овой степени изъ наибольшей цѣлой* r*-овой степени, заключ*[е]*нной въ числѣ* A.

Число x обозначается такимъ образомъ:

$$x = E\sqrt[r]{A}.$$

176. Теорема. *Корень* r*-овой степени, съ точностью до единицы, съ недостаткомъ, нецѣлаго числа равенъ корню* r*-овой степени, съ точностью до единицы, изъ его цѣлой части.*

Положимъ, что $A = N + \alpha$, гдѣ N есть число цѣлое, α есть положительное число, меньшее единицы. Корни числа A, съ точностью до единицы, удовлетворяютъ слѣдующимъ неравенствамъ:

$$x^r \leqslant N + \alpha < (x+1)^r.$$

Первое изъ этихъ неравенствъ говоритъ, что $(N+\alpha) - x^r = (N - x^r) + \alpha$ есть положительное число; слѣдовательно, цѣлое число $(N - x^r)$ должно быть не менѣе нуля, и предъидущія неравенства приводятся къ слѣдующимъ:

$$x^r \leqslant N < (x+1)^r,$$

доказывающимъ теорему.

Примѣры: 1°. $E\sqrt[4]{16} = 2$; и въ самомъ дѣлѣ, $2^4 = 16 < 3^4$.

$$2^{\circ}.\quad E\sqrt[5]{\frac{2423}{2}} = E\sqrt[5]{1211\frac{1}{2}} = E\sqrt[5]{1211} = 4;$$

и, дѣйствительно, $4^5 < 1211 < 5^5$.

177. Вернемся къ неравенствамъ:

$$x^r \leqslant A,\ (x+1)^r > A. \tag{1}$$

Они говорятъ:

1°. Если число A положительное и r четное, то вмѣстѣ съ неравенствами (1) существуютъ и такія неравенства:

$$(2) \qquad (-x)^r \leqslant A, \ \ [-(x+1)]^r > A.$$

Мы будемъ называть цѣлыя числа: $-x$, $-(x+1)$ отрицательными корнями съ точностью до единицы.

2°. Если число A есть число положительное и r нечетное, то неравенства (2) совмѣстно не существуютъ, и, слѣдовательно, число A не имѣетъ отрицательныхъ корней, съ точностью до единицы.

3°. Если число A есть число отрицательное и r четное, то не существуютъ и неравенства (1) совмѣстно, и неравенства (2) совмѣстно, и, слѣдовательно, ни положительныхъ, ни отрицательныхъ корней, съ точностью до единицы, не существуетъ.

4°. Если число A отрицательное и r нечетное, то существуютъ неравенства:

$$(-x)^r \geqslant A, \ \ [-(x+1)]^r < A,$$

и числа $(-x)$ и $-(x+1)$ называются отрицательными корнями числа A съ точностью до единицы.

Примѣръ. $E\sqrt[3]{-9} = -2$, ибо $(-2)^3 > -9 > (-3)^3$.

178. Корень $r^{\text{-овой}}$ степени числа съ данною точностью. *Корнями $r^{\text{-овой}}$ степени положительнаго числа A, съ данною точностью до $\frac{1}{s}$, называются двѣ дроби $\frac{x}{s}$ и $\frac{x+1}{s}$, имѣющія общимъ знаменателемъ данное число s, числители которыхъ суть цѣлыя числа: x и $x+1$, отличающіяся на единицу и удовлетворяющія неравенствамъ:*

$$\left(\frac{x}{s}\right)^r \leqslant A < \left(\frac{x+1}{s}\right)^r.$$

Дроби $\frac{x}{s}$ и $\frac{x+1}{s}$ называются соотвѣтственно *корнемъ съ недостаткомъ и корнемъ съ избыткомъ*, при чемъ знаменатель s называется *знаменателемъ точности.*

Для опредѣленія числителей x и $x+1$ обратимся къ предъидущимъ неравенствамъ; они даютъ:

$$x^r \leqslant As^r < (x+1)^r$$

и показываютъ, что цѣлыя числа: x и $(x+1)$ суть корни $r^{\text{овой}}$ степени, съ точностью до единицы, числа As^r (**175**), такъ что

$$x = E\sqrt[r]{As^r},$$

и искомыя дроби будутъ таковы:

$$\frac{x}{s} = \frac{E\sqrt[r]{As^r}}{s},\ \frac{x+1}{s} = \frac{E\sqrt[r]{As^r}+1}{s}.$$

Итакъ, *корни $r^{\text{овой}}$ степени числа A, съ точностью до $\frac{1}{s}$, суть корни $r^{\text{овой}}$ степени числа As^r съ точностью до единицы, раздѣленные на s.*

Примѣры. 1°. Корень четвертой степени числа $\frac{127}{3}$, съ точностью до $\frac{1}{5}$, съ недостаткомъ, равенъ:

$$\frac{E\sqrt[4]{\frac{127}{3}\cdot 5^4}}{5} = \frac{E\sqrt[4]{26458\,\frac{1}{3}}}{5} = \frac{E\sqrt[4]{26458}}{5} = \frac{12}{5};$$

и дѣйствительно,

$$\left(\frac{12}{5}\right)^4 < \frac{127}{3} < \left(\frac{13}{5}\right)^4.$$

2°. Корень четвертой степени числа $\frac{27}{2}$, съ точностью до $\frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$, съ недостаткомъ, равенъ:

$$\frac{E\sqrt[4]{\frac{27}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^4}}{\frac{5}{3}} = \frac{E\sqrt[4]{\frac{16875}{162}}}{\frac{5}{3}} = \frac{E\sqrt[4]{162\,\frac{27}{162}}}{\frac{5}{3}} = \frac{E\sqrt[4]{162}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5},$$

корень съ избыткомъ равняется $\frac{4}{\frac{5}{3}} = \frac{12}{5}$. И въ самомъ дѣлѣ:

$$\left(\frac{9}{5}\right)^4 < \frac{27}{2} < \left(\frac{12}{5}\right)^4.$$

179. Корень $r^{\text{овой}}$ степени числа A. Если положительное число A не представляетъ $r^{\text{овой}}$ степени раціональнаго числа, то оно не имѣетъ раціональнаго корня $r^{\text{-овой}}$ степени, т.-е. не существуетъ раціональнаго числа, которое, будучи возвышено въ $r^{\text{-овую}}$ степень, дало бы число A.

Говорятъ, что оно имѣетъ тогда *ирраціональный* корень $r^{\text{-овой}}$ степени. Постараемся составить *представленіе* объ этомъ корнѣ.

Разсмотримъ раціональное число:

$$X = \frac{E\sqrt[r]{As^r}}{s}, \tag{1}$$

названное нами (178) корнемъ $r^{\text{-овой}}$ степени числа A, съ точностью до $\frac{1}{s}$, съ недостаткомъ. Дадимъ знаменателю s точности неограниченный рядъ *неопредѣленно* возрастающихъ, по опредѣленному закону, значеній:

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ldots,\ s_n,\ \ldots\ldots,$$

и опредѣлимъ соотвѣтствующія значенія:

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots\ldots,\ t_n,\ \ldots\ldots,$$

числителя выраженія (1); тогда получимъ рядъ чиселъ:

$$x_1 = \frac{t_1}{s_1},\quad x_2 = \frac{t_2}{s_2},\quad x_3 = \frac{t_3}{s_3},\quad \ldots\ldots,\quad x_n = \frac{t_n}{s_n},\quad \ldots \tag{2}$$

Назовемъ корнемъ $r^{\text{-овой}}$ степени положительнаго числа A предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное число $\frac{t_n}{s_n}$ при неопредѣленномъ возрастаніи n; будетъ означать это число знакомъ: $\sqrt[r]{A}$. Итакъ

$$\sqrt[r]{A} = lim\left(\frac{t_n}{s_n}\right)_{n=\infty}$$

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, нужно показать, что *этотъ предѣлъ существуетъ и не зависитъ отъ того закона, по которому знаменатель s_n неопредѣленно возрастаетъ.*

Докажемъ сперва, что число $x_n = \frac{t_n}{s_n}$ стремится къ предѣлу, при неопредѣленномъ возрастаніи n; для этого достаточно показать, что разность:

$$x_{n+p} - x_n = \frac{t_{n+p}}{s_{n+p}} - \frac{t_n}{s_n},$$

съ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю. Покажемъ это. Число $\frac{t_n}{s_n}$ удовлетворяетъ слѣдующимъ неравенствамъ (**178**):

$$\left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r < A < \left(\frac{t_n+1}{s_n}\right)^r.$$

Изъ этихъ неравенствъ вытекаетъ, что

$$0 < A - \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r < \left(\frac{t_n+1}{s_n}\right)^r - \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r.$$

Разложивъ правую часть этого неравенства на два сомножителя, представимъ ее въ видѣ (**83**):

$$\frac{1}{s_n}\,.\,\Omega\,,$$

гдѣ Ω есть перемѣнная сумма положительныхъ слагаемыхъ, число которыхъ равно данному числу r и изъ которыхъ каждое не превышаетъ нѣкотораго опредѣленнаго числа. Назвавъ буквою M наибольшее значеніе этой суммы, изъ предъидущихъ неравенствъ получимъ:

$$Mod\left[A - \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r\right] < \frac{M}{s_n}.$$

Но s_n неопредѣленно растетъ, слѣдовательно A есть предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное раціональное число $\left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r$, когда n неопредѣленно растетъ, т.-е., другими словами, A есть предѣлъ ряда чиселъ:

$$(3)\quad y_1 = \left(\frac{t_1}{s_1}\right)^r,\ y_2 = \left(\frac{t_2}{s_2}\right)^r,\ \ldots,\ y_n = \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r,\ \ldots,\ y_{n+p} = \left(\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}}\right)^r,\ \ldots$$

Мы же знаемъ (**161**), что если числа ряда (3) стремятся къ предѣлу, то разность:

$$y_{n+p} - y_n = \left(\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}}\right)^r - \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r,$$

съ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю.

Разлагая эту разность на два сомножителя (**83**), получимъ:

$$y_{n+p} - y_n = \left(\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}} - \frac{t_n}{s_n}\right)K = (x_{n+p} - x_n)K,$$

гдѣ K есть перемѣнная сумма r положительныхъ слагаемыхъ, большая нуля. Назвавъ наименьшее значеніе этой суммы буквою H, найдемъ

$$Mod(x_{n-p} - x_n) < \frac{Mod(y_{n+p} - y_n)}{H}.$$

Принимая теперь во вниманіе, что числитель: $Mod(y_{n-p} - y_n)$ стремится къ нулю, при чемъ знаменатель не есть нуль, заключаемъ, что

$$Mod(x_{n+p} - x_n),$$

съ возрастаніемъ n и при всякомъ p, стремится къ нулю. Итакъ, мы доказали, что перемѣнное число X стремится къ предѣлу.

180. Покажемъ, что этотъ предѣлъ не зависитъ отъ того закона, по которому число s неопредѣленно возрастаетъ.

И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ вмѣсто ряда (2), рядъ:

$$x_1' = \frac{\tau_1}{\sigma_1},\ x_2' = \frac{\tau_2}{\sigma_2},\ \ldots,\ x'_n = \frac{\tau_n}{\sigma_n},\ \ldots,\ x'_{n+p} = \frac{\tau_{n+p}}{\sigma_{n+p}},\ \ldots \qquad (2')$$

Покажемъ, подобно предъидущему, что перемѣнное число $\left(\frac{\tau_n}{\sigma_n}\right)^r$, съ возрастаніемъ n, стремится къ A; слѣдовательно, модуль разности:

$$\Delta = \left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r - \left(\frac{\tau_n}{\sigma_n}\right)^r$$

стремится къ нулю (**168**). Разлагая эту разность на сомножителей (**83**), получимъ:

$$\Delta = \left(\frac{t_n}{s_n} - \frac{\tau_n}{\sigma_n}\right) . \, \omega,$$

гдѣ ω есть перемѣнная сумма r положительныхъ слагаемыхъ, большая нуля. Назвавъ буквою K наименьшее значеніе этой суммы, которое неравно нулю, получимъ:

$$Mod\left(\frac{t_n}{s_n} - \frac{\tau_n}{\sigma_n}\right) < \frac{Mod\,\Delta}{K}.$$

Здѣсь числитель Δ стремится къ нулю, при чемъ знаменатель K не равенъ нулю; слѣдовательно, модуль разности:

$$\frac{t_n}{s_n} - \frac{\tau_n}{\sigma_n},$$

съ возрастаніемъ n, стремится къ нулю, т.-е. числа рядовъ (2) и (2') стремятся къ одному и тому же предѣлу (**170**).

181. Легко показать, что перемѣнное число

$$Y=\frac{1+E\sqrt[r]{As^r}}{s},$$

представляющее *корень* r*-овой степени числа* A, *съ точностью до* $\frac{1}{s}$, *съ избыткомъ*, стремится къ тому же предѣлу, къ какому стремится и X, т.-е. стремится къ $\sqrt[r]{A}$.

И въ самомъ дѣлѣ, модуль перемѣнной разности:

$$X-Y=\frac{1}{s}$$

стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи s, слѣдовательно перемѣнныя числа X и Y стремятся къ одному и тому же предѣлу (**170**).

Итакъ, ряды:

$$\frac{t_1}{s_1},\ \frac{t_2}{s_2},\ \frac{t_3}{s_3},\ \ldots,\ \frac{t_n}{s_n},\ \ldots \tag{2}$$

$$\frac{t_1+1}{s_1},\ \frac{t_2+1}{s_2},\ \frac{t_3+1}{s_3},\ \ldots,\ \frac{t_n+1}{s_n},\ \ldots \tag{4}$$

стремятся къ одному и тому же предѣлу.

182. Ирраціональное число $\sqrt[r]{A}$ представляетъ изъ себя число, большее каждаго изъ чиселъ ряда (2) и меньшее каждаго изъ чиселъ ряда (4).

И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два какихъ-нибудь опредѣленныхъ соотвѣтственныхъ числа $\frac{t_k}{s_k}$ и $\frac{t_k+1}{s_k}$ въ рядахъ (2) и (4), которыя могутъ быть разсматриваемы, какъ предѣлы самихъ себя. Такъ какъ

$$\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^r < A < \left(\frac{t_k+1}{s_k}\right)^r,$$

то разности:

$$\Delta=\left(\frac{t_n}{s_n}\right)^r-\left(\frac{t_k}{s_k}\right)^r \text{ и } \Delta_1=\left(\frac{t_k+1}{s_k}\right)^r-\left(\frac{t_n+1}{s_n}\right)^r,$$

начиная съ нѣкотораго n, становятся и продолжаютъ быть болѣе нѣкотораго положительнаго числа (**169**).

Разности эти могутъ быть представлены такимъ образомъ (83):

$$\Delta = \left(\frac{t_n}{s_n} - \frac{t_k}{s_k}\right)\Omega,\quad \Delta_1 = \left(\frac{t_k+1}{s_k} - \frac{t_n+1}{s_n}\right)\omega,$$

гдѣ Ω и ω суть суммы r положительныхъ слагаемыхъ. Равенства эти даютъ:

$$\frac{t_n}{s_n} - \frac{t_k}{s_k} = \frac{\Delta}{\Omega},\quad \frac{t_k+1}{s_k} - \frac{t_{n+1}}{s_n} = \frac{\Delta_1}{\omega}$$

и показываютъ, что разности, помѣщенныя въ лѣвыхъ частяхъ этихъ равенствъ, становятся и продолжаютъ быть болѣе нѣкотораго положительнаго числа; слѣдовательно,

$$\frac{t_k}{s_k} < \sqrt[r]{A} < \frac{t_k+1}{s_k}$$

при всякомъ k, ч. и т. д.

183. Изъ рядовъ, аналогичныхъ рядамъ (2) и (4), заслуживаютъ особаго вниманія ряды:

$$(b)\qquad \frac{t_1}{a^{\lambda_1}},\ \frac{t_2}{a^{\lambda_2}},\ \ldots,\ \frac{t_n}{a^{\lambda_n}},\ \ldots$$

$$(c)\qquad \frac{t_1+1}{a^{\lambda_1}},\ \frac{t_2+1}{a^{\lambda_2}},\ \ldots,\ \frac{t_n+1}{a^{\lambda_n}},\ \ldots,$$

гдѣ a есть цѣлое положительное число, а показатели:

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$$

суть цѣлыя, положительныя числа, безпредѣльно возрастающія.

Ряды эти замѣчательны тѣмъ, что первый изъ нихъ есть рядъ возрастающій, второй же рядъ есть рядъ убывающій. И въ самомъ дѣлѣ, самый способъ образованія чиселъ этихъ рядовъ показываетъ, что каждое число втораго ряда болѣе каждаго изъ чиселъ перваго ряда, а потому мы можемъ писать:

$$\frac{t_2+1}{a^{\lambda_2}} > \frac{t_1}{a^{\lambda_1}},\ \text{откуда}\ t_2+1 > t_1\,.\,a^{\lambda_2-\lambda_1},$$

или

$$t_2 - t_1 a^{\lambda_2-\lambda_1} > -\,1.$$

Такъ какъ число, помѣщенное въ лѣвой части неравенства, есть число цѣлое, то неравенство это требуетъ, чтобы это число было равно 0, или 1, или 2, и т. д., т.-е. требуетъ, чтобы

$$t_2 \geqslant t_1 a^{\lambda_2 - \lambda_1}, \text{ откуда } \frac{t_2}{a^{\lambda_2}} \geqslant \frac{t_1}{a^{\lambda_1}}.$$

Неравенство это говоритъ, что рядъ (b) есть рядъ возрастающій.

Далѣе, мы можемъ писать такое неравенство:

$$\frac{t_1+1}{a^{\lambda_1}} > \frac{t_2}{a^{\lambda_2}}, \text{ откуда } a^{\lambda_2-\lambda_1}\,(t_1+1) > t_2;$$

неравенство это даетъ:

$$a^{\lambda_2-\lambda_1}(t_1+1) - t_2 > 0.$$

Такъ какъ число, помѣщенное въ лѣвой части неравенства, есть число цѣлое, то неравенство это требуетъ, чтобы это число было равно или 1, или 2, или 3 и т. д., т.-е. требуетъ, чтобы оно было не менѣе 1. Итакъ,

$$a^{\lambda_2-\lambda_1}(t_1+1) - t_2 \geqslant 1, \text{ откуда } \frac{t_1+1}{a^{\lambda_1}} \geqslant \frac{t_2+1}{a^{\lambda_2}},$$

т.-е. рядъ (c) есть рядъ убывающій.

Замѣтимъ однако, что хотя числа ряда (b) идутъ, возрастая, но они остаются менѣе нѣкотораго числа; напримѣръ, менѣе A, когда $A>1$, и менѣе 1, когда $A<1$. Подобнымъ же образомъ, хотя числа ряда (c) идутъ, убывая, но они остаются болѣе нѣкотораго числа; напримѣръ, болѣе 1, когда $A>1$, и болѣе A, когда $A<1$.

Если знаменатель s_n не имѣетъ формы a^{λ_n}, то ряды (b) и (c) могутъ быть то возрастающіе, то убывающіе.

Примѣры.

1°. Положимъ, что $A=2$; его квадратные корни съ точностями: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, . . . образуютъ ряды:

1,4; 1,41; 1,414; . . ,
1,5; 1,42; 1,415; . . .

изъ которыхъ верхній есть рядъ возрастающій, нижній—убывающій.

2°. Возьмемъ то же число 2. Его квадратные корни съ точностями: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ . . . будутъ:

$$\frac{2}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{6},\ldots$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{6},\ldots$$

Оба ряда суть ряды то возрастающіе, то убывающіе.

184. Разсматривая перемѣнное число:

$$x_n=\frac{E\sqrt[r]{As_n^r}}{s_n}=\frac{t_n}{s_n},$$

мы предполагали, что число A есть число положительное, что число s неопредѣленно возрастаетъ, принимая значенія положительныя, и что $E\sqrt[r]{As_n^r}$ есть положительное число.

Не будемъ дѣлать этихъ ограниченій и посмотримъ, къ какому предѣлу будетъ стремиться это число, если только оно будетъ стремиться къ предѣлу.

Разсмотримъ здѣсь нѣсколько случаевъ:

Случай I. *r есть число четное, A положительное.*

Въ этомъ случаѣ число As_n^r, помѣщенное подъ знакомъ корня въ числителѣ, представляетъ изъ себя всегда число положительное, будетъ ли s измѣняться, принимая значенія положительныя или отрицательныя.

Числитель: $E\sqrt[r]{As_n^r}$ представляетъ одинаково хорошо и число положительное, и число отрицательное, ибо если цѣлое положительное число x удовлетворяетъ неравенствамъ:

$$x^r < As^r < (x+1)^r,$$

то и число $(-x)$ удовлетворяетъ тѣмъ же неравенствамъ:

$$(-x)^r < As^r < (-x-1)^r.$$

Отсюда слѣдуетъ, что всякому ряду положительныхъ значеній перемѣннаго числа X:

$$(h)\qquad \frac{t_1}{s_1},\ \frac{t_2}{s_2},\ \ldots,\ \frac{t_n}{s_n},\ \ldots,\ \frac{t_{n+p}}{s_{n+p}},\ \ldots$$

соотвѣтствуетъ рядъ отрицательныхъ значеній того же числа:

$$(i)\qquad -\frac{t_1}{s_1},\ \ldots,\ -\frac{t_2}{s_2},\ \ldots,\ -\frac{t_n}{s_n},\ \ldots,\ -\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}},\ \ldots,$$

и обратно, при чемъ число $\left(-\frac{t_n}{s_n}\right)$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ предѣлу, ибо

$$Mod\left[-\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}}-\left(-\frac{t_n}{s_n}\right)\right]=Mod\left(\frac{t_{n+p}}{s_{n+p}}-\frac{t_n}{s_n}\right).$$

Такъ какъ

$$Mod\left(-\frac{t_n}{s_n}\right)=Mod\left(\frac{t_n}{s_n}\right),$$

то предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное число $\left(-\frac{t_n}{s_n}\right)$ можетъ быть изображенъ символомъ $-\sqrt[r]{A}$.

Итакъ, перемѣнное число $\frac{E\sqrt[r]{As_n{}^r}}{s_n}$, при стремленіи s_n къ безконечности черезъ положительныя значенія и при стремленіи s_n къ безконечности черезъ отрицательныя значенія по какимъ ни есть законамъ, стремится соотвѣтственно къ двумъ предѣламъ: $+\sqrt[r]{A}$ и $-\sqrt[r]{A}$.

Означая тотъ и другой предѣлы безразлично черезъ $\left(\sqrt[r]{A}\right)$, получимъ:

$$\left(\sqrt[r]{A}\right)=\pm\sqrt[r]{A}.$$

Случай 2. *r есть число четное, A отрицательное.* Въ этомъ случаѣ числитель $E\sqrt[r]{As_n{}^r}$ теряетъ смыслъ и при s_n положительномъ, и при s_n отрицательномъ, ибо тогда подкоренное число $As_n{}^r$ есть число отрицательное, и, слѣдовательно, не существуетъ никакого числа x, ни положительнаго, ни отрицательнаго, которое удовлетворяло бы неравенству:

$$x^r < As_n{}^r.$$

Результатъ этотъ выражаютъ, говоря, что корень четной степени изъ отрицательнаго числа не существуетъ.

* Впослѣдствіи, когда мы расширимъ наши представленія о числѣ, увидимъ, что корень четной степени изъ отрицательнаго числа выражается особаго рода числами, называемыми *комплексными.*

Случай 3. *r есть число нечетное, A положительное.*

Если s_n есть число положительное, то подкоренное число As_n^r будетъ положительнымъ, и $E\sqrt[r]{As_n^r}$ представляетъ только число положительное, ибо не существуетъ, при нечетномъ r, такого отрицательнаго числа $(-x)$, которое удовлетворяло бы совмѣстно обоимъ неравенствамъ:

$$(-x)^r < As_n^r < (-x-1)^r.$$

Если s есть число отрицательное, то подкоренное число As_n^r будетъ отрицательнымъ, и $E\sqrt[r]{As_n^r}$ представляетъ только число отрицательное, ибо не существуетъ такого положительнаго числа, которое удовлетворяло бы неравенствамъ:

$$x^r < As_n^r < (x+1)^r.$$

Итакъ, перемѣнное число x_n, оставаясь постоянно положительнымъ, стремится ли s_n къ безконечности черезъ значенія положительныя, или значенія отрицательныя, имѣетъ вполнѣ опредѣленный положительный предѣлъ, названный нами $\sqrt[r]{A}$

Результатъ этотъ выражаютъ, говоря, что $\sqrt[r]{A}$ *имѣетъ одно вполнѣ опредѣленное положительное значеніе.*

* Впослѣдствіи, когда наши представленія о числѣ расширятся, мы увидимъ, что $\sqrt[r]{A}$, кромѣ опредѣленнаго положительнаго значенія, имѣетъ еще $(r-1)$ значеній, которыя выражаются комплексными числами.

Случай 4. *r есть число нечетное, A отрицательное.*

Если s_n есть число положительное, то As_n^r есть число отрицательное, и $E\sqrt[r]{As_n^r}$ представляетъ только число отрицательное, ибо не существуетъ такого положительнаго x, которое удовлетворяло бы обоимъ неравенствамъ:

$$x^r < As_n < (x+1)^r.$$

Если же s_n есть число отрицательное, то As_n^r есть, при нечетномъ r, число положительное, и $E\sqrt[r]{As_n^r}$ представляетъ только число положительное, ибо не существуетъ, при нечетномъ r, такого отрицательнаго числа $(-x)$, которое удовлетворяло бы обоимъ неравенствамъ:

$$(-x)^r < As_n^r < (-x-1)^r.$$

Итакъ, перемѣнное число x_n, оставаясь постоянно отрицательнымъ, стремится ли s_n къ безконечности черезъ значенія положительныя или черезъ значенія отрицательныя, имѣетъ вполнѣ опредѣленный отрицательный предѣлъ, названный нами $\sqrt[r]{A}$.

Принявъ во вниманіе, что перемѣнное число

$$x_n' = \frac{E\sqrt[r]{-A \cdot s_n^r}}{s_n},$$

гдѣ $(-A)$ есть число положительное, стремится къ опредѣленному положительному предѣлу $\sqrt[r]{-A}$, и замѣчая, что перемѣнныя числа x_n и x'_n отличаются только знаками, такъ что модули ихъ предѣловъ равны, заключаемъ, что

$$\lim x_n = \sqrt[r]{A} = -\sqrt[r]{-A}.$$

Напримѣръ, $\sqrt[5]{-3} = -\sqrt[5]{3}.$

Результатъ этомъ выражаютъ, говоря, что $\sqrt[r]{A}$ имѣетъ вполнѣ опредѣленное отрицательное значеніе.

§ III. Дѣйствія надъ числами, опредѣленными какъ предѣлы.

Перейдемъ теперь къ дѣйствіямъ надъ числами ирраціональными, приводя эти дѣйствія къ соотвѣтственнымъ дѣйствіямъ надъ числами раціональными.

185. Сложеніе. *Суммою* двухъ чиселъ L и M, опредѣленныхъ, соотвѣтственно, какъ предѣлы двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ:

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,\ a_{n+p},\ \ldots$

(2) $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots,\ b_{n-p},\ \ldots,$

называется предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

(3) $a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_n+b_n,\ \ldots,\ a_{n+p}+b_{n+p},\ \ldots,$

изъ которыхъ каждое равно *суммѣ* соотвѣтствующихъ значеній рядовъ (1) и (2).

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, достаточно показать, что число $(a_n + b_n)$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ *опредѣленному* предѣлу.

Что оно стремится къ предѣлу, это видно изъ того, что модуль разности:

$$\Delta = (a_{n+p} + b_{n+p}) - (a_n + b_n) = (a_{n+p} - a_n) + (b_{n+p} - b_n),$$

при неопредѣленномъ возрастаніи n и при всякомъ p, стремится къ нулю, ибо, по условію, имѣемъ:

$$Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{2},\ Mod(b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, а потому

$$Mod\,\Delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},\ \text{или}\ Mod\,\Delta < \varepsilon.$$

Это неравенство и показываетъ, то числа ряда (3) стремятся къ предѣлу (**159**). Опредѣленность же предѣла вытекаетъ изъ слѣдствія (**170**).

Итакъ, мы можемъ писать:

$$L + M = lim(a_n + b_n),\ \text{или}\ lim(a_n) + lim(b_n) = lim(a_n + b_n).$$

Замѣчаніе I. Если числа L и M не суть нули, т.-е. если a_n и b_n не стремятся къ нулю, а предѣлъ перемѣннаго числа $a_n + b_n$ есть нуль, то числа одного изъ рядовъ (1) и (2) становятся и продолжаютъ быть положительными, а числа другаго ряда становятся и продолжаютъ быть отрицательными (**165**), ибо, въ противоположномъ случаѣ, число $(a_n + b_n)$ не стремилось бы къ нулю; отсюда слѣдуетъ, что одно изъ чиселъ, напр. L, есть число положительное, а другое отрицательное. Такъ какъ число:

$$a_n + b_n = a_n - (-b_n) = a_n - Mod(b_n),$$

по условію, стремится къ нулю, то a_n и $Mod(b_n)$ стремятся къ одному и тому же предѣлу (**170**), и именно къ L. Но предѣлъ $Mod(b_n)$ есть $Mod(M)$ (**167**), слѣдовательно,

$$Mod\,M = L = Mod\,L.$$

Итакъ, *если два числа L и M, не равныя нулю, таковы, что ихъ сумма $L+M$ равна нулю, то одно изъ этихъ чиселъ есть число положительное, а другое отрицательное, при чемъ модули этихъ чиселъ равны между собою.*

Замѣчаніе 2. Если числа L и M суть числа раціональныя, такъ что понятіе о суммѣ $L+M$ есть ариѳметическое понятіе, то дѣйствительно $L+M$ есть предѣлъ ряда (3). И въ самомъ дѣлѣ:

$$\Delta_1=(L+M)-(a_n+b_n)=(L-a_n)+(M-b_n),$$

но

$$Mod(L-a_n)<\frac{\varepsilon}{2},\ Mod(M-b_n)<\frac{\varepsilon}{2};$$

слѣдовательно,

$$Mod\,\Delta_1<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{т.-е.}\ Mod\,\Delta_1<\varepsilon.$$

Отсюда мы видимъ, что то понятіе о суммѣ, которое мы ввели, не противорѣчитъ понятію объ ариѳметической суммѣ двухъ раціональныхъ чиселъ, и это послѣднее понятіе заключается въ нашемъ обобщенномъ, какъ частный случай.

186. Вычитаніе. *Разностью* чиселъ L и M называется предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$(4)\quad a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \ldots,\ a_n-b_n,\ \ldots,\ a_{n+p}-b_{n+p}\ldots,$$

изъ которыхъ каждое равно *разности* соотвѣтствующихъ значеній рядовъ (1) и (2).

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, достаточно показать, что число (a_n-b_n), при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ опредѣленному предѣлу, т.-е. достаточно показать **(162)**, что модуль разности:

$$\Delta=(a_{n+p}-b_{n+p})-(a_n-b_n)=(a_{n+p}-a_n)-(b_{n+p}-b_n),$$

съ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю.

Это имѣетъ мѣсто. И въ самомъ дѣлѣ, по условію имѣемъ:

$$Mod(a_{n+p}-a_n)<\frac{\varepsilon}{2},\ Mod(b_{n+p}-b_n)<\frac{\varepsilon}{2},$$

слѣдовательно,

$$Mod\,\Delta<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{т.-е.}\ Mod\,\Delta<\varepsilon.$$

Это неравенство и показываетъ, что числа ряда (4) стремятся къ предѣлу. Итакъ, мы можемъ писать:

$$L - M = lim(a_n - b_n), \text{ или } lim(a_n) - lim(b_n) = lim(a_n - b_n).$$

Замѣчаніе. Предъидущее понятіе о разности не противорѣчитъ ариѳметическому понятію о разности, при чемъ послѣднее заключается въ первомъ, какъ частный случай.

И въ самомъ дѣлѣ, если L и M суть числа раціональныя, то разность $L - M$ есть дѣйствительно предѣлъ чиселъ ряда (4), ибо

$$\Delta_1 = (L - M) - (a_n - b_n) = (L - a_n) - (M - b_n),$$

но

$$Mod(L - a_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad Mod(M - b_n) < \frac{\varepsilon}{2};$$

слѣдовательно,

$$Mod\,\Delta_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ т.-е. } Mod\,\Delta_1 < \varepsilon.$$

187. Умноженіе. *Произведеніемъ* двухъ чиселъ L и M называется предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

(5) $$a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ \ldots,\ a_n b_n,\ \ldots,\ a_{n+p} b_{n+p},\ \ldots,$$

изъ которыхъ каждое представляетъ *произведеніе* соотвѣтствующихъ значеній рядовъ (1) и (2).

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, достаточно показать, что число $a_n b_n$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ *опредѣленному* предѣлу, т.-е. достаточно показать (**162**), что модуль разности:

$$\Delta = (a_{n+p} b_{n+p} - a_n b_n) = a_{n+p}(b_{n+p} - b_n) + b_n(a_{n+p} - a_n),$$

съ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю.

Это имѣетъ мѣсто, ибо, назвавъ наибольшихъ модулей чиселъ рядовъ (1) и (2) соотвѣтственно буквами α и β, найдемъ, что

$$Mod[a_{n+p}(b_{n+p} - b_n)] < \alpha \,.\, Mod(b_{n+p} - b_n),$$
$$Mod[b_n(a_{n+p} - a_n)] < \beta \,.\, Mod(a_{n+p} - a_n),$$

но

$$Mod(b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \quad Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{2\beta},$$

при достаточно большомъ n и при всякомъ p; слѣдовательно и подавно:

$$Mod[a_{n+p}(b_{n-p}-b_n)] < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha},\ Mod[b_n(a_{n+p}-a_n)] < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta},$$

а потому

$$Mod\,\Delta < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{т.-е. } Mod\,\Delta < \varepsilon.$$

Это неравенство и показываетъ, что числа ряда (5) стремятся къ предѣлу. Итакъ, мы можемъ писать:

$$LM = lim(a_nb_n),\ \text{или}\ lim\,a_n \cdot lim\,b_n = lim\,(a_nb_n).$$

Замѣчаніе. То понятіе о произведеніи, которое мы дали, не противорѣчитъ ариѳметическому понятію о произведеніи, при чемъ послѣднее заключается въ первомъ, какъ частный случай.

И въ самомъ дѣлѣ, если L и M суть числа раціональныя, то произведеніе LM есть дѣйствительно предѣлъ чиселъ ряда (5), ибо

$$\Delta_1 = LM - a_nb_n = L(M-b_n)+b_n(L-a_n).$$

Назвавъ буквою β наибольшій изъ модулей чиселъ ряда (2), найдемъ, что

$$Mod[b_n(L-a_n)] < \beta \cdot Mod(L-a_n);$$

но, при достаточно большомъ n,

$$Mod(L-a_n) < \frac{\varepsilon}{2\beta},\ Mod(M-b_n) < \frac{\varepsilon}{2L},$$

слѣдовательно, и подавно:

$$Mod[L(M-b_n)] < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L},\ Mod[b_n(L-a_n)] < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta},$$

а потому

$$Mod\,\Delta_1 < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L}+\beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta},\ \text{или}\ Mod\,\Delta_1 < \varepsilon.$$

188. Возвышеніе въ степень. *Цѣлою и положительною степенью* числа L, опредѣленнаго какъ предѣлъ, называется предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

(6) $$a_1^m,\ a_2^m,\ \ldots,\ a_n^m,\ \ldots,\ a_{n+p}^m,\ \ldots$$

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, достаточно показать, что число a_n^m, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ *опредѣленному* предѣлу, т.-е. достаточно показать (**162**), что модуль разности:

$$\Delta = a_{n+p}^m - a_n^m = \left(a_{n+p}^{m-1} + a_{n+p}^{m-2} a_n + \ldots + a_{n+p} a_n^{m-2} + a_n^{m-1}\right)\left(a_{n+p} - a_n\right),$$

съ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю.

Это имѣетъ мѣсто. И въ самомъ дѣлѣ, назвавъ буквою α наибольшій изъ модулей чиселъ ряда (1), получимъ:

$$Mod\,\Delta < m\alpha^{m-1} \,.\, Mod(a_{n+p} - a),$$

но

$$Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{m\alpha^{m-1}},$$

при достаточно большомъ n и при всякомъ p; слѣдовательно, и подавно:

$$Mod\,\Delta < m\alpha^{m-1} \,.\, \frac{\varepsilon}{m\alpha^{m-1}}, \text{ т.-е. } Mod\,\Delta < \varepsilon.$$

Это неравенство и показываетъ, что числа ряда (6) стремятся къ предѣлу. Итакъ, мы можемъ писать:

$$(7) \qquad L^m = lim(A^m), \text{ или } (lim\, a_n)^m = lim(a_n^m).$$

Замѣчаніе. Предъидущее понятіе о степени не противорѣчитъ ариѳметическому понятію о ней, при чемъ послѣднее заключается въ первомъ, какъ частный случай. И въ самомъ дѣлѣ, если L есть число раціональное, то L^m есть дѣйствительно предѣлъ перемѣннаго числа a_n^m. И въ самомъ дѣлѣ:

$$\Delta_1 = L^m - a_n^m = \left(L^{m-1} + L^{m-2} a_n + \ldots + L a_n^{m-2} + a_n^{m-1}\right)\left(L - a_n\right).$$

Назвавъ наибольшаго изъ модулей чиселъ:

$$L^{m-1},\ L^{m-2},\ \ldots,\ L,$$

черезъ λ и обозначивъ буквою α наибольшій изъ модулей чиселъ ряда (1), получимъ:

$$Mod\Delta_1 < \lambda(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}) \,.\, Mod(L-a_n).$$

Но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(L-a_n) < \frac{\varepsilon}{\lambda(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})};$$

слѣдовательно, и подавно:

$$Mod\Delta_1 < \lambda(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-1}) \,.\, \frac{\varepsilon}{\lambda(1+\alpha+\ldots+\alpha^{m-1})},$$

т.-е. $Mod\Delta_1 < \varepsilon$.

189. *Примѣръ.* Возьмемъ разсмотрѣнное нами перемѣнное число:

$$A = \frac{E\sqrt[r]{Bs_n^r}}{s_n}.$$

Мы назвали (**179**) предѣлъ этого перемѣннаго числа корнемъ r-овой степени изъ числа B и обозначали его символомъ: $\sqrt[r]{B}$. Мы видѣли, что предѣлъ перемѣннаго числа A^r равенъ B.

Переписавъ теперь равенство (7) такимъ образомъ:

$$L^r = lim(A^r)$$

и подставивъ вмѣсто L число $\sqrt[r]{B}$, найдемъ:

$$(\sqrt[r]{B})^r = B,$$

т.-е. корень r-овой степени изъ числа B есть такое число, r-овая степень котораго равна B.

Докажемъ, что не существуетъ другаго числа, ни раціональнаго, ни ирраціональнаго, кромѣ $\sqrt[r]{B}$, r-*овая степень котораго равнялась бы* B.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, положительное или отрицательное число C, r-овая степень котораго равнялась бы B.

Положимъ, что C представляетъ предѣлъ положительнаго или отрицательнаго перемѣннаго числа X, принимающаго соотвѣтственно неограниченный рядъ положительныхъ или отрицательныхъ раціональныхъ значеній:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

По условію имѣемъ:

$$(a) \qquad lim(x_n{}^r)_{n=\infty} = B;$$

возьмемъ какой-нибудь рядъ корней съ недостаткомъ, положительныхъ или отрицательныхъ,

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

стремящихся къ $\sqrt[r]{B}$; имѣемъ:

$$(b) \qquad lim(a_n{}^r)_{n=\infty} = B.$$

Напишемъ тождество:

$$x_n{}^r - a_n{}^r = (x_n - a_n)(x_n{}^{r-1} + x_n{}^{r-2}a_n + \ldots + x_n a_n{}^{r-2} + a_n{}^{r-1}.$$

Оно дастъ:

$$(c) \qquad x_n - a_n = \frac{x_n^r - a_n^r}{x_n^{r-1} + x_n^{r-2}a_n + \ldots + x_n a_n^{r-2} + a_n^{r-1}}.$$

Можно предположить, что x_n и a_n совмѣстно не стремятся къ нулю, ибо тогда $(x_n - a_n)$ стремилось бы къ нулю, и мы имѣли бы, что

$$lim\, x_n = lim\, a_n, \text{ т.-е. } C = \sqrt[r]{B} = 0,$$

т.-е. имѣли бы то, что хотѣли имѣть.

Предположивъ, слѣдовательно, это, утверждаемъ, что перемѣнный знаменатель:

$$x_n^{r-1} + x_n^{r-2}a_n + \ldots + x_n a_n^{r-2} + a_n^{r-1}$$

выраженія (c), представляющій сумму положительныхъ или отрицательныхъ слагаемыхъ, изъ которыхъ не всѣ стремятся къ нулю, не стремится къ нулю, а слѣдовательно, его перемѣнный модуль обладаетъ наименьшимъ значеніемъ. Назвавъ это значеніе буквою M, изъ равенства (c) получимъ:

$$Mod(x_n - a_n) < \frac{Mod(x_n^r - a_n^r)}{M}.$$

Но, на основаніи равенствъ (a) и (b), заключаемъ, что, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod\left(x_n^r - a_n^r\right) < M \cdot \varepsilon,$$

гдѣ ε сколь угодно малое положительное число, а потому и подавно:

$$Mod(x_n^r - a_n^r) < \frac{M \cdot \varepsilon}{M}, \text{ или } Mod(x_n^r - a_n^r) < \varepsilon.$$

Это неравенство говоритъ, что

$$lim\, x_n^r = lim\, a_n^r, \text{ т.-е. } C = \sqrt[r]{B}, \text{ ч. и т. д.}$$

Сопоставляя сказанное сейчасъ съ тѣмъ, что имѣли выше (**184**), приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1°. *Если число B положительное и r четное, то существуютъ два числа, и только два, одно положительное, другое отрицательное, съ равными модулями, r-овыя степени которыхъ равны B. Числа эти суть:* $+\sqrt[r]{B}$ *и* $-\sqrt[r]{B}$.

2°. *Если число B отрицательное и r четное, то не существуетъ никакого положительнаго числа и никакого отрицательнаго числа, r-овая степень котораго равнялась бы B.*

3°. *Если число B положительное и r нечетное, то существуетъ положительное число, и только одно, r-овая степень котораго равняется B. Число это есть $\sqrt[r]{B}$. Отрицательнаго числа, которое обладало бы указаннымъ свойствомъ, не существуетъ.*

4°. *Если число B отрицательное и r нечетное, то существуетъ отрицательное число, и только одно, r-овая степень котораго равняется B. Число это есть $\sqrt[r]{B}$. Положительнаго числа, которое обладало бы указаннымъ свойствомъ, не существуетъ.*

190. Дѣленіе. *Частнымъ* отъ раздѣленія чиселъ L и M, опредѣленныхъ, какъ предѣлы двухъ перемѣнныхъ чиселъ a_n и b_n, называется предѣлъ, къ которому стремится рядъ:

$$(7) \qquad \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots, \frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}, \ldots$$

Мы положимъ покамѣсть, что M не равно нулю. Положивъ это, докажемъ, что число $\frac{a_n}{b_n}$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ опредѣленному предѣлу, т.-е. докажемъ, что разность

$$\Delta = \frac{a_{n+p}}{b_{n+p}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}(a_{n+p} - a_n) - \frac{a_{n+p}}{b_n b_{n+p}}(b_{n+p} - b_n),$$

съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю.

Назвавъ: буквою α наибольшаго изъ модулей чиселъ ряда (1) и буквою β наибольшаго изъ модулей чиселъ ряда:

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}, \ldots, \frac{1}{b_{n+p}},$$

который, т.-е. модуль, существуетъ, ибо b_n не убываетъ, по условію, неопредѣленно, получимъ:

$$Mod\left[\frac{1}{b_n}(a_{n+p} - a_n)\right] < \beta \cdot Mod(a_{n+p} - a_n),$$

$$Mod\left[\frac{a_{n+p}}{b_n b_{n+p}}(b_{n+p} - b_n)\right] < \alpha\beta^2 Mod(b_{n+p} - b_n).$$

Но, начиная съ нѣкотораго n и при всякомъ p,

$$Mod(a_{n+p} - a_n) < \frac{\varepsilon}{2\beta}, \quad Mod(b_{n+p} - b_n) < \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta^2};$$

слѣдовательно, и подавно:

$$Mod\left[\frac{1}{b_n}(a_{n+p} - a_n)\right] < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta}, \quad Mod\left[\frac{a_{n+p}}{b_n b_{n+p}}(b_{n+p} - b_n)\right] < \alpha\beta^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta^2},$$

а потому

$$Mod\Delta < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} + \alpha\beta^2 \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha\beta^2}, \quad \text{т.-е.} \quad Mod\Delta < \varepsilon.$$

Это неравенство и показываетъ, что числа ряда (7) стремятся къ предѣлу. Итакъ, мы можемъ писать:

$$\frac{L}{M} = lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right), \quad \text{или} \quad \frac{lim\, a_n}{lim\, b_n} = lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

191. Замѣчаніе 1. Предъидущее понятіе о частномъ не противорѣчитъ ариѳметическому понятію о немъ, при чемъ послѣднее заключается въ первомъ, какъ частный случай. И въ самомъ дѣлѣ, если

L и M суть числа раціональныя, то $\frac{L}{M}$ есть дѣйствительно предѣлъ перемѣннаго числа $\frac{a_n}{b_n}$. Докажемъ это. Напишемъ:

$$\Delta_1 = \frac{L}{M} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n}(L - a_n) - \frac{L}{b_n M}(M - b_n).$$

Назвавъ модуль числа $\frac{L}{M}$ буквою φ, получимъ:

$$Mod\left[\frac{1}{b_n}(L - a_n)\right] < \beta \,.\, Mod(L - a_n),\ Mod\left[\frac{L}{b_n M}(M - b_n)\right] <$$
$$< \beta\varphi\, Mod(M - b_n);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(L - a_n) < \frac{\varepsilon}{2\beta},\ Mod(M - b_n) < \frac{\varepsilon}{2\beta\varphi};$$

слѣдовательно, и подавно:

$$Mod\Delta_1 < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} + \beta\varphi \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta\varphi},\ \text{т.-е. } Mod\Delta_1 < \varepsilon\,.$$

192. Замѣчаніе 2. Если перемѣнныя числа a_n и b_n, принимающія соотвѣтственно значенія, заключенныя въ рядахъ (1) и (2), суть числа безконечно малыя, т.-е. другими словами, если числа L и M суть нули, то модуль перемѣннаго числа $\frac{A}{B}$ можетъ:

1° имѣть предѣломъ нуль, т.-е. быть безконечно — малымъ числомъ, и тогда *число A называется безконечно малымъ числомъ, порядокъ котораго выше порядка безконечно малаго числа B*. Напр., если $A = (x-1)^2$, $B = (x-1)$, то, давая буквѣ x значенія, имѣющія предѣломъ число 1, получимъ:

$$lim\left(\frac{A}{B}\right)_{x=1} = lim\left[\frac{(x-1)^2}{x-1}\right]_{x=1} = lim(x-1)_{x=1} = 0.$$

2° неопредѣленно возрастать, т.-е. быть безконечно — большимъ числомъ, и тогда *число A называется безконечно малымъ числомъ, порядокъ котораго ниже порядка безконечно малаго числа B.*

Напр., если $A = (x-1)$, $B = (x-1)^2$, то, давая буквѣ x значенія, имѣющія предѣломъ число 1, получимъ:

$$lim\left(\frac{A}{B}\right)_{x=1} = lim\left[\frac{x-1}{(x-1)^2}\right]_{x=1} = lim\left(\frac{1}{x-1}\right)_{x=1} = \infty\,.$$

3° можетъ стремиться къ *конечному опредѣленному* предѣлу.

4° можетъ, оставаясь менѣе нѣкотораго опредѣленнаго положительнаго числа, не стремиться ни къ какому предѣлу.

193. Неопредѣленныя выраженія. Если мы имѣемъ дробное выраженіе, то случается иногда, что подстановка вмѣсто буквъ, заключенныхъ въ выраженіи, нѣкоторыхъ численныхъ значеній обращаетъ въ нуль и числителя, и знаменателя даннаго выраженія. Дробное выраженіе приметъ тогда форму: $\frac{0}{0}\cdot$ Эта форма, разсматриваемая, какъ частное, происходящее отъ дѣленія 0 на 0, представляетъ, очевидно, всякое число. На этомъ основаніи принято говорить, что форма $\frac{0}{0}$ есть *символъ неопредѣленности.*

Особенно интересно то значеніе неопредѣленнаго выраженія, которое представляетъ предѣлъ, къ которому будетъ стремиться данное выраженіе, когда мы будемъ давать буквамъ неограниченные ряды значеній, стремящихся къ тѣмъ значеніямъ, которыя придали данному выраженію форму $\frac{0}{0}\cdot$

Иногда этого предѣла не существуетъ. *Нахожденіе этого предѣла называется раскрытіемъ неопредѣленнаго выраженія.* Мы здѣсь не можемъ дать общаго способа для рѣшенія вопроса и ограничимся нѣкоторыми примѣрами.

Примѣры.

1°. Возьмемъ выраженіе $\frac{x^2-a^2}{x-a}\cdot$ Сдѣлавъ здѣсь $x=a$, мы приведемъ наше выраженіе къ формѣ $\frac{0}{0}\cdot$ Найдемъ предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе, когда x стремится къ a.

Для этой цѣли сдѣлаемъ $x=a+\alpha$. Выраженіе наше приметъ видъ:

$$\frac{a^2+2a\alpha+\alpha^2-a^2}{a+\alpha-a}=\frac{2a\alpha+\alpha^2}{\alpha}=2a+\alpha.$$

Если x стремится къ a, то число α стремится къ нулю, и, слѣдовательно, выраженіе наше стремится къ $2a$. Это и есть искомый предѣлъ, не зависящій отъ того закона, по которому α стремится къ нулю.

Замѣтимъ, что равенство:

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$$

имѣетъ мѣсто при $x=a$ только тогда, когда мы изъ значеній, принимаемыхъ дробью $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ при $x=a$, выберемъ найденный нами предѣлъ, и въ этомъ только случаѣ предъидущее равенство представляетъ тождество.

2°. Разсмотримъ выраженіе $\frac{x^2-8x+16}{ax-4a}$. При $x=4$ выраженіе принимаетъ форму $\frac{0}{0}$. Раскроемъ эту неопредѣленность. Дѣлаемъ $x=4+\alpha$.

Выраженіе принимаетъ видъ:

$$\frac{(4+\alpha)^2-8(4+\alpha)+16}{a(4+\alpha)-4a}=\frac{\alpha^2}{a\alpha}=\frac{\alpha}{a}.$$

Мы видимъ, что выраженіе наше, при стремленіи x къ 4, а, слѣдовательно, α къ 0, стремится къ 0.

Это и есть искомый предѣлъ, не зависящій отъ того закона, по которому α стремится къ нулю.

Замѣтимъ, слѣдовательно, что равенство:

$$\frac{x^2-8x+16}{ax-4a}=\frac{x-4}{a}$$

только въ томъ случаѣ представляетъ тождество, когда мы изъ значеній, принимаемыхъ лѣвою частью при $x=4$, выберемъ найденный нами предѣлъ.

3°. Возьмемъ выраженіе: $\frac{x-2}{(x-2)^2}$. Сдѣлавъ здѣсь $x=2$, получимъ форму: $\frac{0}{0}$. Для раскрытія неопредѣленности сократимъ дробь на $x-2$; дробь сдѣлается равною $\frac{1}{x-2}$. При стремленіи x къ 2 знаменатель неопредѣленно возрастаетъ, и, слѣдовательно, дробь стремится къ предѣлу, равному безконечности.

4°. Разсмотримъ такое выраженіе $\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$.

При $x=2$ и $y=2$ выраженіе принимаетъ форму $\frac{0}{0}$.

Сокративъ нашу дробь на $x-y$, мы приведемъ ее къ виду: $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}$. При стремленіи x и y къ 2 по какому ни есть закону, дробь стремится къ предѣлу, равному $\frac{3}{8}$.

5°. Возьмемъ такое выраженіе: $\frac{x^2-3xy+x}{y^2+2xy^2-y}$.

Сдѣлавъ $x=0$ и $y=0$, приведемъ выраженіе къ формѣ $\frac{0}{0}$. Для раскрытія неопредѣленности положимъ: $x=0+\alpha$ и $y=0+\beta$; тогда выраженіе принимаетъ видъ $\frac{\alpha^2-3\alpha\beta+\alpha}{\beta^2+2\alpha\beta^2-\beta}$.

Дробь эта можетъ быть написана такимъ образомъ: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha-3\beta+1}{\beta+2\alpha\beta-1}$. При стремленіи α и β къ нулю второй множитель стремится къ -1; что же касается до перваго множителя $\frac{\alpha}{\beta}$, то предѣлъ его будетъ зависить отъ того закона стремленія α и β къ нулю, какой мы назначимъ; если мы назначимъ, чтобы $\alpha=\beta$, то предѣлъ будетъ равенъ единицѣ; если мы назначимъ, что $\alpha=2\beta$, то предѣлъ будетъ равенъ 2; если мы назначимъ, что $\alpha=\beta^2$, то предѣлъ будетъ равенъ нулю; если мы назначимъ, что $\beta=\alpha^2$, то предѣлъ будетъ равенъ безконечности.

Если дробное выраженіе $\frac{A}{B}$ принимаетъ, при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе, форму: $\frac{\infty}{\infty}$, то форма эта можетъ быть приведена къ виду $\frac{0}{0}\cdot$ И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{A}{B}=\frac{1}{B}:\frac{1}{A}=\frac{1}{\infty}:\frac{1}{\infty}=0:0=\frac{0}{0}\cdot$$

Если выраженіе $A\,.\,B$ принимаетъ, при нѣкоторыхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе, форму: $0\,.\,\infty$, то она можетъ быть приведена къ виду $\frac{0}{0}\cdot$

И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$A\,.\,B=A:\frac{1}{B}=0:\frac{1}{\infty}=0:0=\frac{0}{0}\cdot$$

Выраженіе $\frac{u}{v}-\frac{p}{q}$, принимающее форму $\infty-\infty$, когда v и q обращаются въ нули, можетъ быть приведено къ виду $\frac{0}{0}\cdot$

И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{u}{v}-\frac{p}{q}=\frac{uq-vp}{vq}=\frac{0}{0}\cdot$$

Итакъ, символы: $\frac{\infty}{\infty}$, $0\,.\,\infty$, $\infty-\infty$ суть символы неопредѣленности.

Раскрыть эти неопредѣленности значитъ найти предѣлы, къ которымъ стремятся выраженія, принимающія неопредѣленную форму, когда буквы, входящія въ эти выраженія, принимаютъ значенія, стремящіяся къ тѣмъ значеніямъ, которыя придаютъ выраженіямъ эту форму. Иногда искомые предѣлы не существуютъ.

Примѣры:

1°. Выраженіе $(x^3-1)\,.\,\frac{1}{x-1}$ принимаетъ неопредѣленную форму: $0\,.\,\infty$ при $x=1$. Для раскрытія этой неопредѣленности пишемъ:

$$(x^3-1)\cdot\frac{1}{x-1}=\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1.$$

При стремленіи x къ 1, по какому ни есть закону, выраженіе это стремится къ 3.

2°. Выраженіе: $\frac{5x^2-3x+7}{2x^2-2x+6}$ при $x=\infty$ принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытія этой неопредѣленности преобразовываемъ выраженіе: $\frac{5x^2-3x+7}{2x^2-2x+6}=\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}$. При стремленіи x къ безконечности, по какому ни есть закону, выраженіе это стремится къ $\frac{5}{2}$.

3°. Выраженіе: $\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x+2)}$, при $x=1$, принимаетъ форму $\infty-\infty$.

Для раскрытія этой неопредѣленности преобразуемъ выраженіе такимъ образомъ:

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+2-3}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}.$$

При стремленіи x къ единицѣ, по какому ни есть закону, выраженіе это стремится къ $\frac{1}{3}$.

194. Тождественныя преобразованія, распространенныя на ирраціональныя числа. Разсмотримъ нѣкоторое алгебрическое выраженіе, *раціональное* относительно буквъ:

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,$$

входящихъ въ него, т.-е. заключающее знаки дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія и возвышенія въ цѣлую степень. Обозначимъ это выраженіе такимъ образомъ: $S(x,\ y,\ z,\ \ldots)$. Разсмотримъ буквы: $x,\ y,\ z,\ \ldots$, какъ перемѣнныя раціональныя числа, стремящіяся по нѣкоторымъ законамъ соотвѣтственно къ предѣламъ:

$$L,\ M,\ N,\ \ldots,$$

представляющимъ числа раціональныя или ирраціональныя.

Численнымъ значеніемъ выраженія $S(x,\ y,\ z,\ \ldots)$, при $x=L$, $y=M$, $z=N$, ..., будемъ называть *предѣлъ*, къ которому стремится это выраженіе, когда перемѣнныя числа, означенныя буквами $x,\ y,\ z,\ \ldots$, будутъ стремиться соотвѣтственно къ предѣламъ $L,\ M,\ N,\ \ldots$ Мы знаемъ, что предѣлъ этотъ существуетъ и будетъ вообще вполнѣ опредѣленный за исключеніемъ случаевъ, указанныхъ въ (**192**, **193**).

Покажемъ, что всѣ тождественныя преобразованія, которыя мы выполняли до сихъ поръ и которыя относились къ раціональнымъ значеніямъ буквъ, входящихъ въ преобразуемыя выраженія, будутъ справедливы и для ирраціональныхъ значеній этихъ буквъ.

Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что мы имѣемъ нѣкоторое тождественное преобразованіе:

$$(a) \qquad S(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) = F(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )$$

для раціональныхъ значеній буквъ x, y, z, . . . ; напр. преобразованіе $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$. Докажемъ, что оно справедливо и для ирраціональныхъ значеній:

$$L,\ M,\ N,\ .\ .\ .\ .\ ,$$

этихъ буквъ.

Для этой цѣли разсмотримъ буквы x, y, z, ... , какъ перемѣнныя раціональныя числа, стремящіяся соотвѣтственно къ предѣламъ:

$$L,\ M,\ N,\ .\ .\ .$$

Каждое изъ выраженій S и F будетъ стремиться къ опредѣленному предѣлу, сохраняя указанія тѣхъ дѣйствій, которыя въ него входили, и въ предѣлѣ сохранитъ свою форму, но только буквы x, y, z, . . . замѣнятся соотвѣтственно буквами L, M, N, . . . , ибо если, напримѣръ, выраженіе S представляетъ произведеніе суммы двухъ чиселъ x и y на ихъ разность, то оно, при стремленіи буквъ x и y къ предѣламъ L и M, будетъ постоянно представлять произведеніе суммы соотвѣтственныхъ значеній, принимаемыхъ буквами x и y, на разность этихъ значеній, и въ предѣлѣ представитъ произведеніе суммы предѣловъ буквъ x и y, т.-е. суммы $L+M$, на разность этихъ предѣловъ, т.-е. на разность $L-M$. Итакъ

$$lim[S(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )]_{x=L,\ y=M,\ z=N,\ .\ .\ .} = S(L,\ M,\ N,\ .\ .\ .\ )$$

$$lim[F(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )]_{x=L,\ y=M,\ z=N,\ .\ .\ .} = F(L,\ M,\ N,\ .\ .\ .\ ).$$

Но тождество (a) имѣетъ мѣсто во все время стремленій перемѣнныхъ раціональныхъ чиселъ: x, y, z, ... , къ своимъ предѣламъ; слѣдовательно, оно имѣетъ мѣсто и въ предѣлъ **(170)**, такъ что мы можемъ писать:

$$S(L,\ M,\ N,\ .\ .\ .\ ) = F(L,\ M,\ N,\ .\ .\ .\ ),$$

ч. и т. д.

Отсюда будетъ слѣдовать, напримѣръ, что:

Въ многочленѣ съ ирраціональными членами мы можемъ измѣнять порядокъ членовъ.

Произведеніе ирраціональныхъ множителей не зависитъ отъ порядка ихъ перемноженій.

Тождество:

$$(c) \qquad a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1})$$

имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ значеній буквъ a и b, какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ, и т. п.

195. Перемѣнное ирраціональное число. До сихъ поръ мы разсматривали перемѣнныя раціональныя числа и ввели въ алгебру такъ называемыя ирраціональныя числа, установивъ понятія о равенствѣ ихъ и опредѣливъ дѣйствія надъ ними.

Мы можемъ еще болѣе обобщить представленіе о числѣ, разсматривая *перемѣнное ирраціональное число*, т.-е. такое перемѣнное число, которое, измѣняясь, будетъ принимать ирраціональныя значенія:

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

гдѣ каждое изъ чиселъ есть предѣлъ нѣкотораго соотвѣтствующаго ему перемѣннаго раціональнаго числа.

Примѣромъ такого перемѣннаго ирраціональнаго числа можетъ служить число:

$$\sqrt[a]{\frac{E\sqrt[r]{As^r}}{s}},$$

въ которомъ s неопредѣленно возрастаетъ, и тогда значенія ряда (1) суть:

$$\sqrt[a]{\frac{t_1}{s_1}},\ \sqrt[a]{\frac{t_2}{s_2}},\ \ldots,\ \sqrt[a]{\frac{t_n}{s_n}},\ \ldots,$$

при чемъ каждое изъ чиселъ $\frac{t_k}{s_k}$ есть предѣлъ перемѣннаго раціональнаго числа:

$$\frac{E\sqrt[a]{\frac{t_k}{s_k}\cdot\sigma_n^a}}{\sigma_n},$$

въ которомъ σ_n возрастаетъ неопредѣленно.

196. Замѣчаніе. Предѣломъ перемѣннаго ирраціональнаго числа можетъ быть число раціональное. И даже можно сказать, что всякое раціональное число можетъ быть разсматриваемо, какъ предѣлъ перемѣннаго ирраціональнаго числа.

И въ самомъ дѣлѣ, мы доказали, напримѣръ, что (**160**)

$$P=lim[P(1-x^n)]_{n=\infty};$$

число x разсматривалось, какъ число раціональное съ модулемъ, меньшимъ 1; но тѣ же разсужденія привели бы насъ теперь къ тому же результату и въ предположеніи, что x есть число ирраціональное съ модулемъ, меньшимъ единицы. Взявъ, напримѣръ, $P=1$, $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$, найдемъ:

$$1=lim\left[1-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n\right]_{n=\infty},$$

т.-е. 1 есть предѣлъ перемѣннаго числа, принимающаго значенія:

$$1-\sqrt{\frac{1}{2}},\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3,\ 1-\frac{1}{4},\ \ldots$$

197. Обобщенія. Въ предъидущихъ параграфахъ мы, имѣя представленія: о числѣ раціональномъ, о равенствѣ и неравенствѣ двухъ раціональныхъ числахъ и о дѣйствіяхъ надъ числами раціональными, пришли, не впадая въ противорѣчіе съ этими представленіями, къ представленіямъ: о числѣ ирраціональномъ, какъ предѣлѣ перемѣннаго раціональнаго числа, о равенствѣ и неравенствѣ двухъ ирраціональныхъ чиселъ и о дѣйствіяхъ надъ числами ирраціональными.

Теперь мы можемъ составить соотвѣтственныя представленія, относящіяся къ числамъ, разсматриваемымъ, какъ предѣлы перемѣнныхъ ирраціональныхъ чиселъ.

Для этой цѣли достаточно повторить всѣ предъидущія разсужденія отъ слова до слова, замѣняя только фразу: „перемѣнное раціональное число" фразою „перемѣнное число".

Мы можемъ сказать, напримѣръ, что *для того, чтобы перемѣнное число x, принимающее неограниченный рядъ значеній:*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots,$$

или все раціональныхъ, или все ирраціональныхъ, или то раціональныхъ, то ирраціональныхъ, стремилось къ предѣлу, необходимо и до-

статочно, чтобы модуль перемѣнной разности $(x_{n+p}-x_n)$, *при неопредѣленномъ возрастаніи* n *и при всякомъ цѣломъ и положительномъ* p, *стремился къ нулю.*

Мы можемъ сказать, что если два числа L и M суть соотвѣтственно предѣлы двухъ перемѣнныхъ чиселъ A и B, то

$$L+M=lim(A+B),\ L-M=lim(A-B),$$

$$LM=lim(AB),\ \frac{L}{M}=lim\left(\frac{A}{B}\right),\ L^a=lim(A^a).$$

Замѣтимъ здѣсь кстати, что если мы имѣемъ рядъ чиселъ:

$$L_1,\ L_2,\ L_3,\ .\ .\ .\ ,\ L_p,$$

представляющихъ соотвѣтственно предѣлы перемѣнныхъ чиселъ:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ .\ .\ .\ ,\ A_p,$$

то равенства:

$$L_1+L_2+L_3+\ .\ .\ .\ +L_p=lim(A_1+A_2+A_3+\ .\ .\ .\ +A_p),$$
$$L_1L_2L_3\ .\ .\ .\ L_p=lim(A_1A_2A_3\ .\ .\ .\ A_p),$$

для доказательства ихъ, требуютъ, чтобы число p было конечное.

Если же это число измѣняется, возрастая безпредѣльно, то предъидущія равенства могутъ употребляться только условно.

Положимъ, напримѣръ, что

$$A_1=A_2=A_3=\ .\ .\ .\ =A_p=\frac{1}{p},$$

гдѣ p неопредѣленно растетъ, тогда

$$L_1=L_2=L_3=\ .\ .\ .\ =L_p=0,$$

а между тѣмъ

$$A_1+A_2+A_3+\ .\ .\ .\ +A_p=1,$$

и первое равенство должно быть написано для нашего случая такимъ образомъ:

$$lim\left[lim\left(\frac{1}{p}\right)\cdot lim\,p\right]_{p=\infty}=lim\left(\frac{1}{p}\cdot p\right)_{p=\infty}=1.$$

Возьмемъ еще

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = A_p = \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

гдѣ p неопредѣленно растетъ; тогда

$$L_1 = L_2 = L_3 = \ldots = L_p = 0,$$

но

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \text{ не } = 0,$$

что видно на слѣдующихъ частныхъ случаяхъ:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4}, \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 1 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}, \ldots,$$

т.-е. видно, что $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$ остается всегда болѣе 2. Мы увидимъ впослѣдствіи, что перемѣнное число $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$, съ возрастаніемъ p, стремится къ нѣкоторому предѣлу, большему 2, но меньшему 3.

Второе изъ предъидущихъ равенствъ должно быть написано въ данномъ случаѣ такъ:

$$lim\left\{\left[lim\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^p\right\}_{p=\infty} = lim\left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p\right]_{p=\infty}.$$

198. Извлеченіе корней изъ ирраціональныхъ чиселъ. Мы разсмотрѣли выше сложеніе, вычитаніе, умноженіе, возвышеніе въ цѣлую степень и дѣленіе, производимыя надъ числами, опредѣленными какъ предѣлы. Разсмотримъ теперь извлеченіе корней.

Корнемъ $m^{\text{-овой}}$ степени изъ положительнаго числа L, опредѣленнаго, какъ предѣлъ перемѣннаго положительнаго раціональнаго числа A, принимающаго положительныя значенія:

$$(1) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,\ \ldots,\ a_{n+p},\ \ldots,$$

называется предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное ирраціональное число $\sqrt[m]{A}$, принимающее положительныя значенія:

$$(2) \qquad \sqrt[m]{a_1},\ \sqrt[m]{a_2},\ \sqrt[m]{a_3},\ \ldots,\ \sqrt[m]{a_n},\ \ldots,\ \sqrt[m]{a_{n+p}},\ \ldots,$$

Для того, чтобы опредѣленіе это имѣло смыслъ, достаточно показать, что число $\sqrt[m]{a_n}$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, стремится къ опредѣленному предѣлу, т.-е. достаточно показать, что модуль разности: $\Delta=\sqrt[m]{a_{n+p}}-\sqrt[m]{a_n}$, съ неопредѣленнымъ возрастаніемъ n, при всякомъ p, стремится къ нулю. Это имѣетъ мѣсто.

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ тождество:

$$A^m-B^m=(A-B)(A^{m-1}+\ldots+B^{m-1}).$$

Положивъ здѣсь: $A=\sqrt[m]{a_{n+p}}$, $B=\sqrt[m]{a_n}$ и принявъ во вниманіе, что $A^m=a_{n+p}$, $B^m=a_n$ получимъ (**194**):

$$a_{n+p}-a_n=(\sqrt[m]{a_{n+p}}-\sqrt[m]{a_n})\Omega,$$

гдѣ Ω есть сумма положительныхъ чиселъ:

$$\Omega=\left(\sqrt[m]{a_{n+p}}\right)^{m-1}+\left(\sqrt[m]{a_{n+p}}\right)^{m-2}.\sqrt[m]{a_n}+\ldots+\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1},$$

отсюда

$$\Delta=\frac{a_{n+p}-a_n}{\Omega}.$$

Перемѣнное число Ω не стремится къ нулю, ибо оно постоянно представляетъ сумму положительныхъ чиселъ, слѣдовательно его модуль обладаетъ наименьшимъ значеніемъ. Назвавъ его буквою M, получимъ:

$$Mod\,\Delta<\frac{Mod(a_{n+p}-a_n)}{M}.$$

Но, по условію, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(a_{n+p}-a_n)<M\,.\,\varepsilon,$$

а потому и подавно

$$Mod\,\Delta<\frac{M\,.\,\varepsilon}{M},\text{ или же } Mod\,\Delta<\varepsilon,$$

ч. и т. д.

Итакъ, искомый предѣлъ существуетъ. Онъ будетъ опредѣленный, ибо 1) каждое изъ чиселъ ряда (2) есть вполнѣ опредѣленное число, и 2) по доказанному выше (**170**).

Мы можемъ, слѣдовательно, писать:

$$\sqrt[m]{L} = lim\sqrt[m]{A}, \text{ или } \sqrt[m]{lim A} = lim\sqrt[m]{A}.$$

199. Замѣчаніе 1. Предъидущее понятіе о корнѣ не противорѣчитъ тому понятію о немъ, которое мы сдѣлали выше. И въ самомъ дѣлѣ, если L есть раціональное положительное число, то $\sqrt[m]{L}$ есть дѣйствительно предѣлъ перемѣннаго числа $\sqrt[m]{a_n}$. И дѣйствительно,

$$\Delta_1 = \sqrt[m]{L} - \sqrt[m]{a_n} = \frac{L - a_n}{\left(\sqrt[m]{L}\right)^{m-1} + \ldots + \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1}};$$

но модуль знаменателя не стремится къ нулю, слѣдовательно онъ обладаетъ наименьшимъ значеніемъ M, а потому

$$Mod\Delta_1 < \frac{Mod(L - a_n)}{M}.$$

Принявъ теперь во вниманіе, что, начиная съ нѣкотораго n, $Mod(L - a_n) < M \cdot \varepsilon$, получимъ подавно, что

$$Mod\Delta_1 < \frac{M \cdot \varepsilon}{M}, \text{ т.-е. } Mod\Delta_1 < \varepsilon,$$

ч. и т. д.

200. Замѣчаніе 2. Опредѣливъ дѣйствіе извлеченія корня изъ ирраціональныхъ чиселъ, мы получаемъ вполнѣ ясное представленіе о численномъ значеніи алгебрическаго выраженія, заключающаго въ себѣ и знаки корней, при ирраціональныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ это выраженіе.

Тождественными преобразованіями подобныхъ выраженій мы займемся въ главѣ объ алгебрическихъ радикалахъ.

§ IV. Непрерывныя дроби.

201. Опредѣленіе непрерывныхъ дробей. Алгебра обладаетъ замѣчательнымъ орудіемъ для образованія двухъ рядовъ раціональныхъ чиселъ: возрастающаго и убывающаго, предѣломъ которыхъ служитъ заданное ирраціональное число.

Разсмотримъ нѣкоторое положительное число x, раціональное или ирраціональное. Положимъ, что природа числа x такова, что число это не менѣе цѣлаго числа a_1 и менѣе цѣлаго числа a_1+1.

Примѣръ. Если $x=\frac{7}{5}$, то $a_1=1$; если $x=6$, то $a_1=6$; если $x=\sqrt{8}$, то $a_1=2$, и т. д.

Положимъ:

$$[1] \qquad x=a_1+\frac{1}{x_1},\ x_1=a_2+\frac{1}{x_2},\ \ldots,\ x_{n-1}=a_n+\frac{1}{x_n},$$

гдѣ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ суть наибольшія цѣлыя числа, заключенныя соотвѣтственно въ $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Первое изъ этихъ чиселъ a_1 можетъ быть равно нулю, но каждое изъ слѣдующихъ, по меньшей мѣрѣ, равно 1.

Если число x есть число раціональное, то одно изъ чиселъ $x, x_1, x_2, \ldots$ будетъ непремѣнно цѣлымъ и оно окончитъ рядъ [1]. Для доказательства положимъ, что

$$x=\frac{A}{A_1},$$

гдѣ A и A_1 суть цѣлыя числа, простыя между собою.

Означимъ буквами: $A_2, A_3, \ldots, A_n$, 1 послѣдовательные остатки, которые мы получимъ, отыскивая общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ A и A_1; назовемъ буквами: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ частныя, получаемыя при дѣленіи. Мы будемъ имѣть:

$$A=A_1a_1+A_2,\ A_1=A_2a_2+A_3,\ \ldots\ A_{n-1}=A_na_n+1;$$

отсюда

$$x=a_1+\frac{A_2}{A_1},\ x_1=a_2+\frac{A_3}{A_2},\ \ldots,\ x_{n-1}=a_n+\frac{1}{A_n},\ x_n=A_n.$$

Это мы и хотѣли показать.

Если же число x есть число ирраціональное, то ни одно изъ чиселъ ряда: $x, x_1, x_2, x_3, \ldots$ не будетъ ни цѣлымъ, ни, даже, раціональнымъ, и, слѣдовательно, рядъ будетъ продолжаться безгранично.

И въ самомъ дѣлѣ, если бы одно изъ чиселъ: $x, x_1, x_2, \ldots$ было раціональнымъ, то всѣ предшествующія, а слѣдовательно, и x, были бы также раціональны.

Исключивъ послѣдовательно числа: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ изъ первыхъ n равенствъ [1], придадимъ числу x слѣдующую форму:

[2]
$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_n}}}}.$$

Займемся теперь изученіемъ выраженій этой формы, въ которыхъ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ суть цѣлыя положительныя числа, число которыхъ предѣльно или безпредѣльно, причемъ только первое изъ нихъ можетъ быть нулемъ. Выраженія этой формы называются *непрерывными дробями.*

Числа: $x, x_1, x_2, \ldots$ называются *полными частными;* цѣлыя числа: $a_1, a_2, a_3, \ldots$, заключенныя соотвѣтственно въ полныхъ частныхъ, называются *неполными частными. Подходящею дробью* называется то значеніе, которое найдемъ, если остановимъ непрерывную дробь на нѣкоторомъ неполномъ частномъ. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что выраженія:

[3]
$$a_1,\ a_1 + \frac{1}{a_2},\ a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \ldots$$

представляютъ соотвѣтственно первую, вторую, третью и т. д. подходящія дроби, при чемъ неполныя частныя: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются неполными частными, *соотвѣтствующими* первой, второй, третьей и т. д. подходящимъ дробямъ. Вмѣсто того, чтобы говорить: первая, вторая, третья, и т. д., подходящія дроби, будемъ говорить: подходящія дроби 1-го, 2-го, 3-го, и т. д., порядковъ.

202. Образованіе подходящихъ. Выраженія (3), по приведеніи каждаго изъ нихъ къ формѣ обыкновенной дроби, даютъ:

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_1a_2+1}{a_2},\ \frac{(a_1a_2+1)a_3+a_1}{a_2a_3+1}, \ldots$$

Обозначивъ:

$$a_1 = P_1,\ a_1a_2+1 = P_2,\ (a_1a_2+1)a_3 + a_1 = P_3, \ldots,$$
$$1 = Q_1,\ a_2 = Q_2,\ a_2a_3+1 = Q_3, \ldots,$$

увидимъ, что

$$P_3 = P_2 a_3 + P_1, \quad Q_3 = Q_2 a_3 + Q_1,$$

т.-е. *первыя три подходящія дроби могутъ быть приведены къ такимъ формамъ, при которыхъ числитель третьей дроби равенъ числителю второй дроби, умноженному на неполное частное, соотвѣтствующее третьей подходящей дроби, и сложенному съ числителемъ первой дроби; знаменатель получается такимъ же образомъ изъ знаменателей второй и первой дробей.*

Спрашивается теперь, имѣетъ ли мѣсто замѣченное соотношеніе для каждыхъ трехъ рядомъ стоящихъ дробей, т.-е. могутъ ли дроби порядковъ $(n-2)^{\text{-го}}$, $(n-1)^{\text{-го}}$ и $n^{\text{-го}}$ приведены къ такимъ формамъ, при которыхъ ихъ цѣлые числители: P_{n-2}, P_{n-1}, P_n и ихъ цѣлые знаменатели: Q_{n-2}, Q_{n-1}, Q_n будутъ связаны соотношеніями:

$$[4] \qquad P_n = P_{n-1} a_n + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}?$$

Для отвѣта на этотъ вопросъ употребимъ пріемъ разсужденій, которымъ мы уже пользовались (53).

Предположимъ, что соотношенія (4) имѣютъ мѣсто, и докажемъ, что дроби порядковъ $(n-1)^{\text{-го}}$, $n^{\text{-го}}$ и $(n+1)^{\text{-го}}$ могутъ быть приведены къ такимъ формамъ, при которыхъ ихъ цѣлые числители: P_{n-1}, P_n и P_{n+1} и цѣлые знаменатели: Q_{n-1}, Q_n и Q_{n+1} будутъ связаны соотношеніями:

$$(5) \qquad P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1},$$

т.-е. докажемъ, что равенства (5) суть слѣдствія равенствъ (4).

Итакъ, предположимъ, что подходящая дробь $n^{\text{-го}}$ порядка приведена къ формѣ:

$$\frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}.$$

Замѣнивъ здѣсь число a_n числомъ $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ и замѣтивъ, что, при этой замѣнѣ, числа P_{n-1}, P_{n-2}, Q_{n-1}, Q_{n-2} не измѣнятъ своихъ значеній, мы, очевидно, преобразуемъ нашу дробь въ подходящую дробь порядка $(n+1)^{\text{-го}}$, такъ что дробь порядка $(n+1)^{\text{-го}}$ можетъ быть приведена къ формѣ:

$$\frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1} a_n + P_{n-2}) a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}) a_{n+1} + Q_{n-1}},$$

т.-е. къ формѣ

$$\frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Обозначивъ цѣлыхъ числителя и знаменателя этой формы соотвѣтственно буквами P_{n+1} и Q_{n+1}, получимъ соотношенія (5).

Итакъ, для того, чтобы соотношенія (4) имѣли мѣсто для значенія n, равнаго одному изъ чиселъ:

$$3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ (n-2),\ (n-1),\ n,$$

гдѣ n произвольное цѣлое положительное число, достаточно, чтобы они имѣли мѣсто для непосредственно предъидущаго; но они справедливы для $n=3$, если примемъ:

$$P_1 = a_1,\ Q_1 = 1,\ P_2 = a_1\ a_2 + 1,\ Q_2 = a_2,$$

слѣдовательно они будутъ и мѣсто и для $n=4$, и для $n=5$, и т. д., т.-е. будутъ вообще справедливы.

Отсюда вытекаетъ: *Если примемъ:* $P_1 = a_1$, $Q_1 = 1$, $P_2 = a_1 a_2 + 1$, $Q_2 = a_2$ *и если приведемъ третью подходящую дробь къ формѣ, въ которой цѣлый числитель равенъ числителю предшествующей дроби, умноженному на соотвѣтствующее третьей дроби неполное частное и сложенному съ числителемъ дроби предпредшествующей, при чемъ цѣлый знаменатель составленъ подобнымъ же образомъ изъ знаменателей двухъ предшествующихъ дробей, (что возможно), то каждая изъ подходящихъ дробей можетъ быть приведена къ такой формѣ, въ которой числитель и знаменатель составлены подобнымъ же образомъ изъ числителей и знаменателей двухъ предшествующихъ дробей.*

Все нижеслѣдующее будетъ относиться къ подходящимъ дробямъ, представленнымъ именно въ этой формѣ.

Замѣтимъ однако, что указанныя соотношенія будутъ имѣть мѣсто и тогда, когда, напримѣръ, возьмемъ:

$$P_1 = a_1 . \lambda,\ Q_1 = \lambda,\ P_2 = (a_1 a_2 + 1)\lambda,\ Q_2 = a_2\lambda,$$

гдѣ λ произвольное число.

203. Если въ подходящей дроби порядка $n^{\text{го}}$:

$$\frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}$$

замѣнимъ неполное частное a_n числомъ x_{n-1}, то преобразуемъ подходящую дробь въ разсматриваемое число x; замѣненіе это даетъ:

$$x=\frac{P_{n-1}x_{n-1}+P_{n-2}}{Q_{n-1}x_{n-1}+Q_{n-2}},$$

и вообще

$$x=\frac{P_2x_2+P_1}{Q_2x_2+Q_1}=\frac{P_3x_3+P_2}{Q_3x_3+Q_2}=\ldots=\frac{P_nx_n+P_{n-1}}{Q_nx_n+Q_{n-1}}.$$

204. *Примѣры.* 1°. Представить дробь $\frac{221}{651}$ въ видѣ непрерывной дроби. Для этой цѣли ищемъ общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ: 221 и 651

Дѣйствіе, какъ извѣстно, располагается такимъ образомъ:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} \overset{}{\frac{221}{221}} & \frac{651}{209} & \frac{221}{12} & \frac{209}{5} & \frac{12}{2} & \frac{5}{1} & \frac{2}{0} & 1 \\ ^{0} & ^{2} & ^{1} & ^{17} & ^{2} & ^{2} & ^{2} & \end{array}.$$

Получимъ:

$$\frac{221}{651}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}.$$

Подходящія дроби будутъ слѣдующія:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{18}{53},\ \frac{37}{109},\ \frac{92}{271},\ \frac{221}{651}.$$

2°. Представить $\sqrt{7}$ въ видѣ непрерывной дроби.

Располагаемъ дѣйствіе такимъ образомъ:

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{x_1},\quad x_1=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3},$$

$$x_1=1+\frac{1}{x_2},\quad x_2=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2},$$

$$x_2=1+\frac{1}{x_3},\quad x_3=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{3},$$

$$x_3=1+\frac{1}{x_4},\quad x_4=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}+2\ ,$$

$$x_4=4+\frac{1}{x_5},\quad x_5=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}.$$

Мы видимъ, что повторилось полное частное, а именно $x_5 = x_1$. Отсюда слѣдуетъ, что непрерывная дробь, представляющая $\sqrt{7}$, будетъ дробь періодическая, т.-е. такая дробь, въ которой неполныя частныя будутъ повторяться періодически, причемъ періодъ начнется со втораго неполнаго частнаго. Имѣемъ:

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

205. Свойства подходящихъ. Подходящія дроби, составленныя по вышеданному правилу, обладаютъ замѣчательными свойствами, которыя мы теперь и изложимъ.

Теорема I. *Если* $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ *суть двѣ подходящія дроби порядковъ* $n-1$ *и* n, *то*

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n.$$

Положимъ, что a_n представляетъ $n^{\text{-овое}}$ неполное частное; будемъ имѣть:

$$P_n = P_{n-1} a_n + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2};$$

умноживъ оба равенства соотвѣтственно на Q_{n-1} и $-P_{n-1}$ и сложивъ результаты, получимъ:

$$(P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) = -(P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2});$$

отсюда, умноживъ обѣ части этого равенства на $(-1)^n$, найдемъ:

$$(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) = (-1)^{n-1} (P_{n-1} Q_{n-2} - Q_{n-1} P_{n-2}).$$

Результатъ этотъ показываетъ намъ, что количество:

$$(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1})$$

имѣетъ одно и то же значеніе при всякомъ n; принимая же во вниманіе, что, при $n=2$, количество это равно 1, придемъ къ заключенію, что

$$(-1)^n (P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1}) = 1;$$

откуда, наконецъ,

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n, \text{ ч. и т. д.}$$

Слѣдствіе I. *Числа* P_n *и* Q_n *суть числа взаимно простыя, и, слѣдовательно, дробь* $\frac{P_n}{Q_n}$ *есть дробь несократимая.*

И въ самомъ дѣлѣ, доказанное равенство показываетъ, что дѣйствительно числа P_n и Q_n не могутъ имѣть, кромѣ единицы, никакого общаго дѣлителя. Это доказано для $n \geqslant 3$; что-же касается до первыхъ двухъ подходящихъ дробей:

$$\frac{a_1}{1} \text{ и } \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2},$$

то непосредственно видно, что онѣ несократимы.

Слѣдствіе II. *Разность между двумя послѣдовательными подходящими дробями равна дроби, числитель которой равенъ единицѣ, причемъ знаменатель представляетъ произведеніе знаменателей этихъ подходящихъ дробей.*

И въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ на произведеніе $Q_n Q_{n-1}$ обѣ части доказаннаго равенства, найдемъ:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n-1}}, \text{ ч. и т. д.}$$

206. Теорема II. *Если число x приведено къ непрерывной дроби, причемъ образованы послѣдовательныя подходящія, то число это всегда будетъ заключено между двумя послѣдовательными подходящими и будетъ ближе къ той изъ нихъ, порядокъ которой выше.*

Мы имѣли:

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}.$$

Опредѣливъ отсюда x_n, найдемъ:

$$x_n = \frac{Q_{n-1} x - P_{n-1}}{P_n - Q_n x}, \text{ откуда } \frac{Q_n}{Q_{n-1}} x_n = \frac{x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}{\frac{P_n}{Q_n} - x}.$$

Формула эта показываетъ: 1° что знаки разностей $\left(x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)$ и $\left(\frac{P_n}{Q_n} - x\right)$ одинаковы; откуда слѣдуетъ, что x заключено между

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$; 2° что модуль второй разности менѣе модуля первой, ибо оба количества: $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ и x_n, произведеніе которыхъ образуетъ первую часть предъидущаго равенства, болѣе единицы.

207. Теорема III. *Если приведемъ какое ни есть число x къ непрерывной дроби, то модуль разности между числомъ x и какою ни есть подходящею дробью будетъ менѣе дроби, числитель которой равенъ единицѣ, причемъ знаменатель представляетъ квадратъ знаменателя этой подходящей.*

Имѣли:

$$x-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_n x_n+P_{n-1}}{Q_n x_n+Q_{n-1}}-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}}{Q_n(Q_nx+Q_{n-1})}=\frac{-(-1)^n}{Q_n(Q_nx_n+Q_{n-1})},$$

или, наконецъ,

$$\Delta=x-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{Q_n(Q_nx_n+Q_{n-1})}.$$

Равенство это говоритъ:

1) Если n четное и x не равенъ $\frac{P_n}{Q_n}$, т.-е. x_n не $=\infty$, то

$$x<\frac{P_n}{Q_n}.$$

2) Если n нечетное и x не равенъ $\frac{P_n}{Q_n}$, то

$$x>\frac{P_n}{Q_n}.$$

3) $Mod\,\Delta=\frac{1}{Q_n(Q_nx_n+Q_{n-1}}$; отсюда $Mod\,\Delta<\frac{1}{Q_n{}^2}$,

ибо x_n не менѣе единицы.

208. Слѣдствіе. *Если число x есть число ирраціональное, то всегда можно образовать такую подходящую, которая будетъ отличаться отъ числа x на количество, меньшее α, какъ бы мало это α не было.*

И въ самомъ дѣлѣ, для того, что модуль разности $\left(x-\frac{P_n}{Q_n}\right)$ былъ менѣе α, достаточно, чтобы

$$\frac{1}{Q_n{}^2}<\alpha,\ \text{откуда}\ Q_n\geqslant E\sqrt{\frac{1}{\alpha}}+1.$$

Этому неравенству мы всегда можемъ удовлетворить при достаточно большомъ n, ибо числа Q_1, Q_2, Q_3, . . . возрастаютъ безпредѣльно.

Примѣръ. Представить $\sqrt{7}$ раціональнымъ числомъ съ ошибкою, которая была бы менѣе $\frac{2}{3175}$. Беремъ за α число $\frac{2}{3175}$. Разлагаемъ $\sqrt{7}$ въ непрерывную дробь, составляемъ послѣдовательныя подходящія и останавливаемся на такой подходящей, знаменатель которой Q_n удовлетворяетъ неравенству:

$$Q_n > \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3175}}}, \quad \text{или} \quad Q_n > \sqrt{\frac{3175}{2}}, \ Q_n \geqslant 39.$$

Мы имѣли уже разложеніе $\sqrt{7}$ въ непрерывную дробо. Составляя подходящія, найдемъ:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \ldots$$

Остановимся на дроби $\frac{127}{48}$. Ошибка навѣрно будетъ менѣе $\frac{2}{3175}$.

209. Двѣ предъидущія теоремы приводятъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

Если разложимъ какое ни есть число x въ непрерывную дробь и образуемъ два ряда подходящихъ дробей: рядъ дробей четнаго порядка:

$$\frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_4}{Q_4},\ \frac{P_6}{Q_6},\ \ldots$$

и рядъ дробей нечетнаго порядка:

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_3}{Q_3},\ \frac{P_5}{Q_5},\ \frac{P_7}{Q_7},\ \ldots,$$

то рядъ первый представитъ рядъ убывающій, причемъ каждая дробь этого ряда будетъ болѣе x; рядъ второй представитъ рядъ возрастающій причемъ каждая дробь этого ряда будетъ менѣе x. Эти ряды оканчиваются, если число x раціонально; они продолжаются неопредѣленно, если число x есть число ирраціональное, и въ этомъ случаѣ числа обоихъ рядовъ стремятся къ одному общему предѣлу, равному числу x.

И въ самомъ дѣлѣ, мы доказали, что

$$\frac{P_2}{Q_2} > x,\ \frac{P_4}{Q_4} > x,\ \ldots$$

и что

$$\frac{P_2}{Q_2}-x>\frac{P_4}{Q_4}-x>\frac{P_6}{Q_6}-x, \ldots;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{P_2}{Q_2}>\frac{P_4}{Q_4}>\frac{P_6}{Q_6}> \ldots;$$

т.-е. рядъ первый есть рядъ убывающій.

Мы доказали далѣе, что

$$x>\frac{P_1}{Q_1},\ x>\frac{P_3}{Q_3},\ x>\frac{P_5}{Q_5}, \ldots,$$

и что

$$x-\frac{P_1}{Q_1}>x-\frac{P_3}{Q_3}>x-\frac{P_5}{Q_5}, \ldots;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{P_1}{Q_1}<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_5}{Q_5}< \ldots,$$

т.-е. второй рядъ есть рядъ возрастающій.

Мы показали, что

$$\frac{P_2}{Q_2}-x<\frac{1}{Q_2^2},\ \frac{P_4}{Q_4}-x<\frac{1}{Q_4^2}, \ldots,$$

$$x-\frac{P_1}{Q_1}<\frac{1}{Q_1^2},\ x-\frac{P_3}{Q_3}<\frac{1}{Q_3^2}, \ldots,$$

т.-е. мы показали, что разности между числами ряда перваго и числомъ x и разности между числомъ x и числами ряда втораго стремятся къ нулю; отсюда должны заключить, что x есть общій предѣлъ чиселъ обоихъ рядовъ.

Замѣтимъ, что подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ равна суммѣ

$$\frac{P_1}{Q_1}+\left(\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_1}{Q_1}\right)+\left(\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_2}{Q_2}\right)+\ldots+\left(\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right);$$

отсюда будетъ слѣдовать. что число x есть предѣлъ чиселъ ряда:

$$a,\ a+\frac{1}{Q_1Q_2},\ a+\frac{1}{Q_1Q_2}-\frac{1}{Q_2Q_3},\ a+\frac{1}{Q_1Q_2}-\frac{1}{Q_2Q_3}+\frac{1}{Q_3Q_4}, \ldots$$

210. Теорема IV. *Если несократимая дробь $\frac{A}{B}$ заключена между двумя послѣдовательными подходящими $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то знаменатель B дроби будетъ болѣе знаменателя каждой изъ этихъ подходящихъ.*

И въ самомъ дѣлѣ, дробь $\frac{A}{B}$ заключена между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, а потому знаки разностей:

$$\frac{A}{B}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \ \frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

одинаковы, причемъ модуль первой разности менѣе модуля второй. Послѣдняя разность равна $\frac{(-1)^n}{Q_{n-1}\,Q_n}$, а потому

$$(-1)^n\left(\frac{A}{B}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)<\frac{1}{Q_{n-1}Q_n},$$

или

$$(-1)^n(AQ_{n-1}-BP_{n-1})<\frac{B}{Q_n}.$$

Такъ какъ первая часть этого неравенства есть число цѣлое, неравное нулю, то

$$B > Q_n, \text{ а слѣдовательно и подавно } B > Q_{n-1}.$$

211. Слѣдствіе. *Каждая подходящая непрерывной дроби x менѣе отличается отъ x, чѣмъ всякая другая дробь, знаменатель которой менѣе знаменателя этой подходящей.*

И въ самомъ дѣлѣ, если бы несократимая дробь $\frac{A}{B}$ менѣе отличалась отъ x, чѣмъ подходящая дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, то она и подавно менѣе отличалась бы отъ x, чѣмъ предшествующая дробь $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Но такъ какъ число x заключено между $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$, то дробь $\frac{A}{B}$ необходимо была бы заключена между тѣми же подходящими, т.-е. знаменатель B, на основаніи предъидущей теоремы, былъ бы болѣе Q_n.

Отсюда вытекаетъ, что дробь $\frac{A}{B}$ болѣе отличается отъ x, чѣмъ подходящая $\frac{P_n}{Q_n}$, если B менѣе Q_n.

Упражненія.

I. Разложить въ непрерывныя дроби числа:

$$\sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{14},\ \sqrt{17},\ \sqrt{46},\ \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

II. Разложить въ непрерывную дробь выраженіе $\frac{x^4+a^4}{x^2+a^2}$.

III. Разложить въ непрерывныя дроби выраженія:

$$\sqrt{a^2+1},\ \sqrt{a^2-1},\ \sqrt{a^2+a},\ \sqrt{a^2-a},\ \sqrt{x^2+px+9}.$$

IV. Вычислить $\sqrt{27}$ съ ошибкою, которая была бы менѣе $\frac{3}{679}$.

V. Доказать, что третья подходящая выраженія $\sqrt{a^2+a+1}$ равна $\frac{1}{2}(2a+1)$.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

Алгебрическіе радикалы.

---

212. Опредѣленія. *Алгебрическимъ радикаломъ* называется формула, въ которой послѣднее дѣйствіе есть дѣйствіе извлеченія корня. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что общій видъ алгебрическаго радикала есть слѣдующій:

$$\sqrt[m]{A},$$

гдѣ A представляетъ какую ни есть алгебрическую формулу, могущую въ свою очередь содержать радикалы. Формула A называется *подрадикальною формулою*, цѣлое и положительное число m называется *показателемъ* радикала.

Примѣръ. Выраженія: $\sqrt[m]{a^5b^6c^q}$, $\sqrt[6]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\sqrt[q]{\frac{a}{\sqrt[n]{b}}}$ суть радикалы.

Числовымъ значеніемъ или просто *значеніемъ* радикала $\sqrt[m]{A}$ называется корень $m^{\text{-овой}}$ степени числоваго значенія подрадикальнаго выраженія A; если это числовое значеніе равно числу a, то числовое значеніе радикала $\sqrt[m]{A}$ равно числу $\sqrt[m]{a}$.

Примѣръ. Значеніе радикала: $\sqrt[5]{c^2-d^2}$, при $c=3$, $d=1$, равно $\sqrt[5]{8}$.

§ I. Преобразованіе радикаловъ.

213. Преобразованіе I. *Если подрадикальное выраженіе представляетъ степень нѣкотораго выраженія, показатель которой дѣлится* *на показателя радикала, то радикалъ тождественъ степени этого выраженія, показатель которой равенъ частному отъ раздѣленіе показателя подрадикальнаго выраженія на показателя радикала*, т.-е.

$$\sqrt[m]{(A)^{mp}} = (A)^p. \qquad [1]$$

Докажемъ это тождество. Разсмотримъ произвольное значеніе выраженія A, равное числу a.

Если число a положительное, то правая часть доказываемаго тождества (1) есть число *положительное* при какомъ ни есть p; что же касается лѣвой части, то она имѣетъ опредѣленное *положительное* значеніе при m нечетномъ и два опредѣленныхъ значенія: *положительное* и *отрицательное* при m четномъ.

Если же число a отрицательное, то правая часть доказываемаго тождества будетъ число *положительное*, когда p *четное*, и *отрицательное*, когда p нечетное.

Въ первомъ случаѣ подрадикальное выраженіе $(A)^{mp}$ лѣвой части представляетъ число *положительное*, и радикалъ имѣетъ, при m нечетномъ, только одно *положительное* значеніе и, при m четномъ, два значенія: одно — *положительное* и другое — отрицательное. Во второмъ случаѣ подрадикальное выраженіе $(A)^{mp}$, при m нечетномъ, *отрицательно*, и радикалъ имѣетъ только одно *отрицательное* значеніе; при m же четномъ, оно *положительно*, и радикалъ имѣетъ два значенія: *положительное* и *отрицательное*.

Итакъ, мы видимъ, что всегда можно предполагать знаки у чиселъ: $\sqrt[m]{(a)^{mp}}$ и $(a)^p$ одинаковыми. Это и будемъ предполагать, и въ этомъ смыслѣ докажемъ равенство:

$$\sqrt[m]{(a)^{mp}} = (a)^p. \qquad [1']$$

Мы знаемъ, что корень: $\sqrt[m]{(a)^{mp}}$ не можетъ имѣть болѣе одного положительнаго значенія и не можетъ имѣть болѣе одного отрицательнаго значенія, при чемъ и то, и другое, будучи возвышены въ m-овую степень должны давать $(a)^{mp}$; этому условію удовлетворяетъ число $(a)^p$, ибо

$$[(a)^p]^m = (a)^{pm}.$$

Итакъ, равенство [1′] справедливо при всякомъ a; слѣдовательно, имѣетъ мѣсто тождество [1].

Примѣры. 1°. $\sqrt[m]{a^m}=a$, 2°. $\sqrt[m]{5^m a^{rm} b^{pm} c^{qm}}=\sqrt[m]{(5a^r b^p c^q)^m}=5a^r b^p c^q$,

3°. $\sqrt[5]{(a^2-b)^{10}}=(a^2-b)^2$,

4°. $\sqrt[6]{(\sqrt[5]{a})^{12}}=(\sqrt[5]{a})^2$.

214. Преобразованіе II. *Если подрадикальное выраженіе разлагается на два множителя, изъ которыхъ одинъ представляетъ степень, показатель которой дѣлится на показателя радикала, то множитель этотъ можетъ быть помѣщенъ множителемъ передъ радикаломъ съ показателемъ, равнымъ частному отъ раздѣленія его первоначальнаго показателя на показателя радикала, т.-е.*

$$\sqrt[m]{A^{mp}B}=A^p\sqrt[m]{B} \qquad [2]$$

тождественно.

Замѣтимъ, что здѣсь оба радикала: $\sqrt[m]{A^{mp}B}$ и $\sqrt[m]{B}$ теряютъ смыслъ при B отрицательномъ и при m четномъ, ибо, при m четномъ, выраженіе A^{mp} имѣетъ всегда положительное значеніе; далѣе, всегда можно выбрать значенія обоихъ радикаловъ съ одинаковыми знаками; напримѣръ, если m нечетное, p четное, A и B отрицательныя, тогда радикалъ: $\sqrt[m]{A^{mp}B}$ имѣетъ только отрицательное значеніе, ибо подрадикальное выраженіе отрицательно, но и радикалъ $A^p\sqrt[m]{B}$ отрицательный, ибо A^p положительное, а $\sqrt[m]{B}$ отрицательный.

Для доказательства нашего тождества разсмотримъ произвольныя значенія a и b выраженій: A и B, но только такія, при которыхъ радикалы имѣютъ смыслъ, и докажемъ равенство:

$$\sqrt[m]{a^{mp}b}=a^p\sqrt[m]{b}.$$

Оно имѣетъ мѣсто, ибо (**194**)

$$(a^p\sqrt[m]{b})^m=(a^p)^m\cdot(\sqrt[m]{b})^m=a^{mp}b.$$

Такъ какъ доказанное равенство имѣетъ мѣсто при всякихъ a и b, для которыхъ радикалы имѣютъ смыслъ, то тождество (2) имѣетъ мѣсто.

Примѣръ. $\sqrt[6]{2^7a^{15}b^{19}(c-d)^7}=\sqrt[6]{2^6a^{12}b^{18}(c-d)^6\cdot 2a^3b(c-d)}=$

$$=2a^2b^3(c-d)\sqrt[6]{2a^3b(c-d)}.$$

215. Слѣдствіе. Тождество (2) можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$A^p\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{A^{mp}B}.$$

Оно говоритъ: *множитель, помѣщенный передъ знакомъ радикала, можетъ быть сдѣланъ множителемъ подъ знакомъ радикала, если мы возвысимъ его въ степень, показатель которой равенъ показателю радикала.*

Примѣръ. $2a^2(c-d)^2\sqrt[3]{gh}=\sqrt[3]{8a^6(c-d)^6gh}.$

216. Преобразованіе III. *Значеніе радикала не измѣнится, если мы умножимъ показателя радикала на какое ни есть цѣлое и положительное число и возвысимъ подрадикальное выраженіе въ степень, показатель которой равенъ этому числу, т.-е.*

$$\sqrt[m]{A}=\sqrt[mp]{A^p}. \qquad [3]$$

Замѣтимъ, что, при A отрицательномъ, m четномъ и p нечетномъ, оба радикала теряютъ смыслъ; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ знаки радикаловъ могутъ быть выбраны одинаковыми; напримѣръ, при A отрицательномъ, m нечетномъ и p четномъ, лѣвый радикалъ имѣетъ отрицательное значеніе, а правый — и положительное и отрицательное значенія, и мы выбираемъ отрицательное значеніе. Для доказательства тождества возьмемъ произвольное значеніе a для выраженія A, лишь бы только оба радикала имѣли смыслъ, и докажемъ равенство:

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mp]{a^p};$$

оно имѣетъ мѣсто, ибо (**194**)

$$(\sqrt[m]{a})^{mp}=[(\sqrt[m]{a})^m]^p=a^p.$$

Такъ какъ доказанное равенство имѣетъ мѣсто при всякомъ a, то тождество [3] дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

Примѣръ. $\sqrt[3]{2c^2d^5(a-b)^4}=\sqrt[6]{2^2c^4d^{10}(a-b)^8}.$

217. Слѣдствіе. Тождество (4), будучи написано въ видѣ:

$$\sqrt[mp]{A^p}=\sqrt[m]{A}.$$

говоритъ: *если подрадикальное выраженіе можетъ быть представлено степенью, на показатель которой дѣлится показатель радикала, то можно показатель радикала раздѣлить на показателя этой степени, а изъ подрадикальнаго выраженія извлечь корень, показатель котораго равенъ показателю этой степени.*

Примѣръ. $\sqrt[20]{a^{30}b^{70}c^{10}}=\sqrt[20]{(a^3b^7c)^{10}}=\sqrt{a^3b^7c}$.

218. Приведеніе радикаловъ къ одному показателю. *Два радикала приводятся къ одному и тому же показателю, если мы умножимъ показателя одного радикала на показателя другаго и возвысимъ его подкоренное выраженіе въ степень, показатель которой равенъ этому показателю.*

Подобнымъ же образомъ приводятся къ одному показателю нѣсколько радикаловъ. Радикалы:

$$\sqrt[m]{a^\alpha},\ \sqrt[n]{b^\beta},\ \sqrt[p]{c^\gamma},\ \sqrt[q]{d^\delta};$$

послѣ этого преобразованія, обращаются соотвѣтственно въ радикалы:

$$\sqrt[mnpq]{a^{\alpha npq}},\ \sqrt[mnpq]{b^{\beta mpq}},\ \sqrt[mnpq]{c^{\gamma mnq}},\ \sqrt[mnpq]{d^{\delta mnp}}.$$

Правила эти имѣютъ аналогію съ правилами приведенія дробей къ одному знаменателю.

Можно распространить аналогію далѣе и *присвоить каждому радикалу показателя, равнаго наименьшему кратному данныхъ показателей.*

Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что μ означаетъ общее наименьшее кратное показателей m, n, p, q, такъ что

$$\mu=mm',\ \mu=nn',\ \mu=pp',\ \mu=qq';$$

умноживъ каждаго показателя соотвѣтственно на m', n', p', q', преобразуемъ радикалы въ слѣдующіе:

$$\sqrt[mm']{a^{\alpha m'}},\ \sqrt[nn']{b^{\beta n'}},\ \sqrt[pp']{c^{\gamma p'}},\ \sqrt[qq']{d^{\delta q'}},$$

или

$$\sqrt[\mu]{a^{\alpha m'}},\ \sqrt[\mu]{b^{\beta n'}},\ \sqrt[\mu]{c^{\gamma p'}},\ \sqrt[\mu]{d^{\delta q'}}.$$

219. Подобные радикалы. Радикалы съ однимъ и тѣмъ же показателемъ, обладающіе однимъ и тѣмъ же подрадикальнымъ выраженіемъ, называются *подобными*. Радикалы эти могутъ отличаться, слѣдовательно, другъ отъ друга только раціональными коэффиціентами.

Иногда радикалы, повидимому неподобные, могутъ быть преобразованы въ подобные радикалы.

Найдемъ необходимыя и достаточныя условія подобнаго преобразованія. Для этой цѣли приведемъ радикалы къ одному и тому же показателю (**218**). Положимъ, что данные радикалы суть $\sqrt[m]{A}$, $\sqrt[m]{B}$, $\sqrt[m]{C}$. Представимъ эти радикалы соотвѣтственно въ такомъ видѣ:

$$\sqrt[m]{A},\ \sqrt[m]{\frac{B}{A}\cdot A},\ \sqrt[m]{\frac{C}{A}\cdot A}.$$

Для того, чтобы преобразованіе удалось, необходимо и достаточно, чтобы множители $\frac{B}{A}$ и $\frac{C}{A}$ могли быть вынесены за знаки радикаловъ, т.-е. чтобы они представляли m-овыя степени раціональныхъ выраженій.

Итакъ, *для того, чтобы радикалы съ однимъ и тѣмъ же показателемъ m могли быть сдѣланы подобными, необходимо и достаточно, чтобы частныя отъ дѣленія подрадикальныхъ выраженій на подрадикальное выраженіе одного изъ радикаловъ представляли m-овыя степени раціональныхъ выраженій.*

Примѣры.

1°. Даны радикалы: $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{25}}$, $\sqrt[3]{-0{,}625}$.

Дѣлимъ подрадикальныя выраженія: $\frac{1}{25}$ и $-0{,}625$ на 40; частныя суть $\frac{1}{1000}$, $-\frac{1}{64}$ и представляютъ соотвѣтственно кубы чиселъ: $\frac{1}{10}$ и $-\frac{1}{4}$. Итакъ:

$$\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{40},\ \sqrt[3]{\frac{1}{25}}=\frac{1}{10}\sqrt[3]{40},\ \sqrt[3]{-0{,}625}=-\frac{1}{4}\sqrt[3]{40}.$$

Замѣтимъ, что $\sqrt[3]{40}=2\sqrt[3]{5}$.

2°. Даны радикалы:

$$\sqrt[3]{8a^9-8a^6b^3},\ \sqrt[3]{a^3b^3-a^6},\ \sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}},\ \sqrt[3]{a^{-3}b^3-\frac{b^6}{a^6}}.$$

Для удобства упростимъ (**214**) одинъ изъ радикаловъ.

Возьмемъ, напримѣръ, второй радикалъ:

$$\sqrt[3]{a^3b^3-a^6}=\sqrt[3]{a^3(b^3-a^3)}=a\sqrt[3]{b^3-a^3}=-a\sqrt[3]{a^3-b^3}.$$

Дѣлимъ, далѣе, подрадикальныя выраженія остальныхъ радикаловъ на подрадикальное выраженіе (a^3-b^3) этого радикала. Частныя отъ раздѣленія суть: $8a^6, -\frac{1}{b^3}, \frac{b^3}{a^6}$ и представляютъ соотвѣтственно кубы раціональныхъ выраженій: $2a^2, -\frac{1}{b}, \frac{b}{a^2}$.

Радикалы преобразовываются въ подобные:

$$-a\sqrt[3]{a^3-b^3},\ 2a^2\sqrt[3]{a^3-b^3},\ -\frac{1}{b}\sqrt[3]{a^3-b^3},\ \frac{b}{a^2}\sqrt[3]{a^3-b^3}.$$

§ II. Дѣйствія надъ радикалами.

220. Сложеніе и вычитаніе. *Сумма или разность подобныхъ радикаловъ тождественна подобному имъ радикалу, коэффиціентъ котораго равенъ суммѣ или разности коэффиціентовъ данныхъ радикаловъ.*

Примѣръ. Преобразованіе выраженія

$$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{1000a^2x^5}+2x^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}-12ax^2\sqrt[3]{-\frac{1}{64ax}}.$$

Имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{1000a^2x^5}=5x\sqrt[3]{a^2x^2},$$

$$2x^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}=2x^2\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{x}:a^2x^2\right)\cdot a^2x^2}=2x\sqrt[3]{a^2x^2},$$

$$-12ax^2\sqrt[3]{-\frac{1}{64ax}}=-12ax^2\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{64ax}:a^2x^2\right)\cdot a^2x^2}=3x\sqrt[3]{a^2x^2},$$

а потому

$$S=5x\sqrt[3]{a^2x^2}+2x\sqrt[3]{a^2x^2}+3x\sqrt[3]{a^2x^2}=10x\sqrt[3]{a^2x^2}.$$

221. Умноженіе. *Произведеніе радикаловъ съ однимъ и тѣмъ же показателемъ тождественно радикалу съ тѣмъ же показателемъ, подрадикальное выраженіе котораго равно произведенію подрадикальныхъ выраженій данныхъ радикаловъ, т.-е.*

$$\sqrt[m]{A}\cdot\sqrt[m]{B}\cdot\sqrt[m]{C}\cdot\sqrt[m]{D}=\sqrt[m]{ABCD}. \tag{4}$$

Здѣсь знаки радикаловъ должны быть выбраны такимъ образомъ, чтобы обѣ части тождества имѣли одинъ и тотъ же знакъ.

Для доказательства преобразованія возьмемъ произвольныя значенія: a, b, c, d для A, B, C, D и докажемъ равенство:

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}\cdot\sqrt[m]{d}=\sqrt[m]{abcd}.$$

Оно имѣетъ мѣсто, ибо (**194**)

$$\left(\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}\cdot\sqrt[m]{c}\cdot\sqrt[m]{d}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\cdot\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\cdot\left(\sqrt[m]{c}\right)^m\cdot\left(\sqrt[m]{d}\right)^m=abcd.$$

Если показатели радикаловъ различны, то радикалы эти приводятся сперва къ одному показателю. Напримѣръ,

$$\sqrt[p]{a^\alpha}\cdot\sqrt[q]{a^\beta}\cdot\sqrt[r]{a^\gamma}=\sqrt[pqr]{a^{\alpha qr}}\cdot\sqrt[pqr]{a^{\beta pr}}\cdot\sqrt[pqr]{a^{\gamma pq}}=\sqrt[pqr]{a^{\alpha qr+\beta pr+\gamma pq}}.$$

Если радикалы обладаютъ численными или буквенными коэффиціентами, то коэффиціенты эти перемножаются отдѣльно. Такимъ образомъ:

$$3h\sqrt[p]{a^\alpha}\cdot 4k\sqrt[q]{a^\beta}=12hk\sqrt[pq]{a^{\alpha q+\beta p}}.$$

222. Дѣленіе. *Частное отъ раздѣленія радикаловъ съ однимъ и тѣмъ же показателемъ тождественно радикалу съ тѣмъ же показателемъ, подрадикальное выраженіе котораго равно частному отъ раздѣленія подрадикальныхъ выраженій данныхъ радикаловъ, т.-е.*

$$\frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}=\sqrt[m]{\frac{A}{B}}. \tag{5}$$

Здѣсь при m четномъ и A и B отрицательныхъ лѣвая часть теряетъ смыслъ, а правая его сохраняетъ, слѣдовательно этотъ случай долженъ быть исключенъ изъ разсмотрѣнія; при m четномъ и при отрицательномъ A или B и лѣвая и правая части — обѣ теряютъ смылъ, и этотъ случай исключается изъ разсмотрѣнія; во всѣхъ остальныхъ случаяхъ знаки радикаловъ должны быть взяты такимъ образомъ, чтобы обѣ части имѣли одинъ и тотъ же знакъ.

Разсмотримъ теперь произвольныя значенія a и b выраженій A и B съ тѣми ограниченіями, которыя указали, и докажемъ равенство:

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Оно имѣетъ мѣсто, ибо **(194)**

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m}=\frac{a}{b},$$

и, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто и тождество (5).

Если показатели радикаловъ различны, то приводимъ радикалы къ одному и тому же показателю. Такимъ образомъ:

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}}=\frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}}=\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

Если радикалы обладаютъ коэффиціентами, то раздѣляемъ эти коэффиціенты отдѣльно. Такимъ образомъ:

$$\frac{3h\sqrt[p]{a^m}}{4k\sqrt[q]{b^n}}=\frac{3h}{4k}\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

223. Степени радикала. *Степень радикала тождественна радикалу, съ тѣмъ же показателемъ, подрадикальное выраженіе котораго равно степени подрадикальнаго выраженія даннаго радикала, т.-е.*

[6] $$\left(\sqrt[m]{A}\right)^p=\sqrt[m]{A^p}.$$

Сдѣлавъ замѣчанія относительно смысла радикаловъ и знаковъ, аналогичныя предъидущимъ замѣчаніямъ, выберемъ произвольное значеніе a для выраженія A и докажемъ равенство:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^p=\sqrt[m]{a^p}.$$

Оно имѣетъ мѣсто, ибо (**194**)

$$\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^p\right]^m=\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^p=(a)^p=a^p,$$

а, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто и тождество (6).

Если радикалъ обладаетъ коэффиціентомъ, то коэффиціентъ этотъ возвышается въ ту же степень. Такимъ образомъ:

$$\left(h\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p=h^p\sqrt[m]{a^{\alpha p}}.$$

224. Корни радикала. *Корень радикала тождественъ радикалу, показатель котораго равенъ произведенію показателя даннаго радикала на показателя корня, т.-е.*

[7] $$\sqrt[p]{\sqrt[m]{A}}=\sqrt[mp]{A}.$$

Сдѣлавъ замѣчанія относительно смысла радикаловъ и знаковъ, аналогичныя предъидущимъ замѣчаніямъ, выберемъ произвольное значеніе a для выраженія A и докажемъ равенство:

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mp]{a}.$$

Оно имѣетъ мѣсто, ибо (**194**)

$$\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mp}=\left[\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a}}\right)^p\right]^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a,$$

а, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто и тождество (7).

Примѣръ. Дано выраженіе: $\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{a^{-1}x^{-1}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}}$; требуется преобразовать это выраженіе въ тождественный ему радикалъ. Для этой цѣли подводимъ множителя $\frac{a}{x}$ подъ знакъ радикала $\sqrt{}$ и образовавшагося послѣ этого множителя ax^{-3} подводимъ подъ второй знакъ $\sqrt{}$ и потомъ уже дѣлаемъ предъидущее преобразованіе. Такимъ образомъ,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{x}\sqrt{a^{-1}x^{-1}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}}=\sqrt[3]{\sqrt{ax^{-3}\sqrt{\frac{a}{x^3}}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^3x^{-9}}}}=\sqrt[12]{a^3x^{-9}}=\sqrt[4]{ax^{-3}}.$$

§ III. Дробные показатели.

225. Опредѣленіе. Мы видѣли (**213**), что для извлеченія корня, показателя p, изъ количества, представляющаго степень, показатель которой есть число кратное p, достаточно раздѣлить этого показателя на число p.

Такимъ образомъ $\sqrt[p]{a^{qp}} = a^q$. Если же показатель этотъ не есть кратное p, то дѣленіе невозможно, и тогда корень, съ показателемъ p, изъ выраженія a^m можетъ изобразиться только знакомъ: $\sqrt[p]{a^m}$.

Однако, еслибы мы согласились приложить предъидущее правило и къ этому случаю, то должны были бы написать: $a^{\frac{m}{p}}$.

Отсюда слѣдуетъ, что мы сохранимъ для предъидущаго правила всю его общность, если согласимся представлять радикалъ $\sqrt[p]{a^m}$ символомъ $a^{\frac{m}{p}}$.

Мы примемъ, какъ опредѣленіе, что *выраженіе a, которому присвоенъ дробный показатель $\frac{m}{p}$, представляетъ радикалъ, показатель котораго равенъ знаменателю p и подрадикальное выраженіе котораго представляетъ степень выраженія a, показатель которой равенъ числителю m.*

Мы увидимъ сейчасъ, что соглашеніе это позволитъ очень просто выразить предъидущіе результаты.

Мы увидимъ впослѣдствіи, что это обобщеніе представленія о показателѣ будетъ играть большую роль.

Замѣтимъ сейчасъ же, что выраженіе $a^{\frac{m}{p}}$ сохранитъ свое значеніе, если мы замѣнимъ показателя $\frac{m}{p}$ равною ему дробью $\frac{m'}{p'}$.

Другими словами, если $\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}$, то

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}},$$

или, вслѣдствіе нашего соглашенія,

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Это равенство очевидно: радикалы, по приведеніи къ одному показателю, получаютъ равныя подрадикальныя выраженія: $a^{mp'}$ и

$a^{m'p}$, ибо равенство $\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}$ заключаетъ въ себѣ равенство $mp' = m'p$.

226. Обобщеніе правила показателей при умноженіи. Мы доказали (**33**), для показателей цѣлыхъ и положительныхъ, формулу

[1] $$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Формула эта продолжаетъ имѣть мѣсто, если одинъ изъ показателей m или n, или оба совмѣстно, дробные.

Положимъ сперва, что m число дробное, равное $\frac{p}{q}$, причемъ n остается цѣлымъ. По опредѣленію и на основаніи преобразованія II (**215**) найдемъ:

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^n = \sqrt[q]{a^p} \cdot a^n = \sqrt[q]{a^p \cdot a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p+nq}};$$

послѣднее выраженіе, вслѣдствіе нашего соглашенія, символически изображается такимъ образомъ: $a^{\frac{p+nq}{q}} = a^{\frac{p}{q}+n}$, а потому

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}+n}.$$

Положимъ далѣе, что оба множителя обладаютъ дробными показателями: $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{t}$; получимъ:

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{t}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[t]{a^r} = \sqrt[qt]{a^{pt}} \cdot \sqrt[qt]{a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt+rq}}.$$

Послѣдній радикалъ изображается символически такимъ образомъ: $a^{\frac{pt+rq}{qt}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}}$, а потому

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}}.$$

227. Обобщеніе правила показателей при дѣленіи. Мы имѣли (**95**) для цѣлыхъ и положительныхъ m и n:

[2] $$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Формула эта остается справедливою, если m или n, или оба совмѣстно, дробные.

Положимъ сперва, что $m=\frac{p}{q}$, n цѣлое.

Будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p-nq}}.$$

Принявъ во вниманіе, что послѣдній радикалъ символически изображается: $a^{\frac{p-nq}{q}}$ или $a^{\frac{p}{q}-n}$, получимъ:

$$a^{\frac{p}{q}} : a^n = a^{\frac{p}{q}-n}.$$

Положимъ потомъ, что m цѣлое, $n=\frac{p}{q}$; найдемъ:

$$a^m : a^n = a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^m : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq-p}}.$$

Принявъ во вниманіе, что послѣдній радикалъ символически изображается: $a^{\frac{mq-p}{q}}$ или $a^{m-\frac{p}{q}}$, найдемъ:

$$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}.$$

Пусть, наконецъ, $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{t}$; получимъ:

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[t]{a^r} = \sqrt[qt]{a^{pt}} : \sqrt[qt]{a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt-rq}};$$

такъ какъ послѣдній радикалъ изображается символически въ видѣ: $a^{\frac{pt-rq}{qt}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}}$, то

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}}.$$

228. Обобщеніе правила показателей при образованіи степеней. Мы доказали (**34**), для цѣлыхъ и положительныхъ m и n, формулу

[3] $$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Она остается справедливою, если m или n, или оба совмѣстно, дробные.

Положимъ сперва, что $m = \frac{p}{q}$, n цѣлое; получимъ:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^n = \sqrt[q]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{q}} = a^{\frac{p}{q}\cdot n} = a^{mn}.$$

Предположимъ наоборотъ, что m цѣлое и $n = \frac{p}{q}$; будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m\cdot\frac{p}{q}} = a^{mn}.$$

Пусть, наконецъ, $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{t}$; получимъ:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{t}} = \sqrt[t]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[tq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{tq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{t}} = a^{mn}.$$

229. Обобщеніе правила показателей при извлеченіи корней. Мы видѣли (225), что, для цѣлыхъ и положительныхъ m и n, имѣетъ мѣсто формула:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Формула эта представляетъ формулу доказанную, въ случаѣ n дѣлящагося на m, и формулу условную, когда дѣленіе невозможно. Формула эта остается справедливою, если m или n, или оба совмѣстно, дробные.

Положимъ сперва, что m цѣлое и $n = \frac{p}{q}$. Имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[mq]{a^p} = a^{\frac{p}{mq}} = a^{\frac{p}{q}:m} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ теперь, что $m = \frac{p}{q}$, n цѣлое.

Мы будемъ называть корнемъ числа a^n, съ дробнымъ показателемъ $\frac{p}{q}$, такое число x, которое, будучи возвышено въ степень, показатель которой равенъ $\frac{p}{q}$, дастъ a^n. Итакъ:

$$x^{\frac{p}{q}} = a^n, \text{ или } \sqrt[q]{x^p} = a^n.$$

Возвысивъ обѣ части этого равенства въ q-ую степень и извлекши потомъ корень степени p изъ обѣихъ частей, найдемъ:

$$x^p = a^{nq},\ x = \sqrt[p]{a^{nq}} = a^{\frac{nq}{p}} = a^{n : \frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Пусть, наконецъ, $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{t}$. Положимъ, что символъ

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{t}}}$$

представляетъ такое выраженіе x, которое, будучи возвышено въ степень съ показателемъ $\frac{p}{q}$, дастъ $a^{\frac{r}{t}}$. Будемъ имѣть послѣдовательно:

$$x^p = \sqrt[t]{a^{qr}},\ x = \sqrt[pt]{a^{rq}} = a^{\frac{rq}{pt}} = a^{\frac{r}{t} : \frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}}.$$

230. Обобщеніе въ тѣхъ случаяхъ, когда дробные показатели отрицательные. До сихъ поръ мы предполагали, что числа m и n суть числа положительныя.

Различныя формулы, которыя мы обобщили, остаются справедливыми и въ тѣхъ случаяхъ, когда дадимъ дробнымъ показателямъ отрицательныя значенія, если условимся представлять символомъ: $a^{-\frac{p}{q}}$ выраженіе: $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, или, что то же, выраженіе: $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

И въ самомъ дѣлѣ, если для всѣхъ положительныхъ значеній m, цѣлыхъ или дробныхъ, имѣетъ всегда мѣсто формула:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

то тѣ разсужденія, которыя мы дѣлали (95) для распространенія формулъ на случаи показателей цѣлыхъ и отрицательныхъ, прилагаются, безъ измѣненія, къ тѣмъ случаямъ, когда показатели эти суть дробные и отрицательные.

Замѣтимъ, что формула [2] (227) справедлива, если $m < n$, только при томъ новомъ соглашеніи, которое было сейчасъ сдѣлано.

Остается сдѣлать одно обобщеніе, относящееся къ извлеченію корней. Имѣемъ (229) для всѣхъ положительныхъ значеній m и n, цѣлыхъ или дробныхъ, формулу:

[4] $$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Формула эта остается справедливою, когда m или n, или оба совмѣстно, отрицательные.

Положимъ, что n отрицательное, равное $(-n')$, m положительное; получимъ:

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[m]{a^{-n'}}=\sqrt[m]{\frac{1}{a^{n'}}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^{n'}}}=\frac{1}{a^{\frac{n'}{m}}}=a^{-\frac{n'}{m}}=a^{-n':m}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Положимъ теперь, что m отрицательное, равное $(-m')$, n положительное; условимся называть $\sqrt[-m']{a^n}$ такое количество x, которое, будучи возвышено въ $(-m')$-ую степень, дастъ a^n. Итакъ,

$$x^{-m'}=a^n,\ \text{или}\ \frac{1}{x^{m'}}=a^n,\ \text{или}\ x^{m'}=\frac{1}{a^n}=a^{-n},$$

и, слѣдовательно,

$$x=\sqrt[m']{a^{-n}}=a^{\frac{-n}{m'}}=a^{n:-m'}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ, наконецъ, что $m=-m'$, $n=-n'$. Назовемъ $\sqrt[-m']{a^{-n'}}$ такое количество x, которое, будучи возвышено въ $(-m')$-ую степень, воспроизведетъ $a^{-n'}$. Итакъ,

$$x^{-m'}=a^{-n'},\ \text{или}\ \frac{1}{x^{m'}}=\frac{1}{a^{n'}},\ \text{откуда}\ x^{m'}=a^{n'}.$$

Равенство это дастъ:

$$x=\sqrt[m']{a^{n'}}=a^{\frac{n'}{m'}}=a^{\frac{-n'}{-m'}}=a^{\frac{n}{m}}.$$

Изложенное выше показываетъ, что всѣ наши формулы, относящіяся къ умноженію, дѣленію, возвышенію въ степени и извлеченію корней, суть общія: онѣ распространяются на всякія значенія показателей, положительныя и отрицательныя, цѣлыя и дробныя.

§ IV. Приложенія.

231. Преобразованіе знаменателя дроби въ раціональное выраженіе. Если знаменатель дроби содержитъ одинъ или нѣсколько радикаловъ, то часто полезно, особенно при численныхъ приближеніяхъ, освободить его отъ радикаловъ, сдѣлать его *раціональнымъ*.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

1°. Дано $\frac{m}{\sqrt{a}}$. Умноживъ оба члена дроби на $\sqrt{a}$, найдемъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}}=\frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2°. Дано $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Умноживъ оба члена дробей на $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, обратимъ знаменателя въ разность квадратовъ и найдемъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

3°. Подобнымъ же образомъ: $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$

4°. И еще: $\frac{m}{\sqrt{a}\pm b}=\frac{m(\sqrt{a}\mp b)}{a-b^2}$.

5°. Дано: $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Умноживъ оба члена на $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ и разсмотрѣвъ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, какъ одно количество, обратимъ знаменателя въ произведеніе суммы на разность, такъ что

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a+b-c)-2\sqrt{ab}};$$

въ знаменателѣ остался только одинъ радикалъ, и получился четвертый случай.

6°. Дано: $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}$. Разсмотрѣвъ знаменателя, какъ сумму двухъ количествъ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})+(c-\sqrt{d})$, умножаемъ оба члена на разность тѣхъ же количествъ и находимъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-c+\sqrt{d})}{(a+b-c^2-d)-2\sqrt{ab}+2c\sqrt{d}};$$

знаменатель содержитъ только три члена, а потому вопросъ приводится къ пятому случаю.

7°. Пусть теперь дано: $\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. Извѣстно, что

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3.$$

Умноживъ оба члена дроби на $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$, найдемъ

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a^2})}{a+b}.$$

8°. Подобнымъ же образомъ:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

9°. Дано: $\frac{m}{\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}}$. Принявъ во вниманіе, что

$$(\alpha-\beta)(\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{p-2}+\beta^{p-1})=\alpha^p-\beta^p,$$

получимъ:

$$\frac{m}{\sqrt[p]{a}-\sqrt[p]{b}}=\frac{m(\sqrt[p]{a^{p-1}}+\sqrt[p]{a^{p-2}b}+\ldots+\sqrt[p]{b^{p-1}})}{a-b}.$$

10°. Дано: $\frac{m}{\sqrt[p]{a}+\sqrt[p]{b}}$. Если p нечетное, то

$$(\alpha+\beta)(\alpha^{p-1}-\alpha^{p-1}\beta+\ldots-\alpha\beta^{p-2}+\beta^{p-1})=\alpha^p+\beta^p,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{m}{\sqrt[p]{a}+\sqrt[p]{b}}=\frac{m(\sqrt[p]{a^{p-1}}-\ldots+\sqrt[p]{b^{p-1}})}{a+b}.$$

Если же p четное, то

$$(\alpha+\beta)(\alpha^{p-1}-\alpha^{p-2}\beta+\ldots-\beta^{p-1})=\alpha^p-\beta^p,$$

такъ что

$$\frac{m}{\sqrt[p]{a}+\sqrt[p]{b}}=\frac{m(\sqrt[p]{a^{p-1}}\ldots-\sqrt[p]{b^{p-1}})}{a-b}.$$

§ V. Неравенства, содержащія корни.

232. Свойства. 1°. *Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей неравенства, всегда можно извлечь изъ нихъ корень нечетнаго показателя,* ибо знаки корней будутъ одинаковы со знаками чиселъ.

Такимъ образомъ:

неравенство: $-8>-27$ даетъ: $\sqrt[3]{-8}>\sqrt[3]{-27}$, или $-2>-3$;

неравенство: $27>-8$ даетъ: $\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{-8}$. или $3>-2$;

неравенство: $27>8$ даетъ: $\sqrt[3]{27}>\sqrt[3]{8}$, или $3>2$.

2^0. *Если показатель четный, то необходимо, для существованія корней, чтобы обѣ части неравенства были положительныя,* и тогда *каждый корень будетъ обладать двумя значеніями, равными по величинѣ, но противоположными по знаку.*

Въ этомъ случаѣ *неравенство сохранитъ свой смыслъ или его измѣнитъ, смотря по тому, разсмотримъ ли мы положительныя или отрицательныя значенія корней.* Такимъ образомъ неравенство:

$$36>25.$$

даетъ:
$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{36}>\sqrt{25},\ \text{или}\ 6>5.\\ -\sqrt{36}<-\sqrt{25},\ \text{или}\ -6<-5.\end{array}\right.$$

Если же мы возьмемъ различные знаки для обоихъ корней, то отрицательная часть всегда будетъ меньшею. Такимъ образомъ неравенство:

$$36>25$$

даетъ:
$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{36}>-\sqrt{25},\ \text{или}\ 6>-5.\\ \sqrt{25}>-\sqrt{36},\ \text{или}\ 5>-6.\end{array}\right.$$

Упражненія.

I. Упростить выраженіе

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

Отв.
$$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}.$$

II. Показать, что значеніе

$$x=\left[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

уничтожаетъ выраженіе $x^3+3px+2q$ при какихъ бы то ни было p и q.

III. Упростить выраженіе

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Отв. $$4x\sqrt{x^2-1}.$$

IV. Упростить выраженіе

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Отв. $$\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}.$$

V. Упростить выраженіе

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

Отв. $$\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

VI. Во что обратится выраженіе $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$, если $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$?

Отв. Оно обратится въ единицу.

VII. Во что обратится выраженіе $2(uv-\sqrt{u^2-1}.\ \sqrt{v^2-1})$, если сдѣлаемъ $2u=x+\frac{1}{x}$, $2v=y+\frac{1}{y}$?

Оно обратится въ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

VIII. Во что обратится, при томъ же предположеніи, выраженіе

$$2(uv+\sqrt{u^2-1}\,.\,\sqrt{v^2-1})?$$

Оно обратится въ $xy+\frac{1}{xy}$.

IX. Во что обратится выраженіе $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, если мы сдѣлаемъ $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)$? Оно сдѣлается равныхъ $a+b$.

X. Во что обратится выраженіе $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, если сдѣлаемъ $x=\frac{2ab}{1+b^2}$. Оно сдѣлается равнымъ b.

XI. Найти множителей, дѣлающихъ раціональными слѣдующія выраженія:

$$a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}},\ \sqrt{2}-\sqrt[3]{3},\ \sqrt{3}+\sqrt[3]{5}.$$

XII. Показать, что $\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$.

КНИГА II.

Уравненія первой степени.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Общія теоремы, относящіяся къ уравненіямъ, разсматриваемымъ отдѣльно.

---

§ I. Опредѣленія.

233. Равенство. Два количества, отдѣленныя знакомъ $=$, образуютъ равенство.

234. Тождество. *Тождествомъ* называется выраженіе равенства между двумя численными количествами или выраженіе равенства между двумя формулами, имѣющаго мѣсто для всякихъ частныхъ значеній буквъ, входящихъ въ эти формулы. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что равенства: $5=5$, $8=7+1$, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$ суть тождества.

235. Уравненіе. *Уравненіемъ* называется *равенство, имѣющее мѣсто только для нѣкоторыхъ частныхъ значеній буквъ, входящихъ въ это равенство.*

Такимъ образомъ равенство:

$$3x-13=15-x$$

представляетъ уравненіе, ибо оно, имѣя мѣсто при $x = 7$, не существуетъ, напримѣръ, для $x = 6, 12, -\frac{1}{3}, 0$, и т. д.

Уравненіе состоитъ изъ двухъ *частей;* части эти суть тѣ выраженія, которыя отдѣлены знакомъ $=$. Первая часть помѣщена влѣво отъ знака, вторая — вправо отъ него.

Тѣ буквы, частныя значенія которыхъ преобразовываютъ уравненіе въ тождество, называются *неизвѣстными* уравненія; самыя же частныя значенія называются *рѣшеніями* уравненія или его *корнями*. Корни эти иногда бываютъ численные, иногда же представляются формулами.

Неизвѣстныя означаются обыкновенно послѣдними буквами алфавита: $x, y, z, \ldots$

Рѣшить уравненіе, значитъ опредѣлить его корни. Принято говорить, что корни уравненія *повѣряютъ* это уравненіе, *удовлетворяютъ* этому уравненію.

Рѣшеніе уравненій и изученіе свойствъ ихъ корней составляютъ истинную цѣль алгебры.

236. Уравненія равнозначущія (эквивалентныя). Два уравненія, заключающія однѣ и тѣ же неизвѣстныя, называются *равнозначущими* (эквивалентными), *если они обладаютъ одними и тѣми же рѣшеніями*. Очевидно, что, при рѣшеніи уравненій, мы можемъ замѣнять одно уравненіе другимъ, ему эквивалентнымъ.

237. Уравненіе съ однимъ или со многими неизвѣстными. Уравненія различаются по числу неизвѣстныхъ, входящихъ въ эти уравненія; существуютъ, такимъ образомъ, уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ x, съ двумя неизвѣстными x и y, съ тремя неизвѣстными x, y, z, и такъ далѣе.

238. Степень уравненія. Если обѣ части уравненія представляютъ раціональныя и цѣлыя выраженія относительно неизвѣстныхъ, то *степенью уравненія называется сумма показателей неизвѣстныхъ въ томъ членѣ выраженій, составляющихъ уравненіе, въ которомъ сумма эта наибольшая.*

Примѣры.
$$3x - 7 = 8 - 2x$$

представляетъ уравненіе *первой* степени съ *однимъ* неизвѣстнымъ x;

$$4xy - 3x = 2 - 5y$$

представляетъ уравненіе *второй* степени съ *двумя* неизвѣстными x и y.

II. Теоремы о равносильности уравненій.

239. Если обозначимъ обѣ части уравненія, содержащія неизвѣстныя: x, y, z, . . . , такимъ образомъ: $f(x, y, z, \ldots)$ и $F(x, y, z, \ldots)$, то уравненіе представится въ видѣ:

$$f(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots).$$

Замѣнивъ въ выраженіяхъ f и F буквы: x, y, z, . . . частными значеніями: a, b, c, . . . , получимъ два количества: $f(a, b, c, \ldots)$ и $F(a, b, c, \ldots)$. Если окажется, что

$$f(a, b, c, \ldots) = F(a, b, c, \ldots)$$

тождественно, то частныя значенія: a, b, c, . . . составляютъ *систему* корней предложеннаго уравненія. Введя эти обозначенія, докажемъ нѣкоторыя теоремы.

240. Теорема I. *Если къ обѣимъ частямъ уравненія прибавимъ одно и то же выраженіе, или вычтемъ изъ нихъ одно и то же выраженіе, содержащее неизвѣстныя или не содержащее ихъ, то получимъ новое уравненіе, эквивалентное предложенному.*

Положимъ, что дано уравненіе

$$[1] \qquad f(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots).$$

Требуется доказать, что оно эквивалентно уравненію

$$[2] \quad f(x, y, z, \ldots) \pm \varphi(x, y, z, \ldots) = F(x, y, z, \ldots) \pm \varphi(x, y, z, \ldots),$$

т.-е. требуется доказать, что всякая система рѣшеній, удовлетворяющихъ уравненію [1], удовлетворяетъ и уравненію [2] и, наоборотъ, что всякая система рѣшеній, удовлетворяющихъ уравненію [2], удовлетворяетъ и уравненію [1].

Возьмемъ какую нибудь систему рѣшеній уравненія [1]: $x = a$, $y = b$, $z = c$, . . ., такъ что получимъ тождественно:

$$[1'] \qquad f(a, b, c, \ldots) = F(a, b, c, \ldots).$$

Ясно, что имѣемъ тождественно:

$$[2'] \qquad \varphi(a, b, c, \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Сложивъ и вычтя послѣдовательно тождества [1′] и [2′] по частямъ, найдемъ:

$$f(a, b, c, \dots) \pm \varphi(a, b, c, \dots) = F(a, b, c, \dots) \pm \varphi(a, b, c, \dots)$$

тождественно. Результатъ этотъ показываетъ, что система: $x=a$, $y=b$, $z=c$, . . . удовлетворяетъ уравненію [2].

Возьмемъ теперь какую нибудь систему рѣшеній уравненія [2]: $x=a'$, $y=b'$, $z=c'$, . . . ; получимъ тождество:

$$[1''] \quad f(a', b', c', \dots) \pm \varphi(a', b', c', \dots) = F(a', b', c', \dots) \pm \varphi(a', b', c', \dots)$$

Сложивъ и вычтя послѣдовательно тождество [1″] и тождество

$$[2''] \qquad -\varphi(a', b', c', \dots) = -\varphi(a', b', c', \dots)$$

по частямъ, найдемъ въ обоихъ случаяхъ:

$$f(a', b', c', \dots) = F(a', b', c', \dots).$$

Результатъ этотъ показываетъ, что система: $x=a', y=b', z=c', \dots$ удовлетворяетъ уравненію [1]. Уравненія [1] и [2], слѣдовательно, эквивалентны.

241. Замѣчаніе. Если бы случилось, что какое нибудь изъ количествъ: $\varphi(a, b, c, \dots)$ и $\varphi(a', b', c', \dots)$ равнялось безконечности, то теорема все таки имѣла бы мѣсто. И въ самомъ дѣлѣ, разсматривая эту безконечность, какъ предѣлъ, къ которому стремится выраженіе $\varphi(x, y, z, \dots)$ въ то время, какъ $x, y, z, \dots$ стремятся соотвѣтственно къ $a, b, c, \dots$, мы постоянно имѣли бы равенство:

$$\varphi(x, y, z, \dots) = \varphi(x, y, z, \dots).$$

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе

$$x-1=2x-3.$$

Уравненіе это имѣетъ рѣшеніемъ $x=2$.

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ этого уравненія выраженіе $\frac{1}{x-2}$, получимъ уравненіе

$$x-1+\frac{1}{x-2}=2x-3+\frac{1}{x-2};$$

мы будемъ считать, что уравненію этому продолжаетъ удовлетворять $x=2$.

Можно было бы возразить, что, при стремленіи x къ 2, лѣвая и правая части принимаютъ значенія неравныя. Онѣ, принимая, дѣйствительно, значенія неравныя, принимаютъ, однако, такія значенія, разности между которыми убываютъ и могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Другое дѣло будетъ, напримѣръ, съ уравненіемъ

$$x-1+\frac{1}{(x-2)^2}=2x-3+\frac{1}{x-2}.$$

Мы не имѣемъ права сказать, что $x=2$ есть корень этого уравненія, хотя и имѣемъ въ обѣихъ частяхъ: $1+\infty$, ибо выраженія: $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{1}{(x-2)^2}$, стремясь, при стремленіи x къ 2, къ безконечности, принимаютъ неравныя значенія, разности между которыми не убываютъ неопредѣленно.

242. Слѣдствіе I. Перенесеніе членовъ. *Можно всегда перенести какой ни есть членъ уравненія изъ одной части въ другую, перемѣнивъ предварительно у него знакъ.*

И въ самомъ дѣлѣ, если переносимый членъ обладаетъ знакомъ $+$, то перенесеніе его въ другую часть со знакомъ $(-)$ равносильно отнятію отъ обѣихъ частей уравненія одного и того же выраженія. Если же переносимый членъ обладаетъ знакомъ $(-)$, то перенесеніе его со знакомъ $(+)$ равносильно прибавленію къ обѣимъ частямъ уравненія одного и того же выраженія [1]).

Дано, напримѣръ, уравненіе

$$2+x=5-3x;$$

прибавивъ къ обѣимъ частямъ $(-x)$, найдемъ:

$$2=5-3x-x;$$

видимъ, что членъ x перешелъ въ другую часть, измѣнивъ знакъ.

243. Слѣдствіе II. *Можно измѣнить совмѣстно знаки всѣхъ членовъ уравненія.* И въ самомъ дѣлѣ, измѣненіе это приводится къ перенесенію всѣхъ членовъ изъ первой части во вторую и къ перенесенію всѣхъ членовъ второй части въ первую.

Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$3-x=15-2x;$$

перемѣстивъ всѣ члены, получимъ:

$$2x-15=x-3, \text{ или } x-3=2x-15;$$

видимъ, что всѣ члены измѣнили знаки.

---

[1]) Перенесеніе положительнаго члена изъ одной части уравненія въ другую называется по арабски **алмюкабала** (противоположеніе); перенесеніе же отрицательнаго члена называется **алжебръ** (возстановленіе); отсюда произошло названіе **алгебры**, которая перешла къ намъ отъ **аравитянъ**.

244. Всякая система рѣшеній, удовлетворяющая одному уравненію и не удовлетворяющая другому, называется *постороннею* этому другому.

Теорема II. *Если умножимъ обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя этого уравненія, то получимъ уравненіе, вообще не эквивалентное данному.*

Разсмотримъ уравненіе

$$S(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) = F(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ). \tag{1}$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на множителя $\omega(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )$, получимъ новое уравненіе

$$S(x,\ y,\ z,\ ...)\ .\ \omega(x,\ y,\ z,\ ...) = F(x,\ y,\ z,\ ...)\ .\ \omega(x,\ y,\ z,\ ...). \tag{2}$$

Обозначивъ, для сокращенія,

$$S(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) - F(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) = \Phi(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )$$

и перенеся правыя части уравненій (1) и (2) налѣво, преобразуемъ уравненія (1) и (2) въ соотвѣтственно эквивалентныя:

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) = 0, \tag{3}$$

$$\omega(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )\ .\ \Phi(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ ) = 0. \tag{4}$$

1°. Разсмотримъ какую нибудь систему рѣшеній уравненія (3):

$$x = a,\ y = b,\ z = c,\ .\ .\ . \tag{5}$$

Если эта система, обращающая въ нуль сомножителя Φ въ лѣвой части уравненія (4), не обратитъ сомножителя ω въ безконечность, то она обратить произведеніе: $\omega\ .\ \Phi$ въ нуль, т.-е. удовлетворитъ уравненію (4), а потому, при замѣнѣ уравненія (3) уравненіемъ (4), непремѣнно появится въ числѣ системъ рѣшеній уравненія (4) и, слѣдовательно, *не потеряется.*

Но предположимъ, что система (5) обращаетъ сомножителя

$$\omega(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )$$

въ безконечность. Очевидно, что

$$lim[\omega(x,\ y,\ z,\ .\ .\ .\ )\ .\ \Phi(x,\ y,\ z,\ )]_{x=a,\ y=b,\ z=c,\ ...}$$

можетъ быть и не равенъ нулю, и тогда система (5) не появится въ числѣ системъ рѣшеній уравненія (4) и представитъ, слѣдовательно, *потерянную систему* рѣшеній уравненія (3).

Итакъ, уравненіе (3) можетъ *потерять* системы рѣшеній; ихъ нужно искать среди системъ рѣшеній уравненія:

$$\omega(x, y, z, \ldots) = \infty, \text{ или } = \text{неопредѣленности.}$$

2°. Разсмотримъ теперь какую нибудь систему рѣшеній уравненія (4):

$$x = a_1, \; y = b_1, \; z = c_1, \ldots \tag{6}$$

Вообразимъ, что эта система удовлетворяетъ уравненію (4) такимъ образомъ:

$$\omega(a_1, b_1, c_1, \ldots) = 0, \; \Phi(a_1, b_1, \ldots) \text{ не } = 0,$$

т.-е., удовлетворяя уравненію (4), не удовлетворяетъ уравненію (3) и, слѣдовательно, оказывается *постороннею* этому уравненію (3).

Итакъ, нѣкоторыя системы рѣшеній уравненія (4) *могутъ* оказаться посторонними предложенному уравненію; этими посторонними системами могутъ быть только системы рѣшеній уравненія:

$$\omega(x, y, z, \ldots) = 0.$$

3°. Итакъ, слѣдовательно, предложенное уравненіе:

$$\Phi(x, y, z, \ldots) = 0,$$

при замѣнѣ его уравненіемъ:

$$\omega(x, y, z, \ldots) \cdot \Phi(x, y, z, \ldots) = 0,$$

можетъ *потерять* системы рѣшеній, но можетъ и *пріобрѣсти* системы рѣшеній, ему не принадлежащія; первыя обращаютъ введеннаго сомножителя $\omega(x, y, z, \ldots)$ въ безконечность или въ неопредѣленность, вторыя обращаютъ его въ нуль.

Примѣры. 1°. Дано уравненіе $(x-1)^2(x-2)=0$. Единственные корни этого уравненія суть: $x=1$. $x=2$. Умноживъ обѣ части этого уравненія на множителя $\frac{1}{(x-1)^2}$, найдемъ: $x-2=0$. Уравненію этому удовлетворяетъ только $x=2$, такъ что корень $x=1$ *потерялся*. Для объясненія причины этой потери напишемъ преобразованное уравненіе такимъ образомъ:

$$\frac{1}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2(x-2)=0.$$

Корень $x=1$ даннаго уравненія придаетъ лѣвой части преобразованнаго неопредѣленную форму: $(\infty\cdot 0)$. Раскрывая эту неопредѣленность, т.-е. находя предѣлъ, къ которому стремится лѣвая часть при стремленіи x къ 1, найдемъ для этого предѣла число (-1), не равное нулю. Съ другой стороны, написавъ преобразованное уравненіе въ видѣ: $x-2=0$, т.-е. *раздѣливъ* лѣвую часть предложеннаго на $(x-1)^2$ и сокративъ потомъ полученную дробь на $(x-1)^2$, мы, въ сущности, и раскрыли неопредѣленность при $x=1$. Потерянный корень обращаетъ въ $+\infty$ множителя $\frac{1}{(x-1)^2}$.

2°. Дано уравненіе $(x-1)^2(x-2)=0$. Умноживъ обѣ части его на множителя $\frac{1}{x-1}$, преобразуемъ уравненіе въ слѣдующее: $(x-1)(x-2)=0$. И данное, и преобразованное уравненія допускаютъ одни и тѣ же корни: $x=1$, $x=2$. Здѣсь корень $x=1$ не теряется, хотя онъ и обращаетъ множителя $\frac{1}{x-1}$ въ $\pm\infty$. Для объясненія этого обстоятельства напишемъ преобразованное уравненіе такимъ образомъ:

$$\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)^2(x-2)=0.$$

При $x=1$ лѣвая часть принимаетъ форму: $(\infty\cdot 0)$. Раскрывъ эту неопредѣленность при $x=1$, найдемъ для предѣла 0. Съ другой стороны, написавъ преобразованное уравненіе въ видѣ $(x-1)(x-2)=0$, мы, въ сущности, и раскрыли неопредѣленность при $x=1$.

3°. Возьмемъ уравненіе $(x-1)^2(x-2)=0$. Умноживъ обѣ части его на $\frac{1}{(x-1)^3}$, найдемъ $\frac{x-2}{x-1}=0$. Уравненіе это обладаетъ однимъ корнемъ $x=2$, ибо хотя знаменатель и обращается въ $\pm\infty$ при $x=\infty$, но и числитель обращается также въ $\pm\infty$, такъ что лѣвая часть принимаетъ неопредѣленную форму: $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытія этой неопредѣленности представляемъ лѣвую часть

въ видѣ: $\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$ и, положивъ $x=\infty$, найдемъ число 1, не равное нулю.

Итакъ, корень $x=1$ исчезъ. Для объясненія этого исчезновенія напишемъ преобразованное уравненіе въ видѣ:

$$\frac{1}{(x-1)^3}\cdot(x-1)^2(x-2)=0.$$

При $x=1$ лѣвая часть принимаетъ неопредѣленный видъ: $(\infty\cdot 0)$ и, по раскрытіи этой неопредѣленности, приводится къ $\pm\infty$.

245. Замѣчанія. 1°. Если введенный сомножитель не содержитъ неизвѣстныхъ и не есть ни нуль, ни безконечность, то преобразованное уравненіе эквивалентно данному.

2°. Если введенный сомножитель представляетъ алгебрическое выраженіе, *цѣлое* относительно неизвѣстныхъ, то оно, ни при какихъ системахъ значеній для этихъ неизвѣстныхъ, не обращается въ безконечность, и, слѣдовательно, предложенное уравненіе можетъ пріобрѣсти рѣшенія, ему не принадлежащія, но не можетъ потерять рѣшеній, ему принадлежащихъ.

3°. Доказанная выше теорема говоритъ намъ, что если понадобится, для рѣшенія уравненія, умножить обѣ его части на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, и рѣшить, слѣдовательно, вмѣсто предложеннаго уравненія, преобразованное, то корни сего послѣдняго должны быть испытаны, и тѣ изъ нихъ должны быть *отброшены*, которые не удовлетворяютъ предложенному уравненію; кромѣ сего должны быть испытаны тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыя обращаютъ въ безконечность или въ неопредѣленность введеннаго сомножителя, и тѣ изъ нихъ должны быть *приняты*, которыя удовлетворяютъ предложенному уравненію.

246. Слѣдствіе. *Уравненіе* $\frac{f(x)}{\omega(x)}=0$, *въ которомъ выраженія* $f(x)$ *и* $\omega(x)$ *суть многочлены цѣлые относительно неизвѣстной* x *и не имѣющіе общихъ корней, эквивалентно уравненію* $f(x)=0$.

И въ самомъ дѣлѣ, введенный сомножитель $\omega(x)$, представляя цѣлый многочленъ относительно буквы x, ни при какомъ значеніи этой буквы не обращается ни въ безконечность, ни въ неопредѣленность, и, слѣдовательно, уравненіе

$$\frac{f(x)}{\omega(x)}=0,$$

при замѣнѣ его уравненіемъ $f(x)=0$, не можетъ *потерять* рѣшеній.

Оно не можетъ *пріобрѣсти* рѣшеній, ибо пріобрѣтенными рѣшеніями могутъ быть только рѣшенія уравненія $\omega(x)=0$, но эти рѣшенія *не получатся* при рѣшеніи уравненія $f(x)=0$, ибо, по условію, уравненія: $f(x)=0$ и $\omega(x)=0$ не имѣютъ общихъ рѣшеній.

247. Освобожденіе отъ знаменателей. *Уравненіе, содержащее дробные члены, приводится къ цѣлой формѣ посредствомъ умноженія обѣихъ его частей на произведеніе знаменателей или даже на наименьшее кратное всѣхъ этихъ знаменателей.*

Примѣры. 1°. Дано уравненіе:

$$2 = \frac{1}{x} + x - 1 + \frac{3}{x+1}. \qquad [1]$$

Умноживъ обѣ части его на произведеніе $x(x+1)$, найдемъ:

$$2x^2 + 2x = x + 1 + x^3 - x + 3x. \qquad [2]$$

Мы не могли *потерять* рѣшеній, ибо введенный сомножитель $x(x+1)$, ни при какомъ значеніи буквы x, не обращается ни въ безконечность, ни въ неопредѣленность. Единственныя же рѣшенія, которыя могутъ быть введены, суть рѣшенія уравненія

$$x(x+1) = 0,$$

т.-е. $x=0$, $x=-1$. Но они не удовлетворяютъ уравненію (2), слѣдовательно и не получатся при его рѣшеніи. Уравненія (1) и (2) эквивалентны. Причина этого заключается въ слѣдующемъ: перенеся всѣ члены правой части уравненія (1) въ лѣвую и приведя ее къ одной дроби, напишемъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$\frac{2x^2 - x - 1 - x^3}{x(x+1)} = 0.$$

Числитель и знаменатель дроби, помѣщенной въ лѣвой части, не имѣютъ общихъ корней, ибо единственные корни знаменателя: $x=0$, $x=-1$ не принадлежатъ числителю.

2°. Дано уравненіе:

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2 - a^2}. \qquad [1]$$

Умноживъ обѣ части этого уравненія на множителя $(x^2 - a^2)$, найдемъ:

$$2x = 1. \qquad [2]$$

Въ уравненіи (1) не могли *исчезнуть* корни, ибо множитель $(x^2 - a^2)$ не обращается ни въ безконечность, ни въ неопредѣленность ни при какомъ значеніи буквы x. Пріобрѣтенными корнями могутъ быть только корни уравненія: $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a) = 0$; но единственные корни a и $-a$ этого уравненія не удовлетворяютъ уравненію (2), если a не равно ни $\frac{1}{2}$, ни $-\frac{1}{2}$, и, слѣдовательно, не получатся при рѣшеніи уравненія (2). Уравненія (1) и (2) суть, слѣдовательно, уравненія эквивалентныя, если a не равно ни $\frac{1}{2}$, ни $-\frac{1}{2}$.

Для объясненія этого напишимъ уравненіе (1) въ эквивалетномъ видѣ:

$$\frac{2x-1}{x^2 - a^2} = 0.$$

Если a не равно ни $\frac{1}{2}$, ни $-\frac{1}{2}$, то числитель и знаменатель дроби не имѣютъ общихъ корней.

Но положимъ, что $a=\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$. Уравненія (1) и (2) будутъ соотвѣтственно таковы:

$$(1)\qquad \frac{2x-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=0, \qquad 2x=1. \qquad (2)$$

Хотя уравненію (2) и удовлетворяетъ корень $\frac{1}{2}$ знаменателя, но онъ не удовлетворяетъ уравненію (2), ибо, будучи подставленъ въ это уравненіе, обращаетъ лѣвую часть его въ неопредѣленность, которая, по раскрытіи, приводится къ 1, а не къ нулю, а потому корень $\frac{1}{2}$ уравненія (2) представляетъ корень *посторонній* уравненію (1).

3°. Возьмемъ еще уравненіе:

$$1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6; \qquad [1]$$

умноживъ обѣ части этого уравненія на $(x-1)$, найдемъ:

$$x-1-x^2=-1-6x+6. \qquad [2]$$

Потерять рѣшеній не могли, но могли ввести рѣшеніе $x=1$; оно удовлетворяетъ уравненіе (2) и, слѣдовательно, дѣйствительно можетъ быть введеннымъ. Испытаемъ его, т.-е. подставимъ въ предложенное уравненіе вмѣсто буквы x число 1; результатъ подстановки будетъ таковъ:

$$1-\frac{1}{\pm 0}=\frac{1}{\mp 0}-6,$$

или же

$$1\mp\infty=\mp\infty-6,$$

т.-е.

$$\mp\infty\pm\infty=-7.$$

Лѣвая часть представляетъ совершенно неопредѣленную форму; для ея раскрытія пишемъ уравненіе въ такомъ видѣ:

$$-\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x-1}=-7,$$

или же въ видѣ

$$\frac{-x^2+1}{x-1}=-7.$$

Сокративъ дробь, помѣщенную въ лѣвой части, на множителя $x-1$, приведемъ уравненіе къ формѣ:

$$x+1=7,$$

и этому уравненію не удовлетворяетъ $x=1$.

Но замѣтимъ, что этому уравненію удовлетворяетъ $x=6$; онъ не долженъ былъ исчезнуть по уничтоженіи въ уравненіи (1) знаменателя, и онъ не исчезъ, ибо удовлетворяетъ уравненію (2).

248. Теорема III. *Отъ возвышенія обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень, показатель которой есть цѣлое и положительное число, образуется уравненіе, вообще не эквивалентное данному.*

Дано уравненіе:

$$A=B, \qquad (1)$$

въ которомъ A и B суть выраженія, содержащія буквы: x, y, z.

Возвысивъ обѣ части этого уравненія въ степень, показатель которой m есть цѣлое, положительное число, получимъ уравненіе:

$$A^m=B^m. \qquad (2)$$

Легко видѣть, что всѣ рѣшенія уравненія (1) принадлежатъ уравненію (2), ибо если два числа равны, то равны и ихъ цѣлыя и положительныя степени. Итакъ, уравненіе (1), вслѣдствіе замѣны его уравненіемъ (2), *не теряетъ* ни одной системы рѣшеній. Но оно *вообще* пріобрѣтаетъ постороннія рѣшенія. И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) равносильно слѣдующему уравненію:

$$A^m-B^m=0,$$

которое можетъ быть написано въ видѣ (83):

$$(A-B)(A^{m-1}+A^{m-2}B+\ldots+AB^{m-2}+B^{m-1})=0. \qquad (3)$$

Это уравненіе, кромѣ системъ рѣшеній уравненія (1), уничтожающихъ перваго сомножителя: $(A-B)$, обладаетъ системами корней уравненія:

$$A^{m-1}+A^{m-2}B+\ldots+AB^{m-2}+B^{m-1}=0, \qquad (4)$$

уничтожающими втораго сомножителя лѣвой части уравненія (3), которыя *вообще* не принадлежатъ уравненію (1). Уравненіе (4) можетъ, однако, дать системы корней, принадлежащія уравненію (1). Положимъ, въ самомъ дѣлѣ, что нѣкоторая система корней: $x=a$, $y=b$, $z=c$, . . . уравненія (4) принадлежитъ уравненію (1). Подставивъ эту систему въ уравненіе (4), мы получимъ слѣдующее тождество:

$$mA^{m-1}=0,$$

которое даетъ тождественно:

$$A^{m-1}=0.$$

Это тождество говоритъ, что разсматриваемая система корней удовлетворяетъ уравненію (1) такимъ образомъ: она обращаетъ въ нули обѣ его части.

Наоборотъ, если уравненіе (1) обладаетъ подобною системою корней, то эта система непремѣнно удовлетворяетъ уравненію (4).

Но, вообще, доказанная теорема говоритъ, что если понадобится, для рѣшенія уравненія, возвысить обѣ его части въ одну и ту же степень, то должно испытать системы корней преобразованнаго уравненія и отбросить тѣ изъ нихъ, которыя не удовлетворяютъ предложенному уравненію.

Примѣры. 1°. Дано уравненіе:

$$2x-3=x+5.$$

Возвысивъ обѣ части его въ квадратъ, получимъ:

$$4x^2-12x+9=x^2+10x+25.$$

Корни этого уравненія суть: 8 и $-\frac{2}{3}$. Корень 8 принадлежитъ предложенному уравненію, но корень $-\frac{2}{3}$ ему не принадлежитъ, т.-е. онъ посторонній предложенному уравненію.

Замѣтимъ, что, возвышая въ квадратъ обѣ части уравненія, мы, въ сущности, ввели сомножителя

$$\omega=2x-3+x+5=3x+2,$$

и посторонній корень $-\frac{2}{3}$ обращаетъ этого сомножителя въ нуль.

2°. Разсмотримъ слѣдующія два уравненія:

$$x-9=\sqrt{9-x}, \qquad x-9=-\sqrt{9-x},$$

гдѣ $\sqrt{9-x}$ разсматривается, какъ число положительное. Оба эти уравненія, по возвышеніи въ квадратъ ихъ частей, приводятся къ одному и тому же уравненію:

$$9-x=x^2-18x+81.$$

Уравненіе это имѣетъ два корня: $x=9$ и $x=8$. Корень 9 принадлежитъ первому уравненію и *не* принадлежитъ уравненію второму; корень 8, наоборотъ, *не* принадлежитъ уравненію первому, но принадлежитъ уравненію второму.

Введенные сомножители соотвѣтственно суть:

$$\omega = x - 9 + \sqrt{8-x} \text{ (для перваго ур—ія) и}$$

$$\omega = x - 9 - \sqrt{9-x} \text{ (для втораго ур—ія).}$$

3°. Возьмемъ уравненіе:

$$1 = +\sqrt{1-x^2}.$$

Возвысивъ обѣ части его въ квадратъ, получимъ:

$$1 = 1 - x^2.$$

Единственное рѣшеніе $x=0$ этого уравненія удовлетворяетъ предложенному уравненію, и, слѣдовательно, постороннихъ рѣшеній не введено. Это объясняется тѣмъ, что уравненіе (4) въ данномъ случаѣ есть:

$$1 + \sqrt{1-x^2} = 0,$$

и оно не имѣетъ никакихъ рѣшеній.

4°. Разсмотримъ, наконецъ, такое уравненіе:

$$x^2 - 9x + 14 = 4x^2 - 14x + 12.$$

Его корни суть: 2 и $-\frac{1}{3}$.

Если возвысимъ въ квадратъ обѣ его части, то ур—іе (4) будетъ таково:

$$x^2 - 9x + 14 + 4x^2 - 14x + 12 = 0,$$

или

$$5x^2 - 23x + 26 = 0.$$

Корни его суть: 2 и $\frac{13}{5}$. Одинъ изъ его корней 2 принадлежитъ предложенному уравненію, и онъ, именно, обращаетъ каждую изъ частей предложеннаго уравненія въ нуль.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

§ 1. Правило рѣшенія уравненія.

249. Примѣры. Теоремы, изложенныя въ предъидущей главѣ, достаточны для рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ I. Дано уравненіе:

$$3x - \frac{4}{3} - \frac{x}{4} = \frac{5x}{21} + 2x + 13. \qquad [1]$$

Уничтожимъ знаменателей, умноживъ обѣ части на число 84, представляющее наименьшее кратное знаменателей. Уравненіе:

$$252x - 112 - 21x = 20x + 168x + 1092 \qquad [2]$$

эквивалентно данному (**245**).

Перенеся члены, содержащіе неизвѣстное, въ одну часть уравненія и члены, его не содержащіе, въ другую часть, получимъ:

$$252x - 21x - 20x - 168x = 1092 + 112,$$

или, сдѣлавъ приведенія въ каждой части, найдемъ уравненіе:

$$43x = 1204, \qquad [3]$$

эквивалентное уравненію [2] на основаніи теоремы (**240**).

Раздѣливъ наконецъ обѣ части на 43 (**245**), получимъ равнозначущее уравненіе:

$$x = 28. \qquad [4]$$

Это послѣднее уравненіе удовлетворяется, если замѣнимъ x числомъ 28, и не имѣетъ другаго рѣшенія. Предложенное уравненіе [1], обладая рѣшеніемъ 28, не обладаетъ никакимъ другимъ.

Для повѣрки рѣшенія подставимъ 28 вмѣсто x въ уравненіе [1]; обѣ части дѣлаются равными $75\frac{2}{3}$.

Примѣръ II. Коэффиціенты могутъ быть алгебрическіе. Дано уравненіе:

$$\frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}=3cx+\frac{b}{a}x-\frac{3abc}{a+b}. \qquad [1]$$

Умножаемъ всѣ члены на наименьшее кратное знаменателей: $a(a+b)^2$; новое уравненіе:

$$(2a+b)b^2(a+b)x+a^3b^2=3ac(a+b)^3x+b(a+b)^3x-3a^2bc(a+b)^2 \qquad [2]$$

эквивалентно данному, если только мы не сдѣлаемъ предположеній: $a=0$ или $b=-a$, уничтожающихъ введеннаго сомножителя (245).

Переносимъ неизвѣстные члены въ одну часть и извѣстные въ другую. Уравненіе:

$$a^3b^2+3a^2bc(a+b)^2=3ac(a+b)^3x+b(a+b)^3x-(2a+b)b^2(a+b)x \qquad [3]$$

эквивалентно второму. Выносимъ множителя x второй части за скобки и находимъ:

$$a^3b^2+3a^2bc(a+b)^2=\left\{3ac(a+b)^3+b(a+b)^3-(2a+b)b^2(a+b)\right\}x.$$

Раздѣливъ обѣ части на коэффиціентъ при x, получимъ новое уравненіе:

$$x=\frac{a^3b^2+3a^2bc(a+b)^2}{3ac(a+b)^3+b(a+b)^3-(2a+b)b^2(a+b)}, \qquad [4]$$

эквивалентное предъидущему, если только какое нибудь предположеніе не уничтожитъ знаменателя. Найденное выраженіе для x можетъ написаться въ формѣ:

$$x=\frac{a^2b\left\{ab+3c(a+b)^2\right\}}{a(a+b)\left\{ab+3c(a+b)^2\right\}}, \qquad [5]$$

или, послѣ уничтоженія общихъ множителей,

$$x=\frac{ab}{a+b}. \qquad [6]$$

Такъ какъ знаменатель формулы [5] становится нулемъ или при $a=0$, или при $b=-a$, или при $c=-\frac{ab}{3(a+b)^2}$, то, въ приложеніяхъ, должно воздержаться отъ этихъ предположеній.

Легко повѣрить, что найденное рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію [1].

250. Общее правило. Предъидущія разсужденія приводятъ насъ къ слѣдующему правилу: *Для рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстною:* 1^0 *уничтожаемъ знаменателей;* 2^0 *переносимъ въ одну часть члены, содержащіе неизвѣстное, и въ другую всѣ члены, его не содержащіе;* 3^0 *соединяемъ въ каждой части подобные члены;* 4^0 *дѣлимъ членъ, независимый отъ неизвѣстнаго, на коэффиціентъ этого неизвѣстнаго.*

Частное представитъ значеніе неизвѣстнаго при тѣхъ ограниченіяхъ, которыя были указаны.

Значеніе это, будучи подставлено въ предложенное уравненіе, должно преобразовать его въ тождество.

§ II. Уравненія, приводящіяся къ уравненію первой степени.

Уравненіе не первой степени приводится иногда, при помощи нѣкоторыхъ преобразованій, къ уравненію степени первой. Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

251. Уравненіе ирраціонально.

Примѣръ I. Дано уравненіе [1]):

$$\sqrt{4+x}=4-\sqrt{x}. \qquad [1]$$

Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ:

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x, \qquad [2]$$

или, перенеся неизвѣстныя въ одну часть и извѣстныя въ другую, найдемъ послѣдовательно:

$$[3] \qquad 2\sqrt{x}=3,\ \ 4x=9,\ \ \text{откуда}\ x=\frac{9}{4}. \qquad [4]$$

Уравненіе [4] предполагаетъ только одно рѣшеніе $x=\frac{9}{4}$, а потому уравненіе [1] не можетъ имѣть никакого другаго. Но еще неизвѣстно, удовлетворитъ ли это рѣшеніе уравненію предложеному, ибо мы возвышали обѣ части его въ квадратъ, что могло ввести постороннія рѣшенія. Необходимо, слѣдовательно, повѣрить найденное рѣшеніе прямою подстановкою. Замѣнивъ x числомъ $\frac{9}{4}$, получимъ:

для лѣвой части $\qquad \sqrt{4+x}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2},$

[1]) Во всей этой главѣ мы будемъ принимать во вниманіе только *положительныя* значенія корней.

для правой $$4-\sqrt{x}=4-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}.$$

Хотя повѣрка и удалась, но она тѣмъ не менѣе была необходима.

Примѣръ II. Дано уравненіе

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1. \qquad [1]$$

Уравненіе это содержитъ два радикала: $\sqrt{x}$ и $\sqrt{x-\sqrt{1-x}}$; для уничтоженія одного изъ нихъ, напр., втораго, оставляемъ его *одного* въ одной изъ частей уравненія и получаемъ:

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=\sqrt{x}-1; \qquad [2]$$

возвысивъ въ квадратъ обѣ части, найдемъ:

$$x-\sqrt{1-x}=x-2\sqrt{x}+1, \qquad [3]$$

или, упрощая и измѣняя знаки,

$$\sqrt{1-x}=2\sqrt{x}-1. \qquad [4]$$

Возвысивъ снова въ квадратъ, получимъ:

$$1-x=4x-4\sqrt{x}+1, \qquad [5]$$

или, упрощая и перенося,

$$4\sqrt{x}=5x. \qquad [6]$$

Возвысивъ въ квадратъ третій разъ, будемъ имѣть уравненіе:

$$16x=25x^2, \qquad [7]$$

которое, по перенесеніи всѣхъ членовъ въ первую часть, можетъ написаться:

$$x(16-25x)=0. \qquad [8]$$

Для того, чтобы произведеніе двухъ множителей было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю. Рѣшенія уравненія [8], слѣдовательно, суть:

$$x=0,\ x=\frac{16}{25}.$$

Уравненіе [1] не можетъ предполагать иныхъ рѣшеній. Для того, чтобы узнать, предполагаетъ ли оно ихъ дѣйствительно, сдѣлаемъ прямую подстановку. Значеніе $x=0$ даетъ: $-\sqrt{-1}=1$, что не означаетъ ничего; значеніе $x=\frac{16}{25}$ даетъ:

$$\sqrt{\frac{16}{25}}-\sqrt{\frac{16}{25}-\sqrt{\frac{9}{25}}}=1,$$

или, по приведеніи,

$$\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=1,$$

что несправедливо. Итакъ, ни одно изъ рѣшеній не удовлетворяетъ уравненію [1]. Легко видѣть, что значеніе $x=0$ удовлетворяетъ уравненію

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1$$

и что значеніе $x=\frac{16}{25}$ удовлетворяетъ уравненію

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1,$$

при чемъ и то, и другое уравненія приводятся къ уравненію [7] тѣмъ же путемъ, какимъ привелось къ нему и предложенное уравненіе.

252. Уравненіе заключаетъ неизвѣстное въ нѣкоторой степени и не заключаетъ его въ другихъ степеняхъ. Оно приводится къ уравненію первой степени, если мы примемъ эту степень за неизвѣстное.

Примѣръ III. Дано уравненіе

$$\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b. \qquad [1]$$

Умноживъ обѣ части на произведеніе $(1+2x)(1-2x)=1-4x^2$, найдемъ:

$$a(1-2x)+a(1+2x)=2b(1-4x^2), \qquad [2]$$

или, выполнивъ умноженіе и приведеніе,

$$2a=2b-8bx^2;$$

принявъ x^2 за неизвѣстное, мы получимъ уравненіе первой степени относительно x^2, которое дастъ:

$$x^2=\frac{b-a}{4b},\quad x=\sqrt{\frac{b-a}{4b}}. \qquad [4]$$

253. Уравненіе заключаетъ неизвѣстное только подъ знакомъ радикала. Оно будетъ первой степени, если мы возьмемъ этотъ радикалъ за неизвѣстное.

Примѣръ IV. Дано уравненіе

$$\frac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}-\frac{\sqrt{ax}-b}{c}=c. \qquad [1]$$

Такъ какъ числитель первой дроби дѣлится на своего знаменателя, то уравненіе можетъ написаться:

$$\sqrt{ax}-b-\frac{\sqrt{ax}-b}{c}=c, \qquad [2]$$

или, по уничтоженіи знаменателей,

$$c\sqrt{ax}-cb-\sqrt{ax}+b=c^2; \qquad [3]$$

это уравненіе первой степени, если мы примемъ за неизвѣстное радикалъ $\sqrt{ax}$. Перемѣстивъ члены, найдемъ:

$$(c-1)\sqrt{ax}=c^2+cb-b, \qquad [4]$$

и, слѣдовательно,

$$\sqrt{ax}=\frac{c^2+cb-b}{c-1}=b+\frac{c^2}{c-1}. \qquad [5]$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ и раздѣливъ на a, получимъ:

$$x=\frac{1}{a}\left(b+\frac{c^2}{c-1}\right)^2. \qquad [6]$$

§ III. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ.

Дадимъ теперь нѣсколько примѣровъ той выгоды, которую приносятъ уравненія при рѣшеніи задачъ.

254. Задача I. *Найти математическій учетъ векселя въ 1500 р., уплачиваемаго за 5 мѣсяцевъ до срока. Учетъ сдѣланъ по 6%.*

Математическій учетъ векселя есть прибыль, приносимая его дѣйствительною цѣною во время, остающееся до срока. Обозначимъ этотъ учетъ буквою x. Дѣйствительная стоимость векселя равна $1500-x$. Необходимо, чтобы сумма эта, помѣщенная на 5 мѣсяцевъ по 6%, принесла прибыль x. Одинъ рубль принесетъ при этихъ условіяхъ 0,025, а, слѣдовательно, $(1500-x)$ рублей принесутъ $0{,}025 \cdot (1500-x)$.

Получаемъ уравненіе первой степени:

$$(1500-x)\cdot 0{,}025=x,$$

которое даетъ

$$x=\frac{1500\cdot 0{,}025}{1{,}025}=36{,}585\ldots$$

Кредиторъ получаетъ 1463р., 41.

255. Задача II. *Даны два слитка серебра, пробы которыхъ соотвѣтственно суть 0,775 и 0,940. Сколько должно взять каждаго изъ нихъ, чтобы образовать 25 граммъ смѣси пробы 0,900?*

Обозначимъ буквою x число граммовъ серебра, взятыхъ изъ перваго слитка; $25 - x$ будетъ вѣсъ серебра, взятаго изъ втораго слитка.

Вѣсъ чистаго серебра, содержащагося въ x граммахъ перваго слитка, равенъ $x \cdot 0{,}775$. Вѣсъ чистаго серебра, содержащагося въ $(25 - x)$ граммахъ втораго слитка, равенъ $(25 - x) \cdot 0{,}0940$. Количество чистаго серебра, содержащагося въ смѣси, есть, слѣдовательно,

$$x \cdot 0{,}775 + (25 - x) \cdot 0{,}940.$$

Съ другой стороны, такъ какъ проба смѣси должна быть равна 0,900, то полное количество чистаго серебра, содержащагося въ 25 граммахъ смѣси, будетъ $25 \cdot 0{,}900$.

Получимъ уравненіе первой степени

$$x \cdot 0{,}775 + (25 - x) \cdot 0{,}940 = 25 \cdot 0{,}90,$$

которое даетъ $x = 6^{gr.}, 0606$.

Итакъ должно взять:

изъ перваго слитка . . . . $6^{gr.}, 0606$
изъ втораго слитка . . . . . $18^{gr.}, 9394$.

256. Замѣчаніе о составленіи уравненій. *Составить уравненія по условіямъ задачи* значитъ выразить однимъ или нѣсколькими уравненіями условія, налагаемыя задачею на искомыя. Невозможно дать вполнѣ общаго правила для составленія уравненія. Мы ограничимся, въ данный моментъ, слѣдующими указаніями.

Внимательно разсмотрѣвъ требованія задачи, почти всегда увидимъ, что для ея рѣшенія требуется сдѣлать равными нѣкоторыя количества. Узнавъ, каковы эти количества, мы выражаемъ формулами ихъ значенія и, приравнявъ эти формулы, получаемъ желаемыя уравненія. Возьмемъ рѣшенныя выше двѣ задачи.

Задача I. Найти учетъ съ 1500 р., уплачиваемыхъ за пять мѣсяцевъ, значитъ найти сумму, которая, будучи помѣщена на пять мѣсяцевъ и увеличена прибылью за это время, сдѣлается *равною* 1500 р.

Задача II. Образовать смѣсь въ 25 гр. 0,900 пробы изъ серебра 0,775 пробы и 0,940 пробы, значитъ поступить такимъ образомъ, чтобы полное количество серебра, содержащагося въ 25 граммахъ, было *равно* 0,900.25

Замѣчаніе. Составленіе уравненій по условіямъ задачъ, относящихся къ числамъ, представляетъ собою не что иное, какъ переводъ на алгебрическій языкъ того обыкновеннаго языка, которымъ выражена задача. Случается иногда, что задача сказана такъ, что выраженіе задачи непосредственно трудно перевести *формулою*; въ этихъ случаяхъ мы должны обращать болѣе вниманія на смыслъ выраженія, чѣмъ на слова, и тогда почти что никогда не встрѣтимъ серьезнаго затрудненія. Мы возвратимся еще къ составленію уравненій, когда исключительно займемся задачами первой степени.

Упражненія.

1. $\frac{x-1}{3}+\frac{4x-\frac{3}{4}}{5}-\frac{7x-6}{8}=2+\frac{x-2}{2}+\frac{3x-9}{10}$, $\quad x=\frac{4}{13}$.

2. $\frac{7+9x}{4}-\left(1-\frac{2-x}{9}\right)=7x$, $\quad x=\frac{1}{5}$.

3. $x=3x-\frac{1}{2}(4-x)+\frac{1}{3}$, $\quad x=\frac{2}{3}$.

4. $x-3-2(x-1)(x+2)=(x-3)(5-2x)$, $\quad x=3$.

5. $\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{37}{x^2+5x+6}$, $\quad x=1$.

6. $(x+1)^2=\left\{6-(1-x)\right\}x-2$, $\quad x=1$.

7. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$, $\quad x=5$.

8. $\frac{25-\frac{1}{3}x}{x+1}+\frac{16x+4\frac{1}{5}}{3x+2}=\frac{23}{x+1}+5$, $\quad x=\frac{27}{8}$.

9. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0$, $\quad x=\frac{8a}{25}$.

10. $(a+x)(b+x)=(c+x)(d+x)$, $\quad x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$.

11. $ax+b=\frac{x}{a}+\frac{1}{b}$, $\quad x=\frac{a(1-b^2)}{b(a^2-1)}$.

12. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}$, $\quad x=\frac{ab}{a+b}$.

13. $4{,}8-\frac{0{,}72x-0{,}05}{0{,}5}=1{,}6x+8{,}9$, $\quad x=5$.

14. $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$, $\quad x=\frac{5}{4}$, 0 (не удовлетворяетъ уравненію.

15. $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a^2}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$, $\quad x=-\frac{2a}{3}$ (не удовлетворяетъ уравненію.

16. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$, $\qquad x=\dfrac{2a\sqrt{b}}{b+1}$.

17. $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$, $\qquad x=a^2-\dfrac{(b-2a)^3}{27b}$.

18. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}$, $\qquad x=-\dfrac{4a}{3}$ (не удовлетворяетъ уравненію.

19. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$, $\qquad x=\dfrac{25}{16}$, 0.

20. $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $\qquad x=\dfrac{3a}{4}$.

21. $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{c}$, $\qquad x=\dfrac{a}{\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$.

22. $\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}$, $\qquad x=-a,\ 0,\ \dfrac{64a}{1025}$,

причемъ два послѣднія рѣшенія не принадлежатъ уравненію.

23. $\sqrt{1-a}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1-x}{1+x}}=$

$=2\sqrt[4]{1-a^3}$, $\qquad x=a$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Общія теоремы, относящіяся къ совмѣстнымъ уравненіямъ.

§ I. Опредѣленія.

257. Системы уравненій. *Системою уравненій* называется совокупность нѣсколькихъ уравненій, заключающихъ одни и тѣ же неизвѣстныя и удовлетворяющихся одними и тѣми же значеніями этихъ неизвѣстныхъ. Если каждое изъ уравненій содержитъ только одно неизвѣстное, то уравненіе это рѣшается отдѣльно, и мы будемъ имѣть столько различныхъ задачъ, сколько предложено уравненій. Если же неизвѣстныя входятъ сразу въ нѣсколько уравненій, то вопросъ становится болѣе труднымъ.

Рѣшеніемъ системы называется система значеній, которыя, будучи подставлены вмѣсто неизвѣстныхъ, преобразовываютъ уравненія въ тождества.

258. Равнозначущія системы. Двѣ системы уравненій, заключающихъ однѣ и тѣ же неизвѣстныя, называются *равнозначущими* (эквивалентными), если онѣ обладаютъ однѣми и тѣми же системами рѣшеній (корней).

Двѣ равнозначущія системы могутъ замѣнять одна другую.

* § II. Теоремы.

258. Теорема I. *Какое ни есть изъ уравненій системы можетъ быть замѣнено уравненіемъ, полученнымъ отъ сложенія по частямъ предложенныхъ уровненій,* Такимъ образомъ системы:

$$[1]\qquad \begin{cases} A(x, y, \ldots) = A_1(x, y, \ldots), \\ B(x, y, \ldots) = B_1(x, y, \ldots), \\ C(x, y, \ldots) = C_1(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

и

$$[2]\begin{cases} A(x,y,\ldots)+B(x,y,\ldots)+C(x,y,\ldots)+\ldots=A_1(x,y,\ldots)+B_1(x,y,\ldots)+C_1(x,y,\ldots)+\ldots, \\ B(x,y,\ldots) = B_1(x,y,\ldots), \\ C(x,y,\ldots) = C_1(x,y,\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

эквивалентны.

Возьмемъ какую нибудь систему рѣшеній системы [1]: $x=a$, $y=b, \ldots$; получимъ тождественно:

$$\begin{aligned} A(a, b, \ldots) &= A_1(a, b, \ldots), \\ B(a, b, \ldots) &= B_1(a, b, \ldots), \\ C(a, b, \ldots) &= C_1(a, b, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тождества эти даютъ слѣдующія тождества:

$$\begin{aligned} A(a,b,\ldots)+B(a,b,\ldots)+C(a,b,\ldots)+\ldots &= A_1(a,b,\ldots)+B_1(a,b,\ldots)+C_1(a,b,\ldots)+\ldots, \\ B(a,b,\ldots) &= B_1(a,b,\ldots), \\ C(a,b,\ldots) &= C_1(a,b,\ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тождества эти говорятъ, что взятая система рѣшеній удовлетворяетъ системѣ [2].

Возьмемъ теперь какую нибудь систему рѣшеній системы [2]: $x=\alpha$, $y=\beta, \ldots$; получимъ тождественно:

$$\begin{aligned} A(\alpha,\beta,\ldots)+B(\alpha,\beta,\ldots)+C(\alpha,\beta,\ldots)+\ldots &= A_1(\alpha,\beta,\ldots)+B_1(\alpha,\beta,\ldots)+C_1(\alpha,\beta,\ldots)+\ldots, \\ B(\alpha,\beta,\ldots) &= B_1(\alpha,\beta,\ldots), \\ C(\alpha,\beta,\ldots) &= C_1(\alpha,\beta,\ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тождества эти даютъ тождественно:

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta, \ldots) &= A_1(\alpha, \beta, \ldots), \\ B(\alpha, \beta, \ldots) &= B_1(\alpha, \beta, \ldots), \\ C(\alpha, \beta, \ldots) &= C_1(\alpha, \beta, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и показываютъ, что взятая нами система рѣшеній принадлежитъ системѣ [1].

Итакъ, всякая система рѣшеній системы [1] принадлежитъ системѣ [2]; наоборотъ, всякая система рѣшеній системы [2] принадлежитъ системѣ [1], т.-е. обѣ системы уравненій эквивалентны.

259. Замѣчанія. Предъидущее доказательство не зависитъ отъ числа уравненій.

Мы можемъ складывать только нѣкоторыя изъ уравненій, составляющихъ систему; новое уравненіе замѣняетъ какое ни есть изъ уравненій, служившихъ для его образованія.

Мы имѣемъ право, до сложенія уравненій по частямъ, умножать каждое изъ нихъ на какое ни есть число, ибо дѣйствіе это не измѣнитъ условій (**245**), наложенныхъ на неизвѣстныя.

Очевидно, что, вмѣсто сложеній уравненій по частямъ, мы можемъ производить вычитанія.

260. Теорема II. *Если одно изъ уравненій системы рѣшимъ относительно одного изъ неизвѣстныхъ и замѣнимъ это неизвѣстное въ другихъ уравненіяхъ найденнымъ значеніемъ, то приведемъ систему къ другой системѣ, въ которой число неизвѣстныхъ и число уравненій единицею менѣе числа неизвѣстныхъ и числа уравненій предложенной системы.*

Положимъ, что неизвѣстныя суть: $x, y, z, \ldots$

Положимъ далѣе, что мы рѣшили одно изъ уравненій системы, напримѣръ, первое, относительно x, такъ что предложенная система преобразовалась въ систему:

$$\left\{\begin{aligned} x &= A(y, z, \ldots), \\ B(x, y, z, \ldots) &= B_1(x, y, z, \ldots), \\ C(x, y, z, \ldots) &= C_1(x, y, z, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad [1]$$

Внесемъ теперь найденное значеніе для x во всѣ уравненія системы [1], получимъ новую систему:

$$\left\{\begin{aligned} x &= A(y, z, \ldots), \\ B[A(y, z, \ldots), y, z, \ldots] &= B_1[A(y, z, \ldots), y, z, \ldots], \\ C[A(y, z, \ldots), y, z, \ldots] &= C_1[A(y, z, \ldots), y, z, \ldots], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \qquad [2]$$

въ которой всѣ уравненія, за исключеніемъ перваго, не содержатъ уже буквы x.

Докажемъ, что системы [1] и [2] равнозначущія.

И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь систему рѣшеній системы [1]: $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$; получимъ тождественно:

$$
\begin{aligned}
a &= A(b, c, \ldots), \\
B(a, b, c, \ldots) &= B_1(a, b, c, \ldots), \\
C(a, b, c, \ldots) &= C_1(a, b, c, \ldots), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Такъ какъ въ тождествахъ мы можемъ замѣнять какую ни есть букву какимъ ни есть значеніемъ, то, замѣнивъ во всѣхъ этихъ тождествахъ, за исключеніемъ перваго, букву a выраженіемъ $A(b,c\ldots)$, найдемъ тождественно:

$$
\begin{aligned}
a &= A(b, c, \ldots), \\
B[A(b, c, \ldots), b, c, \ldots] &= B_1[A(b, c, \ldots), b, c, \ldots], \\
C[A(b, c, \ldots), b, c, \ldots] &= C_1[A(b, c, \ldots), b, c, \ldots], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}
$$

тождества эти показываютъ, что взятая нами система рѣшеній удовлетворяетъ системѣ [2].

Возьмемъ теперь какую ни есть систему рѣшеній системы [2]: $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma, \ldots$; получимъ тождественно:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= A(\beta, \gamma, \ldots), \\
B[A(\beta, \gamma, \ldots), \beta, \gamma, \ldots] &= B_1[A(\beta, \gamma, \ldots), \beta, \gamma, \ldots], \\
C[A(\beta, \gamma, \ldots), \beta, \gamma, \ldots] &= C_1[A(\beta, \gamma, \ldots), \beta, \gamma, \ldots], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Замѣнивъ въ этихъ тождествахъ, за исключеніемъ перваго, выраженіе $A(\beta, \gamma, \ldots)$ буквою α, найдемъ тождественно:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= A(\beta, \gamma, \ldots), \\
B(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) &= B_1(\alpha, \beta, \gamma, \ldots), \\
C(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) &= C_1(\alpha, \beta, \gamma, \ldots), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Тождества эти говорятъ, что взятая система рѣшеній удовлетворяетъ системѣ [1]. Итакъ, системы [1] и [2] равнозначущія.

Доказательство не зависитъ отъ числа уравненій.

261. Исключеніе. Замѣняя въ уравненіяхъ $B=B_1$, $C=C_1, \ldots$ неизвѣстное x выраженіемъ A, мы заставляемъ исчезнуть это неизвѣстное изъ этихъ уравненій.

Говорятъ, что оно *исключено*. И вообще, *исключить* неизвѣстное изъ m уравненій, значитъ замѣнить предложенную систему системою равнозначущею, въ которой $(m-1)$ уравненій не содержатъ этой неизвѣстной.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Рѣшеніе системы уравненій первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ.

Если число неизвѣстныхъ равно числу уравненій, ихъ связывающихъ, то опредѣленіе значеній этихъ неизвѣстныхъ вообще возможно. Мы изложимъ въ этой главѣ методы, дающія рѣшенія, начавъ съ простѣйшаго случая, съ случая двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

§ I. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

262. Общая форма уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными. Обозначимъ неизвѣстныя буквами x и y. Уравненіе первой степени можетъ заключать только три рода членовъ: 1^0 члены первой степени, содержащіе x; 2^0 члены первой степени, содержащіе y; 3^0 члены, независимые отъ x и y. Перенеся всѣ члены, содержащіе x и y, въ одну часть; соединивъ, сложеніемъ коэффиціентовъ, всѣ члены, содержащіе x, въ одинъ членъ, и всѣ члены, содержащіе y, въ другой; перенеся далѣе всѣ независимые члены въ другую часть уравненія, мы приведемъ уравненіе къ виду:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b, c означаютъ выраженія, независимыя отъ x и y. Въ этомъ видѣ мы и будемъ писать уравненія, данныя для рѣшенія.

263. 1-ый случай. Можетъ случиться, что одно изъ уравненій содержитъ только одно изъ неизвѣстныхъ. Пусть, напримѣръ, дана система:

$$\left.\begin{aligned} 3x+7y=79, \quad [1] \\ 8x=80. \quad [2] \end{aligned}\right\}$$

Уравненіе [2], содержащее только x, даетъ непосредственно его значеніе $x=10$.

Подставивъ это значеніе въ уравненіе [1], найдемъ

$$30+7y=79.$$

Уравненіе это, содержа только y, даетъ его значеніе $y=7$.

Оба эти значенія, очевидно, удовлетворяютъ системѣ.

Система не имѣетъ другаго рѣшенія: уравненіе [2] обладаетъ только однимъ рѣшеніемъ $x=10$; для этого же значенія уравненіе [1] удовлетворяется только при $y=7$.

Итакъ, для того, чтобы рѣшить систему въ этомъ частномъ случаѣ, *рѣшаемъ то изъ уравненій, которое заключаетъ только одно изъ неизвѣстныхъ; подставляемъ значеніе, найденное для этого неизвѣстнаго, въ другое уравненіе и рѣшаемъ преобразованное уравненіе относительно другаго неизвѣстнаго.*

264. 2-ой случай. Оба уравненія заключаютъ оба неизвѣстныхъ. Случай этотъ приводится къ предъидущему *исключеніемъ* одного изъ неизвѣстныхъ между двумя уравненіями (**261**). Исключеніе это совершается при помощи различныхъ методъ.

Метода подстановки. Даны два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y=47, \quad [1] \\ 6x-5y=10. \quad [2] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Можно замѣнить уравненіе [1] уравненіемъ:

$$y=\frac{47-7x}{3},$$

которое получается перенесеніемъ члена $7x$ въ правую часть и раздѣленіемъ обѣихъ частей на 3. Дѣйствіе это называется *рѣшеніемъ уравненія относительно* y. Система (1) замѣняется равнозначущею системою:

$$\left.\begin{aligned} y=\frac{47-7x}{3}, \quad [1] \\ 6x-5y=10. \quad [2] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Замѣнивъ въ уравненіи [2] букву y выраженіемъ $\frac{47-7x}{3}$, получимъ эквивалентную систему:

$$\left.\begin{aligned} y=\frac{47-7x}{3}, \qquad [3]\\ 6x-\frac{5(47-7x)}{3}=10. \qquad [4]\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Такъ какъ уравненіе [4] заключаетъ только одно неизвѣстное x, то вопросъ приведенъ къ первому случаю.

Рѣшаемъ это уравненіе; оно даетъ:

$$18x-235+35x=30,$$

откуда находимъ $x=5$. Подставивъ это значеніе въ уравненіе [3], получимъ $y=4$. Оба эти значенія, $x=5$, $y=4$, образуя единственное рѣшеніе системы (3), представляютъ единственное рѣшеніе эквивалентной системы (1).

Метода общая и приводитъ къ слѣдующему правилу: *рѣшаемъ одно изъ уравненій относительно одного изъ неизвѣстныхъ и* **подставляемъ** *его значеніе въ другое уравненіе.*

Такъ какъ это послѣднее уравненіе будетъ содержать, послѣ подстановки, только одно неизвѣстное, то рѣшимъ его и получимъ значеніе этого неизвѣстнаго. Подставивъ затѣмъ это значеніе въ выраженіе перваго неизвѣстнаго, опредѣлимъ значеніе этого неизвѣстнаго.

265. Метода сложенія и вычитанія. Возьмемъ снова систему:

$$\left.\begin{aligned} 7x+3y=47, \quad [1]\\ 6x-5y=10. \quad [2]\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Мы всегда можемъ сдѣлать равными коэффиціенты одного и того же неизвѣстнаго въ обоихъ уравненіяхъ; достаточно для этой цѣли умножить обѣ части каждаго изъ уравненій на коэффиціентъ, присвоенный неизвѣстному въ другомъ уравненіи. Для данной системы умножаемъ первое уравненіе на 5 и второе на 3, получаемъ эквивалентную систему:

$$\left.\begin{aligned} 35x+15y=235, \quad [3]\\ 18x-15y=30. \quad [4]\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Такъ какъ знаки коэффиціентовъ при y различны, то исключимъ это неизвѣстпое, сложивъ уравненія.

Получимъ уравненіе:

$$53x = 265, \qquad [5]$$

которое, будучи комбинировано съ однимъ изъ уравненій (2) или съ однимъ изъ уравненій (1), образуетъ систему эквивалентную первой. Вопросъ приведенъ къ случаю первому (**263**). Выводимъ изъ [5] $x = 5$ и, подставивъ это значеніе въ одно изъ уравненій, напримѣръ, въ [1], получаемъ значеніе $y = 4$.

Метода общая и приводитъ къ слѣдующему правилу: *умножаемъ каждое изъ уравненій на коэффиціентъ, присвоенный одному изъ неизвѣстныхъ въ другомъ уравненіи;* **складываемъ** *или* **вычитаемъ** *по частямъ преобразованныя уравненія, смотря по тому, обладаютъ ли равные коэффиціенты разсматриваемаго неизвѣстнаго знаками различными или одинаковыми. Получается такимъ образомъ уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, дающее значеніе этого неизвѣстнаго. Подставивъ это значеніе въ одно изъ предложенныхъ уравненій, найдемъ значеніе втораго неизвѣстнаго.*

266. Замѣчаніе. Если коэффиціенты исключаемаго неизвѣстнаго суть числа цѣлыя, не взаимно простыя между собою, то *мы можемъ взять для общаго коэффиціента ихъ общее наименьшее кратное;* достаточно для этой цѣли раздѣлить это наименьшее кратное на каждый изъ коэффиціентовъ исключаемаго неизвѣстнаго и умножить каждое уравненіе на соотвѣтствующее частное. Пусть, напримѣръ, дана система:

$$\left.\begin{aligned} 36x + 7y &= 323, \\ 54x - 11y &= 377. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Наименьшее кратное чиселъ: 36 и 54 равно 108; частныя отъ дѣленія 108 36 и 54 суть: 3 и 2.

Умноживъ первое уравненіе на 3 и второе на 2, получимъ эквивалентную систему:

$$\left.\begin{aligned} 108x + 21y &= 969, \\ 108x - 22y &= 754. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Коэффиціенты при x имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; вычитаемъ второе уравненіе изъ перваго:

$$43y = 215,$$

откуда $y = 5$, и, слѣдовательно, $x = 8$.

267. Другое замѣчаніе. Найдя, при помощи предъидущей методы, значеніе одного изъ неизвѣстныхъ, мы можемъ *искать значеніе другаго неизвѣстнаго тою же методою.*

Для нахожденія x въ предъидущемъ примѣрѣ умножаемъ первое уравненіе на II и второе на 7 и получаемъ:

$$\begin{cases} 396x + 77y = 3553, \\ 378x - 77y = 2639; \end{cases}$$

сложивъ результаты, находимъ

$$774x = 6192,$$

откуда

$$x = 8.$$

Это значеніе x не можетъ отличаться отъ того, которое дается подстановкою. И въ самомъ дѣлѣ, предъидущія разсужденія показываютъ, что система [1] эквивалентна какой ни есть изъ двухъ системъ:

$$[3] \qquad \begin{cases} y = 5 \\ 36x + 7y = 323, \end{cases} \qquad \begin{rcases} x = 8 \\ 36x + 7y = 323. \end{rcases} \qquad [4]$$

Такъ какъ каждая изъ этихъ системъ даетъ по одному рѣшенію, то необходимо, чтобы рѣшеніе это было одно и то же для обѣихъ системъ.

268. Слѣдствіе. Предъидущія разсужденія показываютъ, что система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными обладаетъ *вообще единственною* и *опредѣленною системою* рѣшеній.

§ II. Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

269. Правило. *Для рѣшенія системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными x, y, z исключаемъ одно изъ неизвѣстныхъ, z напримѣръ, сперва между двумя изъ трехъ уравненій, потомъ между послѣднимъ и однимъ изъ двухъ другихъ;* для этой цѣли употребляемъ или методу подстановки (**264**), или методу сложенія и вычитанія (**265**). *Получаемъ такимъ образомъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и y, которыя, будучи комбинированы съ однимъ изъ предложенныхъ уравненій, образуютъ систему, эквивалентную данной. Рѣшаемъ систему двухъ уравненій въ x и въ y; подставивъ значенія, найденныя для этихъ неизвѣстныхъ, въ одно изъ предложенныхъ уравненій, получимъ значеніе для z.*

270. *Примѣръ I.* Дана система

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 19, \\ 2x + 5y + 3z = 21, \\ 3x - \ y + \ z = \ 4. \end{cases}$$

Приложимъ методу подстановки. Возьмемъ одно изъ уравненій и рѣшимъ его относительно одного изъ неизвѣстныхъ. Въ предложенномъ примѣрѣ удобнѣе всего взять третье уравненіе и рѣшить его относительно y или z, ибо поступивъ такимъ образомъ, мы избѣжимъ знаменателей. Получаемъ:

$$y = 3x + z - 4;$$

подставивъ вмѣсто y это выраженіе въ два первыя уравненія, найдемъ:

$$\begin{cases} 3x + 2(3x + z - 4) + 4z = 19, \\ 2x + 5(3x + z - 4) + 3z = 21; \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 9x + 6z = 27 \\ 17x + 8z = 41. \end{cases}$$

Уравненія эти, будучи рѣшены изложенными выше методами, даютъ:

$$x = 1, \ z = 3.$$

Подставивъ эти значенія въ выраженіе

$$y = 3x + z - 4,$$

получимъ

$$y = 2;$$

искомая система рѣшеній есть, слѣдовательно,

$$x = 1, \ y = 2, \ z = 3.$$

Примѣръ II. Возьмемъ еще систему

$$\begin{cases} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0 \end{cases}$$

и приложимъ къ ней вторую методу (**265**).

Начнемъ съ исключенія z, ибо коэффиціенты при z равны единицѣ. Вычитаемъ послѣдовательно первое уравненіе изъ остальныхъ двухъ и получаемъ два новыхъ уравненія, независимыхъ отъ z,

$$\begin{cases} (b^3 - a^3) + (b^2 - a^2)x + (b - a)y = 0, \\ (c^3 - a^3) + (c^2 - a^2)x + (c - a)y = 0. \end{cases}$$

Раздѣливъ первое уравненіе на $(b-a)$ и второе на $(c-a)$, найдемъ:

$$\begin{cases} b^2+ab+a^2+(b+a)x+y=0, \\ c^2+ca+a^2+(c+a)x+y=0. \end{cases}$$

Исключаемъ y. Вычитаемъ первое уравненіе изъ втораго и получаемъ:

$$c^2-b^2+a(c-b)+(c-b)x=0,$$

или, раздѣливъ на $(c-b)$,

$$c+b+a+x=0,$$

откуда

$$x=-a-b-c,$$

и, слѣдовательно,

$$y=-b^2-ab-a^2-(b+a)x=ab+ac+bc.$$

Подставивъ эти значенія x и y въ выраженіе

$$z=-a^3-a^2x-ay,$$

получимъ

$$z=-a^3+a^2(a+b+c)-a(ab+ac+bc)=-abc.$$

§ III. Рѣшеніе какого ни есть числа уравненій первой степени.

271. Общее правило. *Система уравненій первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ, рѣшается такимъ образомъ: мы можемъ рѣшить одно изъ уравненій относительно одного изъ неизвѣстныхъ и* **подставить** *найденное значеніе во всѣ остальныя уравненія; эти остальныя уравненія, послѣ подстановки, будутъ содержать однимъ неизвѣстнымъ менье. Дополняя ихъ систему уравненіемъ, изъ котораго мы опредѣлили выраженіе перваго неизвѣстнаго, получимъ систему, эквивалентную предложенной. Мы можемъ исключить неизвѣстное между однимъ изъ уравненій и всѣми остальными методою сложенія и вычитанія* **(265)**. *Получимъ эквивалентную систему* **(258)**, *если присоединимъ къ совокупности новыхъ уравненій уравненіе, служившее намъ для исчезновенія этого неизвѣстнаго.*

Во всѣхъ случаяхъ рѣшеніе системы n уравненій съ n неизвѣстными приведется къ рѣшенію системы $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными. Рѣшеніе этой послѣдней системы уравненій приведется къ рѣшенію системы $(n-2)$ уравненій съ $(n-2)$ неизвѣстными; продолжая поступать подобнымъ образомъ, мы приведемъ вопросъ къ одному уравненію, содержащему только одно неизвѣстное.

Система, равнозначущая предложенной системѣ, будетъ заключать тогда n уравненій, такимъ образомъ составленныхъ: послѣднее уравненіе содержитъ только одно неизвѣстное, $(n-1)^{\text{-ое}}$ заключаетъ это неизвѣстное и еще одно, $(n-2)^{\text{-ое}}$ содержитъ эти два неизвѣстныхъ и еще одно третье, и т. д.; наконецъ, первое уравненіе заключаетъ всѣ неизвѣстныя. Рѣшивъ послѣдовательно эти уравненія, начиная съ послѣдняго и кончая первымъ, мы получимъ значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

272. *Примѣръ.* Дана система

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z+4v&=30,\\ 2x-3y+5z-2v&=3,\\ 3x+4y-2z-v&=1,\\ 4x-y+6z-3v&=8. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Первое уравненіе, рѣшенное относительно x, даетъ:

$$x=30-2y-3z-4v;$$

подставивъ это значеніе въ остальныя три уравненія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} 7y+z+10v&=57,\\ 2y+11z+13v&=89,\\ 9y+6z+19v&=112. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Первое изъ уравненій [2], рѣшенное относительно z, даетъ:

$$z=57-7y-10v;$$

подставивъ это значеніе въ другія два уравненія, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} 75y+97v&=538,\\ 33y+41v&=230. \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Изъ послѣдняго выводимъ $y=\dfrac{230-41v}{33}$ и, вставивъ это значеніе въ первое, получаемъ:

$$126v=504. \qquad [4]$$

Система, эквивалентная предложенной системѣ, образована изъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} x&=30-2y-3z-4v,\\ z&=57-7y-10v,\\ y&=\frac{230-41v}{33},\\ 126v&=504. \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій даетъ $v=4$. Значеніе это, будучи подставлено въ предъидущее уравненіе, дастъ $y=2$. Эти два значенія, будучи подставлены во второе уравненіе, дадутъ $z=3$. И наконецъ эти три значенія, подставленныя въ первое, даютъ $x=1$. Итакъ, система рѣшеній данной системы уравненій слѣдующая:

$$x=1,\ y=2,\ z=3,\ v=4.$$

§ IV. Упрощенія и различныя замѣчанія.

273. Случай, когда всѣ неизвѣстныя не входятъ сразу во всѣ уравненія. Можетъ случиться, что каждое изъ уравненій не содержитъ всѣхъ неизвѣстныхъ. Обстоятельство это упрощаетъ вычисленіе. И въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ разсматривать неизвѣстное, не входящее въ уравненіе, какъ неизвѣстное, исключенное изъ этого уравненія. Въ этомъ случаѣ мы начинаемъ рѣшеніе системы съ исключенія неизвѣстнаго, входящаго въ меньшее число уравненій.

Разсмотримъ, напримѣръ, систему

$$\begin{cases} 9x-2z+u=41, & [1] \\ 7y-5z-t=12, & [2] \\ 4y-3x+2u=5, & [3] \\ 3y-4u+3t=7, & [4] \\ 7z-5u=11. & [5] \end{cases}$$

Буква t входитъ только въ два уравненія. Изъ [2]:

$$t=7y-5z-12; \qquad [2]$$

подставляемъ это значеніе въ [4]:

$$24y-15z-4u=43. \qquad [6]$$

Присоединивъ уравненіе это къ уравненіямъ [1], [3] и [5], образуемъ систему четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными x, y, z, u.

Буква x входитъ только въ два уравненія [1] и [3].

Изъ [3]:
$$x=\frac{4y+2u-5}{3}; \qquad [3]$$

подставляемъ это значеніе въ [1]:

$$12y-2z+7u=56. \qquad [7]$$

Присоединивъ это уравненіе [7] къ уравненіямъ [5] и [6], получимъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными y, z, u.

Буква y входитъ только въ уравненія [6] и [7]; выводимъ изъ [7]:

$$y=\frac{2z-7u+56}{12}; \qquad [7]$$

подставивъ значеніе это въ [6], найдемъ:

$$11z+18u=69.$$

Это уравненіе и уравненіе [5] образуютъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

Изъ [5] находимъ $u=\frac{7z-11}{5}$; подставивъ значеніе это въ уравненіе [8], получимъ:

$$11z+\frac{18(7z-11)}{5}=69,$$

уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, которое даетъ $z=3$. Уравненія [5], [7], [3] и [2] дадутъ послѣдовательно: $u=2$, $y=4$, $x=5$, $t=1$.

274. Частные пріемы. Случается иногда, что уравненія представляютъ нѣкоторую симметрію относительно неизвѣстныхъ. Въ этихъ случаяхъ употребляютъ особые пріемы, болѣе удобные, чѣмъ общія методы. Укажемъ на нѣкоторыхъ примѣрахъ употребительные пріемы.

Примѣръ I. Дана система:

$$\begin{cases} x+y+z+t=a, & [1] \\ y+z+t+v=b, & [2] \\ z+t+v+x=c, & [3] \\ t+v+x+y=d, & [4] \\ v+x+y+z=e. & [5] \end{cases}$$

Сложивъ эти уравненія по частямъ, замѣтивъ, что каждое изъ неизвѣстныхъ войдетъ четыре раза въ сумму, и обозначивъ буквою s сумму вторыхъ частей, т.-е. $(a+b+c+d+e)$, получимъ уравненіе:

$$4(x+y+z+t+v)=s,$$

или

$$x+y+z+t+v=\frac{s}{4}.$$

Мы опредѣлили сумму всѣхъ пяти неизвѣстныхъ.

Принявъ во вниманіе, что лѣвыя части нашихъ уравненій представляютъ сумму четырехъ неизвѣстныхъ, мы опредѣлимъ эти неизвѣстные, если вычтемъ соотвѣтственно изъ s правыя части уравненій.

Будемъ имѣть:

$$v=\frac{s}{4}-a,\ x=\frac{s}{4}-b,\ y=\frac{s}{4}-c,\ z=\frac{s}{4}-d,\ t=\frac{s}{4}-e.$$

Примѣръ II. Вычислить длины сторонъ треугольника, зная длины его медіанъ.

Обозначимъ буквами a, b, c неизвѣстныя длины трехъ сторонъ; буквами α, β, γ длины соотвѣтствующихъ *медіанъ*.

Геометрія даетъ непосредственно три уравненія:

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2\alpha^2 + \dfrac{a^2}{2}, & [1] \\ c^2 + a^2 = 2\beta^2 + \dfrac{b^2}{2}, & [2] \\ a^2 + b^2 = 2\gamma^2 + \dfrac{c^2}{2}. & [3] \end{cases}$$

Сложивъ эти уравненія по частямъ, получимъ:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2},$$

откуда легко найдемъ:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \qquad [4]$$

Итакъ, мы знаемъ сумму квадратовъ трехъ сторонъ. Вычтя теперь уравненіе [1] изъ уравненія [4], уничтожимъ b^2 и c^2 и получимъ:

$$a^2 = \frac{4}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2 - \frac{a^2}{2},$$

откуда

$$a^2 = \frac{4}{9}(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2).$$

Мы получили бы b^2 и c^2, вычитая соотвѣтственно уравненія [2] и [3] изъ уравненія [4]. Но мы можемъ поступить проще. И въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что уравненіе [1] перейдетъ въ уравненіе [2], если измѣнимъ b^2 въ c^2, c^2 въ a^2, a^2 въ b^2, α^2 въ β^2. Отсюда слѣдуетъ, что значеніе b^2 опредѣлится, если сдѣлаемъ эту перестановку буквъ въ формулѣ, дающей a^2. Получимъ:

$$b^2 = \frac{4}{9}(2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2);$$

подобнымъ же образомъ:

$$c^2 = \frac{4}{9}(2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2).$$

Зная квадраты сторонъ, опредѣлимъ и самыя стороны.

Примѣръ III. Дана система

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{v}{d}, \\ mx + ny + pz + qv = k. \end{cases}$$

Мы доказали, что (97)

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{mx+ny+pz+qv}{ma+nb+pc+qd}.$$

Такъ какъ числитель последняго отношенія равенъ k, то

$$x=\frac{ak}{ma+nb+pc+qd}.$$

Подобнымъ же образомъ:

$$y=\frac{bk}{ma+nb+pc+qd},$$

$$z=\frac{ck}{ma+nb+pc+qd},$$

$$v=\frac{dk}{ma+nb+pc+qd}.$$

§ V. Случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій.

275. Случай, когда число уравненій превышаетъ число неизвѣстныхъ. Положимъ, напримѣръ, что дана система трехъ уравненій съ двумя неизвѣстными x и y. Рѣшивъ два изъ этихъ трехъ уравненій при помощи одной изъ изложенныхъ методъ, получимъ значенія x и y, которыя только и могутъ удовлетворять системѣ. Но для того, чтобы они дѣйствительно удовлетворяли системѣ, необходимо, чтобы значенія эти удовлетворяли третьему уравненію. Если условіе это не выполняется, то *система несовмѣстна*, т.-е. *несуществуетъ общей системы рѣшеній для всѣхъ уравненій системы.*

Напримѣръ, система: $\begin{cases} 3x+7y=17, \\ 5x-2y=\ 1, \\ 8x+\ y=12 \end{cases}$

несовмѣстна, ибо значенія $x=1$, $y=2$, получаемыя при рѣшеніи двухъ первыхъ уравненій, не удовлетворяютъ третьему, ибо даютъ невозможное равенство: $10=12$.

И вообще, положимъ, что дана система $(m+p)$ уравненій, заключающихъ m неизвѣстныхъ. Рѣшивъ m уравненій, мы опредѣлимъ значенія всѣхъ m неизвѣстныхъ, которыя только и могутъ удовлетворять системѣ. Для того, чтобы значенія эти дѣйствительно удовлетворяли системѣ, необходимо, чтобы они обращали въ тождество остальныя p уравненій. Если этого не случится, то система несовмѣстна.

Если коэффиціенты неизвѣстныхъ, или нѣкоторые изъ нихъ, содержатъ буквы, значенія которыхъ не назначены, то значенія неизвѣстныхъ выразятся, вообще, формулами, содержащими эти буквы. Подставивъ эти формулы вмѣсто неизвѣстныхъ въ оставшіяся p уравненій, получимъ буквенныя соотношенія, представляющія необходимыя и достаточныя условія, которыя должны выполнять буквенные коэффиціенты для того, чтобы система была совмѣстна. Эти соотношенія называются *условными уравненіями.*

Дана система: $\left\{\begin{aligned} x+\ y&=2a\\ x-\ y&=2b,\\ 2x+3y&=\ a+2b,\\ 3x+4y&=2a+3b-1.\end{aligned}\right.$

Два первыя уравненія даютъ: $x=a+b$, $y=a-b$; подставивъ эти значенія въ два послѣднихъ уравненія, получимъ условныя уравненія:

$$\left\{\begin{aligned} 5a-b&=\ a+2b,\\ 7a-b&=2a+3b-1,\end{aligned}\right.$$

которыя дадутъ: $a=3$, $b=4$.

Итакъ, система будетъ совмѣстна только при $a=3$ и $b=4$, и тогда $x=7$, $y=-1$.

276. Случай, когда число неизвѣстныхъ превышаетъ число уравненій. Положимъ, напримѣръ, что дана система двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными x, y, z. Рѣшивъ эти два уравненія относительно x и y, мы выразимъ x и y формулами, содержащими букву z.

Давая въ этихъ формулахъ буквѣ z совершенно произвольныя значенія, будемъ получать соотвѣтствующія значенія для x и для y. Видимъ, что *система уравненій обладаетъ безчисленнымъ множествомъ системъ рѣшеній. Она неопредѣленна.*

И вообще, положимъ, что дана система m уравненій, связывающихъ $(m+p)$ неизвѣстныхъ. Рѣшивъ эту систему относительно m неизвѣстныхъ, мы выразимъ ихъ формулами, въ которыя будутъ входить остальныя p неизвѣстныхъ. Давая этимъ неизвѣстнымъ въ этихъ формулахъ совершенно произвольныя значенія, будемъ получать соотвѣтствующія значенія для тѣхъ m неизвѣстныхъ, относительно которыхъ рѣшали систему. Система, слѣдовательно, неопредѣленна.

Примѣръ. Дана система: $\left\{\begin{aligned} 2x+3y-4z-3t&=6,\\ x-2y+3z-2t&=2.\end{aligned}\right.$

Рѣшивъ систему эту относительно буквъ x и y, найдемъ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{18 - z + 12t}{7}, \\ y = \dfrac{2 + 10z - t}{7}. \end{cases}$$

Взявъ *произвольно* $z = 2$, $t = 1$, получимъ $x = 4$, $y = 3$.

§ VI. Случаи несовмѣстности и неопредѣленности.

277. Случай несовмѣстности. Иногда случается, что методы рѣшенія уравненій первой степени приводятъ къ противорѣчивымъ результатамъ и въ тѣхъ даже случаяхъ, когда число уравненій равно числу неизвѣстныхъ.

1°. Дана система: $\begin{cases} 9x - 12y = 6, \\ 21x - 28y = 15. \end{cases}$

Приложимъ методу сложенія и вычитанія (**265**).

Для исключенія y умножаемъ уравненія соотвѣтственно на 7 и на 3 и получаемъ:

$$\begin{cases} 63x - 84y = 42, \\ 63x - 84y = 45; \end{cases}$$

уравненія эти очевидно совмѣстно не могутъ существовать, ибо, при совмѣстномъ ихъ существованіи, лѣвыя части были бы равны, а слѣдовательно, были бы равны и правыя части, что невозможно, ибо 42 не равно 45.

2°. Дана система: $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 30. \end{cases}$

Исключивъ z сперва изъ двухъ первыхъ уравненій, потомъ изъ двухъ послѣднихъ, получимъ систему:

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25, \\ 10x - 5y = 26. \end{cases}$$

Уравненія эти совмѣстно не существуютъ, ибо одинаковыя рѣшенія дѣлали бы лѣвыя части равными, что невозможно, такъ какъ 25 не $= 26$.

Измѣнивъ коэффиціенты въ несовмѣстной системѣ, мы получимъ вообще систему совмѣстную. Несовмѣстность системы зависитъ, слѣдовательно, отъ значенія коэффиціентовъ. Мы найдемъ впослѣдствіи необходимыя и достаточныя условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты для того, чтобы система была несовмѣстна.

278. Случай неопредѣленности. Случается иногда, что система уравненій первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ, имѣемъ безчисленное множество системъ рѣшеній.

1°. Дана система: $\begin{cases} 91x + 63y = 217, \\ 65x + 45y = 155. \end{cases}$

Исключимъ y; для этой цѣли умножимъ уравненія соотвѣтственно на 5 и на 7 и получимъ:

$$\begin{cases} 455x + 315y = 1085, \\ 455x + 315y = 1085. \end{cases}$$

Видимъ, что получили въ сущности одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое обладаетъ безчисленнымъ множествомъ рѣшеній (**276**).

2°. Дана система: $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 31. \end{cases}$

Исключеніе z сперва между двумя первыми уравненіями и потомъ между двумя послѣдними приведетъ къ двумъ уравненіямъ:

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25, \\ 10x - 5y = 25. \end{cases}$$

Уравненія эти представляютъ въ сущности одно уравненіе, которое, будучи комбинировано съ однимъ изъ уравненій системы, образуетъ систему двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными, допускающую безчисленное множество рѣшеній.

Мы найдемъ впослѣдствіи необходимыя и достаточныя условія, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты при неизвѣстныхъ для того, чтобы система была неопредѣленна.

Упражненія.

1. Рѣшить систему: $\begin{cases} x + ay = b, \\ ax - by = c. \end{cases}$ $\qquad x = \dfrac{b^2 + ac}{a^2 + b}, \quad y = \dfrac{ab - c}{a^2 + b}.$

2. Рѣшить систему: $\begin{cases} (a - b)x + (a + b)y = c, \\ (a^2 - b^2) \quad (x + y) = d. \end{cases}$ $\qquad x = \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{d}{a - b} - c\right), \quad y = \dfrac{1}{2b}\left(c - \dfrac{d}{a + b}\right).$

3. Рѣшить систему: $\begin{cases} \dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{y} = a, \\ \dfrac{q}{x} + \dfrac{p}{y} = b. \end{cases}$

Взявъ $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{y}$ за неизвѣстныя, получимъ:

$$x = \frac{p^2 - q^2}{ap - bq}, \quad y = \frac{p^2 - q^2}{bp - aq}.$$

4. Рѣшить систему: $\begin{cases} (a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b), \\ a^2y - \dfrac{ab^2c}{a+c} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b). \end{cases}$

$$x = \frac{ab}{a+b}, \quad y = \frac{ab}{a-b}.$$

5. Рѣшить систему: $\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x}, \\ 3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x}. \end{cases}$

$$x = 16, \ y = 25.$$

6. Рѣшить систему: $\begin{cases} x - y + z = 0, \\ (a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0, \\ abx - acy + bcz = 1. \end{cases}$

$$x = \frac{1}{(a-c)(b-c)}, \quad y = \frac{1}{(a-b)(b-c)}, \quad z = \frac{1}{(a-b)(a-c)}.$$

7. Рѣшить систему:

$$xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz) = c(xy - yz - zx).$$

$$\frac{2}{x} = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

8. Рѣшить систему: $\begin{cases} x + y + z = a + b + c, \\ bx + cy + az = cx + ay + bz = a^2 + b^2 + c^2. \end{cases}$

$$x = b + c - a.$$

9. Рѣшить систему: $\begin{cases} a^4 + a^3x + a^2y + az + u = 0, \\ b^4 + b^3x + b^2y + bz + u = 0, \\ c^4 + c^3x + c^2y + cz + u = 0, \\ d^4 + d^3x + d^2y + dz + u = 0. \end{cases}$

$$x = -(a + b + c + d), \ y = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$

$$z = -(abc + abd + acd + bcd), \ u = abcd.$$

10. Рѣшить систему: $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a}\right)^m + \left(\dfrac{y}{b}\right)^m + \left(\dfrac{z}{c}\right)^m = 1, \\ a^n + b^n + c^n = d^n, \\ \dfrac{x^m}{a^{m+n}} = \dfrac{y^m}{b^{m+n}} = \dfrac{z^m}{c^{m+n}}, \end{cases}$

и исключить a, b, c.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = \left(\frac{a}{d}\right)^n, \ \left(\frac{y}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{d}\right)^n, \ \left(\frac{z}{c}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

и

$$x^{\frac{mn}{m+n}} + y^{\frac{mn}{m+n}} + z^{\frac{mn}{m+n}} = d^{\frac{mn}{m+n}}.$$

11. Рѣшить систему: $\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{d}. \end{cases}$

$$x = \frac{b(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}}.$$

12. Рѣшить систему: $\begin{cases} ax + m(y + z + v) = k, \\ by + m(z + v + x) = l, \\ cx + m(v + x + y) = p, \\ dv + m(x + y + z) = q. \end{cases}$

Опредѣляемъ сперва сумму s неизвѣстныхъ и потомъ:

$$x = \frac{k - ms}{a - m}, \ y = \frac{l - ms}{b - m}, \ z = \frac{p - ms}{c - m}, \ v = \frac{q - ms}{d - m}.$$

13. Если α, β, γ суть три данныхъ различныхъ числа, удовлетворяющія соотношеніямъ:

$$\begin{cases} \alpha^3 + p\alpha + q = 0, \\ \beta^3 + p\beta + q = 0, \\ \gamma^3 + p\gamma + q = 0, \end{cases}$$

то показать, что

$$\alpha + \beta + \gamma = q.$$

14. Рѣшить систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 8z = 3, \\ 4x + 5z + 2t = 23, \\ 5y + 3t - v = 40, \\ 2x + 5t = 21, \\ 3y + 2z = 23. \end{cases}$$

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Рѣшеніе задачъ первой степени.

---

279. Рѣшеніе задачи при помощи уравненія состоитъ изъ трехъ различныхъ частей; части эти суть: 1° *составленіе уравненія;* 2° *рѣшеніе уравненія;* 3° *изслѣдованіе* рѣшенія.

Задача называется *задачею первой степени,* если ея рѣшеніе требуетъ рѣшенія системы уравненій первой степени. Мы умѣемъ уже находить рѣшенія подобныхъ системъ. Займемся, слѣдовательно, первою и третью частями.

§ I. Составленіе уравненій.

280. Правило для составленія уравненій по условіямъ задачи. Мы сказали уже (256), что невозможно дать вполнѣ общаго правила, которому нужно слѣдовать для составленія уравненій по условіямъ задачи. Ограничиваются обыкновенно слѣдующимъ указаніемъ. *Изучивъ тщательно выраженіе задачи, обозначимъ буквами x, y, z, . . . тѣ числа, знаніе которыхъ даетъ рѣшеніе. Предполагаемъ, что задача рѣшена. Обозначаемъ знаками рядъ дѣйствій, которыя нужно произвести надъ буквами x, y, z, . . . и надъ данными вопроса для того, чтобы убѣдиться, что значенія неизвѣстныхъ удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ вопроса. т.-е., другими словами, дѣлаемъ повѣрку задачи, предположивъ ее рѣшенною. Эта повѣрка приведетъ, вообще, къ результатамъ, которые должны быть равны; приравнявъ формулы, выражающія эти результаты, получимъ уравненія вопроса.*

Покажемъ на примѣрахъ приложеніе этого правила.

281. Задача 1. *Резервуаръ, имѣющій два крана A и B неравной величины, наполненъ водою. Открываемъ кранъ A и выпускаемъ четверть всей воды. Оставивъ затѣмъ кранъ A открытымъ, открываемъ кранъ B и выпускаемъ всю воду. Положимъ, что для этого потребовался промежутокъ времени пятью четвертями часа болѣе того промежутка, который былъ необходимъ для выпуска четверти всей воды при помощи крана A.*

Если бы оба крана были открыты съ самаго начала, то резервуаръ сдѣлался бы пустымъ четвертью часа ранѣе. Узнать, сколько потребуется времени для того, чтобы вся вода вытекла только при помощи одного крана A.

Обозначимъ буквою x искомое число часовъ.

Четверть воды вытекаетъ, посредствомъ крана A, въ $\frac{x}{4}$ часовъ.

Три четверти воды вытекаетъ, посредствомъ крановъ A и B, въ $\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right)$ часовъ.

Отсюда слѣдуетъ, что вся вода вытекла бы, посредствомъ крановъ A и B, въ $\frac{4}{3}$ этого промежутка времени, т.-е. въ $\left(\frac{x}{3}+\frac{5}{3}\right)$ часовъ.

Съ другой стороны, время, употребленное при опытѣ, т.-е. время, впродолженіи котораго вытекло сперва $\frac{1}{4}$ воды при помощи крана A, а потомъ три четверти воды при помощи крановъ A и B, равно, по условію задачи,

$$\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}+\frac{5}{4}\right), \text{ или } \frac{x}{2}+\frac{5}{4}.$$

Этотъ промежутокъ на одну четверть часа болѣе того промежутка, который потребовался бы для выпуска всей воды при помощи крановъ A и B, если бы они оба были открыты съ самого начала; отсюда слѣдуетъ, что имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{3}=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}-\frac{1}{4},$$

которое, будучи рѣшено, даетъ $x=4^{ч}$.

Повѣрка. Промежутокъ времени, употребляемый краномъ A, для выпуска четверти резервуара, равенъ 1 часу; промежутокъ времени, употребляемый кранами A и B, для выпуска трехъ остальныхъ четвертей, равенъ, слѣдовательно, $1^{ч}+\frac{5^{ч}}{4}$, или $\frac{9^{ч}}{4}$; промежутокъ же времени, необходимаго для выпуска всей воды при помощи обоихъ крановъ, равенъ $\frac{4}{3}$ отъ $\frac{9}{4}$ часа, или 3 часамъ. Съ другой стороны, при опытѣ, резервуаръ сдѣлался пустымъ черезъ $1^ч + \frac{9^ч}{4}$, или черезъ $3\frac{1^ч}{4}$; опытъ, слѣдовательно, продолжался на $\frac{1}{4}$ часа болѣе. Задача этого и требовала.

282. Задача II. *Лисица травится борзою собакою. Въ началѣ травли лисица находилась отъ собаки на разстояніи* 60 *прыжковъ. Лисица дѣлаетъ* 9 *прыжковъ въ то время, какъ собака дѣлаетъ всего* 6 *прыжковъ;* 3 *прыжка собаки составляютъ* 7 *прыжковъ лисицы. Узнать, сколько прыжковъ сдѣлаетъ собака, пока не догонитъ лисицы.*

Означимъ буквою x искомое число прыжковъ.

Три прыжка собаки равны семи прыжкамъ лисицы, а потому x прыжковъ собаки равны $\frac{7x}{3}$ прыжкамъ лисицы. Формула $\frac{7x}{3}$ представляетъ путь, выраженный въ прыжкахъ лисицы, который должна проскакать собака.

Съ другой стороны, собака дѣлаетъ 6 прыжковъ въ то время, какъ лисица дѣлаетъ 9; отсюда слѣдуетъ, что лисица сдѣлаетъ $\frac{9x}{6}$ своихъ прыжковъ въ то время, какъ собака сдѣлаетъ x своихъ прыжковъ.

И такъ какъ лисица въ началѣ находилась впереди собаки на 60 своихъ прыжковъ, то формула $\left(60+\frac{9x}{6}\right)$ представитъ второе выраженіе пути, который должна проскакать собака, измѣреннаго тѣми же единицами.

Имѣемъ, слѣдовательно, уравненіе: $\frac{7x}{3} = 60 + \frac{9x}{6}$, которое, будучи рѣшено, даетъ $x = 72$ прыжкамъ.

Повѣрка. 72 прыжка собаки равны $\frac{7}{3}$ отъ 72 или 168 прыжкамъ лисицы. Лисица дѣлаетъ 108 прыжковъ въ то время, какъ собака дѣлаетъ 72 прыжка, и эти 108 прыжковъ, сложенные съ 60 прыжками, составятъ 168 прыжковъ лисицы.

283. Задача III. *Требуется найти число, изображенное четырьмя цифрами, зная:* 1^0 *что цифра сотенъ равна суммѣ цифръ единицъ и десятковъ;* 2^0 *что цифра десятковъ равна удвоенной суммѣ цифры тысячъ и цифры единицъ;* 3^0 *что частное и остатокъ отъ дѣленія искомаго числа на сумму его цифръ соотвѣтственно суть* 109 *и* 9 *и* 4^0 *что разность между числомъ, изображеннымъ искомыми цифрами, написанными въ обратномъ порядкѣ, и искомымъ числомъ равна* 819.

Обозначимъ буквами x, y, z, v цифры единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ. Первое и второе условія приводятъ непосредственно къ уравненіямъ:

$$z = x + y, \tag{1}$$

$$y = 2v + 2x. \tag{2}$$

Такъ какъ искомое число равно $1000v + 100z + 10y + x$, то 3-е условіе дастъ:

$$1000v + 100z + 10y + x = 109(x + y + z + v) + 9. \tag{3}$$

И наконецъ, четвертое условіе даетъ:

$$1000x+100y+10z++v-(1000v+100z+10y+x)=819. \qquad [4]$$

Рѣшимъ систему. Два послѣднія уравненія приводятся соотвѣтственно къ слѣдующимъ:

$$99v-\ z-11y-\ 12v=\ 1, \qquad [3]$$

$$111x+10y-10z-111v=91. \qquad [4]$$

Исключивъ сперва z изъ [1], [3], [4], найдемъ:

$$99v-\ 12y-13x=\ 1, \qquad [5]$$

$$101x-111v \qquad =91. \qquad [6]$$

Исключаемъ теперь y изъ [2] и [5] и находимъ:

$$75v-37x=1.$$

И наконецъ, исключивъ x изъ [6] и [7] получимъ: $v=1$, и затѣмъ $x=2$, $y=6$, $z=8$.

Искомое число равно 1862. Повѣрка производится непосредственно.

284. Случается иногда, что нѣкоторыя условія равенства, даваемыя выраженіемъ задачи, кажутся излишними.

Задача IV. *Отецъ раздѣляетъ наслѣдство между своими сыновьями такимъ образомъ: онъ даетъ первому сыну сумму a и n-ую часть остатка; второму — сумму $2a$ и n-ую часть новаго остатка; третьему — сумму $3a$ и n-ую часть новаго остатка, и т. д. Оказывается, что этимъ способомъ наслѣдство раздѣляется на равныя части. Опредѣлить величину наслѣдства, число дѣтей и часть каждаго изъ нихъ.*

Означимъ буквою x величину наслѣдства.

Часть перваго сына равна:

$$a+\frac{x-a}{n}, \text{ или } \frac{x+(n-1)a}{n}.$$

Остается для другихъ сыновей:

$$x-\frac{x+(n-1)a}{n}, \text{ или } \frac{(n-1)\,(x-a)}{n}.$$

Второй сынъ получаетъ сперва $2a$.

Остается:

$$\frac{(n-1)\,(x-a)}{n}-2a, \text{ или } \frac{(n-1)\,x-(3n-1)a}{n}.$$

Часть втораго сына равна:

$$2a+\frac{(n-1)\,x-(3n-1)\,a}{n^2}, \text{ или } \frac{(n-1)\,x+(2n^2-3n+1)\,a}{n^2}.$$

По условію задачи части должны быть равны, а потому имѣетъ мѣсто уравненіе:

$$\frac{x+(n-1)a}{n}=\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ $x=(n-1)^2a$.

Видимъ, что для опредѣленія величины наслѣдства мы воспользовались только частями двухъ первыхъ сыновей. *Необходимо* вычислить ихъ значенія и удостовѣриться, что онѣ равны частямъ другихъ сыновей, и затѣмъ уже опредѣлить число сыновей. Часть перваго равна:

$$\frac{x+(n-1)a}{n},\ \text{или}\ \frac{(n-1)^2a+(n-1)a}{n},\ \text{или}\ (n-1)a.$$

Часть втораго:

$$\frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}=\frac{(n-1)^3a+(2n^2-3n+1)a}{n^2}=\frac{(n^3-n^2)a}{n^2}=(n-1)a.$$

Часть третьяго, по условію, равна

$$3a+\frac{x-2(n-1)a-3a}{n}=\frac{x+(n-1)a}{n}=(n-1)a.$$

Видимъ, что всѣ части равны $(n-1)a$.

Раздѣливъ величину наслѣдства на часть каждаго сына, опредѣлимъ число сыновей. Это число равно $(n-1)$.

Всѣ условія задачи выполнены.

285. Употребленіе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Если выраженіе задачи не позволяетъ легко усмотрѣть соотношеній, связывающихъ данныя и результатъ, то прибѣгаютъ иногда къ *вспомогательнымъ неизвѣстнымъ*, которыя затѣмъ исключаются изъ уравненій, ихъ содержащихъ. Вотъ примѣръ, взятый изъ *ариѳметики Ньютона*.

Задача V. *На лугъ, поверхность котораго равна a, выгоняется n быковъ; вся трава, росшая на этомъ лугѣ и выроставшая на немъ равномѣрно, съѣдается быками впродолженіи t дней. На другой лугъ, поверхность котораго равна a', выгоняется n' быковъ. Вся трава, росшая на немъ и выроставшая равномѣрно, поѣдается въ t' дней. Узнать, сколько нужно выгнать быковъ на третій лугъ, поверхность котораго равна α, для того, чтобы вся трава, росшая на немъ и равномѣрно выроставшая, была съѣдена въ θ дней.*

Положимъ, что до выгона быковъ трава на всѣхъ лугахъ была одинаковой высоты. Обозначимъ эту высоту буквою y. Положимъ, что дневной приростъ травы одинаковъ для всѣхъ луговъ; означимъ его буквою z. Буквы y и z суть вспомогательныя перемѣнныя. Назовемъ буквою x число быковъ, выгнанныхъ на третій лугъ.

Такъ какъ высота травы на первомъ лугѣ увеличивается въ ростѣ въ одинъ день на z, то полное ея приращеніе въ t дней будетъ tz, и къ концу этого времени высота травы будетъ равна $y+tz$. Полный объемъ этой травы равенъ $a(y+tz)$. Это количество съѣдается n быками въ t дней; отсюда слѣдуетъ, что одинъ быкъ, въ одинъ день, съѣдаетъ такое количество травы, которое выражается формулою:

$$\frac{a(y+tz)}{nt}.$$

Очевидно, что количества травы, съѣдаемыя однимъ быкомъ въ одинъ день, на второмъ и третьемъ лугахъ, соотвѣтственно суть:

$$\frac{a'(y+tz)}{n't'},\quad \frac{\alpha(y+\theta z)}{x\theta}.$$

Эти количества должны быть равны, а потому имѣютъ мѣсто уравненія:

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{a'(y+t'z)}{n't'}=\frac{\alpha(y+\theta z)}{\theta x}.$$

Выводимъ сперва изъ уравненія перваго букву y въ *функціи* отъ z и находимъ:

$$y=\frac{(an'-a'n)tt'z}{a'nt-an't'}.$$

Замѣнивъ букву y этимъ значеніемъ во второмъ уравненіи, получимъ

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{\alpha'(y+\theta z)}{\theta x},$$

уничтожимъ z и найдемъ:

$$x=\frac{\alpha\left\{an't'(\theta-t)+a'nt(t'-\theta)\right\}}{aa'\theta(t'-t)}.$$

Ньютонъ даетъ слѣдующее приложеніе:

$a=3\frac{1}{3}$ десятины, $t=4$ недѣлямъ, $n=12$ быкамъ,
$a'=10$ $t'=9$ $n'=21$
$\alpha=24$ $\theta=18$ $x=36$.

§ II. Изслѣдованіе.

286. Изслѣдованіе рѣшенія. Рѣшивъ систему уравненій, составленныхъ по условіямъ вопроса, мы получимъ рѣшенія, удовлетворяющія уравненіямъ. Рѣшенія эти не всегда согласуются съ предложенною задачею. Можетъ случиться въ самомъ дѣлѣ, что нѣкоторыя условія, налагаемыя на неизвѣстныя природою вопроса и не могущія быть выраженными уравненіями, дѣлаютъ задачу невозможною. Изучить причины невозможности, значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

Если данныя задачи изображены буквами, и, слѣдовательно, значенія неизвѣстныхъ выражены формулами, то задача будетъ возможна только тогда, когда данныя заключены въ извѣстныхъ границахъ. Опредѣлить границы, внѣ которыхъ задача невозможна, значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

И наконецъ, изучить всѣ замѣчательныя обстоятельства, представляемыя формулами, въ границахъ, опредѣленныхъ изслѣдованіемъ, значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

Задача VI. *Въ обществѣ, состоящемъ изъ* 10 *особъ, сдѣланъ былъ сборъ въ пользу бѣдныхъ: каждый мужчина внесъ* 6 *рублей, каждая женщина дала* 4 *рубля. Полный сборъ равенъ* 45 *рублямъ. Опредѣлить число мужчинъ и число женщинъ?*

Обозначимъ буквами x и y соотвѣтственно числа мужчинъ и женщинъ. Имѣемъ сперва:

$$x+y=10.$$

Такъ какъ каждый мужчина далъ по 6 рублей, то x мужчинъ дали $6x$; такъ какъ каждая женщина дала по 4 рубля, то y женщинъ дали $4y$; слѣдовательно:

$$6x+4y=45.$$

Рѣшивъ эти уравненія, найдемъ:

$$x=2\frac{1}{2},\ y=7\frac{1}{2}.$$

Изслѣдованіе. Это *дробное* рѣшеніе есть единственное, удовлетворяющее уравненіямъ, которыя представляютъ вѣрный и полный переводъ выраженія задачи. Задача, слѣдовательно, не можетъ имѣть другаго рѣшенія.

Но *природа вопроса требуетъ, чтобы рѣшеніе представляло систему цѣлыхъ чиселъ; такъ какъ найденныя числа суть числа дробныя, то задача невозможна.*

Задача VII. *Нѣкоторая особа пользуется услугами работника впродолженіи* 13 *лѣтнихъ дней и, при расчетѣ, удерживаетъ изъ его жалованья въ видѣ штрафа* 22 *франка. Въ другой разъ эта же особа нанимаетъ того же работника на* 17 *зимнихъ дней, платя за каждый день* 2 *франками менѣе, чѣмъ за лѣтній, и при расчетѣ прибавляетъ къ жалованью за усердіе* 28 *франковъ. Каждый разъ работникъ получаетъ одну и ту же сумму. Узнать цѣну лѣтняго дня.*

Обозначимъ буквою x эту цѣну; цѣна зимняго дня равна $(x-2)$.

Первый разъ работникъ получилъ $13x-22$.

Во второй разъ онъ получилъ $17(x-2)+28$.

Имѣемъ уравненіе

$$17(x-2)+28=13x-22,$$

рѣшивъ которое, найдемъ $x=-4$.

Изслѣдованіе. Это *отрицательное* рѣшеніе *и только оно одно* удовлетворяетъ уравненію; задача, полное выраженіе которой изображено уравненіемъ, не можетъ имѣть иного рѣшенія. *Природа же вопроса требуетъ, чтобы рѣшеніе было положительное; такъ какъ рѣшеніе отрицательное, то задача невозможна.*

Задача VIII. *Найти двузначное число, удовлетворяющее слѣдующимъ условіямъ:*

1°. *Учетверенная цифра единицъ превышаетъ на единицу утроенную цифру десятковъ;*

2°. *Разность между числомъ, изображеннымъ цифрами искомаго числа, написанными въ обратномъ порядкѣ, и искомымъ числомъ равна* 36.

Обозначивъ буквами x и y цифры десятковъ и единицъ, получимъ систему уравненій:

$$\left.\begin{aligned} 4y-3x&=1,\\ 10x+y-10y-x&=36.\end{aligned}\right\}$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ:

$$x=17,\quad y=13.$$

Изслѣдованіе. Это *цѣлое и положительное* рѣшеніе есть единственное, которое удовлетворяетъ уравненіямъ. Задача не можетъ имѣть, слѣдовательно, другаго рѣшенія. *Природа же вопроса требуетъ, чтобы искомыя числа были менѣе* 10; *такъ какъ они выходятъ за эту границу, то задача невозможна.*

Эти примѣры достаточно показываютъ, что рѣшеніе системы уравненій можетъ не согласоваться съ задачею, приведенною къ этой системѣ, ибо можетъ случиться, что рѣшеніе не выполняетъ условій, налагаемыхъ на неизвѣстныя, условій, которыя не могутъ фигурировать въ уравненіяхъ въ видѣ формулъ. Изложенное обстоятельство представляетъ одно изъ обстоятельствъ, встрѣчаемыхъ при рѣшеніи задачъ. Существуетъ другое обстоятельство болѣе важное: мы хотимъ сказать объ *отрицательныхъ рѣшеніяхъ* и ихъ *представленіи*.

§ III. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

287. Отрицательныя рѣшенія уравненій. Отрицательныя числа, получаемыя, какъ рѣшенія одного или нѣсколькихъ уравненій, не требуютъ никакихъ замѣчаній. Числа эти, будучи подставлены вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ уравненія, на основаніи соглашеній (19), въ тождества.

Если же рѣшается задача, искомыя которой суть величины и которая приводится къ уравненіямъ, обладающимъ отрицательными рѣшеніями, то казалось бы, что эти отрицательныя рѣшенія, какъ числа, не представляющія никакой величины, служатъ признакомъ невозможности и, слѣдовательно, должны быть отброшены, какъ числа, недопускаемыя задачею. И это обстоятельство дѣйствительно имѣло бы мѣсто, если бы, при составленіи уравненій, могли всегда выразить условія предложенной задачи самымъ общимъ образомъ, распространеннымъ на всѣ случаи. Очень часто этого сдѣлать нельзя, и тогда отрицательныя рѣшенія могутъ имѣть нѣкоторыя *представленія*, которыя важно изучить.

Начнемъ съ доказательства слѣдующей теоремы.

288. Теорема. *Модуль отрицательнаго рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ есть рѣшеніе новаго уравненія, которое найдемъ, перемѣнивъ въ данномъ уравненіи знаки у тѣхъ членовъ, которые содержатъ множителемъ неизвѣстное.*

Возьмемъ уравненіе

$$ax + b = a'x + b' \qquad [1]$$

и положимъ, что оно обладаетъ отрицательнымъ рѣшеніемъ $x = -\alpha$, такъ что имѣемъ тождественно:

$$a(-\alpha) + b = a'(-\alpha) + b', \text{ или } -a\alpha + b = -a'\alpha + b'. \qquad [2]$$

Перемѣнимъ знаки у тѣхъ членовъ уравненія [1], которые содержатъ неизвѣстное, т.-е. напишемъ уравненіе

$$-ax + b = -a'x + b';$$

для того, чтобы уравненію этому удовлетворяло число α, необходимо и достаточно, чтобы имѣло мѣсто тождество:

$$-a\alpha + b = -a'\alpha + b'.$$

Это же тождество есть тождество [2], которое, по условію, имѣетъ мѣсто, и теорема доказана.

289. Замѣчаніе. Мы увидимъ, что очень часто новое уравненіе, о которомъ шла рѣчь въ теоремѣ, соотвѣтствуетъ задачѣ, мало отличающейся отъ предложенной, а иногда соотвѣтствуетъ и самой предложенной задачѣ, только нѣсколько распространенной, т.-е. взятой въ болѣе общемъ смыслѣ; *мы получимъ тогда рѣшеніе задачи измѣненной или обобщенной, взявъ за рѣшеніе модуль отрицательнаго рѣшенія, найденнаго для неизвѣстнаго.*

Подобное замѣчаніе не можетъ быть развито общимъ образомъ. Должно изучить его приложеніе въ каждомъ частномъ случаѣ, что мы и сдѣлаемъ въ слѣдующихъ задачахъ.

Задача IX. *Два тѣла M и N двигаются по прямой, исходя изъ точекъ A и B, лежащихъ другъ отъ друга на разстояніи d (A налѣво, B направо), по одному направленію слѣва на право, со скоростями v и v'. Черезъ какой промежутокъ времени они встрѣтятся?*

Обозначимъ буквою x искомое время. Первое тѣло, скорость котораго v, пройдетъ въ это время пространство vx; второе же, въ то же время, пробѣжитъ пространство $v'x$. Такъ какъ тѣла начинаютъ движеніе въ одинъ и тотъ же моментъ и въ началѣ движенія отстоятъ другъ отъ друга на разстояніи d, то пространство, пробѣгаемое тѣломъ A, будетъ болѣе пространства, пробѣгаемаго тѣломъ B, на величину d, т.-е. будетъ имѣть мѣсто уравненіе

$$vx - v'x = d, \qquad [1]$$

откуда

$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Изслѣдованіе. Если v болѣе v', то значеніе x положительное и представляетъ требуемое рѣшеніе. Если же v менѣе v', то рѣшеніе отрицательно. Для его представленія замѣтимъ, что модуль его, на основаніи теоремы (**288**), удовлетворяетъ уравненію:

$$v'x - vx = d. \qquad [2]$$

Уравненіе это очевидно выражаетъ, что путь, пробѣгаемый тѣломъ N, превышаетъ на величину d путь, пробѣгаемый тѣломъ M, и условіе это отвѣчаетъ слѣдующему вопросу:

Два тѣла находятся въ пути неопредѣленное время; сколько протекло времени послѣ ихъ встрѣчи? Ибо, въ этомъ предположеніи, встрѣча имѣла мѣсто влѣво отъ точки A.

Если, слѣдовательно, мы хотимъ дать задачѣ это толкованіе, то *отрицательное значеніе x выражаетъ время уже протекшее.*

Понятно, что, при $v < v'$, тѣло M, находящееся позади тѣла N и двигающееся медленнѣе его, никогда не встрѣтитъ его позднѣе, а уже встрѣтило его до разсматриваемой эпохи.

Задача X. *Возрасты двухъ особъ суть a и b; черезъ какой промежутокъ времени возрастъ первой особы будетъ вдвое болѣе возраста второй.*

Обозначимъ буквою x искомое время; уравненіе задачи слѣдующее:

$$a + x = 2(b + x), \qquad [1]$$

откуда

$$x = a - 2b.$$

Изслѣдованіе. Если $a > 2b$, то значеніе x положительное и даетъ рѣшеніе. Если $a < 2b$, то значеніе x отрицательное. Модуль его удовлетворяетъ уравненію

$$a - x = 2(b - x), \qquad [2]$$

которое отвѣчаетъ вопросу:

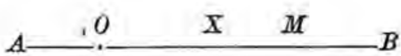
Сколько времени протекло съ тѣхъ поръ, какъ возрастъ первой особы былъ вдвое болѣе возраста второй?

Если примемъ подобное толкованіе, то *отрицательное значеніе x выразитъ протекшее время.*

Замѣтимъ, что отношеніе возрастовъ равно $\frac{a}{b}$. Это отношеніе, съ теченіемъ времени, приближается къ единицѣ. Если оно болѣе $2 (a > 2b)$, то случится эпоха, когда оно сдѣлается равнымъ 2; это есть случай положительнаго рѣшенія. Наоборотъ, если оно менѣе $2 (a < 2b)$, то не случится никогда, чтобы оно въ будущемъ сдѣлалось равнымъ 2; нѣтъ рѣшенія въ этомъ смыслѣ. Но если, въ то же самое время, a болѣе b, то была эпоха, когда это отношеніе было равно двумъ; эта эпоха и указывается отрицательнымъ рѣшеніемъ.

Прибавимъ, что задача не имѣетъ рѣшенія, если a менѣе b. И самая формула $x = 2b - a$ даетъ для x значеніе, большее b, что не можетъ быть принято.

Задача XI. *На прямой даны двѣ точки A и B; первая расположена влѣво отъ O на разстояніи a, вторая вправо на разстояніи b. Опредѣлить на этой линіи третью точку X такимъ образомъ, чтобы взявъ середину M линіи BX, потомъ треть AM, начиная отъ точки A, мы получили бы точку O.*



Положимъ, что искомая точка X помѣщена вправо отъ точки O.

Возьмемъ за неизвѣстную величину разстояніе OX, которое обозначимъ буквою x. Фигура даетъ:

$$\begin{cases} b = OM + MB \\ x = OM - MX. \end{cases}$$

Такъ какъ $BM = MX$, то

$$OM = \frac{b + x}{2},$$

а потому

$$AM = a + \frac{b + x}{2}.$$

По условію

$$MA = 3AO = 3a.$$

Уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$3a = a + \frac{b+x}{2}, \qquad [1]$$

откуда

$$x = 4a - b.$$

Изслѣдованіе. Если b менѣе $4a$, то значеніе x положительно и даетъ рѣшеніе. Если же $4a$ менѣе b, то значеніе x отрицательно, и его модуль удовлетворяетъ уравненію:

$$3a = a + \frac{b-x}{2}. \qquad [2]$$

Это уравненіе есть то уравненіе, къ которому пришли бы, предположивъ, что точка X помѣщена на разстояніи x влѣво отъ 0, ибо, при этомъ предположеніи, легко нашли бы:

$$\begin{cases} b = OM + MB, \\ x = MX - OM; \end{cases} \quad \text{откуда} \quad OM = \frac{b-x}{2} \quad \text{и} \quad AM = a + \frac{b-x}{2};$$

слѣдовательно,

$$3a = a + \frac{b-x}{2}. \qquad [2]$$

Отсюда вытекаетъ, что *отрицательное значѣніе x, даваемое уравненіемъ* [1], *должно быть, въ этомъ случаѣ, нанесено въ направленіи, противоположномъ тому, которое мы приняли во вниманіе, составляя уравненіе.*

290. Замѣчаніе. Не должно думать, что всѣ отрицательныя рѣшенія представляются также естественно, какъ и предъидущія. Не должно также думать вообще, что *отрицательное значеніе, найденное для времени будущаго, выражаетъ время прошедшее; что отрицательныя длины, которыя нужно нанести на линію, начиная отъ нѣкотораго начала, должны быть отсчитываемы въ сторону, противоположную той, которая соотвѣтствуетъ положительнымъ значеніямъ.* Въ большинствѣ случаевъ дѣйствительно это такъ и бываетъ, и мы покажемъ сейчасъ, въ чемъ заключается смыслъ этихъ обстоятельствъ.

291. Почему прошедшее время должно изображаться отрицательными значеніями времени. Положимъ, что x означаетъ время, которое должно протечь отъ настоящей эпохи до нѣкотораго событія. Предположимъ, что уравненіе задачи слѣдующее:

$$B + Ax = B' + A'x. \qquad [1]$$

Вмѣсто того, чтобы искать промежутокъ времени, протекшаго отъ настоящей эпохи, будемъ искать промежутокъ времени, протекшаго отъ эпохи, отстоящей на t лѣтъ назадъ. Обозначивъ этотъ промежутокъ буквою x_1, получимъ очевидно

$$x_1 = t + x, \text{ откуда } x = x_1 - t.$$

Уравненіе [1] преобразуется въ слѣдующее:

$$B + A(x_1 - t) = B' + A'(x_1 - t). \qquad [2]$$

Уравненіе это было бы уравненіемъ задачи, если бы взяли за неизвѣстное x_1.

Положимъ, что значеніе x_1, выведенное изъ этого уравненія, есть хотя число и положительное, но меньшее t и равное, напримѣръ, $t - \alpha$. Подставивъ это значеніе въ уравненіе [2], получимъ тождество

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha,$$

которое покажетъ, что уравненіе [1] имѣетъ рѣшеніемъ: $x = -\alpha$.

Отрицательное рѣшеніе $x = -\alpha$ *уравненія* [1] *показываетъ, слѣдовательно, что событіе случилось по прошествіи* $(t - \alpha)$ *лѣтъ отъ эпохи, отстоящей на* t *лѣтъ назадъ отъ настоящей эпохи, или что оно случилось за* α *лѣтъ до настоящей эпохи.*

292. Замѣчаніе. Уравненіе [1] составлено для положительныхъ значеній x; отсюда слѣдуетъ, что уравненіе [2] составлено для значеній x_1, большихъ t, т.-е. для эпохъ, слѣдующихъ за настоящею эпохою. Приложивъ это уравненіе къ эпохѣ прошедшей, мы сдѣлали предположеніе, которое, можетъ быть, нельзя будетъ допустить. Предъидущее разсужденіе не имѣетъ, слѣдоватеаьно, полной общности.

293. Почему должно разсматривать отрицательныя значенія разстояній, какъ значенія разстояній, нанесенныхъ по направленію, обратному принятому направленію. Положимъ, что x означаетъ разстояніе, нанесенное на прямую, начиная отъ точки O, въ нѣкоторомъ направленіи, напримѣръ вправо. Предположимъ, что уравненіе задачи таково:

$$B + Ax = B' + A'x. \qquad [1]$$

Вмѣсто того, чтобы искать разстояніе неизвѣстной точки отъ даннаго начала O, будемъ искать ея разстояніе отъ начала O', лежащаго влѣво отъ O на разстояніи d. Получимъ:

$$x_1 = d + x, \text{ откуда } x = x_1 - d,$$

и уравненіе задачи преобразуется въ слѣдующее:

$$B + A(x_1 - d) = B' + A(x_1 - d). \qquad [2]$$

Предположимъ, что уравненіе это даетъ для x_1 хотя и положительное значеніе, но меньшее d, которое изобразимъ разностью $(d - \alpha)$; для опредѣленія положенія X искомой точки должно нанести разстояніе d отъ O' до O и затѣмъ, въ противоположномъ направленіи, разстояніе α отъ O до X. Искомая точка расположится влѣво отъ O на разстояніи α отъ этого начала. Подставивъ въ уравненіе [2] вмѣсто x_1 его значеніе $(d - \alpha)$, получимъ тождество:

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha,$$

которое покажетъ, что уравненіе [1] обладаетъ рѣшеніемъ $x = -\alpha$.

Отрицательное рѣшеніе $x = -\alpha$, найденное для уравненія [1], *означаетъ, слѣдовательно, что искомая точка расположена влѣво отъ точки O на разстояніи α отъ этого начала.*

294. Замѣчаніе. Предъидущее разсужденіе не обладаетъ полною общностью. И въ самомъ дѣлѣ, оно предполагаетъ, что уравненіе [2], составленное для точекъ, расположенныхъ вправо отъ точки O, прилагается также и къ точкамъ, расположеннымъ влѣво. Обстоятельство это не всегда имѣетъ мѣсто. Дадимъ примѣръ.

Задача XII. *Желѣзная дорога взимаетъ* 0фр.,10 *за тонну при перевозкѣ товаровъ на разстояніи одного километра. За вагонъ въ* 2000 *киллограммовъ платится особо* 3фр. 75. *На какое разстояніе могутъ быть перевезены* 50 *тоннъ за* 3 *фр.* Обозначимъ буквою x искомое разстояніе; 50 тоннъ соотвѣтствуютъ 25 вагонамъ; особая плата равна, слѣдовательно, 3, 75 . 25. Плата за провозъ равна (0, 10 . 50 . x). Уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$3,75 \cdot 25 + 0,10 \cdot 50 \cdot x = 3; \qquad [1]$$

откуда находимъ: $x = -18,15$.

Изслѣдованіе. Это отрицательное рѣшеніе не означаетъ здѣсь ровно ничего. И въ самомъ дѣлѣ, если бы мы разсмотрѣли его, какъ разстояніе, лежащее влѣво отъ точки отправленія, то уравненіе, дающее разстояніе вправо отъ точки отправленія, равное 18,15, показывало бы, что условія перевозки товара *влѣво* и *вправо* отъ точки отправленія были бы различны, а между тѣмъ ясно, что условія перевозки остаются тѣ же, будетъ ли мѣсто доставки лежать вправо или влѣво отъ точки отправленія. *A priori* видно, что задача невозможна, ибо уже одна плата за вагоны превышаетъ назначенную полную плату за перевозку товара.

Легко убѣдиться, что въ этомъ случаѣ разсужденіе (**293**) ошибочно. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что 50 тоннъ должны быть перевезены вправо. Возьмемъ за начало точку O, расположенную влѣво отъ точки отправленія на разстояніи d. Разстояніе x искомой точки отъ этого начала будетъ $(x+d)$, такъ что $x = x_1 - d$. Уравненіе задачи обратится въ слѣдующее:

$$3,75 \cdot 25 + 0,10 \cdot 50 \cdot (x_1 - d) = 3. \qquad [2]$$

Если бы это уравненіе (оно составлено для точекъ, расположенныхъ вправо отъ точки отправленія, ибо оно выведено изъ уравненія [1]) прилагалось къ точкамъ, расположенныхъ влѣво, то разсужденіе (**293**) могло бы быть продолжаемо, и значеніе x_1, положительное, но меньшее d, соотвѣтствовало бы дѣйствительно точкѣ, расположенной влѣво. Но уравненіе [2] не согласуется со случаемъ перевозки товара влѣво. Въ этомъ случаѣ, въ самомъ дѣлѣ, пробѣгаемый путь представляется формулою $d - x_1$, и уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$3,75 \cdot 25 + 0,10 \cdot 50 \cdot (d - x_1) = 3.$$

Оно отличается отъ уравненія [2].

§ IV. Введеніе отрицательныхъ чиселъ въ выраженіе задачи.

295. Удобство этого введенія. Иногда удобно ввести отрицательныя числа въ видѣ данныхъ вопроса.

Разсмотримъ снова задачу (**289**).

Два тѣла M и M' двигаются по прямой AA' въ направленіи AA'; M выходитъ изъ A со скоростью v, M' въ то же время выходитъ изъ A' со скоростью v'. Черезъ какой промежутокъ времени они встрѣтятся?

Назвавъ буквою x неизвѣстный промежутокъ и буквою d разстояніе AA', получимъ уравненіе (**289**):

$$vx - v'x = d.$$

Мы видѣли, что уравненіе это дастъ рѣшеніе задачи и въ томъ случаѣ, когда v менѣе v', если только разсмотримъ отрицательное значаніе x, какъ значеніе времени протекшаго.

Для большаго еще обобщенія предположимъ, что тѣла не двигаются оба вмѣстѣ въ направленіи AA'. Можно разсмотрѣть слѣдующихъ три различныхъ случая.

1°. Тѣло M двигается вправо, тѣло M' влѣво.

Они встрѣтятся между A и A', пробѣжавъ соотвѣтственно пространства vx и $v'x$.

Уравненіе задачи слѣдующее:

$$vx + v'x = d.$$

2°. M двигается влѣво, M' вправо. Тѣла никогда не встрѣтятся. Назвавъ же буквою x время, протекшее послѣ ихъ встрѣчи между A и A', мы найдемъ для путей, пройденныхъ ими до того момента, когда они прійдутъ въ A и A', формулы vx и $v'x$. Имѣемъ:

$$vx - v'x = d.$$

3°. Положимъ, наконецъ, что оба тѣла двигаются влѣво. Встрѣча имѣетъ мѣсто влѣво отъ A, и уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$vx - v'x = d.$$

Уравненія, относящіяся къ четыремъ случаямъ, суть:

$vx - v'x = d$, когда M и M' двигаются вправо;
$vx + v'x = d$, когда M двигается вправо, M' влѣво;
$vx + v'x = d$, когда M двигается влѣво, M' вправо, причемъ x означаетъ время уже протекшее;
$v'x - vx = d$, когда M и M' двигаются влѣво.

Эти уравненія приведутся къ одному (что очень удобно), если мы согласимся означать отрицательными числами $(-v)$, $(-v')$ скорости, направленныя влѣво. Вслѣдствіе такого соглашенія нужно, въ самомъ дѣлѣ, замѣнить во второмъ изъ уравненій v' черезъ $(-v')$; въ третьемъ, v черезъ $(-v)$; въ четвертомъ, v черезъ $(-v)$, v' черезъ $(-v')$; въ третьемъ уравненіи, гдѣ неизвѣстное означаетъ время протекшее, нужно замѣнить x черезъ $(-x)$.

Всѣ уравненія приведутся къ одному:

$$vx - v'x = d,$$

такъ что формула

$$x = \frac{d}{v - v'}$$

будетъ относиться ко всѣмъ случаямъ.

Итакъ, *введеніе отрицательныхъ чиселъ въ видѣ данныхъ вопроса приводитъ къ одному уравненію всѣ уравненія, относящіяся къ различнымъ случаямъ задачи, при чемъ всѣ случаи рѣшаются, слѣдовательно, одною формулою.*

§ V. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ двумя неизвѣстными.

296. До сихъ поръ мы разсматривали отрицательныя рѣшенія, доставляемыя однимъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ. Случай нѣсколькихъ уравненій даетъ мѣсто подобнымъ же замѣчаніямъ.

Теорема. *Если система уравненій обладаетъ отрицательными рѣшеніями для нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ, то модули этихъ рѣшеній удовлетворяютъ новой системѣ, которую найдемъ, измѣнивъ знаки у этихъ неизвѣстныхъ въ данной системѣ.*

Возьмемъ систему:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c'. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Положимъ, что система эта обладаетъ рѣшеніями: $x=\alpha$, $y=-\beta$. Будемъ имѣть тождественно:

$$\left.\begin{aligned} a\alpha - b\beta &= c\,, \\ a'\alpha - b'\beta &= c'. \end{aligned}\right\}$$

Тождества эти показываютъ, что система рѣшеній: $x=\alpha$, $y=\beta$ удовлетворяетъ системѣ:

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= c\,, \\ a'x - b'y &= c', \end{aligned}\right\}$$

отличающейся отъ системы [1] только знаками при членахъ, содержащихъ букву y.

297. Замѣчаніе. Новыя уравненія, которымъ удовлетворяютъ модули отрицательныхъ рѣшеній, соотвѣтствуютъ иногда или задачѣ, мало отличающейся отъ предложенной, или же самой предложенной задачѣ, взятой только въ болѣе общемъ смыслѣ. Мы получимъ тогда рѣшеніе измѣненной или обобщенной задачи, если возьмемъ за рѣшеніе модули отрицательныхъ значеній, найденныхъ для неизвѣстныхъ. Замѣчаніе это можетъ быть развито только на частныхъ вопросахъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, слѣдующую задачу.

Задача XIII. *Резервуаръ, емкость котораго v, наполняется, въ промежутокъ времени t, n кранами, вливающими каждый одно и то же количество воды, и дождемъ, падающимъ равномѣрно на крышу, поверхность которой равна s. Другой резервуаръ, емкость котораго v', наполняется, въ промежутокъ времени t', n' кранами, подобными предъидущимъ, и дождемъ, падающимъ равномѣрно на крышу s' съ тѣмъ же напряженіемъ, какъ и на крышу s. При помощи этихъ данныхъ опредѣлить количество воды x, вливаемой каждымъ краномъ въ единицу времени, и количество дождя y, падающаго въ каждую единицу времени на каждую единицу поверхности крыши.* n крановъ вольютъ во время t количество воды, выражаемое формулою nxt; дождь доставитъ во время t количество воды, выражаемое формулою syt. Имѣемъ уравненіе:

$$nxt + syt = v. \qquad [1]$$

Подобнымъ же образомъ получимъ уравненіе:

$$n'xt' + s'yt' = v'; \qquad [2]$$

уравненія [1] и [2] опредѣляютъ x и y.

Положимъ теперь, что, рѣшивъ эти уравненія, мы нашли для x рѣшеніе положительное α и для y рѣшеніе отрицательное $-\beta$. Должно заключить **(296)**, что значенія $x=\alpha$, $y=\beta$ удовлетворяютъ системѣ уравненій:

$$\left\{\begin{aligned} nxt - syt &= v, \\ n'xt' - s'yt' &= v'. \end{aligned}\right.$$

Уравненія эти соотвѣтствуютъ задачѣ, отличающейся отъ предложенной тѣмъ, что дождь, наполняющій резервуары, долженъ быть замѣненъ причиною, уменьшающею количество воды пропорціонально времени и поверхности, напримѣръ замѣненъ выпариваніемъ воды.

Если, наоборотъ, мы найдемъ отрицательное значеніе для x и положительное для y, то модули этихъ значеній удовлетворятъ системѣ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} syt - nxt &= v, \\ s'yt' - n'xt' &= v'. \end{aligned}\right\}$$

Уравненія эти соотвѣтствуютъ задачѣ, отличающейся отъ предложенной тѣмъ, что краны, вливающіе воду въ резервуары, должны быть замѣнены равнымъ числомъ причинъ, уменьшающихъ количество воды, напримѣръ замѣнены отверстіями, выливающими количество x воды въ единицу времени.

298. Замѣчанія. Замѣчанія, сдѣланныя **(291, 293)** относительно отрицательныхъ значеній, найденныхъ для времени и для длины, прилагаются къ случаямъ, когда уравненія содержатъ болѣе одного неизвѣстнаго.

Прибавимъ, что кромѣ длины и временъ, существуютъ другія величины, которыя также могутъ разсматриваться въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Напримѣръ, температуры выше и ниже нуля, широты (географическія и небесныя) сѣверныя и южныя, силы притягательныя и отталкивательныя, активъ и пассивъ купца, суть величины, способныя представляться числами положительными или же отрицательными.

Замѣтимъ наконецъ, что не необходимо вводить отрицательныя числа въ выраженіе задачъ; мы можемъ дѣлать эти соглашенія, но можемъ и не дѣлать ихъ.

Если же мы хотимъ обобщить формулы, т.-е. если мы хотимъ представить рѣшеніе задачи единственною формулою для всѣхъ случаевъ, то обязаны сдѣлать эти соглашенія. Нужно изобразить измѣненіе смысла измѣненіемъ знака.

§ VI. Рѣшенія безконечныя или неопредѣленныя.

299. Рѣшенія, называемыя безконечными. Если формула, дающая общее рѣшеніе задачи, представляется въ дробной формѣ, то можетъ случиться, что нѣкоторыя предположенія, сдѣланныя относительно буквъ, заключенныхъ въ формулѣ, уничтожаютъ ея знаменателя, не уничтожая числителя. Формула принимаетъ тогда форму $x = \frac{k}{0}$. Мы увидимъ, въ общемъ изслѣдованіи формулъ (глава VI), что уравненіе въ этомъ случаѣ невозможно.

Нельзя того же сказать о задачѣ, приведшей къ этой формѣ; можно заключить только, что количество, взятое за неизвѣстное, перестаетъ тогда существовать.

Возьмемъ для примѣра слѣдующій вопросъ.

Задача XIV. *Два круга радіусовъ R и r, не помѣщенные внутри другъ друга, расположены въ одной плоскости. Разстояніе ихъ центровъ равно d. Найти точку, въ которой общая внѣшняя касательная встрѣтитъ прямую, соединяющую центры.*

Обозначимъ буквою x разстояніе, отдѣляющее искомую точку отъ центра меньшаго изъ круговъ. Соединивъ каждый центръ съ соотвѣтствующею точкою касанія, образуемъ два подобныхъ треугольника, которые непосредственно даютъ пропорцію:

[1] $$\frac{d+x}{x}=\frac{R}{r}, \text{ откуда } x=\frac{dr}{R-r}.$$ [2]

Изслѣдованіе. Пока r остается менѣе R, значеніе x положительное, и формула позволяетъ построить искомую точку.

Если значеніе r приближается къ значенію R, то значеніе x возрастаетъ, ибо его числитель возрастаетъ и знаменатель убываетъ; точка удаляется слѣдовательно по линіи центровъ. Разность $(R-r)$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою, а потому дробь [2] можетъ быть сдѣлана сколь угодно большою. Отсюда слѣдуетъ, что можно взять разность $R-r$ столь малою, что точка удалится сколь угодно далеко. Наконецъ, въ предѣлѣ, когда $R=r$, дробь становится болѣе всякой назначенной величины. *Точка встрѣчи удаляется неопредѣленно, и двѣ прямыя, не встрѣчаясь болѣе, будутъ параллельны.* Видимъ, что въ этомъ случаѣ уравненіе [1] принимаетъ невозможную форму: $\frac{d+x}{x}=1$, причемъ формула принимаетъ особенную форму: $x=\frac{dr}{0}$. Не существуетъ болѣе тогда ни уравненія, ни формулы, и сама точка встрѣчи не существуетъ также.

Но именно въ этомъ результатѣ и заключается рѣшеніе задачи.

300. Замѣчаніе. Если знаменатель дроби убываетъ, то дробь возрастаетъ, и она можетъ возрастать неопредѣленно, если знаменатель неопредѣленно убываетъ. На основаніи этого говорятъ иногда, что дробь обращается въ *безконечность*, когда знаменатель становится нулемъ, и пишутъ, что она имѣетъ значеніемъ $x=\infty$. Выраженіе это неправильно; *дробь, знаменатель которой есть нуль, не представляетъ ничего.* Если данныя задачи измѣняются такимъ образомъ, что знаменатель значенія неизвѣстнаго стремится къ нулю, то само неизвѣстное возрастаетъ безпредѣльно; но если знаменатель дѣйствительно нуль, то рѣшеніе не существуетъ, и уравненіе невозможно.

301. Рѣшенія неопредѣленныя. Если формула, дающая рѣшеніе задачи, представляется въ дробной формѣ, то случается, что нѣкоторыя предположенія, сдѣланныя относительно буквъ, заключенныхъ въ формулѣ, уничтожаютъ совмѣстно и ея числителя, и ея знаменателя.

Формула эта принимаетъ тогда форму: $x=\frac{0}{0}$. Мы увидимъ (глава VI), что система, дающая эту форму, вообще *неопредѣленна;* неопредѣленность эта можетъ быть только кажущеюся.

Дадимъ примѣры на эти два случая.

Задача XV. *Имѣемъ два слитка: первый содержитъ a граммовъ золота и b граммовъ серебра; второй содержитъ a' граммовъ золота и b' граммовъ серебра. Сколько нужно взять отъ каждаго слитка для того, чтобы образовать слитокъ, содержащій α граммовъ золота и β граммовъ серебра?*

Обозначимъ буквами x и y вѣса, которые беремъ отъ каждаго слитка.

Такъ какъ вѣсъ $(a+b)$ содержитъ a граммовъ золота и b граммовъ серебра, то вѣсъ x, взятый изъ перваго слитка, будетъ содержать $\frac{ax}{a+b}$ золота и $\frac{bx}{a+b}$ серебра.

Вѣсъ y, взятый изъ втораго слитка, вѣсящаго $a'+b'$, будетъ содержать $\frac{a'y}{a'+b'}$ золота и $\frac{b'y}{a'+b'}$ серебра.

Имѣемъ систему двухъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}\frac{ax}{a+b}+\frac{a'y}{a'+b'}&=\alpha,\\ \frac{bx}{a+b}+\frac{b'y}{a'+b'}&=\beta.\end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Рѣшивъ эту систему, найдемъ:

$$x=\frac{(a+b)(\alpha b'-\beta a')}{ab'-ba'},\quad y=\frac{(a'+b')(a\beta-b\alpha)}{ab'-ba'}.$$

Изслѣдованіе. Предположимъ, что $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Числители и знаменатели обѣихъ формулъ обратятся въ нули, такъ что:

$$x=\frac{0}{0},\ y=\frac{0}{0}.$$

Для представленія этого результата замѣтимъ, что допущенное предположеніе влечетъ за собою слѣдствія:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{a+b}&=\frac{a'}{a'+b'}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\\ \frac{b}{a+b}&=\frac{b'}{a'+b'}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.\end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Замѣнивъ въ уравненіяхъ [1] коэффиціенты при неизвѣстныхъ ихъ значеніями $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, выведенными изъ соотношеній [2], приведемъ ихъ къ одному и тому же уравненію:

$$x+y=\alpha+\beta. \qquad [3]$$

Отсюда вытекаетъ, что система неопредѣленна (278). Но и *сама задача неопредѣленна* и предполагаетъ, слѣдовательно, безчисленное множество рѣшеній.

И въ самомъ дѣлѣ, допущенное предположеніе выражаетъ, что отношеніе количества золота къ количеству серебра одно и то же въ трехъ слиткахъ; отсюда слѣдуетъ, что каковы бы ни были тѣ количества, которыя мы беремъ отъ каждаго изъ двухъ первыхъ слитковъ, онѣ образуютъ очевидно смѣсь одной и той же пробы. Эти количества должны только повѣрять уравненіе [3].

Задача XVI. *Вычислить площадь трапеціи, при заданныхъ основаніяхъ B и b и высотѣ h, разсматривая эту площадь, какъ разность площадей двухъ треугольниковъ, которые найдемъ, продолживъ непараллельныя стороны до ихъ встрѣчи.*

Обозначимъ буквою x искомую площадь и возьмемъ за вспомогательныя перемѣнныя высоты y и z обоихъ трегольниковъ.

Получимъ уравненіе:

$$x=\frac{1}{2}(By-bz). \qquad [2]$$

Изъ подобія треугольниковъ найдемъ:

$$\frac{y}{z}=\frac{B}{b}. \qquad [2]$$

Принявъ во вниманіе, что высота h есть разность высотъ y и z, получимъ:

$$y-z=h. \qquad [3]$$

Для исключенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ замѣтимъ, что уравненіе [2] даетъ:

$$\frac{y-z}{y}=\frac{B-b}{B},\quad \frac{y-z}{z}=\frac{B-b}{b};$$

откуда, при помощи уравненія [3],

$$y=\frac{Bh}{B-b},\quad z=\frac{bh}{B-b}.$$

Подставивъ эти значенія въ уравненіе [1], получимъ наконецъ:

$$x=\frac{h}{2}\cdot\frac{B^2-b^2}{B-b}. \qquad [4]$$

Изслѣдованіе. Если b не равно B, то формула эта даетъ для площади трапеціи вполнѣ опредѣленное значеніе. Если же положимъ $b=B$, то формула принимаетъ форму $\frac{0}{0}$, и задача кажется неопредѣленною.

Неопредѣленность эта кажущаяся, ибо въ этомъ случаѣ трапеція становится параллелограммомъ, площадь котораго равна Bh. Можно получить это выраженіе изъ дроби [4], если, сокративъ ее на $B-b$ и представивъ въ видѣ:

$$x=\frac{h}{2}(B+b),$$

сдѣлаемъ $B=b$. Формула дастъ Bh.

302. Замѣчаніе. Видимъ, что если формула, при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ, принимаетъ форму $\frac{0}{0}$, то изъ этого нельзя еще заключить, что задача, имѣющая эту формулу рѣшеніемъ, есть задача въ данномъ случаѣ неопредѣленная. Можетъ случиться, что неопредѣленность эта кажущаяся, происходящая отъ присутствія множителя, общаго обоимъ членамъ дроби и обращающагося въ нуль, при допущенныхъ предположеніяхъ (это обстоятельство имѣло мѣсто въ предъидущемъ примѣрѣ). *Должно, прежде чѣмъ дѣлать какія ни есть предположенія, уничтожить этого общаго множителя и затѣмъ уже, въ упрощенной такимъ образомъ формулѣ, сдѣлать предположенія. Получается* **истинное значеніе** *дроби для этого частнаго случая.*

Положимъ, что рѣшеніе задачи привело къ формулѣ:

$$x=\frac{a^3-3a^2+4a-2}{a^2+3a-4},$$

и пусть изслѣдованіе привело насъ къ предположенію $a=1$. Оба члена уничтожаются, и дробь принимаетъ форму $\frac{0}{0}$. Оба члена дѣлятся на $(a-1)$ (80).

Выполнивъ это раздѣленіе, найдемъ упрощенную формулу:

$$x=\frac{a^2-2a+2}{a+4};$$

она, при $a=1$, принимаетъ значеніе $x=\frac{1}{5}$.

Упражненія.

I. Часовая, минутная и секундная стрѣлки стоятъ на цифрѣ XII циферблата. Послѣ какого промежутка времени секундная стрѣлка будетъ раздѣлять на двѣ равныя части уголъ, образуемый двумя другими стрѣлками?

Обозначивъ буквою x протекшее число секундъ, найдемъ:

$$x=60^s+\frac{780^s}{1427}.$$

II. Три тѣла двигаются равномѣрно по одной и той же прямой со скоростями v, v', v''. Въ началѣ движенія они находятся на разстояніяхъ a, a', a'' отъ точки 0 этой прямой и затѣмъ удаляются отъ этой точки. Черезъ какой промежутокъ времени первое тѣло будетъ находиться на разстояніи, равномъ $\frac{3}{5}$ разстоянія, отдѣляющаго два другихъ тѣла?

Обозначивъ буквою x протекшее время, найдемъ:

$$x = \frac{2a' + 3a'' - 5a}{5v - 2v' - 3v''},$$

если, по прошествіи этого времени, третье тѣло находится впереди втораго; и наоборотъ,

$$x = \frac{3a' + 2a'' - 5a}{5v - 3v' - 2v''},$$

если, по прошествіи этого времени, второе тѣло находится впереди третьяго.

Обобщить рѣшеніе, предположивъ, что не всѣ три тѣла движутся въ одномъ направленіи.

III. Данъ прямоугольный параллелепипедъ, ребра котораго суть a, b, c. Найти сторону x куба, обладающаго тѣмъ свойствомъ, что отношеніе поверхностей двухъ тѣлъ равно отношенію ихъ объемовъ.

Найдемъ: $$x = \frac{3abc}{ab + ac + bc}.$$

IV. Найти пропорцію, четыре члена которой превышаютъ на одно и то же число четыре числа a, b, c, d.

Обозначивъ буквою x число, которое нужно прибавить къ каждому изъ этихъ четырехъ чиселъ, найдемъ:

$$x = \frac{bc - ad}{a + d - b - c}.$$

Изслѣдовать рѣшеніе: 1° когда $bc = ad$, 2° когда $a + d = b + c$.

V. n камней расположены на одной и той же прямой на разстояніяхъ, равныхъ d метрамъ. Опредѣлить на этой прямой точку X, обладающую слѣдующимъ свойствомъ: если перенесемъ послѣдовательно каждый камень въ точку X, то сдѣлаемъ путь въ два раза большій того, какой совершили бы, перенеся всѣ камни на мѣсто, занимаемое первымъ изъ нихъ.

Предполагается въ обоихъ случаяхъ, что начинаемъ съ перваго камня.

Предположивъ, что точка X лежитъ внѣ камней и означивъ буквою x разстояніе точки X отъ перваго камня, найдемъ:

$$x = \frac{3n(n-1)}{2n-1}\,d.$$

Обобщая задачу, т.-е. предполагая, что отношеніе путей равно m, найдемъ:

$$x = \frac{(m+1)\,n(n-1)}{2n-1}\,d.$$

Изслѣдовать условія возможности задачи.

Если рѣшеніе отрицательно, то способно ли оно представляться?

VI. Для совершенія нѣкоторой работы въ n дней, представляемой числомъ m, необходимо a мужчинъ или же b женщинъ. Сколько нужно присоединить женщинъ къ $(a-p)$ мужчинамъ для того, чтобы въ $(n-p)$ дней можно было совершить работу, представляемую числомъ $(m+p)$?

Найдемъ:
$$x = \frac{bp}{a}\left\{1 + \frac{(m+n)a}{m(n-p)}\right\}.$$

VII. Двое часовъ A и B бьютъ въ одинъ тотъ же моментъ. Было услышано двѣнадцать ударовъ. Извѣстно, что часы A отстаютъ отъ часовъ B на двѣ секунды; промежутокъ между послѣдовательными ударами часовъ A равенъ тремъ секундамъ и подобный же промежутокъ для часовъ B равенъ четыремъ секундамъ. Когда часы бьютъ въ одинъ и тотъ же моментъ, ухо слышитъ только одинъ звукъ.

Опредѣлить часъ, указываемый часами.

Означивъ буквою x часъ или число ударовъ, пробитыхъ каждыми часами, замѣтимъ, что число ударовъ, потерянныхъ ухомъ, равно 1, увеличенному на наибольшее цѣлое число, заключенное въ дроби $\frac{2x-6}{7}$; отсюда заключимъ, что $x = 11$.

VIII. Найти три числа x, y, z, составляющихъ ариѳметическую прогрессію и обладающихъ тѣми свойствами, что первое относится къ третьему, какъ 5 къ 9, и что сумма трехъ чиселъ равна 63.

Найдемъ:
$$x = 15,\ y = 21,\ z = 27.$$

IX. Данъ рядъ

$$a+b,\ ap+bq,\ ap^2+aq^2,\ bp^3+bq^3,\ ap^4+bq^4, \ldots$$

Требуется опредѣлить двухъ множителей x и y, обладающихъ слѣдующимъ свойствомъ: каждый членъ ряда долженъ бытъ равенъ предъидущему члену, умноженному на x и сложенному съ предъпредъидущимъ, умноженнымъ на y.

Образовавъ третій и четвертый члены по назначенному закону, найдемъ:

$$x = p+q,\ y = -pq$$

и затѣмъ покажемъ, что множители эти, въ самомъ дѣлѣ, даютъ всѣ члены ряда.

X. Данъ рядъ

$$a+b+c,\ ap+bq+cr,\ ap^2+bq^2+cr^2,\ ap^3+bq^3+cr^3,\ \ldots$$

Опредѣлить три числа x, y, z, обладающихъ слѣдующимъ свойствомъ: каждый членъ этого ряда равенъ суммѣ трехъ предъидущихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на x, y, z.

Найдемъ: $x=p+q+r,\ y=-pq-pr-qr,\ z=pqr.$

XI. Поѣздъ T, скорость котораго равна v, отправляется послѣ поѣзда T' скорость котораго есть v'. Замедленіе вычислено такимъ образомъ, что оба поѣзда приходятъ въ одно и то же время въ мѣсто назначенія. Поѣздъ T', сдѣлавъ $\frac{2}{3}$ пути, принужденъ былъ на половину уменьшить скорость; вслѣдствіе этого встрѣча произошла за a лье до мѣста. Найти полную длину переѣзда.

Найдемъ: $$x=6a-3a.\frac{v'}{v}.$$

XII. A, для совершенія нѣкоторой работы, употребляетъ въ m разъ болѣе времени, чѣмъ B и C вмѣстѣ; B употребляетъ въ n разъ болѣе времени, чѣмъ A и C; C употребляетъ въ p разъ болѣе, чѣмъ A и B. Найти соотношеніе между m, n и p.

Найдемъ: $$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1.$$

XIII. Даны точки A, B, C, D, .. , расположенныя на прямой линіи и находящіяся на разстояніяхъ a, b, c, d, ... отъ точки O этой прямой. Найти, на этой прямой, такую точку X, чтобы ея разстояніе x отъ какой ни есть точки M данной прямой было среднимъ изъ разстояній точекъ A, B, C, D, ... отъ точки M. Показать, что, при помощи приличныхъ соглашеній, можно рѣшить задачи одною формулою, каковы бы ни были положенія точекъ A, B, C, D, ... вправо или влѣво отъ O.

Формула будетъ: $$x=\frac{a+b+c+d+\ldots}{n},$$

гдѣ n число разсматриваемыхъ точекъ. Она независитъ отъ положенія точки M.

XIV. Катеты двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ направлены по однимъ и тѣмъ же прямымъ.

Требуется опустить изъ точки встрѣчи гипотенузъ перпендикуляры на катеты, вычислить ихъ длины и изслѣдовать различные случаи, которые могутъ представиться.

Назовемъ: катеты перваго треугольника буквами a и b и соотвѣтствующіе катеты втораго буквами a' и b'.

Означивъ буквою x параллель сторонамъ a и a' и буквою y параллель сторонамъ b и b', найдемъ:

$$x=\frac{aa'(b'-b)}{ab'-ba'},\quad y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-ba'}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Излѣдованіе общихъ формулъ рѣшеній системъ уравненій первой степени съ однимъ, двумя и тремя неизвѣстными.—Соединенія.—Опредѣлители.

§ I. Изслѣдованіе общей формулы рѣшенія уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

303. Общая формула. Уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ можетъ заключать только два рода членовъ: члены, содержащіе неизвѣстное, и члены, его не содержащіе. Соединивъ въ каждой части уравненія подобные члены, получимъ слѣдующую общую форму уравненія:

$$ax + b = a'x + b'. \tag{1}$$

Мы будемъ предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ: a, a_1, b, b_1 не равенъ безконечности.

Уравненіе (1) равносильно слѣдующему:

$$(a - a_1)x = b_1 - b.$$

Обозначивъ разности $(a - a_1)$ и $(b_1 - b)$ соотвѣтственно буквами c и d, приведемъ уравненіе (1) къ формѣ:

$$cx = d.$$

304. Теорема I. *Если въ уравненіи:*

$$cx = d \tag{1}$$

коэффиціентъ c не равенъ нулю, то уравненіе имѣетъ одно и только одно конечное рѣшеніе.

И въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части нашего уравненія на множителя $\frac{1}{c}$, получимъ эквивалентное уравненіе (**245**)

$$x = \frac{d}{c}, \tag{2}$$

которое имѣетъ одно и только одно рѣшеніе: $\frac{d}{c}$.

305. Теорема II. *Если въ уравненіи*

$$cx = d \tag{1}$$

коэффиціентъ c равенъ нулю, то уравненіе или не имѣетъ ни одного рѣшенія, т.-е. невозможно, или представляетъ изъ себя тождество.

И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе наше можетъ быть написано въ такомъ видѣ:

$$0 \, . \, x = d. \tag{2}$$

Разсмотримъ слѣдующіе два случая.

1^0. Коэффиціентъ d не $= 0$, тогда уравненіе, имѣя видъ:

$$0 \, . \, x = \text{не } 0,$$

показываетъ, что оно не обладаетъ никакимъ рѣшеніемъ.

2^0. Коэффиціентъ $d = 0$, тогда уравненіе обращается въ тождество:

$$0 \, . \, x = 0,$$

имѣющее мѣсто при всякомъ значеніи буквы x. Теорема доказана.

306. Замѣчанія. 1^0. Мы видѣли, что уравненіе $cx = d$ въ случаѣ c, не равнаго нулю, имѣетъ одно рѣшеніе, даваемое формулою:

$$x = \frac{c}{d}.$$

Если условимся прилагать эту формулу и въ случаѣ $d = 0$, то получимъ слѣдующіе символы:

$$x = \frac{c}{0} \ \ldots \text{ въ случаѣ невозможности,}$$

$$x = \frac{0}{0} \ \ldots \text{ въ случаѣ тождества.}$$

2°. Положимъ, что въ уравненіи

$$cx = d$$

коэффиціентъ c стремится къ нулю; тогда, съ одной стороны, форма уравненія будетъ стремиться къ *предѣльной* формѣ:

$$0 \cdot x = d;$$

съ другой стороны, корень этого уравненія $x = \frac{d}{c}$ будетъ неопредѣленно возрастать, или, какъ говорятъ *условно*, будетъ стремиться къ безконечности. Итакъ, слѣдовательно, *если уравненіе* $0 \cdot x = d$ *мы будемъ разсматривать, какъ предѣльную форму уравненія* $cx = d$, *въ которомъ* c *стремится къ нулю, то корень этого уравненія равенъ безконечности, и не какой нибудь безконечности, а безконечности, къ которой стремится именно дробь* $\frac{d}{c}$ *при неопредѣленномъ убываніи* c.

3°. Положимъ, что въ уравненіи:

$$cx = d$$

каждый изъ коэффиціентовъ c и d стремится къ нулю; тогда, съ одной стороны, форма уравненія будетъ стремиться къ предѣльной формѣ:

$$0 \cdot x = 0;$$

съ другой стороны корень этого уравненія $x = \frac{d}{c}$ будетъ стремиться къ тому или другому предѣлу: все будетъ зависить отъ тѣхъ законовъ измѣненій, по которымъ c и d стремятся къ нулю. Если, напримѣръ, число d, при своемъ стремленіи къ нулю, будетъ постоянно оставаться болѣе c въ два раза, то корень нашего уравненія будетъ постоянно равенъ двумъ; если, напримѣръ, числа c и d имѣютъ соотвѣтственно формы:

$$\frac{1}{n} \text{ и } 3 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2,$$

гдѣ n неопредѣленно возрастаетъ, то корень нашего уравненія, имѣя форму: $3 + \frac{1}{n}$, будетъ стремится къ 3.

Итакъ, слѣдовательно, *если уравненіе* $0 \cdot x = 0$ *разсматривать какъ предѣльную форму уравненія* $cx = d$, *въ которомъ коэффиціенты* c *и* d *стремятся къ нулю, то корень этого уравненія равенъ тому* *предѣлу, къ которому стремится дробь* $\frac{c}{d}$, *при чемъ предѣлъ этотъ зависитъ отъ тѣхъ законовъ измѣненій, по которымъ c и d стремятся къ нулю.*

§ II. Изслѣдованіе задачи о курьерахъ.

307. Задача. Рѣшимъ задачу, изслѣдованіе которой резюмируетъ все то, что было сказано выше; мы найдемъ здѣсь замѣчательное приложеніе теоріи отрицательныхъ количествъ; мы встрѣтимъ также различные случаи невозможности и неопредѣленности, о которыхъ мы говорили.

Два курьера двигаются по неопредѣленной прямой XX' въ направленіи XX' со скоростями v и v'; курьеръ M проходитъ черезъ нѣкоторую точку A этой линіи h часами раньше прохожденія курьера M' черезъ нѣкоторую другую точку A'. Разстояніе $AA' = d$. Опредѣлить точку встрѣчи курьеровъ.

X —— R'' —— A —— R' —— A' —— R —— X'

Искомая точка встрѣчи можетъ лежать или въ R, вправо отъ A'; или въ R', между A и A'; или въ R'', влѣво отъ A. Ея положеніе зависитъ отъ чиселъ v, v', d, h. Необходимо, слѣдовательно, различить нѣсколько случаевъ.

308. 1-й случай. *Положимъ, что* $v > v'$ и $d > vh$.

Курьеръ M, пробѣгая v километровъ въ часъ, пробѣжитъ vh километровъ въ h часовъ; отсюда слѣдуетъ, что въ тотъ моментъ, когда M' прибудетъ въ A', курьеръ M будетъ находиться на разстояніи vh отъ точки A. Условіе $d > vh$ показываетъ, что въ этотъ моментъ M не прибудетъ еще въ A'; онъ будетъ позади M' и присоединится къ нему вправо отъ A', ибо $v > v'$.

Обозначимъ точку встрѣчи буквою R. Возьмемъ за неизвѣстное разстояніе $A'R = x$. Курьеръ M пробѣгаетъ разстояніе $AR = d + x$ въ промежутокъ $\frac{d+x}{v}$; курьеръ M' пробѣгаетъ разстояніе $A'R = x$ въ промежутокъ $\frac{x}{v'}$. По условію задачи M отправляется изъ A позднѣе отправленія M' изъ A' на h часовъ; отсюда слѣдуетъ, что M тратитъ h часами болѣе, чѣмъ курьеръ M', для того, чтобы прибыть въ точку R. Имѣемъ уравненіе:

$$\frac{d+x}{v} - \frac{x}{v'} = h. \qquad [1]$$

Рѣшивъ это уравненіе (перенесемъ всѣ неизвѣстные члены во вторую часть, чтобы не разсматривать отрицательныхъ чиселъ), получимъ:

$$x = \frac{v'(d - vh)}{v - v'}. \qquad [\alpha]$$

309. 2-й случай. *Положимъ, что* $v < v'$, $d < vh$. Въ этомъ случаѣ курьеръ M уже проѣдетъ точку A' въ тотъ моментъ, когда курьеръ M' прибудетъ въ эту точку, ибо $vh > d$. Курьеръ M будетъ находиться тогда впереди курьера M' и, идя медленнѣе курьера M', ибо $v < v'$, присоединится къ нему вправо отъ точки A'. Точка встрѣчи лежитъ, слѣдовательно, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, въ области $A'X'$. Уравненіе задачи остается тѣмъ же [1]. Но здѣсь, рѣшая уравненіе и желая избѣжать отрицательныхъ чиселъ, переносимъ всѣ извѣстные члены въ правую часть и находимъ:

$$x = \frac{v'(vh - d)}{v' - v}. \qquad [\beta]$$

310. 3-й случай. *Положимъ, что* $v > v'$, $d < vh$. Въ этомъ случаѣ курьеръ M, въ моментъ перехода M' черезъ A', уже перешелъ черезъ A'. Онъ находится впереди M' и, идя быстрѣе M', соединялся съ нимъ влѣво отъ A' въ эпоху, предшествующую разсматриваемой. Здѣсь могутъ имѣть мѣсто два случая: точка встрѣчи лежитъ въ R' между A и A', или она лежитъ въ R'' влѣво отъ точки A.

Положимъ сперва, что точка лежитъ въ R', и обозначимъ буквою x разстояніе $A'R'$; разстояніе AR' будетъ равно $(d - x)$. Для составленія уравненія задачи замѣтимъ, что курьеръ M можетъ быть разсматриваемъ, какъ выходящій въ нѣкоторый моментъ изъ точки A и пробѣгающій пространство AR' въ промежутокъ $\frac{d-x}{v}$; въ концѣ этого промежутка онъ встрѣтитъ курьера M', который, выйдя изъ R', пробѣжитъ пространство $R'A'$ въ новый промежутокъ $\frac{x}{v}$. Итакъ, съ того момента, какъ M вышелъ изъ A, до того момента, какъ M' прибылъ въ A', протечетъ времени $\frac{d-x}{v} + \frac{x}{v}$. Уравненіе будетъ слѣдующее:

$$\frac{d-x}{v} + \frac{x}{v'} = h. \qquad [2]$$

Предположимъ теперь, что точка встрѣчи лежитъ въ R''. Обозначимъ буквою x разстояніе $A'R''$; разстояніе AR'' будетъ $(x-d)$. Можно предположить здѣсь, что оба курьера отправляются изъ точки R''; курьеръ M приходитъ въ A по истеченіи промежутка $\frac{x-d}{v}$, курьеръ же M' приходитъ въ A' по истеченіи промежутка $\frac{x}{v'}$. По условію задачи получимъ уравненіе:

$$\frac{x}{v'}-\frac{x-d}{v}=h. \qquad [3]$$

Легко видѣть, что уравненія [2] и [3] тождественны, хотя и получены разсужденіями различными. И въ самомъ дѣлѣ, отдѣливъ члены $\frac{d}{v}$ и $\frac{x}{v}$, мы получимъ оба уравненія въ видѣ:

$$\frac{d}{v}-\frac{x}{v}+\frac{x}{v'}=h.$$

Итакъ, если точка встрѣчи лежитъ влѣво отъ A', то ея положеніе, каково бы оно ни было, опредѣляется уравненіемъ [2].

Рѣшая уравненіе (оставляемъ неизвѣстные члены въ лѣвой части), найдемъ:

$$x=\frac{v'(vh-d)}{v-v'}. \qquad [\gamma]$$

311. 4-й случай. *Положимъ, что* $v<v'$, $d>vh$. Въ этомъ случаѣ курьеръ M не достигнетъ еще A', когда M' прибудетъ въ A', ибо $vh<d$. Курьеръ M будетъ находиться тогда позади курьера M'. Принявъ во вниманіе, что $v<v'$, заключимъ, что встрѣча должна произойти влѣво отъ A'. Уравненіе задачи есть опять уравненіе [2]. Только здѣсь мы переносимъ неизвѣстные члены во вторую часть и находимъ формулу:

$$x=\frac{v'(d-vh)}{v'-v}. \qquad [\delta]$$

312. Изслѣдованіе. Уравненіе [1] и формулы [α] и [β] соотвѣтствуютъ случаю, когда точка встрѣчи лежитъ вправо отъ точки A'.

Формулы [α] и [β] не различаются другъ отъ друга, если примемъ во вниманіе соглашенія, сдѣланныя нами относительно дѣйствій надъ отрицательными числами (**44**), ибо и числители ихъ и знаменатели отличаются соотвѣтственно другъ отъ друга только знаками.

Можно, слѣдовательно, отбросить формулу [β] и разсмотрѣть, для двухъ первыхъ случаевъ, только формулу [α].

Уравненіе [2] и формулы [δ] и [γ] прилагаются къ случаю, когда точка встрѣчи лежитъ влѣво отъ точки A'.

Опять формулы эти, при нашихъ соглашеніяхъ (**44**), тождественны. Можно, слѣдовательно, довольствоваться формулою [γ] для двухъ послѣднихъ случаевъ.

Съ другой стороны, уравненіе [2] отличается отъ уравненія [1] только знакомъ при x; формулы же [α] и [γ], обладая равными знаменателями и имѣя числителей съ одинаковыми модулями, но съ различными знаками, даютъ буквѣ x, на основаніи соглашеній, значенія съ одинаковыми модулями, но съ различными знаками.

Итакъ, *уравненіе* [1] *и формула* [α], *его рѣшающая, прилагаются ко всѣмъ четыремъ случаямъ, если только мы согласимся откладывать длины, изипряемыя значеніемъ* x, *въ случаѣ его отрицательности, влѣво отъ точки* A'.

313. Частные случаи. Мы предполагали до сихъ поръ, что $v \gtrless v'$, $d \gtrless vh$. Разсмотримъ теперь случаи, когда неравенства эти преобразовываются въ равенства.

1°. *Если* $d = vh$, *при чемъ* v *не равно* v'. Формула [α] даетъ: $x = 0$, т.-е. разстояніе точки встрѣчи отъ точки A' равно нулю, или *оба курьера встрѣчаются въ* A'. Этотъ результатъ видѣнъ и *à priori*; и въ самомъ дѣлѣ, $d = vh$, а потому курьеръ M прибываетъ въ A' вмѣстѣ съ M', причемъ точка эта есть единственная точка встрѣчи, ибо скорости не равны.

2°. *Если* $v = v'$, *при чемъ* d *не равно* vh. Формула [α] даетъ:

$$x = \frac{v'(d - vh)}{0}.$$

Форма эта эсть символъ невозможности.

Должно заключить, что *въ этомъ случаѣ курьеры не встрѣчаются никогда.* Результатъ этотъ можно предвидѣть; въ самомъ дѣлѣ, курьеры никогда не будутъ вмѣстѣ въ точкѣ A, ибо d не равно vh; обладая же одинаковою скоростью, они будутъ отдѣляться всегда однимъ и тѣмъ же разстояніемъ.

3°. *Если совмѣстно* $v = v'$, $d = vh$. Формула [α) даетъ: $x = \frac{0}{0}$. Форма эта есть символъ неопредѣленности. Можно думать, что *въ этомъ случаѣ курьеры все время находятся вмѣстѣ.* Должно это повѣрить à priori, что легко сдѣлать. И. въ самомъ дѣлѣ, они въ одно время находятся въ A', ибо $d = vh$; обладая же одинаковыми скоростями, курьеры не разъѣдутся никогда.

Итакъ, даже въ тѣхъ частныхъ случаяхъ, когда уравненіе и формула перестаютъ существовать, можно дать встрѣченнымъ символамъ представленіе, которое и даетъ истинное рѣшеніе.

314. Мы не будемъ останавливаться болѣе на изслѣдованіи этой задачи: путь, которому должно слѣдовать, очевиденъ послѣ всего того, что было сказано.

Предоставляемъ читателю сдѣлать другія предположенія: напримѣръ, предположимъ, что курьеръ M' *двигается отъ* X' *къ* X, или что курьеръ M проходитъ черезъ A, h часами *послѣ* прохожденія курьера M' черезъ A'. Составивъ прямо, для каждаго изъ этихъ предположеній, уравненіе и формулу, его рѣшающую, мы найдемъ всегда, что уравненіе [1] и формула [α] прилагаются въ этихъ случаяхъ, если только условимся разсматривать тѣ величины, смыслъ которыхъ будетъ измѣненъ какъ величины отрицательныя.

§ III. Изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

315. Разсмотримъ систему двухъ уравненій 1-й степени съ двумя неизвѣстными, приведенную къ виду:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x,\ y) = a_1x + b_1y - q_1 = 0, \\ f_2(x,\ y) = a_2x + b_2y - q_2 = 0, \end{cases}$$

гдѣ лѣвыя части уравненій обозначены, для сокращенія, черезъ

$$f_1(x,\ y) \quad \text{и} \quad f_2(x,\ y).$$

Мы будемъ предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ уравненій не равенъ безконечности.

Мы знаемъ, что *системою* рѣшеній системы (1) называется система такихъ чиселъ: α и β, которыя, будучи подставлены въ уравненія соотвѣтственно вмѣсто буквъ x и y, обратятъ каждое изъ уравненій въ тождество, т.-е. дадутъ:

$$f_1(\alpha,\ \beta) = 0, \quad f_2(\alpha,\ \beta) = 0.$$

Введемъ, для удобства, особаго рода выраженіе, называемое *опредѣлителемъ, составленнымъ изъ коэффиціентовъ:* a_1, b_1, a_2, b_2 *при не-*

извѣстныхъ, и равное $a_1b_2-a_2b_1$. Опредѣлитель этотъ составляется такимъ образомъ: располагаемъ коэффиціенты въ видѣ квадрата:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2, \end{matrix}$$

перемножаемъ ихъ крестъ на крестъ: a_1b_2 и a_2b_1 и изъ перваго произведенія вычитаемъ второе. Опредѣлитель означается такимъ образомъ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1.$$

316. Теорема I. *Если опредѣлитель* $\Delta=a_1b_2-a_2b_1$, *составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы* (1) *уравненій, не равенъ нулю, то система имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній.*

Умноживъ уравненія системы соотвѣтственно на b_2 и $(-b_1)$ для опредѣленія x и на $(-a_2)$ и (a_1) для опредѣленія y и сложивъ ихъ, послѣ умноженія, по частямъ, получимъ:

$$\Delta\,.\,x=b_2q_1-b_1q_2,\quad \Delta\,.\,y=a_1q_2-a_2q_1 \tag{2}$$

Эта система (2) имѣетъ одно рѣшеніе, конечное, ибо Δ не $=0$ (**304**), и именно:

$$x=\frac{b_2q_1-b_1q_2}{\Delta},\quad y=\frac{a_1q_2-a_2q_1}{\Delta}. \tag{3}$$

Спрашивается теперь, принадлежитъ ли система (3) рѣшеній системѣ (1) уравненій, и не принадлежатъ ли этой системѣ уравненій иныя системы рѣшеній? Для отвѣтовъ на эти вопросы замѣтимъ, что система (1) *не можетъ* имѣть системы рѣшеній, отличной отъ системы (3), такъ какъ система (1), при преобразованіи ея въ систему (2), не могла потерять системъ рѣшеній, ибо не вводили множителей, равныхъ безконечности (**245**). Остается, слѣдовательно, показать, что система (3) удовлетворяетъ системѣ (1); въ этомъ мы убѣждаемся непосредственною подстановкою. Теорема доказана.

317. Замѣчаніе. Полезно помнить формулы (3) наизусть; онѣ составляются такимъ образомъ: *знаменатель общій и равенъ опредѣлителю, образованному изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы; для полученія каждаго изъ числителей должно въ этомъ опредѣлитель* *замѣнить коэффиціенты соотвѣтствующаго неизвѣстнаго соотвѣтственно извѣстными членами уравненій, перенесенными въ правыя части.*

318. Теорема II. *Если опредѣлитель*

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

равенъ нулю, то система (1) *будетъ или* **несовмѣстна,** *или* **неопредѣленна.**

Для доказательства теоремы разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

Случай I. Положимъ, что, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ коэффиціентовъ:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2$$

при неизвѣстныхъ системы не равенъ нулю. Назовемъ коэффиціентъ, неравный нулю, буквою a_1, а соотвѣтствующее этому коэффиціенту неизвѣстное — буквою x, и составимъ слѣдующее тождество:

$$a_2f_1(x, y) - a_1f_2(x, y) = - a_2q_1 + a_1q_2. \qquad (4)$$

Положимъ, **во первыхъ,** что a_2 **не** равно нулю.

Подставивъ въ тождество (4) вмѣсто буквъ x и y какую нибудь систему рѣшеній перваго уравненія нашей системы: $x = \alpha$, $y = \beta$ (это уравненіе имѣетъ безчисленное множество системъ рѣшеній, ибо a_1 не $= 0$), получимъ равенство:

$$- a_1f_2(\alpha, \beta) = - a_2q_1 + a_1q_2. \qquad (5)$$

Если число $- a_2q_1 + a_1q_2$ *не равно нулю,* то предъидущее равенство дастъ:

$$- a_1f_2(\alpha, \beta) \text{ не } = 0,$$

или

$$f_2(\alpha, \beta) \text{ не } = 0,$$

т.-е. система: ($x=\alpha$, $y=\beta$) не обращаетъ лѣвой части $f_2(x, y)$ втораго уравненія системы въ тождественный нуль, а слѣдовательно эта система **не** удовлетворяетъ второму уравненію системы (1); но система: $x = \alpha$, $y = \beta$ рѣшеній перваго уравненія взята произвольно; слѣдовательно, никакая система рѣшеній перваго уравненія **не** принадлежитъ уравненію второму, т.-е. **разсматриваемая система уравненій несовмѣстна.**

Если же $- a_2q_1 + a_1q_2$ *равно нулю,* то равенство (5) даетъ:

$$- a_1f_2(\alpha,\beta) = 0,$$

откуда, такъ какъ a_1 не равно нулю, получимъ:

$$f_2(\alpha, \beta) = 0;$$

этотъ результатъ говоритъ, что какая ни есть система рѣшеній перваго уравненія нашей системы удовлетворяетъ второму уравненію, т.-е. **разсматриваемая система уравненій неопредѣленна.**

Въ этомъ случаѣ тождество (4) преобразовывается въ слѣдующее:

$$a_2 f_1(x, y) - a_1 f_2(x, y) = 0$$

и даетъ:

$$f_2(x, y) = \frac{a_2}{a_1} \cdot f_1(x, y).$$

Результатъ этотъ показываетъ, что второе уравненіе системы эквивалентно первому уравненію, ибо сомножитель $\frac{a_2}{a_1}$ не равенъ ни нулю, ни безконечности.

Положимъ, **во вторыхъ**, что $a_2 = 0$; тогда изъ условія теоремы, по которому

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

имѣемъ: $b_2 = 0$; уравненіе второе нашей системы перепишется теперь такъ:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = q_2.$$

Если q_2 не $= 0$, то уравненіе это невозможно; если-же $q_2 = 0$, то оно представляетъ тождество.

Случай 2. Предположимъ теперь, что каждый изъ коэффиціентовъ a_1, b_1, a_2, b_2 равенъ нулю; тогда система преобразуется въ слѣдующую:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = q_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = q_2. \end{cases}$$

Для возможности каждаго изъ уравненій этой системы необходимо, чтобы $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, и тогда система преобразовывается въ систему тождествъ:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Итакъ, слѣдовательно, наша система, при условіи:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

или несовмѣстна или неопредѣленна. Она несовмѣстна, когда $a_1q_2 - a_2q_1$ не $=0$, и неопредѣленна, когда $a_1q_2 - a_2q_1 = 0$. Теорема доказана.

319. Замѣчаніе I. Нужно замѣтить, что неопредѣленность нашей системы можетъ быть троякаго рода:

Во первыхъ, неопредѣленность, когда одно уравненіе равносильно другому; это бываетъ тогда, когда, при a_1 не $=0$, a_2 не $=0$, и тогда каждая система рѣшеній одного уравненія принадлежитъ другому и наоборотъ, причемъ каждая система рѣшеній получается такимъ образомъ: одно изъ уравненій, напримѣръ первое, рѣшаемъ относительно x и въ формулу для x:

$$x = \frac{q_1 - b_1y}{a_1}$$

подставляемъ, вмѣсто y, любыя значенія:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots;$$

эти подстановки дадутъ соотвѣтствующія значенія для x:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

и системы рѣшеній нашей системы уравненій будутъ таковы:

$$x = x_1,\ y = y_1;\ x = x_2,\ y = y_2;\ \ldots;\ x = x_n,\ y = y_n;\ \ldots$$

Во вторыхъ, неопредѣленность, когда одно изъ уравненій есть *тождество*; этому уравненію, которое, въ сущности, перестаетъ быть уравненіемъ, удовлетворяетъ, при данномъ значеніи для y, всякое значеніе для x, между тѣмъ какъ другому уравненію удовлетворяетъ, при данномъ значеніи неизвѣстнаго y, только опредѣленное значеніе для x.

Въ третьихъ, неопредѣленность, когда каждое изъ уравненій обращается въ тождество.

320. Замѣчаніе II. Замѣтимъ, что, при условіи $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, равенство $a_1q_2 - a_2q_1 = 0$ влечетъ за собою и такое равенство: $b_1q_2 - b_2q_1 = 0$. Мы можемъ предположить, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ: a_2, b_2, q_2 не равенъ нулю (ибо, еслибы, напримѣръ, $a_2 = 0$, но a_1 не $=0$, тогда $b_2 = 0$, $q_2 = 0$, и равенство $b_1q_2 - b_2q_1 = 0$ повѣрялось бы само по себѣ; еслибы, напримѣръ, $q_2 = 0$, то или $q_1 = 0$, или $a_2 = 0$; въ первомъ случаѣ равенство $b_1q_2 - b_2q_1 = 0$ повѣрнется, а во второмъ получаемъ $b_2 = 0$, и опять равенство повѣряется, и т. п.).

Предположивъ это, изъ равенствъ:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,\ a_1q_2 - a_2q_1 = 0$$

получимъ:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{q_1}{q_2},\ \text{т.-е.}\ b_1q_2-b_2q_1=0.$$

321. Случай системы уравненій, однородныхъ относительно неизвѣстныхъ. Разсмотримъ слѣдующую систему уравненій:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0, \end{cases}$$

однородныхъ относительно неизвѣстныхъ.

Если $a_1b_2-a_2b_1$ не $=0$, то система эта имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній, и непосредственно видно, что эта система такова:

$$x=0,\ \ y=0.$$

Если-же $a_1b_2-a_2b_1=0$, то условіе неопредѣленности:

$$a_1q_2-a_2q_1=0$$

удовлетворяется само по себѣ.

Итакъ, *система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными, однородныхъ относительно неизвѣстныхъ, имѣетъ или одну систему рѣшеній: $x=0$, $y=0$, или безчисленное множество системъ.*

§ III. Изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы трехъ уравненій первой системы съ тремя неизвѣстными.

322. Разсмотримъ систему трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} f_1(x,\ y,\ z)=a_1x+b_1y+c_1z-q_1=0, \\ f_2(x,\ y,\ z)=a_2x+b_2y+c_2z-q_2=0, \\ f_3(x,\ y,\ z)=a_3x+b_3y+c_3z-q_3=0, \end{cases}$$

гдѣ лѣвыя части обозначены для сокращенія черезъ

$$f_1(x,\ y,\ z),\ f_2(x,\ y,\ z)\ \text{и}\ f_3(x,\ y,\ z).$$

Мы будемъ предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ уравненій не равенъ безконечности. Мы знаемъ, что *системою* рѣшеній системы (1) называется система такихъ чиселъ: α, β, γ, которыя, будучи подставлены въ уравненія соотвѣтственно вмѣсто буквъ x, y, z, обратятъ каждое изъ уравненій въ тождество, т.-е. дадутъ тождественно:

$$f_1(\alpha, \beta, \gamma)=0, \quad f_2(\alpha, \beta, \gamma)=0, \quad f_3(\alpha, \beta, \gamma)=0.$$

323. Введемъ, для удобства, особаго рода выраженіе, называемое *опредѣлителемъ, составленнымъ изъ коэффиціентовъ:* a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, и равное:

$$\Delta=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_2-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3.$$

Опредѣлитель этотъ означается такимъ образомъ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и составляется такъ: пишемъ опредѣлителя и рядомъ съ нимъ два первыхъ столбца:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3; \end{matrix}$$

проводимъ три параллельныя діагонали: $a_1b_2c_3$, $b_1c_2a_3$, $c_1a_2b_3$ и беремъ эти произведенія съ плюсомъ, проводимъ три параллельныхъ діагонали: $c_1b_2a_3$, $a_1c_2b_3$, $b_1a_2c_3$ и беремъ эти произведенія съ минусомъ и составляемъ многочленъ Δ.

Опредѣлитель Δ можетъ быть представленъ, между прочимъ, въ слѣдующихъ трехъ видахъ:

$$\Delta=a_1(b_2c_3-c_2b_3)+a_2(c_1b_3-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-c_1b_2),$$
$$\Delta=b_1(c_2a_3-a_2c_3)+b_2(a_1c_3-c_1a_3)+b_3(c_1a_2-a_1c_2),$$
$$\Delta=c_1(a_2b_3-b_2a_3)+c_2(b_1a_3-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1).$$

Обозначивъ, для сокращенія,

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1=b_2c_3-c_2b_3, & B_1=c_2a_3-a_2c_3, & C_1=a_2b_3-b_2a_3, \\ A_2=c_1b_3-b_1c_3, & B_2=a_1c_3-c_1a_3, & C_2=b_1a_3-a_1b_3, \\ A_3=b_1c_2-c_1b_2, & B_3=c_1a_2-a_1c_2, & C_3=a_1b_2-a_2b_1, \end{cases}$$

получимъ:

$$(3)\ \Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3.$$

Непосредственно можемъ убѣдиться въ слѣдующихъ свойствахъ опредѣлителя Δ:

1) Опредѣлитель не измѣняетъ своего значенія, если столбцы дѣлаются строчками и строчки — столбцами.

2) Опредѣлитель равенъ нулю, если онъ имѣетъ два одинаковыхъ столбца или двѣ одинаковыхъ строчки.

Послѣднее свойство даетъ слѣдующія равенства:

$$(4)\quad \begin{cases} b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0, \\ a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = 0, \\ a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0. \end{cases}$$

Введемъ еще слѣдующія выраженія:

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta_1 = q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3,\ \Delta_2 = q_1B_1 + q_2B_2 + q_3B_3, \\ \qquad\qquad \Delta_3 = q_1C_1 + q_2C_2 + q_3C_3, \end{cases}$$

изъ которыхъ каждое представляетъ собою опредѣлителя Δ, въ которомъ только каждый изъ столбцовъ замѣняется послѣдовательно столбцомъ, элементы котораго суть: q_1, q_2, q_3.

Въ дальнѣйшемъ будемъ предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ нашей системы (I) не равенъ нулю, и исключимъ изъ разсмотрѣнія каждый изъ случаевъ: 1) $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, q_1 не $=0$; 2) $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, q_2 не $=0$; 3) $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, q_3 не $=0$, ибо въ каждомъ изъ этихъ случаевъ соотвѣтствующее уравненіе не имѣетъ рѣшенія.

324. Теорема I. *Если опредѣлитель* Δ, *составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы* (I), **не** *равенъ нулю, то система* (I) *имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній.*

Умноживъ уравненія системы (I) соотвѣтственно на A_1, A_2, A_3; сложивъ, послѣ умноженія, по частямъ и принявъ во вниманіе равенства (3), (4) и (5), получимъ:

$$\Delta \,.\, x = \Delta_1.$$

Подобнымъ же образомъ, умноживъ уравненія системы соотвѣтственно на B_1, B_2 и B_3 для опредѣленія y и на C_1, C_2, C_3 для опредѣленія z; сложивъ, послѣ умноженія, по частямъ и принявъ во вниманіе равенства (3), (4) и (5), найдемъ:

$$\Delta\,.\,y=\Delta_2,\ \Delta\,.\,z=\Delta_3.$$

Итакъ, мы получимъ слѣдующую систему:

$$\text{(II)}\qquad \Delta\,.\,x=\Delta_1,\ \Delta\,.\,y=\Delta_2,\ \Delta\,.\,z=\Delta_3.$$

Эта система имѣетъ одно рѣшеніе, конечное, ибо Δ, по условію, не равно нулю, и именно:

$$\text{(III)}\qquad x=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Спрашивается теперь, принадлежитъ ли система (III) рѣшеній системѣ (I) уравненій, и не принадлежатъ ли этой системѣ иныя системы рѣшеній? Для отвѣтовъ на эти вопросы замѣтимъ, что система (I) *не можетъ* имѣть системъ рѣшеній, отличныхъ отъ системы (III), ибо система (I), при преобразованіи ея въ систему (II), не могла потерять системъ рѣшеній, такъ какъ мы не ввели множителей, равныхъ безконечности. Остается, слѣдовательно, показать, что система (III) удовлетворяетъ системѣ (I); въ этомъ мы убѣждаемся непосредственною подстановкою; покажемъ, напримѣръ, что система (III) удовлетворяетъ первому уравненію нашей системы; лѣвая часть этого уравненія обращается, послѣ подстановки, въ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{q_1(A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1)+q_2(A_2a_1+B_2b_1+C_2c_1)+q_3(A_3a_1+B_3b_1+C_3c_1)}{\Delta}-q_1,$$

которое тождественно равно нулю, ибо

$$A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1=\Delta,\ A_2a_1+B_2b_1+C_2c_1=0,\ A_3a_1+B_3b_1+C_3c_1=0.$$

Теорема доказана.

325. Замѣчаніе. Полезно помнить формулы (III) наизусть; онѣ составляются такимъ образомъ: *знаменатель общій и равенъ опредѣлителю, составленному изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы; каждый изъ числителей равенъ опредѣлителю, который найдемъ, замѣнивъ въ знаменателѣ столбецъ коэффиціентовъ соотвѣтствующаго неизвѣстнаго столбцомъ элементовъ:* q_1, q_2, q_3.

326. Теорема II. *Если опредѣлитель* Δ *равенъ нулю, то система* (I) *будетъ или* **несовмѣстна,** *или* **неопредѣленна.**

Для доказательства теоремы разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

Случай I. Положимъ, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ выраженій (2), напримѣръ выраженіе $C_3 = a_1b_2 - a_2b_1$, *не* равно нулю.

Представимъ Δ въ такомъ видѣ:

$$\Delta = C_1c_1 + C_2c_2 + C_3c_3.$$

Составимъ тождество:

$$C_1f_1(x, y, z) + C_2f_2(x, y, z) + C_3f_3(x, y, z) = -(q_1C_1 + q_2C_2 + q_3C_3). \quad \text{(IV)}$$

Система:

$$(a) \qquad \begin{cases} f_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z - q_1 = 0, \\ f_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z - q_2 = 0 \end{cases}$$

первыхъ двухъ уравненій нашей системы имѣетъ безконечное множество общихъ системъ рѣшеній, ибо опредѣлитель:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = C_3 \text{ не } = 0.$$

Эти системы рѣшеній получаются такимъ образомъ: рѣшаемъ систему (a) относительно x и y и въ получаемыхъ для x и y формулахъ даемъ буквѣ z произвольныя значенія; каждое изъ этихъ значеній въ совокупности съ соотвѣтствующими значеніями буквъ x и y и представитъ систему рѣшеній системы (a). Возьмемъ произвольную систему рѣшеній системы (a):

$$x = \alpha, \; y = \beta, \; z = \gamma$$

и подставимъ ее въ тождество (IV); получимъ равенство:

$$C_3f_3(\alpha, \beta, \gamma) = -(C_1q_1 + C_2q_2 + C_3q_3). \qquad (b)$$

Если

$$C_1q_1 + C_2q_2 + C_3q_3 \text{ не } = 0,$$

то равенство (b) даетъ:

$$C_3f_3(\alpha, \beta, \gamma) \text{ не } = 0,$$

или

$$f_3(\alpha, \beta, \gamma) \text{ не } = 0, \text{ ибо } C_3 \text{ не равняется безконечности.}$$

Результатъ этотъ говоритъ, что взятая нами произвольно система рѣшеній первыхъ двухъ уравненій разсматриваемой системы не удовлетворяетъ третьему уравненію системы, т.-е. разсматриваемая система уравненій представляетъ **систему несовмѣстную**.

Если же

$$C_1 q_1 + C_2 q_2 + C_3 q_3 = 0,$$

то равенство (b) даетъ:

$$C_3 f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

или

$$f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

ибо C_3 не равняется нулю.

Результатъ этотъ говоритъ, что взятая нами произвольно система рѣшеній первыхъ двухъ уравненій разсматриваемой системы удовлетворяетъ и третьему уравненію системы, т.-е. разсматриваемая система уравненій представляетъ **систему неопредѣленную**.

Тождество (IV), въ этомъ случаѣ неопредѣленности, даетъ:

$$f_3(x, y, z) = -\frac{C_1}{C_3} f_1(x, y, z) - \frac{C_2}{C_3} f_2(x, y, z)$$

и показываетъ:

1°. Если ни C_1, ни C_2 не равны нулю, то третье изъ уравненій системы (I) есть слѣдствіе первыхъ двухъ и можетъ замѣнять любое изъ нихъ.

2°. Если одно изъ количествъ: C_1 и C_2 равно нулю, то третье уравненіе соотвѣтственно есть слѣдствіе втораго или перваго уравненія и можетъ замѣнять его.

3°. Если оба количества: C_1 и C_2 равны нулю, то третье уравненіе представитъ тождество.

Случай 2. Положимъ теперь, что всѣ выраженія (2) равны нулю, но, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, напримѣръ a_1, не равенъ нулю.

Составимъ слѣдующія тождества:

$$\left.\begin{aligned} a_2 f_1(x, y, z) - a_1 f_2(x, y, z) &= -a_2 q_1 + a_1 q_2, \\ a_3 f_1(x, y, z) - a_1 f_3(x, y, z) &= -a_3 q_1 + a_1 q_3. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Разсмотримъ первое изъ уравненій:

$$f_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z - q_1 = 0 \qquad (b)$$

нашей системы. Оно имѣетъ безчисленное множество системъ рѣшеній, ибо коэффиціентъ a_1 не равенъ нулю. Эти системы получаются такимъ образомъ: Рѣшаемъ уравненіе относительно x и въ формулѣ:

$$x = \frac{q_1 - b_1y - c_1z}{a_1}$$

даемъ буквамъ y и z произвольныя системы значеній; каждая такая система съ соотвѣтствующимъ значеніемъ для x и представитъ систему рѣшеній уравненія (b).

Возьмемъ какую нибудь систему: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, такъ что $f_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, и подставимъ ее въ тождества (V); подстановка эта дастъ слѣдующія равенства:

$$a_1f_2(\alpha, \beta, \gamma) = a_1q_2 - a_2q_1 = \begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_2 & q_2 \end{vmatrix},$$

$$a_1f_3(\alpha, \beta, \gamma) = a_1q_3 - a_3q_1 = \begin{vmatrix} a_1 & q_1 \\ a_3 & q_3 \end{vmatrix}.$$

Положимъ, что, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ опредѣлителей:

$$a_1q_2 - a_2q_1,\ a_1q_3 - a_3q_1$$

не равенъ нулю; тогда, по крайней мѣрѣ, одно изъ равенствъ:

$$a_1f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,\ a_1f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

или, что то же, одно изъ равенствъ:

$$f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,\ f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

не будетъ имѣть мѣста; это покажетъ, что, по крайней мѣрѣ, одно изъ уравненій:

$$f_2(x, y, z) = 0,\ f_3(x, y, z) = 0$$

несовмѣстно съ уравненіемъ $f_1(x, y, z) = 0$.

Положимъ теперь, что каждый изъ опредѣлителей:

$$a_1q_2 - a_2q_1,\ a_1q_3 - a_3q_1$$

равенъ нулю, тогда получимъ:

$$a_1 f_2(\alpha, \beta, \gamma)=0, \; a_1 f_3(\alpha, \beta, \gamma)=0,$$

или, что то же,

$$f_2(\alpha, \beta, \gamma)=0, \quad f_3(\alpha, \beta, \gamma)=0.$$

Эти равенства говорятъ, что каждая система рѣшеній уравненія $f_1(x, y, z)=0$ представляетъ систему рѣшеній каждаго изъ уравненій: $f_2(x, y, z)=0$, $f_3(x, y, z)=0$, т.-е. разсматриваемая система уравненій представляетъ систему **неопредѣленную**. Тождества (V) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} f_2(x, y, z) &= \frac{a_2}{a_1} f_1(x, y, z), \\ f_3(x, y, z) &= \frac{a_3}{a_1} f_1(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (V')$$

и говорятъ: если ни a_2, ни a_3 не равны нулю, то каждое изъ уравненій $f_2=0$, $f_3=0$ равносильно уравненію $f_1=0$, ибо ни одинъ изъ множителей: $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$ не равенъ ни безконечности, ни нулю, и, слѣдовательно, наша система приводится къ одному уравненію. Если же одинъ изъ коэффиціентовъ: a_2 и a_3 или оба вмѣстѣ, будетъ равенъ нулю, тогда будемъ имѣть мѣсто одно изъ тождествъ:

$$f_2(x, y, z)=0 \text{ тождественно,}$$

$$f_3(x, y, z)=0 \text{ тождественно,}$$

или оба вмѣстѣ, и тогда, слѣдовательно, одно изъ этихъ уравненій нашей системы, второе или третье, или оба вмѣстѣ, представитъ тождество, а другое будетъ равносильно первому уравненію.

Случай 3. Предположимъ, наконецъ, что каждый изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ равенъ нулю; тогда для возможности каждаго изъ уравненій необходимо, чтобы: $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, и тогда наша система преобразуется въ слѣдующую:

$$\left\{\begin{aligned} 0 \cdot x+0 \cdot y+0 \cdot z-0=0, \\ 0 \cdot x+0 \cdot y+0 \cdot z-0=0, \\ 0 \cdot x+0 \cdot y+0 \cdot z-0=0, \end{aligned}\right.$$

т.-е. преобразуется въ систему **тождествъ**. Теорема доказана.

327. Случай системы уравненій, однородныхъ относительно неизвѣстныхъ. Разсмотримъ систему уравненій:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{cases}$$

однородныхъ относительно неизвѣстныхъ.

Если опредѣлитель Δ не равенъ нулю, то система имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній, и она есть: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Если же $\Delta = 0$, то система будетъ *неопредѣленна*, ибо каждый изъ опредѣлителей:

$$C_1q_1 + C_2q_2 + C_3q_3, \; a_1q_2 - a_2q_1, \; a_1q_3 - a_3q_1$$

обращается въ нуль, такъ какъ $q_1 = q_2 = q_3 = 0$.

Итакъ, *система трехъ уравненій первой степени съ тремя неизвѣстными, однородныхъ относительно неизвѣстныхъ, имѣетъ или одну систему рѣшеній:* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, *или безчисленное множество системъ; для послѣдняго необходимо, чтобы опредѣлитель* Δ *равнялся нулю.*

§ IV. Теорія соединеній.

328. Опредѣленія. Соединеніями порядка k изъ n элементовъ, обозначенныхъ буквами: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, называются различныя группы, которыя можно образовать изъ этихъ n элементовъ, бравъ въ каждую группу по k элементовъ.

Напримѣръ, если данные элементы суть числа, то произведенія этихъ чиселъ, въ которыхъ число множителей равно четыремъ, представятъ соединенія четвертаго порядка. Если всѣ элементы каждой изъ группъ различны между собою, то соединенія называются *соединеніями безъ повтореній*; если же въ числѣ группъ будутъ встрѣчаться и такія, въ которыхъ нѣкоторые элементы, или же всѣ, одинаковы, то группы называются *соединеніями съ повтореніями*. Мы будемъ заниматься только соединеніями безъ повтореній и будемъ различать три главныхъ вида соединеній: *размѣщенія, сочетанія* и *перестановки.*

329. Размѣщенія. Разсмотримъ n различныхъ элементовъ:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Возьмемъ послѣдовательно каждый изъ элементовъ и присоединимъ къ нему всѣ остальные, не присоединяя его самого. Образуются группы:

$$\begin{array}{llcll}
a_1a_2 & a_2a_1 & & a_{n-1}a_1 & a_na_1 \\
a_1a_3 & a_2a_3 & \ldots\ldots & a_{n-1}a_2 & a_na_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_1a_n & a_2a_n & & a_{n-1}a_n & a_na_{n-1},
\end{array}$$

называемыя *размѣщеніями 2-го порядка изъ n элементовъ*.

Разсмотримъ теперь послѣдовательно каждую изъ группъ 2-го порядка и будемъ присоединять къ ней послѣдовательно по одному элементу изъ всѣхъ элементовъ, не входящихъ въ разсматриваемую группу. Образуются группы:

$$\begin{array}{llcll}
a_1a_2a_3 & a_1a_3a_2 & & a_na_{n-2}a_1 & a_na_{n-1}a_1 \\
a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & \ldots\ldots & a_na_{n-2}a_2 & a_na_{n-1}a_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_1a_2a_n & a_1a_3a_n & & a_na_{n-2}a_{n-1} & a_na_{n-1}a_{n-2},
\end{array}$$

называемыя *размѣщеніями 3-го порядка изъ n элементовъ*.

Присоединивъ къ каждой изъ группъ 3-го порядка послѣдовательно по одному элементу изъ всѣхъ элементовъ, не входящихъ въ эту группу, образуемъ *размѣщенія 4-го порядка*.

И вообще, образовавъ *группы порядка* $(k-1)$ и присоединивъ къ каждой изъ нихъ по одному элементу изъ всѣхъ элементовъ, не входящихъ въ эту группу, получимъ *размѣщенія порядка* $k^{\text{-го}}$.

330. Число размѣщеній. Во многихъ вопросахъ анализа очень важно умѣть опредѣлять *число* размѣщеній, не выписывая размѣщеній. Этимъ теперь и займемся. Обозначимъ число размѣщеній порядка k изъ n элементовъ знакоположеніемъ: A_k^n. Число размѣщеній порядка $(k-1)$ изобразится такимъ образомъ: A_{k-1}^n. Каждая изъ группъ порядка $(k-1)$ дастъ столько группъ порядка k, сколько элементовъ, изъ всѣхъ данныхъ элементовъ, не входитъ въ эту группу, т.-е. дастъ $n-(k-1)$ группъ порядка k. Итакъ, число A_k^n будетъ болѣе числа A_{k-1}^n въ $(n-k+1)$ разъ, т.-е.

$$A_k^n = A_{k-1}^n(n-k+1).$$

Сдѣлавъ въ этомъ равенствѣ послѣдовательно $k=k$, $k-1, \ldots, 3, 2$, и принявъ во вниманіе, что $A_1^n = n$, получимъ:

$$\begin{aligned} A_k^n &= A_{k-1}^n(n-k+1), \\ A_{k-1}^n &= A_{k-2}^n(n-k+2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_3^n &= A_2^n\ (n-2), \\ A_2^n &= A_1^n\ (n-1), \\ A_1^n &= n. \end{aligned}$$

Перемноживъ эти равенства по частямъ и раздѣливъ потомъ обѣ части полученнаго равенства на произведеніе:

$$A_{k-1}^n \cdot A_{k-2}^n \ldots A_2^n \cdot A_1^n,$$

найдемъ:

$$A_k^n = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1). \qquad [1]$$

Формула эта показываетъ, что *число размѣщеній порядка k изъ n элементовъ выражается произведеніемъ k цѣлыхъ множителей, послѣдовательныхъ, убывающихъ, причемъ первый множитель равенъ n.*

Примѣръ. Сколько пятизначныхъ чиселъ можно образовать изъ цифръ: 1, 2, 3, ... 9 при томъ условіи, чтобы каждое число не заключало одинаковыхъ цифръ? *Отв.* $A_5^9 = 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.$

331. Сочетанія. Разсмотримъ n различныхъ элементовъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n. \qquad [2]$$

Присоединимъ къ каждому изъ этихъ элементовъ, начиная съ перваго, всѣ элементы, слѣдующіе за нимъ. Образуемъ группы:

$$\begin{array}{llllll} a_1a_2 & a_2a_3 & a_3a_4 & & a_{n-2}a_{n-1} & a_{n-1}a_n \\ a_1a_3 & a_2a_4 & a_3a_5 & & a_{n-2}a_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & \ldots\ldots & & \\ a_1a_{n-2} & a_2a_{n-1} & a_3a_n & & & \\ a_1a_{n-1} & a_2a_n & & & & \\ a_1a_n, & & & & & \end{array}$$

отличающіяся другъ отъ друга, по крайней мѣрѣ, однимъ элементомъ и называемыя *сочетаніями втораго порядка изъ n элементовъ.*

Присоединивъ къ каждому изъ этихъ сочетаній всѣ элементы ряда [2], по одному, слѣдующіе за послѣднимъ элементомъ разсматриваемой группы, получимъ группы:

$$\begin{array}{llcll}
a_1a_2a_3 & a_1a_3a_4 & & a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1} & a_{n-2}a_{n-1}a_n \\
a_1a_2a_4 & a_1a_3a_5 & & a_{n-3}a_{n-2}a_n & \\
 & & \cdots\cdots & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
a_1a_2a_n & a_1a_3a_n, & & &
\end{array}$$

называемыя *сочетаніями 3-го порядка изъ n элементовъ.*

Присоединивъ къ каждой группѣ 3-го порядка всѣ элементы ряда [2], слѣдующіе за послѣднимъ элементомъ группы, образуемъ *сочетанія 4-го порядка*, и т. д.

332. Число сочетаній. Обозначимъ число сочетаній изъ n элементовъ порядка k символомъ C_k^n и опредѣлимъ это число.

Число сочетаній порядка k, содержащихъ элементъ a_1, очевидно равно числу сочетаній порядка $(k-1)$ изъ остальныхъ $(n-1)$ элементовъ, т.-е. равно C_{k-1}^{n-1}; число сочетаній, содержащихъ элементъ a_2, также равно C_{k-1}^{n-1}, и т. д. для каждаго элемента. (Напримѣръ, разсмотримъ четыре элемента: a_1, a_2, a_3, a_4; откинемъ элементъ a_1 и образуемъ сочетанія 1-го порядка изъ оставшихся элементовъ: a_2, a_3, a_4; получимъ сочетанія 2-го порядка: a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4; поставимъ въ каждой изъ этихъ группъ элементъ a_1 на первомъ мѣстѣ и получимъ всѣ сочетанія 3-го порядка, содержащія элементъ a_1: $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_1a_3a_4$; откинемъ теперь элементъ a_2 и сдѣлаемъ сочетанія 2-го порядка изъ оставшихся элементовъ: a_1, a_3, a_4; получимъ сочетанія 2-го порядка: a_1a_3, a_1a_4, a_3a_4; поставимъ въ каждой изъ этихъ группъ элементъ a_2 на такомъ мѣстѣ, чтобы значки шли, возрастая, и получимъ всѣ сочетанія 3-го порядка, содержащія элементъ a_2: $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$, $a_2a_3a_4$, и т. д.).

Выписавъ: всѣ сочетанія, содержащія букву a_1; всѣ сочетанія, содержащія букву a_2; всѣ сочетанія, содержащія букву a_3; и т. д., увидимъ, что каждое изъ сочетаній выписано нами k разъ (напримѣръ, сочетаніе $a_1a_2a_3$ находилось бы и въ рядѣ сочетаній, содержащемъ букву a_1; и въ рядѣ сочетаній, содержащемъ букву a_2; и въ рядѣ сочетаній, содержащемъ букву a_3).

Принявъ это во вниманіе, получимъ слѣдующее равенство:

$$C_k^n = nC^{\;-1}$$

откуда

$$C_k^n = \frac{n}{k} \cdot C_{k-1}^{n-1}.$$

Равенство это даетъ:

$$C_{k-1}^{n-1} = \frac{n-1}{k-1} \cdot C_{k-2}^{n-2},$$

$$C_{k-2}^{n-2} = \frac{n-2}{k-2} \cdot C_{k-3}^{n-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_2^{n-k+2} = \frac{n-k+2}{2} \cdot C_1^{n-k+1}.$$

Перемноживъ всѣ эти равенства, принявъ во вниманіе, что

$$C_1^{n-k+1} = n-k+1,$$

и сдѣлавъ сокращенія, получимъ формулу:

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots (k-1)k}. \qquad (3)$$

Итакъ, *число сочетаній порядка k изъ n элементовъ равно произведенію k цѣлыхъ чиселъ, послѣдовательныхъ, убывающихъ, причемъ первый множитель равенъ n, раздѣленному на произведеніе всѣхъ чиселъ отъ 1 до k.*

333. Замѣчаніе I. Предъидущая формула можетъ быть представлена въ болѣе удобномъ видѣ. Умноживъ, въ самомъ дѣлѣ, оба члена дроби на произведеніе 1. 2. 3. .... $(n-k)$, найдемъ:

$$C_k^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-k)(n-k+1)(n-k+2)\ \ldots\ n}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ k\,.\,1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-k)}, \qquad [4]$$

т.-е. числитель равенъ произведенію всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до n, причемъ знаменатель равенъ произведенію всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до $(n-k)$, умноженному на произведеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ 1 до k.

Примѣръ. Сколько можно провести дорогъ между семью городами? Число дорогъ равно числу сочетаній втораго порядка изъ семи элементовъ, т.-е. $\frac{1.2.3.4.5.6.7.}{1.2.1.2.3.4.5.} = 21.$

334. Замѣчаніе II. Формула [4] остается тою же, если измѣнимъ k въ $(n-k)$, ибо замѣна эта измѣняетъ только, одно въ другое, произведенія: $1 . 2 . ... k$, $1 . 2 . ... (n-k)$ знаменателя.

Итакъ

$$C_k^n = C_{n-k}^n,$$

т.-е. *число сочетаній порядка k равно числу сочетаній порядка $(n-k)$ изъ одного и того же числа элементовъ n.*

335. Замѣчаніе III. Формула [4] даетъ непосредственно:

$$C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1},$$

т.-е. *число сочетаній порядка k изъ n элементовъ равно суммѣ чиселъ сочетаній порядковъ: $(k-1)$ и k изъ $(n-1)$ элементовъ.*

336. Замѣчаніе IV. Число C_k^n представляетъ, очевидно, цѣлое число. Формула [3] показываетъ, слѣдовательно, что *произведеніе k послѣдовательныхъ цѣлыхъ чиселъ дѣлится на произведеніе k первыхъ цѣлыхъ чиселъ.*

337. Перестановки. Разсмотримъ n различныхъ элементовъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

и составимъ изъ нихъ размѣщенія порядка n. Полученныя группы называются *перестановками.* Каждая изъ нихъ заключаетъ всѣ элементы, такъ что группы отличаются другъ отъ друга только мѣстами элементовъ. Напримѣръ, изъ четырехъ элементовъ:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

можно образовать слѣдующія 24 перестановки:

$$\begin{array}{llllll}
a_1a_2a_3a_4, & a_1a_2a_4a_3, & a_1a_3a_2a_4, & a_1a_3a_4a_2, & a_1a_4a_2a_3, & a_1a_4a_3a_2, \\
a_2a_1a_3a_4, & a_2a_1a_4a_3, & a_2a_3a_1a_4, & a_2a_3a_4a_1, & a_2a_4a_1a_3, & a_2a_4a_3a_1, \\
a_3a_1a_2a_4, & a_3a_1a_4a_2, & a_3a_2a_1a_4, & a_3a_2a_4a_1, & a_3a_4a_1a_2, & a_3a_4a_2a_1, \\
a_4a_1a_2a_3, & a_4a_1a_3a_2, & a_4a_2a_1a_3, & a_4a_2a_3a_1, & a_4a_3a_1a_2, & a_4a_3a_2a_1.
\end{array}$$

338. Число перестановокъ безъ повтореній. Изъ предъидущаго опредѣленія слѣдуетъ, что число перестановокъ изъ n элементовъ равно числу размѣщеній изъ n элементовъ порядка n. Обозначивъ число этихъ перестановокъ знакоположеніемъ: P_n и сдѣлавъ, въ формулѣ [1], $k=n$, найдемъ:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \qquad [5]$$

Итакъ, *число перестановокъ изъ* n *различныхъ элементовъ равно произведенію всѣхъ цѣлыхъ чиселъ отъ* 1 *до* n.

Примѣръ. Сколько существуетъ трехзначныхъ чиселъ, изображенныхъ цифрами 5, 7, 9, безъ повторенія одной и той же цифры.

Очевидно, что число чиселъ равно числу перестановокъ изъ трехъ элементовъ, т.-е. равно $1.2.3=6$.

*** 339. Классы перестановокъ.** Разсмотримъ элементы:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots, a_{n-1}, a_n,$$

данные для перестановокъ. Возьмемъ какую нибудь перестановку, выпишемъ значки у буквъ въ этой перестановкѣ въ томъ порядкѣ, въ какомъ они въ ней идутъ, и образуемъ изъ этихъ значковъ сочетанія 2-го порядка (**331**); въ нѣкоторыхъ изъ этихъ сочетаній бóльшій значокъ будетъ находиться влѣво отъ меньшаго; назовемъ такія сочетанія *обращенными* сочетаніями; если *число обращенныхъ сочетаній есть число четное, включая сюда и нуль, то говорятъ, что разсматриваемая перестановка принадлежитъ къ первому классу; въ противоположномъ случаѣ перестановка принадлежитъ ко второму классу.*

Примѣръ. Разсмотримъ, напримѣръ, перестановку

$$a_3\, a_1\, a_2\, a_4$$

изъ четырехъ элементовъ.

Выпишемъ значки:

$$3,\ 1,\ 2,\ 4$$

и образуемъ двойныя сочетанія:

$$31,\ 32,\ 34,\ 12,\ 14,\ 24;$$

число обращенныхъ сочетаній равно *двумъ*, слѣдовательно разсматриваемая перестановка принадлежитъ къ первому классу.

Возьмемъ еще такую перестановку:

$$a_1\, a_4\, a_3\, a_2;$$

образуемъ изъ значковъ двойныя сочетанія:

$$14,\ 13,\ 12,\ 43,\ 42,\ 32.$$

Здѣсь находятся три обращенныхъ сочетанія, слѣдовательно разсматриваемая перестановка принадлежитъ ко *второму* классу.

*** 340. Теорема.** *Если въ данной перестановкѣ перемѣстимъ взаимно два значка, то перестановка перемѣнитъ свой классъ.*

Для доказательства достаточно показать, что при взаимной перестановкѣ двухъ значковъ число обращенныхъ сочетаній измѣнится на нечетное число.

Положимъ, что даны двѣ перестановки:

$$Aa_pBa_qC,\ \ Aa_qBa_pC,$$

отличающіяся только взаимною перестановкою значковъ p и q, при чемъ буквы A, B, C представляютъ общія части у обѣихъ перестановокъ (напримѣръ, перестановки: $a_9a_2\bar{a}_3a_7a_1a_4\bar{a}_6a_8a_5$ и $a_9a_2\bar{a}_6a_7a_1a_4\bar{a}_3a_8a_5$). Очевидно, что достаточно разсмотрѣть только числа обращенныхъ сочетаній, относящихся къ перестановкамъ:

$$a_pBa_q,\quad a_qBa_p.$$

(Въ предъидущемъ примѣрѣ эти перестановки суть: $\bar{a}_3a_7a_1a_4\bar{a}_6$ и $\bar{a}_6a_7a_1a_4\bar{a}_3$). Предположимъ, что

$$p < q$$

и обозначимъ: буквою σ_1 — число указателей въ B, меньшихъ p; буквою σ_2 — число указателей, заключенныхъ между p и q, и буквою σ_3 — число указателей, превышающихъ q (въ предъидущемъ примѣрѣ $p=3$, $q=6$, $B=a_7a_1a_4$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=1$).

Число обращенныхъ сочетаній въ перестановкѣ a_pBa_q равно:

$$\sigma_1+\sigma_3+\text{ число обращенныхъ сочетаній въ перестановкѣ } B.$$

(Въ предъидущемъ примѣрѣ обращенныя сочетанія перестановки $a_3a_7a_1a_4a_6$ суть: 31, 71, 74, 76).

Число обращенныхъ сочетаній перестановки a_qBa_p равно:

$$\sigma_1+\sigma_2+1+\sigma_2+\sigma_3+\text{ число обращенныхъ сочетаній въ перестановкѣ } B.$$

(Въ предъидущемъ примѣрѣ обращенныя сочетанія перестановки $a_6a_7a_1a_3a_3$ суть: 61, 64, 63, 71, 74, 73, 43).

Разность чиселъ обращенныхъ сочетаній въ перестановкахъ:

$$a_p B a_q \quad \text{и} \quad a_q B a_p$$

равна, слѣдовательно, нечетному числу $2\sigma_2+1$, что и требовалось доказать.

*** 341. Слѣдствія. 1°.** *Существуетъ одинаковое число перестановокъ каждаго класса въ рядѣ всѣхъ перестановокъ изъ n элементовъ.* Ибо каждой перестановкѣ изъ n элементовъ соотвѣтствуетъ перестановка, выводимая изъ первой взаимною перестановкою значковъ.

2°. *Если двѣ перестановки могутъ преобразовываться другъ въ друга четнымъ числомъ взаимныхъ перестановокъ двухъ значковъ, то онѣ принадлежатъ къ одному и тому же классу.*

3°. *Если двѣ перестановки могутъ преобразовываться другъ въ друга нечетнымъ числомъ взаимныхъ перестановокъ двухъ значковъ, то онѣ принадлежатъ къ различнымъ классамъ.*

* § II. Основныя свойства опредѣлителей.

342. Опредѣленіе. Дано n^2 чиселъ:

$$[I] \qquad \begin{array}{l} a_1^1\, a_1^2\, a_1^3\, \ldots\, a_1^q\, \ldots\, a_1^n \\ a_2^1\, a_2^2\, a_2^3\, \ldots\, a_2^q\, \ldots\, a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1\, a_p^2\, a_p^3\, \ldots\, a_p^q\, \ldots\, a_p^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1\, a_n^2\, a_n^3\, \ldots\, a_n^q\, \ldots\, a_n^n, \end{array}$$

гдѣ верхніе значки суть значки, а **не** показатели. Числа эти, которыя мы будемъ называть *элементами*, расположены въ n горизонтальныхъ *линіяхъ*, различающихся другъ отъ друга нижними значками, и въ n вертикальныхъ *столбцахъ*, различающихся другъ отъ друга верхними значками, такъ что, напримѣръ, элементъ a_r^s помѣщается въ $r^{\text{-овой}}$ линіи и въ $s^{\text{-овомъ}}$ столбцѣ.

Разсмотримъ произведеніе:

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3\, \ldots\, a_p^p\, \ldots\, a_q^q\, \ldots\, a_n^n$$

всѣхъ элементовъ, расположенныхъ на діагонали, и образуемъ всевозможныя перестановки изъ верхнихъ значковъ; присвоимъ каждому изъ произведеній знакъ $+$ или знакъ $-$, смотря по тому, принадлежитъ ли соотвѣтствующая перестановка верхнихъ значковъ къ перестановкамъ перваго класса или втораго, и составимъ алгебрическую сумму изъ образованныхъ такимъ образомъ членовъ. Эта сумма называется *опредѣлителемъ* и представляется такимъ образомъ:

$$\text{(II)}\qquad \begin{vmatrix} a_1^1\, a_1^2\, a_1^3 & \ldots & a_1^q & \ldots & a_1^n \\ a_2^1\, a_2^2\, a_2^3 & \ldots & a_2^q & \ldots & a_2^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_p^1\, a_p^2\, a_p^3 & \ldots & a_p^q & \ldots & a_p^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_n^1\, a_n^2\, a_n^3 & \ldots & a_n^q & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что каждый членъ опредѣлителя не содержитъ болѣе одного элемента каждой линіи и одного элемента каждаго столбца, ибо каждый членъ не будетъ содержать двухъ буквъ и болѣе, съ одинаковыми нижними значками, или же съ одинаковыми верхними значками. Изъ этого же опредѣленія вытекаетъ, что въ каждомъ членѣ опредѣлителя входятъ всѣ нижніе значки и всѣ верхніе значки. Въ каждомъ опредѣлителѣ число членовъ, которымъ предшествуетъ знакъ $(+)$, равно числу членовъ, которымъ предшествуетъ знакъ $(-)$.

Порядкомъ опредѣлителя называется число элементовъ, входящихъ въ каждое произведеніе. Нашъ опредѣлитель есть опредѣлитель порядка n.

Число членовъ опредѣлителя равно числу перестановокъ изъ n указателей, т.-е. равно числу:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Каждый изъ элементовъ опредѣлителя будетъ входить во столько членовъ опредѣлителя, сколько можно образовать перестановокъ изъ $(n-1)$ указателей, т.-е. въ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$$

членовъ; напримѣръ, элементъ a_r^s будетъ входить во всѣ члены, которые найдемъ, сдѣлавъ въ произведеніи:

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots a_{r-1}^{r-1}\, a_{r+1}^{r+1} \ldots a_n^n$$

всевозможныя перестановки указателей:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ r-1,\ r+1,\ \ldots,\ n$$

и умноживъ каждое изъ полученныхъ произведенiй на этотъ элементъ a_r^s.

343. Примѣръ. Разсмотримъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}.$$

Его значенiе образуется такимъ образомъ: беремъ произведенiе

$$a_1^1\ a_2^2\ a_3^3\ a_4^4$$

и составляемъ 24 перестановки изъ указателей 1, 2, 3, 4: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 и присвоиваемъ буквамъ $a_1a_2a_3a_4$ послѣдовательно указателей, находящихся въ каждой изъ этихъ перестановокъ; получаемъ произведенiя:

$$\begin{array}{llllll}
a_1^1a_2^2a_3^3a_4^4, & a_1^1a_2^2a_3^4a_4^3, & a_1^1a_2^3a_3^2a_4^4, & a_1^1a_2^3a_3^4a_4^2, & a_1^1a_2^4a_3^2a_4^3, & a_1^1a_2^4a_3^3a_4^2, \\
a_1^2a_2^1a_3^3a_4^4, & a_1^2a_2^1a_3^4a_4^3, & a_1^2a_2^3a_3^1a_4^4, & a_1^2a_2^3a_3^4a_4^1, & a_1^2a_2^4a_3^1a_4^3, & a_1^2a_2^4a_3^3a_4^1, \\
a_1^3a_2^1a_3^2a_4^4, & a_1^3a_2^1a_3^4a_4^2, & a_1^3a_2^2a_3^1a_4^4, & a_1^3a_2^2a_3^4a_4^1, & a_1^3a_2^4a_3^1a_4^2, & a_1^3a_2^4a_3^2a_4^1, \\
a_1^4a_2^1a_3^2a_4^3, & a_1^4a_2^1a_3^3a_4^2, & a_1^4a_2^2a_3^1a_4^3, & a_1^4a_2^2a_3^3a_4^1, & a_1^4a_2^3a_3^1a_4^2, & a_1^4a_2^3a_3^2a_4^1;
\end{array}$$

опредѣляемъ знакъ каждаго изъ этихъ произведенiй по классу перестановки верхнихъ значковъ въ этомъ произведенiи; окажется, что каждому изъ произведенiй, помѣщенныхъ въ 1, 3 и 5 столбцахъ, долженъ быть присвоенъ знакъ (+) и каждому изъ остальныхъ произведенiй знакъ (—); значенiе опредѣлителя будетъ, слѣдовательно, таково

$$\begin{aligned}
&(a_2^2a_3^3a_4^4 - a_2^2a_3^4a_4^3 + a_2^3a_3^2a_4^4 - a_2^3a_3^4a_4^2 + a_2^4a_3^2a_4^3 - a_2^4a_3^3a_4^2)a_1^1 \\
&+ (a_2^1a_3^3a_4^4 - a_2^1a_3^4a_4^3 + a_2^3a_3^1a_4^4 - a_2^3a_3^4a_4^1 + a_2^4a_3^1a_4^3 - a_2^4a_3^3a_4^1)a_1^2 \\
&+ (a_2^1a_3^2a_4^4 - a_2^1a_3^4a_4^2 + a_2^2a_3^1a_4^4 - a_2^2a_3^4a_4^1 + a_2^4a_3^1a_4^2 - a_2^4a_3^2a_4^1)a_1^3 \\
&+ (a_2^1a_3^2a_4^3 - a_2^1a_3^3a_4^2 + a_2^2a_3^1a_4^3 - a_2^2a_3^3a_4^1 + a_2^3a_3^1a_4^2 - a_2^3a_3^2a_4^1)a_1^4
\end{aligned}$$

Оказывается, что нашъ опредѣлитель представился многочленомъ, *линейнымъ* относительно элементовъ первой строчки; но видно, что онъ может быть написанъ въ видѣ многочлена, линейнаго относительно элементовъ какой ни есть строчки и относительно элементовъ какого ни есть столбца.

Видимъ далѣе, что коэффиціенты при элементахъ: $a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4$ суть, въ свою очередь, опредѣлители:

$$(i) \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix},$$

умноженные соотвѣтственно на $(-1)^{1+1}$, $(-1)^{1+2}$, $(-1)^{1+3}$, $(-1)^{1+4}$, т.-е. на степени (-1), показатели которыхъ суть суммы нижняго и верхняго значковъ у соотвѣтственнаго элемента; опредѣлители эти образовываются соотвѣтственно изъ элементовъ, остающихся послѣ зачеркиванія той линіи и того столбца въ данномъ опредѣлителѣ, на пересѣченіи которыхъ лежитъ тотъ изъ элементовъ a_1^1, a_1^2, a_1^3, a_1^4, къ которому относится разсматриваемый опредѣлитель, изъ опредѣлителей (i).

Способъ, которымъ мы сейчасъ пользовались, для нахожденія значенія опредѣлителя, вытекаетъ непосредственно изъ понятія объ опредѣлителѣ; мы видимъ, что онъ очень длиненъ. Мы дадимъ сейчасъ теоремы, относящіяся къ такимъ свойствамъ опредѣлителей, которыя, т.-е. свойства, позволятъ быстро и изящно вычислять значенія опредѣлителей.

344. Теорема I. *Если изъ n^2 элементовъ:*

$$\begin{array}{l} a_1^1,\ a_1^2,\ a_1^3,\ \ldots,\ a_1^q,\ \ldots\ a_1^n \\ a_2^1,\ a_2^2,\ a_2^3,\ \ldots,\ a_2^q,\ \ldots,\ a_2^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_p^1,\ a_p^2,\ a_p^3,\ \ldots,\ a_p^q,\ \ldots,\ a_p^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n^1,\ a_n^2,\ a_n^3,\ \ldots,\ a_n^q,\ \ldots,\ a_n^n, \end{array}$$

расположенныхъ въ n линіяхъ и въ n столбцахъ, составимъ всѣ произведенія изъ n элементовъ, взятыхъ по одному изъ каждой линіи и изъ каждаго столбца въ какомъ ни есть порядкѣ, при чемъ ни въ одно изъ этихъ произведеній не будетъ входить двухъ, и болѣе, элементовъ, принадлежащихъ одной и той же линіи и одному и тому же столбцу; если присвоимъ каждому изъ этихъ произведеній знакъ $+$ или знакъ $-$, смотря по тому, представляютъ ли перестановки верхнихъ значковъ и перестановки нижнихъ значковъ въ разсматриваемомъ произведеніи пе-

рестановки одного и того же класса или классовъ различныхъ, и если образуемъ алгебрическую сумму этихъ произведеній, то сумма эта будетъ равна опредѣлителю порядка n, составленному изъ данныхъ n^2 элементовъ.

Замѣтимъ сперва слѣдующее: сдѣлаемъ въ какомъ ни есть произведеніи элементовъ взаимное перемѣщеніе элементовъ; если классы перестановокъ, образованныхъ верхними и нижними значками, были, до перемѣщенія, одинаковыми, то они останутся одинаковыми и послѣ перемѣщенія; если же до перемѣщенія эти классы были различны, то и послѣ перемѣщенія они будутъ различны, И въ самомъ дѣлѣ, взаимное перемѣщеніе двухъ элементовъ повлечетъ за собою перемѣщенія и двухъ верхнихъ значковъ и двухъ нижнихъ значковъ, а потому измѣнятся классы перестановки верхнихъ значковъ и перестановки нижнихъ значковъ.

Примѣръ. Разсмотримъ произведеніе: $a_2^1 a_1^3 a_3^2 a_4^4$; въ немъ перестановки: 1324 и 2134, образованныя верхними и нижними значками, принадлежатъ къ одному и тому же второму классу; сдѣлаемъ перемѣщеніе элементовъ: $a_4^4 a_1^3 a_3^2 a_2^1$; въ этомъ произведеніи перестановки: 4321 и 4132, образованныя верхними и нижними значками, принадлежатъ опять таки къ одному классу, хотя уже не ко второму, а къ первому.

Сдѣлавъ предъидущее замѣчаніе, легко докажемъ теорему. Изъ самаго способа образованія опредѣлителя и нашей суммы очевидно, что каждому члену (произведенію) нашей суммы соотвѣтствуетъ въ опредѣлителѣ членъ (произведеніе), составленный изъ тѣхъ же элементовъ (множителей), и на оборотъ.

Для доказательства теоремы остается, слѣдовательно, показать, что знаки у соотвѣтствующихъ членовъ суммы и опредѣлителя одинаковы.

Разсмотримъ членъ суммы, которому предшествуетъ знакъ (+); классы перестановокъ верхнихъ и нижнихъ значковъ въ этомъ членѣ, по условію, одинаковы, а слѣдовательно, на основаніи замѣчанія, и классы перестановокъ верхнихъ и нижнихъ знаковъ у равнаго ему члена опредѣлителя должны быть одинаковы, но классъ перестановки нижнихъ значковъ: 1, 2, 3, . . . , n въ каждомъ членѣ опредѣлителя есть первый, слѣдовательно и классъ перестановки верхнихъ значковъ есть первый, а такой членъ, согласно опредѣленію, входитъ въ опредѣлителѣ со знакомъ (+).

Возьмемъ теперь членъ суммы, которому предшествуетъ знакъ (—); классы перестановокъ верхнихъ и нижнихъ значковъ въ этомъ членѣ, по условію, различны, а слѣдовательно, на основаніи замѣчанія, и классы перестановокъ верхнихъ и нижнихъ значковъ у равнаго ему члена определителя также должны быть различны, но классъ перестановки нижнихъ значковъ: 1, 2, 3, ... , n есть первый; слѣдовательно, классъ перестановки верхнихъ значковъ есть второй, а такой членъ, согласно опредѣленію, входитъ въ опредѣлителѣ со знакомъ (—).

345. Теорема II. *Опредѣлитель не измѣнитъ своего значенія, если его линіи сдѣлаются столбцами, и обратно.*

Разсмотримъ два опредѣлителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 & \ldots & a_1^q & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 & \ldots & a_2^q & \ldots & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 a_p^2 & \ldots & a_p^q & \ldots & a_p^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 a_n^2 & \ldots & a_n^q & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1^1 b_1^2 & \ldots & b_1^p & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 b_2^2 & \ldots & b_2^p & \ldots & b_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_q^1 b_q^2 & \ldots & b_q^p & \ldots & b_q^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n^1 b_n^2 & \ldots & b_n^p & \ldots & b_n^n \end{vmatrix},$$

гдѣ $b_q^p = a_p^q$.

Требуется доказать, что $\Delta = \Delta_1$.

Разсмотримъ какой ни есть членъ:

$$(g) \qquad a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3} \ldots a_p^{\alpha_p} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

опредѣлителя Δ, въ которомъ верхняя перестановка:

$$(i) \qquad \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_p \ldots \alpha_n$$

ѐсть одна изъ перестановокъ чиселъ:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Этотъ членъ будетъ имѣть знакъ (+), если перестановка (i) принадлежитъ къ 1-му классу, и знакъ (—) — въ противоположномъ случаѣ.

Составимъ теперь изъ элементовъ опредѣлителя Δ_1 сумму, по условіямъ предъидущей теоремы; сумма эта будетъ равна опредѣлителю Δ_1; докажемъ, что она равна опредѣлителю Δ. Очевидно, что каждый членъ этой суммы можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$(k) \qquad b_{\alpha_1}^1 b_{\alpha_2}^2 b_{\alpha_3}^3 \ldots b_{\alpha_p}^p \ldots b_{\alpha_n}^n$$

и ему соотвѣтствуетъ членъ (g) опредѣлителя Δ, и обратно; для доказательства равенства суммы и опредѣлителя, достаточно показать, что знаки членовъ (g) и (k) одинаковы; но они одинаковы, ибо верхняя и нижняя перестановки въ членѣ (g) совершенно одинаковы соотвѣтственно съ нижнею и верхнею перестановками въ членѣ (k).

346. Теорема III. *Если въ данномъ опредѣлителѣ мы замѣнимъ взаимно другъ другомъ два столбца или двѣ линіи, то новый опредѣлитель будетъ равенъ прежнему, умноженному на* (-1). Разсмотримъ два опредѣлителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^q \ldots a_1^{q'} \ldots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 \ldots a_2^q \ldots a_2^{q'} \ldots a_2^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_p^1 a_p^2 \ldots a_p^q \ldots a_p^{q'} \ldots a_p^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{p'}^1 a_{p'}^2 \ldots a_{p'}^q \ldots a_{p'}^{q'} \ldots a_{p'}^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 a_n^2 \ldots a_n^q \ldots a_n^{q'} \ldots a_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1^1 a_1^2 \ldots a_1^q \ldots a_1^{q'} \ldots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 \ldots a_2^q \ldots a_2^{q'} \ldots a_2^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_p^1 b_p^2 \ldots b_p^q \ldots b_p^{q'} \ldots b_p^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{p'}^1 b_{p'}^2 \ldots b_{p'}^q \ldots b_{p'}^{q'} \ldots b_{p'}^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n^1 a_n^2 \ldots a_n^q \ldots a_n^{q'} \ldots a_n^n \end{vmatrix},$$

гдѣ $b_p^i = a_{p'}^i$, $b_{p'}^i = a_p^i$. Опредѣлители эти отличаются другъ отъ друга тѣмъ, что строки:

$$a_p^1 a_p^2 \ldots a_p^q \ldots a_p^{q'} \ldots a_p^n$$
$$a_{p'}^1 a_{p'}^2 \ldots a_{p'}^q \ldots a_{p'}^{q'} \ldots a_{p'}^n$$

взаимно переставлены. Требуется доказать, что

$$\Delta_1 = \Delta \cdot (-1).$$

Опредѣлители Δ и Δ_1 образуются соотвѣтственно изъ членовъ:

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{p-1}^{q-1} a_p^q a_{p+1}^{q+1} \ldots a_{p'-1}^{q'-1} a_{p'}^{q'} a_{p'+1}^{q'+1} \ldots a_n^n$$
$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 \ldots a_{p-1}^{q-1} b_p^q a_{p+1}^{q+1} \ldots a_{p'-1}^{q'-1} b_{p'}^{q'} a_{p'+1}^{q'+1} \ldots a_n^n$$

всевозможными перестановками верхнихъ значковъ.

Образуемъ, по условіямъ теоремы I, суммы S и S_1, соотвѣтственно равныя опредѣлителямъ Δ и Δ_1.

При составленіи суммы S мы будемъ перемножать элементы въ такомъ порядкѣ, чтобы каждому члену:

(g) $$A a_p^q B a_{p'}^{q'} C$$

этой суммы отвѣчалъ членъ:

$$(h) \qquad A a_{p}{}^{q} B a_{p}{}^{q'} C$$

той же суммы.

Эти члены (g) и (h) должны входить съ различными знаками.

При составленіи суммы S_1 мы будемъ перемножать элементы въ такомъ порядкѣ, чтобы каждому члену:

$$(g') \qquad A b_{p}{}^{q} B b_{p'}{}^{q'} C$$

суммы S_1 отвѣчалъ членъ:

$$(h') \qquad A b_{p'}{}^{q} B b_{p}{}^{q'} C,$$

причемъ эти члены (g') и (h') должны входить въ S_1 соотвѣтственно съ тѣми же знаками, съ какими входятъ члены (g) и (h) въ сумму S.

Но члены (g') и (h') суммы S_1 соотвѣтственно равны членамъ:

$$(h) \qquad A a_{p'}{}^{q} B a_{p}{}^{q'} C \quad \text{и} \quad A a_{p}{}^{q} B a_{p'}{}^{q'} C \qquad (g)$$

суммы S.

Итакъ, мы видимъ, что соотвѣтственно равные члены въ суммахъ S и S_1 входятъ съ различными знаками, т.-е.:

$$S = -S_1, \text{ а потому } \Delta = -\Delta_1, \text{ ч. и т. д.}$$

347. Теорема IV. *Если въ опредѣлитель двѣ линіи или два столбца совершенно одинаковы, то опредѣлитель равенъ нулю.*

Перемѣстивъ взаимно эти линіи или столбцы, мы получимъ новый опредѣлитель, съ одной стороны совершенно равный данному, а съ другой, на основаніи предъидущей теоремы, отличающійся отъ него знакомъ. Имѣемъ, слѣдовательно:

$$\Delta = -\Delta, \quad \text{откуда} \quad \Delta = 0.$$

348. Теорема V. *Опредѣлитель можетъ быть представленъ въ видѣ многочлена, линейнаго относительно элементовъ одной и той же линіи или одного и того же столбца.*

И въ самомъ дѣлѣ, по опредѣленію, каждый членъ опредѣлителя содержитъ элементъ, и только одинъ, каждой линіи и каждаго столбца.

Если, слѣдовательно, мы разсмотримъ, напримѣръ, элементы линіи мѣста p, то можемъ написать:

$$\Delta = A_p{}^1 a_p{}^1 + A_p{}^2 a_p{}^2 + A_p{}^3 a_p{}^3 + \ldots + A_p{}^q a_p{}^q + \ldots + A_p{}^n a_p{}^n,$$

гдѣ буква $A_p{}^q$ представляетъ сумму произведеній элементовъ, у котораго всѣ нижніе значки отличны отъ p и всѣ верхніе значки отличны отъ q.

349. Слѣдствіе I. *Если всѣ элементы одной и той же линіи или одного и того же столбца умножатся на одно и то же число, то опредѣлитель умножится на это число.*

И въ самомъ дѣлѣ, умноживъ на K всѣ элементы линіи мѣста p, получимъ новый опредѣлитель Δ_1, который можетъ написаться такимъ образомъ:

$$\Delta_1 = A_p{}^1 K a_p{}^1 + A_p{}^2 K a_p{}^2 + \ldots + A_p{}^q K a_p{}^q + \ldots + A_p{}^n K a_p{}^n,$$

т.-е.

$$\Delta' = \Delta \cdot K.$$

350. Слѣдствіе II. *Если элементы двухъ линій или двухъ столбцовъ пропорціональны, то опредѣлитель равенъ нулю.*

И въ самомъ дѣлѣ, этотъ опредѣлитель равенъ опредѣлителю, у котораго двѣ линіи или два столбца совершенно одинаковы, умноженному на коэффиціентъ пропорціональности, т.-е. опредѣлитель равенъ нулю.

351. Слѣдствіе III. *Данный опредѣлитель можетъ быть представленъ безконечнымъ числомъ способовъ въ видѣ суммы какого ни есть числа опредѣлителей.*

Представимъ, въ самомъ дѣлѣ, каждый изъ элементовъ столбца q въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ:

$$a_1{}^q = b_1 + c_1,\ a_2{}^q = b_2 + c_2,\ \ldots,\ a_p{}^q = b_p + c_p,\ \ldots,\ a_n{}^q = b_n + c_n.$$

Получимъ:

$$\Delta = A_1{}^q(b_1 + c_1) + A_2{}^q(b_2 + c_2) + \ldots + A_p{}^q(b_p + c_p) + \ldots + A_n{}^q(b_n + c_n),$$

или

$$\Delta = \begin{cases} \quad A_1{}^q b_1 + A_2{}^q b_2 + \ldots + A_p{}^q b_p + \ldots + A_n{}^q b_n \\ + A_1{}^q c_1 + A_2{}^q c_2 + \ldots + A_p{}^q c_p + \ldots + A_n{}^q c_n. \end{cases}$$

Очевидно, что первая строчка представляетъ нашъ опредѣлитель, въ которомъ только столбецъ мѣста q замѣненъ столбцомъ:

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_p,\ \ldots,\ b_n,$$

а вторая строчка представляетъ нашъ опредѣлитель, въ которомъ тотъ же столбецъ замѣненъ столбцомъ:

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_p,\ \ldots,\ c_n.$$

Мы здѣсь раскладывали элементы на два слагаемыхъ, но ясно, что ихъ можно разложить на какое ни есть число какихъ ни есть слагаемыхъ.

352. Теорема VI. *Если въ опредѣлитель элементы какого ни есть числа линій или какого ни есть числа столбцовъ суть суммы соотвѣтственныхъ элементовъ какого ни есть числа линій или какого ни есть числа столбцовъ даннаго опредѣлителя, то этотъ опредѣлитель равенъ этому данному.*

И въ самомъ дѣлѣ, этотъ опредѣлитель можетъ быть представленъ суммою опредѣлителей, изъ которыхъ одинъ есть данный, а остальные суть опредѣлители, имѣющіе по двумъ совершенно одинаковымъ линіямъ или по двумъ совершенно одинаковымъ столбцамъ, а слѣдовательно суть нули.

353. Слѣдствіе I. Прежде чѣмъ дѣлать указанное преобразованіе, мы можемъ умножить на одно и то же число всѣ элементы той линіи или того столбца, которые складываются съ элементами одной изъ линій или одного изъ столбцовъ.

354. Слѣдствіе II. *Опредѣлитель не измѣняетъ своего значенія, если мы вычтемъ поэлементно двѣ линіи или два столбца.*

Напримѣръ, имѣемъ послѣдовательно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & -5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0.$$

355. Опредѣлители миноры. *Опредѣлителемъ миноромъ перваго порядка* даннаго опредѣлителя, состоящаго изъ n^2 элементовъ, называется всякій опредѣлитель, получаемый отъ зачеркиванія въ данномъ опредѣлителѣ одной линіи и одного столбца.

Обозначимъ черезъ Δ_p^q миноръ перваго порядка, выводимый изъ даннаго опредѣлителя Δ черезъ зачеркиваніе линіи мѣста p и столбца мѣста q; число этихъ опредѣлителей равно n^2.

Миноръ перваго порядка опредѣлителя порядка n есть опредѣлитель порядка $(n-1)$.

И вообще, миноромъ порядка r называется опредѣлитель, получаемый изъ даннаго опредѣлителя черезъ зачеркиваніе r линій и r столбцовъ; онъ представляетъ опредѣлителя порядка $(n-r)$.

356. Теорема VII. *Коэффиціентъ A_p^q при элементѣ a_p^q въ разложеніи опредѣлителя:*

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^q & \dots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_p^1 & \dots & a_p^q & \dots & a_p^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \dots & a_n^q & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

представляетъ произведеніе минора Δ_p^q на $(-1)^{p+q}$.

Докажемъ сперва, что коэффиціентъ A_1^1 при элементѣ a_1^1 въ разложеніи опредѣлителя есть миноръ A_1^1. И въ самомъ дѣлѣ, коэффиціентъ A_1^1 мы можемъ образовать слѣдующимъ образомъ. Разсмотримъ произведеніе:

$$a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_p^p \dots a_n^n$$

и, откинувъ элементъ a_1^1, т.-е. взявъ произведеніе

$$a_2^2 a_3^3 \dots a_p^p \dots a_n^n,$$

сдѣлаемъ всевозможныя перестановки верхнихъ значковъ: 2, 3, . . . p, . . . , n; полученныя произведенія представятъ члены коэффиціента A_1^1; для опредѣленія знаковъ каждаго изъ этихъ членовъ мы должны были бы приписать къ каждому изъ нихъ элементъ a_1^1 слѣва и опредѣлить, къ какому классу принадлежитъ перестановка верхнихъ значковъ въ каждомъ изъ этихъ членовъ; но, принимая во вниманіе, что у элемента a_1^1, стоящаго первымъ, верхній значекъ есть 1, т.-е. онъ ниже всѣхъ значковъ, стоящихъ отъ него вправо, мы можемъ не принимать его во вниманіе при опредѣленіи класса перестановки, т.-е. при опредѣленіи знака каждаго изъ членовъ коэффиціента A_1^1. Итакъ, слѣдовательно, коэффиціентъ A_1^1 можетъ быть образованъ слѣдующимъ образомъ. Беремъ произведеніе:

$$a_2^2 a_3^3 \ . \ . \ . \ a_p^p \ . \ . \ . \ a_n^n,$$

дѣлаемъ всевозможныя перестановки верхнихъ значковъ и въ каждомъ полученномъ членѣ опредѣляемъ классъ перестановки, образуемой верхними значками; но такимъ же точно образомъ составляется и миноръ:

$$\Delta_1^1 = \begin{vmatrix} a_2^2 & a_2^3 & a_2^n \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^n \\ . & . & . \\ a_n^2 & a_n^3 & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Доказавъ слѣдовательно, что коэффиціентъ A_1^1 при элементѣ a_1^1 есть миноръ Δ_1^1, перейдемъ къ доказательству теоремы.

Разсмотримъ элементъ a_p^q. Онъ можетъ быть приведенъ въ первый столбецъ черезъ взаимную перестановку двухъ смежныхъ столбцовъ, исполненную $(q-1)$ разъ; каждая такая перестановка будетъ умножать нашего опредѣлителя на (-1), такъ что, въ моментъ приведенія элемента a_p^q въ первый столбецъ, опредѣлитель умножится на $(-1)^{q-1}$; помѣстивъ элементъ a_p^q въ первый столбецъ, приведемъ его въ первую линію черезъ взаимную перестановку двухъ смежныхъ линій, исполненную $(p-1)$ разъ. Вслѣдствіе такихъ повторныхъ перестановокъ нашъ опредѣлитель еще умножится на $(-1)^{p-1}$, такъ что новый опредѣлитель δ, имѣющій первымъ элементомъ элементъ a_p^q, будетъ равенъ данному опредѣлителю Δ, умноженному на $(-1)^{p+q-2}$. Итакъ:

$$\delta = \Delta \cdot (-1)^{p+q-2} = \Delta \cdot (-1)^{p+q}.$$

Равенство это говоритъ, что

$$\delta = (-1)^{p+q} (A_p^1 a_p^1 + A_p^2 a_p^2 + \ . \ . \ . + A_p^q a_p^q + \ . \ . \ . + A_p^n a_p^n),$$

т.-е. говоритъ, что коэффиціентъ при a_p^q въ опредѣлителѣ δ равенъ $(-1)^{p+q} \,.\, A_p^q$; но, съ другой стороны, этотъ коэффиціентъ равенъ минору опредѣлителя δ, получаемому отъ зачеркиванія въ этомъ опредѣлителѣ первой строки и перваго столбца, ибо элементъ a_p^q въ опредѣлителѣ δ есть первый элементъ его; этотъ же миноръ есть не что иное, какъ миноръ опредѣлителя Δ, получаемый отъ зачеркиванія p-ой линіи и q-аго столбца, т.-е. миноръ Δ_p^q. Итакъ:

$$\Delta_p^q = (-1)^{p+q} \cdot A_p^q,$$

а отсюда

$$A_p^q = \Delta_p^q \cdot (-1)^{p+q},$$

ч. и т. д.

357. Слѣдствіе. *Если всѣ элементы линіи p суть нули, за исключеніемъ элемента, находящагося въ столбцѣ q, то опредѣлитель приводится къ произведенію:*

$$A_p^q a_p^q = (-1)^{p+q} \cdot \Delta_p^q a_p^q.$$

358. Разложеніе опредѣлителя. Предъидущая теорема даетъ средство расположить опредѣлителя порядка n по элементамъ линіи или столбца; коэффиціенты суть опредѣлители порядка $(n-1)$; это суть *опредѣлители миноры перваго порядка, взятые съ тѣмъ или другимъ знакомъ.*

Примѣры. **1°.** Опредѣлитель втораго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

есть разность: $a_1 b_2 - a_2 b_1$.

2°. Опредѣлитель третьяго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

будучи расположенъ по элементамъ 1-го столбца, представится такимъ образомъ:

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_2 - b_2c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

3°. Вычислимъ значеніе опредѣлителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Принявъ во вниманіе, что въ опредѣлителѣ мы можемъ вычитать по элементно столбцы **(351)**, получимъ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a-b & b-c & c-d & d \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-d^2 & d^2 \\ a^4-b^4 & b^4-c^4 & c^4-d^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

Опредѣлитель этотъ приводится (**356**) къ минору Δ_1^4, умноженному на $(-1)^5$; приведя его къ этому минору и принявъ во вниманіе, что во всякомъ опредѣлителѣ мы можемъ выносить за знакъ опредѣлителя сомножитель, общій всѣмъ элементамъ какого ни есть столбца (**349**), получимъ:

$$\Delta = -(a-b)(b-c)(c-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+d \\ a^3+a^2b+ab^2+b^3 & b^3+b^2c+bc^2+c^3 & c^3+c^2d+cd^2+d^3 \end{vmatrix},$$

или

$$\Delta = -(a-b)(b-c)(c-d)\,.\,\delta.$$

Сдѣлавъ въ опредѣлителѣ δ вычитаніе столбцовъ по элементно и принявъ во вниманіе, что, послѣ вычитанія, первая строчка этого опредѣлителя будетъ такова: 0, 0, 1, а слѣдовательно опредѣлитель можетъ быть замѣненъ минорами δ_1^3, умноженнымъ на $(-1)^4$, т.-е. самимъ миноромъ, найдемъ:

$$\delta = \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ (a-c)(a^2+b^2+c^2+ac+bc+ab) & (b-d)(b^2+c^2+d^2+bd+cd+bc) \end{vmatrix} =$$

$$= (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+b^2+c^2+ac+bc+ab & b^2+c^2+d^2+bd+cd+bc \end{vmatrix},$$

т.-е.

$$\delta = (a-c)(b-d)(d-a)(a+b+c+d),$$

а потому

$$\Delta = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

✱ § III. Изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшеній системы n уравненій первой степени съ n неизвѣстными.

359. Разсмотримъ систему n уравненій первой степени съ n неизвѣстными:

$$
(\mathrm{I}) \left\{
\begin{array}{l}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^{n-p} x_{n-p} + \ldots + a_1^{\lambda} x_{\lambda} + \ldots + a_1^n x_n - q_1 = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^{n-p} x_{n-p} + \ldots + a_2^{\lambda} x_{\lambda} + \ldots + a_2^n x_n - q_2 = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{n-p}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{n-p}^1 x_1 + a_{n-p}^2 x_2 + \ldots + a_{n-p}^{n-p} x_{n-p} + \ldots + a_{n-p}^{\lambda} x_{\lambda} + \ldots + a_{n-p}^n x_n - q_{n-p} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_{\lambda}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{\lambda}^1 x_1 + a_{\lambda}^2 x_2 + \ldots + a_{\lambda}^{n-p} x_{n-p} + \ldots + a_{\lambda}^{\lambda} x_{\lambda} + \ldots + a_{\lambda}^n x_n - q_{\lambda} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^{n-p} x_{n-p} + \ldots + a_n^{\lambda} x_{\lambda} + \ldots + a_n^n x_n - q_n = 0.
\end{array}
\right.
$$

Значки наверху суть значки, а не показатели; значокъ λ означаетъ любое изъ чиселъ: $n-p+1$, $n-p+2$, ... , n; будемъ предполагать, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ не равенъ безконечности.

Системою рѣшеній системы (I) называется система такихъ чиселъ: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, которыя, будучи подставлены въ уравненія соотвѣтственно вмѣсто буквъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обратятъ каждое изъ уравненій въ тождество, т.-е. дадутъ тождественно:

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,\ f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0, \ldots, f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Исключимъ изъ разсмотрѣнія каждый изъ случаевъ:

$$a_m^1 = 0,\ a_m^2 = 0,\ a_m^3 = 0, \ldots a_m^n = 0, \text{ но } q_m \text{ не} = 0,$$

гдѣ m равно каждому изъ чиселъ: $1, 2, \ldots, n-p, \ldots, \lambda, \ldots, n$, ибо въ каждомъ изъ этихъ случаевъ соотвѣтствующее уравненіе не имѣетъ рѣшенія.

360. Теорема I. *Если опредѣлитель $n^{\text{-аго}}$ порядка:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-p} & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-p} & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-p}^1 & a_{n-p}^2 & \dots & a_{n-p}^{n-p} & \dots & a_{n-p}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-p} & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

составленный изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы (I), *не равенъ нулю, то система* (I) *имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній.*

Представимъ опредѣлитель Δ такимъ образомъ:

$$\Delta = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + \dots + A_{n-p}^1 a_{n-p}^1 + \dots + A_n^1 a_n^1,$$

гдѣ

$A_1^1 = \Delta_1^1$, $A_2^1 = \Delta_2^1(-1)^3, \dots, A_{n-p}^1 = \Delta_{n-p}^1(-1)^{n-p+1}, \dots, A_n^1 = \Delta_n^1(-1)^{n+1}$ (**356**).

Умноживъ уравненія системы (I) соотвѣтственно на

$$A_1^1,\ A_2^1,\ \dots\ A_{n-p}^1,\ \dots\ A_n^1,$$

сложивъ ихъ по частямъ и принявъ во вниманіе, что

$$A_1^1 a_1^m + A_2^1 a_2^m + \dots + A_{n-p}^1 a_{n-p}^m + \dots + A_n^1 a_n^m = 0$$

для всякаго значенія m, отличнаго отъ 1 (**347**), получимъ:

$$\Delta x_1 = A_1^1 q_1 + A_2^1 q_2 + \dots + A_{n-p}^1 q_{n-p} + \dots + A_n^1 q_n.$$

И вообще, представивъ опредѣлитель Δ въ такомъ видѣ:

$$\Delta = A_1^m a_1^m + A_2^m a_2^m + \dots + A_{n-p} a_{n-p}^m + \dots + A_n^m a_n^m,$$

гдѣ m означаетъ каждое изъ чиселъ: 1, 2, 3, . . . , n; умноживъ уравненія системы соотвѣтственно на A_1^m, A_2^m, . . . , A_{n-p}^m, . . . , A_n^m и принявъ во вниманіе, что (**347**)

$$A_1^m a_1^s + A_2^m a_2^s + \dots + A_{n-p}^m a_{n-p}^s + \dots + A_n^m a_n^s = 0, \qquad (k)$$

для всякаго s, отличнаго отъ m, получимъ:

$$\Delta x_m = A_1^m q_1 + A_2^m q_2 + \dots A_{n-p}^m q_{n-p} + \dots + A_n^m q_n, \qquad \text{(II)}$$

гдѣ $A_{n-p} = \Delta_{n-p}^m \cdot (-1)^{n-p+m}$.

Система (II) имѣетъ одну систему рѣшеній, конечную, ибо Δ не $=0$, и именно:

$$x_m = \frac{A_1^m q_1 + A_2^m q_1 + \ldots + A_{n-p}^m q_{n-p} + \ldots + A_n^m q_n}{\Delta}. \qquad \text{(III)}$$

Спрашивается теперь, принадлежитъ ли система (III) рѣшеній системѣ (I) уравненій, и не принадлежатъ ли этой системѣ уравненій иныя системы рѣшеній? Для отвѣтовъ на эти вопросы замѣтимъ, что система (I) *не можетъ* имѣть системы рѣшеній, отличной отъ системы (III), ибо система (I), при преобразованіи ея въ систему (II), не могла потерять ни одной системы рѣшеній, такъ какъ мы не вводили множителей, равныхъ безконечности. Остается, слѣдовательно, показать, что система (III) удовлетворяетъ системѣ (I); въ этомъ мы убѣждаемся, при помощи равенствъ (k), непосредственною подстановкою.

Теорема доказана.

361. Полезно помнить формулы (III) наизусть; онѣ составляются такимъ образомъ: *знаменатель общій и равенъ опредѣлителю, составленному изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ системы; каждый изъ числителей равенъ опредѣлителю, который найдемъ, замѣнивъ въ знаменатель столбецъ коэффиціентовъ соотвѣтствующаго неизвѣстнаго столбцомъ элементовъ*: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$.

362. Теорема II. *Если опредѣлитель* Δ *равенъ нулю, то система* (I) *или* **несовмѣстна,** *или* **неопредѣленна.**

Положимъ, что каждый изъ миноровъ порядковъ:

$$1^{\text{-го}},\ 2^{\text{-го}},\ \ldots\ (p-1)^{\text{-аго}}$$

равенъ нулю, но въ рядѣ миноровъ порядка p, гдѣ p не превышаетъ $(n-1)$, есть, по крайней мѣрѣ, одинъ, неравный нулю. Положимъ, что этотъ миноръ есть:

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^{n-p} \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^{n-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-p}^1 & a_{n-p}^2 & a_{n-p}^3 & \ldots & a_{n-p}^{n-p} \end{vmatrix}.$$

(Замѣтимъ, что еслибы миноръ, не обращающійся въ нуль, былъ иной, то отъ насъ зависило бы переобозначить коэффиціенты и неизвѣстные такимъ образомъ, чтобы миноръ, неравный нулю, былъ именно этотъ).

Разсмотримъ, совмѣстно съ этимъ миноромъ, опредѣлитель:

$$A=\left|\begin{array}{ccccc|c} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-p} & a_1^\lambda \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-p} & a_2^\lambda \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-p}^1 & a_{n-p}^2 & a_{n-p}^3 & \dots & a_{n-p}^{n-p} & a_{n-p}^\lambda \\ \hline a_\lambda^1 & a_\lambda^2 & a_\lambda^3 & \dots & a_\lambda^{n-p} & a_\lambda^\lambda \end{array}\right|,$$

гдѣ λ равно по очереди каждому изъ чиселъ:

$$n-p+1,\ n-p+2,\ \dots,\ n.$$

Замѣтимъ, что если $p=1$, то $A=\Delta$ и $\lambda=n$.

Такъ какъ опредѣлитель A есть одинъ изъ миноровъ порядка $(p-1)$ то онъ, по условію, равенъ нулю. Представимъ его такимъ образомъ

$$A=C_1a_1^\lambda+C_2a_2^\lambda+\dots+C_{n-p}a_{n-p}^\lambda+C_\lambda a^\lambda=0, \qquad (b)$$

гдѣ C_λ, равное Δ_λ, *не* равно нулю.

Возьмемъ теперь изъ нашей системы (I) слѣдующую систему:

$$(\mathrm{I}')\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_1^1x_1^1+a_1^2x_2+\dots+a_1^{n-p}x_{n-p}+\dots+a_1^\lambda x_\lambda+\dots+a_1^nx_n-q_1=0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_2^1x_1+a_2^2x_2+\dots+a_2^{n-p}x_{n-p}+\dots+a_2^\lambda x_\lambda+\dots+a_2^nx_n-q_2=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_{n-p}^1x_1+a_{n-p}^2x_2+\dots+a_{n-p}^{n-p}x_{n-p}+\dots+a_{n-p}^\lambda x_\lambda+\dots+a_{n-p}^nx_n-q_{n-p}=0 \\ f_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_\lambda^1x_1+a_\lambda^2x_2+\dots+a_\lambda^{n-p}x_{n-p}+\dots+a_\lambda^\lambda x_\lambda+\dots+a_\lambda^nx_n-q_\lambda=0. \end{array}\right.$$

Умноживъ уравненія эти соотвѣтственно на

$$C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_{n-p} \text{ и } C_\lambda,$$

принявъ во вниманіе извѣстное свойство опредѣлителей (347) и равенство (b) и сложивъ затѣмъ по частямъ, получимъ *тождество*:

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{array}{l} C_1f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)+C_2f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)+\dots+C_{n-p}f_{n-p}(x_1, x_2, \dots, x_n)+ \\ \qquad +C_\lambda f_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)=-(C_1q_1+C_2q_2+\dots+C_{n-p}q_{n-p}+C_\lambda q_\lambda), \end{array}\right.$$

гдѣ правая часть есть не что иное, какъ опредѣлитель:

$$B=\left|\begin{array}{ccccc|c} a_1^{\,1} & a_1^{\,2} & a_1^{\,3} & \ldots & a_1^{\,n-p} & q_1 \\ a_2^{\,1} & a_2^{\,2} & a_2^{\,3} & \ldots & a_2^{\,n-p} & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-p}^{1} & a_{n-p}^{2} & a_{n-p}^{3} & \ldots & a_{n-p}^{n-p} & q_{n-p} \\ \hline a_\lambda^{\,1} & a_\lambda^{\,2} & a_\lambda^{\,3} & \ldots & a_\lambda^{\,n-p} & q_\lambda \end{array}\right|,$$

отличающійся отъ опредѣлителя A тѣмъ, что въ опредѣлителѣ A послѣдній столбецъ, элементы котораго: $a_1^\lambda, a_2^\lambda, \ldots, a_{n-p}^\lambda, a_\lambda^\lambda$ суть коэффиціенты при x_λ въ системѣ (I′), замѣненъ столбцемъ, элементы котораго: $q_1, q_2, \ldots, q_{n-p}, q_\lambda$ суть извѣстные члены уравненій этой системы, перенесенные въ правыя части.

Разсмотримъ первыя $(n-p)$ уравненій системы (I′). Они могутъ быть рѣшены относительно неизвѣстныхъ: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$, ибо опредѣлитель Δ, составленный изъ коэффиціентовъ при этихъ неизвѣстныхъ, не равенъ нулю. Рѣшивъ ихъ относительно этихъ неизвѣстныхъ, получимъ для нихъ формулы, въ которыя будутъ входить остальныя p неизвѣстныхъ:

$$x_{n-p+1},\ x_{n-p+2},\ \ldots,\ x_n.$$

Давая системѣ этихъ неизвѣстныхъ произвольныя системы значеній, будемъ получать соотвѣтствующія системы значеній для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}$.

Итакъ, слѣдовательно, система первыхъ $(n-p)$ уравненій системы (I′) имѣетъ безчисленное множество системъ-рѣшеній.

Возьмемъ любую изъ этихъ системъ:

$$x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ \ldots,\ x_n=\alpha_n$$

и, подставивъ ее въ тождество (IV), получимъ:

$$\text{(V)}\qquad C_\lambda f_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)=B.$$

Если опредѣлитель B не равенъ нулю, для нѣкотораго λ, то равенство (V) даетъ, для этого λ,

$$f_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ не } =0,$$

ибо C_λ не равно безконечности, т.-е. говоритъ, что какая ни есть система рѣшеній системы первыхъ $(n-p)$ уравненій разсматриваемой системы (I) *не* удовлетворяетъ по крайней мѣрѣ одному изъ остальныхъ уравненій этой системы, т.-е. система (I) есть система *несовмѣстная*. Положимъ теперь, что опредѣлитель B равенъ нулю для каждаго λ; въ этомъ случаѣ равенство (V) даетъ, для каждаго λ,

$$f_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0,$$

ибо C_λ не $= 0$.

Результатъ этотъ говоритъ, что взятая нами произвольно система рѣшеній первыхъ $(n-p)$ уравненій разсматриваемой системы удовлетворитъ и каждому изъ остальныхъ p уравненій, т.-е. разсматриваемая система (I) уравненій представляетъ систему *неопредѣленную*, при чемъ значенія для тѣхъ p неизвѣстныхъ, коэффиціенты которыхъ не фигурируютъ въ минорѣ порядка p, не обращающемся въ нуль, остаются совершенно произвольными.

Тождество (IV), при $B=0$, даетъ:

$$f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\frac{C_1}{C_\lambda} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{C_2}{C_\lambda} f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \ldots -$$
$$- \frac{C_{n-p}}{C_\lambda} f_{n-p}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

и показываетъ, что уравненіе

$$f_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

гдѣ λ равно каждому изъ чиселъ: $n-p+1, n-p+2, \ldots, n$, есть или тождество (это случится тогда, когда каждый изъ миноровъ $C_1, C_2, \ldots, C_{n-p}$, соотвѣтствующихъ данному λ, равенъ нулю), или представляетъ слѣдствіе всѣхъ первыхъ $(n-p)$ уравненій системы (I), или нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Положимъ теперь, что всѣ миноры равны нулю, а слѣдовательно равенъ нулю каждый изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ. Для возможности каждаго изъ уравненій системы необходимо, чтобы

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0,$$

и тогда система превращается въ систему тождествъ:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

363. Случай системы уравненій, однородныхъ относительно неизвѣстныхъ. Положимъ, что система (I) есть система однородная относительно неизвѣстныхъ, т.-е.

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n = 0.$$

Если опредѣлитель Δ не равенъ нулю, то система имѣетъ одну и только одну систему рѣшеній, и она есть:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0, \ldots,\ x_n = 0.$$

Если же опредѣлитель Δ равенъ нулю, то система неопредѣленна, ибо въ этомъ случаѣ опредѣлитель B равенъ нулю для всякаго λ.

Итакъ, *для того, чтобы система n однородныхъ уравненій первой степени съ n неизвѣстными имѣла систему рѣшеній, въ которой не всѣ неизвѣстныя были бы нулями, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлитель, составленный изъ n^2 коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ, равнялся нулю.*

§ IV. Метода Безу.

364. Изложимъ методу исключенія, называемую методою неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Возьмемъ систему n уравненій первой степени съ n неизвѣстными

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots = k_n. \end{cases}$$

Умноживъ уравненія эти соотвѣтственно на неопредѣленныя числа: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ и сложивъ уравненія, послѣ умноженія, по частямъ, получимъ:

$$(2) \begin{cases} x(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n) + y(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_n\lambda_n) + \\ + z(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n) + \ldots = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n. \end{cases}$$

Уравненіе это можетъ замѣнить одно изъ предложенныхъ уравненій (258).

Опредѣлимъ введенныхъ неопредѣленныхъ сомножителей такимъ образомъ, чтобы коэффиціенты при $(n-1)$ неизвѣстныхъ въ уравненія (2), напримѣръ при неизвѣстныхъ y, z, ..., обратились въ нули, т.-е. чтобы эти сомножители удовлетворяли системѣ:

$$(3)\qquad \begin{cases} b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \ldots + b_n\lambda_n = 0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$(n-1)$ уравненій первой степени относительно n неизвѣстныхъ: λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n. Рѣшивъ эту систему относительно тѣхъ $(n-1)$ неизвѣстныхъ изъ этихъ неизвѣстныхъ, для которыхъ система имѣетъ конечную систему рѣшеній, принявъ затѣмъ оставшееся неизвѣстное равнымъ тому числу, которое будетъ болѣе удобно, и подставивъ найденныя значенія въ уравненіе (2), получимъ:

$$x(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n) = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n,$$

откуда

$$x = \frac{k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots + a_n\lambda_n}.$$

Изложенная метода показываетъ намъ, что вопросъ о рѣшеніи системы (1) n уравненій съ n неизвѣстными приводится къ рѣшенію системы (3) $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными.

365. *Примѣры.* 1°. Разсмотримъ систему:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными.

Для этой системы уравненіе (2) будетъ таково:

$$(2)\qquad \begin{cases} x(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3) + y(b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3) + z(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3) = \\ \qquad = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3. \end{cases}$$

Приравнявъ нулямъ коэффиціенты при y и z, найдемъ:

$$(3)\qquad \begin{cases} b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 = 0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Положимъ, напримѣръ, что $b_2c_3 - b_3c_2$ не равняется нулю; тогда система (3), будучи рѣшена относительно λ_2 и λ_3, даетъ:

$$\lambda_2 = \frac{(b_3c_1 - b_1c_3)\lambda_1}{b_2c_3 - b_3c_2}, \quad \lambda_3 = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)\lambda_1}{b_2c_3 - b_3c_2}.$$

Принявъ $\lambda_1 = b_2c_3 - b_3c_2$, получимъ:

$$\lambda_1 = b_2c_3 - b_3c_2,\ \lambda_2 = b_3c_1 - b_1c_3,\ \lambda_3 = b_1c_2 - b_2c_1.$$

Уравненіе (2) преобразуется въ слѣдующее:

$$x[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)] =$$
$$= k_1(b_2c_3 - b_3c_2) + k_2(b_3c_1 - b_1c_3) + k_3(b_1c_2 - b_2c_1)],$$

отсюда

$$x = \frac{k_1(b_2c_3 - b_3c_2) + k_2(b_3c_1 - b_1c_3) + k_3(b_1c_2 - b_2c_1)}{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)}.$$

Этотъ результатъ мы имѣли выше (**325**), но тамъ мы опредѣлили множителей *à priori*, здѣсь же мы нашли ихъ *à posteriori*.

Замѣтимъ, что для множителя λ_1 мы могли бы взять иное значеніе: мы могли бы взять, напримѣръ, $\lambda_1 = 1$.

Если же $b_2c_3 - b_3c_2$ равно нулю, но, напримѣръ, $b_1c_2 - b_2c_1$ не равно нулю, то рѣшаемъ систему (3) относительно λ_1 и λ_2, давая λ_3 произвольное значеніе, и тогда

$$\lambda_1 = \frac{(b_2c_3 - b_3c_2)\lambda_3}{b_1c_2 - b_2c_1} = 0,\ \lambda_2 = \frac{(b_3c_1 - b_1c_3)\lambda_3}{b_1c_2 - b_2c_1}.$$

Принявъ $\lambda_3 = b_1c_2 - b_2c_1$, получимъ:

$$\lambda_1 = b_2c_3 - b_3c_2 = 0,\quad \lambda_2 = b_3c_1 - b_1c_3,\quad \lambda_3 = b_1c_2 - b_2c_1;$$

могли бы принять за λ_3 любое число, напримѣръ могли бы взять $\lambda_3 = 1$.

Если же $b_2c_3 - b_3c_2 = 0$ и $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, то непремѣнно $b_1c_3 - b_3c_1 = 0$, и тогда предложенная система будетъ или несовмѣстна, или неопредѣленна (**318**).

2°. Разсмотримъ систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 3, \\ 2x + 3y + \ \ z = 1, \\ 5x + 9y + 3z = 2. \end{cases}$$

Уравненіе (2) будетъ таково:

$$x(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3) + y(-2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3) + z(5\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) = 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3.$$

Приравнявъ коэффиціенты при y и z нулямъ, найдемъ:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0, \\ \ \ \ 5\lambda_1 + \ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Система эта не можетъ быть рѣшена относительно λ_2 и λ_3. Рѣшая ее относительно другой пары неизвѣстныхъ, напримѣръ относительно λ_1 и λ_2, и принявъ $\lambda_3 = 1$, найдемъ:

$$\lambda_1 = 0,\quad \lambda_2 = -3,\quad \lambda_3 = 1.$$

Уравненіе (2) даетъ $x=1$. Для опредѣленія значеній y и z можемъ поступить такимъ же образомъ, какимъ поступили для опредѣленія значенія x.

3°. Разсмотримъ систему:

$$(1)\qquad \begin{cases} 5x-2y+3z=7, \\ 2x+y-z=3, \\ 14x-2y+4z=20. \end{cases}$$

Система эта даетъ:

$$(2)\quad x(5\lambda_1+2\lambda_2+14\lambda_3)+y(-2\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3)+z(3\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3)=7\lambda_1+3\lambda_2+20\lambda_3.$$

Приравнявъ нулямъ коэффиціенты при y и z, получимъ:

$$\begin{cases} -2\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=0, \\ 3\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=0. \end{cases}$$

Система эта даетъ: $\lambda_1=-2\lambda_3$, $\lambda_2=-2\lambda_3$; подставивъ эти значенія въ уравненіе (2), получимъ тождество:

$$0\,.\,x=0,$$

говорящее намъ, что система (1) неопредѣленна.

4°. Разсмотримъ еще такую систему:

$$(1)\qquad \begin{cases} x+y+z+u=1, \\ x+ay+bz+cu=0, \\ x+a^2y+b^2z+c^2u=0, \\ x+a^3y+b^3z+c^3u=0. \end{cases}$$

Умноживъ уравненія эти соотвѣтственно на λ_1, λ_2, λ_3, и сложивъ по частямъ, найдемъ:

$$(2)\qquad \begin{cases} x(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1)+y(\lambda_1+a\lambda_2+a^2\lambda_3+a^3)+ \\ +z(\lambda_1+b\lambda_2+b^2\lambda_3+b^3)+u(\lambda_1+c\lambda_2+c^2\lambda_3+c^3)=\lambda_1. \end{cases}$$

Приравнявъ нулямъ коэффиціенты при y, z и u, получимъ:

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_1+a\lambda_2+a^2\lambda_3+a^3=0, \\ \lambda_1+b\lambda_2+b^2\lambda_3+b^3=0, \\ \lambda_1+c\lambda_2+c^2\lambda_3+c^3=0. \end{cases}$$

Употребимъ слѣдующій пріемъ для рѣшенія этой системы: разсмотримъ полиномъ

$$(4)\qquad \omega^3+\lambda_3\omega^2+\lambda_2\omega+\lambda_1,$$

въ которомъ λ_3, λ_2 и λ_1 имѣютъ значенія, удовлетворяющія системѣ (3). Уравненія этой системы говорятъ, что полиномъ (4) обращается въ нуль при $\omega=a$, $\omega=b$, $\omega=c$ и, слѣдовательно, дѣлится на произведеніе

$$(5)\qquad (\omega-a)(\omega-b)(\omega-c),$$

причемъ частное равно одному, ибо первый членъ дѣлителя равенъ ω^3.

Полиномы (4) и (5), слѣдовательно, тождественны, такъ что

$$\omega^3+\lambda_3\omega^2+\lambda_2\omega+\lambda_1=(\omega-a)(\omega-b)(\omega-c),$$

или

$$\omega^3+\lambda_3\omega^2+\lambda_2\omega+\lambda_1=\omega^3-(a+b+c)\omega^2+(ab+ac+bc)\omega-abc.$$

Тождество это даетъ:

$$\lambda_3=-(a+b+c),\quad \lambda_2=ab+ac+bc,\quad \lambda_1=-abc.$$

Подставляя значенія эти въ уравненіе (2) и замѣчая, что коэффиціентъ

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+1$$

при неизвѣстномъ x, представляющій значеніе полинома при $\omega=1$, равняется

$$(1-a)(1-b)(1-c),$$

получимъ:

$$x=\frac{-abc}{(1-a)(1-b)(1-c)}.$$

Совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$y=\frac{-bc}{(a-1)(a-b)(a-c)},\quad z=\frac{-ac}{(b-1)(b-a)(b-c)},$$

$$u=\frac{-ab}{(c-1)(c-a)(c-b)}.$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

Неопредѣленныя уравненія первой степени.

§ I. Рѣшеніе цѣлыхъ неравенствъ первой степени.

366. Опредѣленіе. Рѣшить неравенство значитъ найти границы, между которыми должны лежать тѣ значенія буквы, фигурирующей въ неравенствѣ и принимаемой за *неизвѣстное*, которыя удовлетворяютъ неравенству.

367. Рѣшеніе неравенства. Если знаменатели членовъ неравенства суть численные, то ихъ можно уничтожить, ибо мы будемъ знать знакъ общаго знаменателя, на котораго должно умножить обѣ части неравенства. Неравенство, слѣдовательно, можетъ быть приведено къ формѣ:

$$ax > b.$$

Для опредѣленія границъ, между которыми должны лежать значенія буквы x, должно знать знакъ коэффиціента при a.

Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$ (**101**); если же $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$ (**101**).

368. *Примѣръ*. Рѣшить неравенство:

$$\frac{3x}{8} - \frac{2x-1}{12} > \frac{3x+1}{6} - \frac{5}{4}.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на положительнаго общаго наименьшаго знаменателя, равнаго 24, получимъ:

$$9x-4x+2>12x+4-30,$$

откуда:

$$28>7x,\quad x<4,$$

и это неравенство равносильно предложенному. Слѣдовательно, для удовлетворенія предъидущему неравенству необходимо и достаточно присвоить буквѣ x какое ни есть значеніе, меньшее 4.

§ II. Неопредѣленныя уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.

369. Опредѣленія. Мы видѣли, что если дана система m уравненій (**276**), связывающихъ $(m+p)$ неизвѣстныхъ, то система эта имѣетъ безчисленное множество системъ рѣшеній. Она неопредѣленна. Мы показали, какимъ образомъ рѣшается подобная система уравненій.

Задача не представляетъ ни затрудненій, ни интереса, если искомыя значенія неизвѣстныхъ несвязаны никакими условіями, кромѣ тѣхъ, которыя налагаются на нихъ уравненіями. Задача представитъ и затрудненія, и интересъ, если потребуется найти всѣ цѣлыя и положительныя системы рѣшеній. Этимъ вопросомъ мы теперь и займемся. Разсмотримъ сперва уравненіе первой степени съ двумя неизвѣстными. Уравненіе это можетъ быть приведено къ виду:

$$ax\pm by=c, \qquad [1]$$

гдѣ a, b, c, суть числа цѣлыя, причемъ a и b положительныя. Мы можемъ предположить даже, что *общій наибольшій дѣлитель чиселъ a, b, c равенъ единицѣ*, ибо, въ противоположномъ случаѣ, можемъ раздѣлить обѣ части уравненія на общаго наибольшаго дѣлителя, отличнаго отъ единицы.

Рѣшивъ уравненіе [1] относительно одного изъ неизвѣстныхъ, напримѣръ относительно x, получимъ формулу:

$$x=\frac{c\mp by}{a},$$

въ которой y остается совершенно произвольнымъ.

Давая въ этой формулѣ буквѣ y совершенно произвольныя значенія: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, получимъ соотвѣтствующія значенія для x:

$$\beta_0 = \frac{c \mp b\alpha_0}{a}, \ \beta_1 = \frac{c \mp b\alpha_1}{a}, \ \beta_2 = \frac{c \mp b\alpha_2}{a}, \ldots$$

Является вопросъ: *какія цѣлыя и положительныя значенія должно дать буквѣ y, не пропустивъ ни одного, чтобы получить соотвѣтствующія значенія для буквы x цѣлыми и положительными.*

Сперва займемся рѣшеніемъ неопредѣленнаго уравненія [1] въ числахъ цѣлыхъ. Будемъ предполагать, что коэффиціенты a, b, c суть числа взаимно простыя.

370. Теорема. *Если коэффиціенты a и b неопредѣленнаго уравненія*

$$ax \pm by = c$$

суть числа невзаимно простыя, то уравненіе не имѣетъ ни одной системы рѣшеній.

По условію теоремы имѣемъ:

$$a = a_1 d, \ b = b_1 d,$$

гдѣ a_1, b_1 и d суть числа цѣлыя, причемъ d отлично отъ единицы. Положимъ, что уравненіе допускаетъ систему цѣлыхъ рѣшеній: $x = \alpha$, $y = \beta$, такъ что имѣемъ тождественно:

$$a_1 d\alpha \pm b_1 d\beta = c;$$

раздѣливъ обѣ части тождества на d, получимъ:

$$a_1\alpha \pm b_1\beta = \frac{c}{d};$$

этотъ результатъ очевидно невозможенъ, ибо лѣвая часть представляетъ число цѣлое, между тѣмъ какъ правая часть равна дроби.

371. Теорема. *Если коэффиціенты a и b неопредѣленнаго уравненія*

$$ax \pm by = c \qquad [1]$$

суть числа взаимно простыя, то неопредѣленное уравненіе допускаетъ, по крайней мѣрѣ, одну систему цѣлыхъ рѣшеній.

Напишемъ рядъ чиселъ:

$$a \cdot 0 - c, \ a \cdot 1 - c, \ a \cdot 2 - c, \ \ldots, \ a(b-1) - c. \qquad [2]$$

Легко показать, что остатки, получаемые при раздѣленіяхъ чиселъ этого ряда на b, будутъ различны между собою. Положимъ обратное, т.-е. положимъ, что два числа: M и N, взятые въ этомъ рядѣ, имѣютъ форму:

$$M = Qb + r,\ N = Q_1 b + r,$$

гдѣ Q и Q_1 суть нѣкоторыя цѣлыя числа, положительныя или же отрицательныя. Равенства эти дадутъ: $M - N = (Q - Q_1)b$ и покажутъ, что разность $M - N$ дѣлится на b. Замѣчая же, что разность эта имѣетъ видъ: $a\omega$, гдѣ ω менѣе b, заключаемъ, на основаніи извѣстной теоремы ариѳметики, что $a\omega$ не можетъ дѣлиться на b, при a простомъ съ b [1]).

Итакъ, числа ряда [3], число которыхъ равно b, дадутъ, при дѣленіи на b, b различныхъ остатковъ, т.-е. дадутъ, въ нѣкоторомъ порядкѣ, остатки:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ b-1.$$

Одинъ изъ остатковъ равенъ, слѣдовательно, нулю. Положимъ, что число ряда [3], давшее остатокъ, равный нулю, есть $(a\alpha - c)$, гдѣ α менѣе b. Назовемъ частное при этомъ дѣленія, положительное или же отрицательное, буквою β. Итакъ

$$\frac{a\alpha - c}{b} = \beta, \text{ откуда } a\alpha - c = b\beta, \text{ или же } a\alpha - b\beta = c.$$

Тождество это показываетъ, что уравненіе [1] удовлетворяется слѣдующими значеніями: $x = \alpha$, $y = \mp\beta$.

Примѣры.

1°. Дано уравненіе $11x - 3y = 14$. Составляемъ рядъ чиселъ:

$$11.0 - 14,\ 11.1 - 14,\ 11.2 - 14.$$

Числа эти, при дѣленіи на $b = 3$, даютъ соотвѣтственно остатки:

$$1,\ 0,\ 2.$$

Частное при дѣленіи числа $(11.1 - 14)$ на 3 равно (-1).

Отсюда слѣдуетъ, что $x = 1$, $y = -1$.

2°. Дано уравненіе: $5x + 33y = 17$. Здѣсь удобнѣе взять дѣлителемъ число a, равное 5, и составить рядъ:

$$33.0 - 17,\ 33.1 - 17,\ 33.2 - 17,\ 33.3 - 17,\ 33.4 - 17.$$

---

[1]) См. Ариѳметика Бертрана. Переводъ Н. Билибина.

Остатки, получаемые при раздѣленіи чиселъ этого ряда на 5, соотвѣтственно суть:

$$3,\ 1,\ 4,\ 2,\ 0.$$

Итакъ, $\frac{33.4-17}{5}=23$; $-5.23+33.4=17$. Тождество это показываетъ, что уравненіе удовлетворяется при $x=-23$, $y=4$.

372. Теорема. *Неопредѣленное уравненіе*

$$ax \pm by = c, \qquad [1]$$

въ которомъ a и b суть числа взаимно простыя, допускаетъ безчисленное множество системъ цѣлыхъ рѣшеній. Всѣ эти рѣшенія заключаются въ формулахъ:

$$x = x_0 \mp bt, \quad y = y_0 + at, \qquad [2]$$

гдѣ $(x_0\ \ y_0)$ представляетъ одну какую ни есть систему рѣшеній, причемъ t есть произвольное цѣлое число.

Докажемъ сперва, что всякая система, заключенная въ формулахъ [2], удовлетворяетъ уравненію [1]. И въ самомъ дѣлѣ, подставивъ въ лѣвую часть уравненія [1], вмѣсто x и y, значенія [2], найдемъ:

$$ax_0 \mp abt \pm (by_0 + bat), \text{ или же } ax_0 \pm by_0.$$

Результатъ этотъ, по условію, равенъ c, ибо x_0 и y_0 представляютъ систему рѣшеній уравненія [1]. Итакъ, наша подстановка обращаетъ лѣвую часть уравненія въ c, т.-е. формулы [2] удовлетворяютъ уравненію при всякомъ t.

Докажемъ теперь, что, наоборотъ, всякая система цѣлыхъ рѣшеній уравненія [1] получается изъ формулъ [2] при нѣкоторомъ цѣломъ значеніи t.

И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какую нибудь систему цѣлыхъ рѣшеній $(\alpha,\ \beta)$ уравненія [1]; получимъ тождественно:

$$a\alpha \pm b\beta = c;$$

имѣемъ, по условію, тождественно:

$$ax_0 \pm by_0 = c;$$

вычтя эти два тождества по частямъ, получимъ:

$$a(\alpha - x_0) \pm b(\beta - y_0) = 0.$$

Тождество это, будучи равносильно слѣдующему:

$$\frac{a}{\pm b}=\frac{y^0-\beta}{\alpha-x_0},$$

говоритъ намъ, что, при a и b взаимнопростыхъ, числа: $(y_0-\beta)$ и $(\alpha-x_0)$ суть одинаковыя кратныя чиселъ a и b, т.-е.

$$y_0-\beta=ka,\ \alpha-x_0=\pm kb,$$

откуда

$$\alpha=x_0\pm kb,\ \beta=y_0-ka,$$

гдѣ k есть нѣкоторое цѣлое число, положительное или же отрицательное.

Равенства эти показываютъ, что числа α и β получаются изъ формулъ [2] при $t=-k$.

373. Упрощеніе уравненія $ax\pm by=c$. Если коэффиціенты a и c, или же коэффиціенты b и c, имѣютъ нѣкотораго общаго дѣлителя d, то уравненіе можетъ быть упрощено. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ $y=dy_1$. Подставивъ значеніе это въ наше уравненіе, получимъ: $ax\pm bdy_1=c$; раздѣливъ обѣ части уравненія на d, придемъ къ болѣе простому уравненію: $\frac{a}{d}x\pm by_1=\frac{c}{d}$ съ цѣлыми коэффиціентами. Найдя систему $(\alpha,\ \beta)$ рѣшеній этого уравненія, получимъ для даннаго уравненія систему $(\alpha,\ \beta d)$.

Примѣръ. $6x-17y=10$. Полагаемъ: $y=2y_1$, подставляемъ въ уравненіе и раздѣляемъ на 2, что даетъ: $3x-17y_1=5$.

Уравненіе это допускаетъ рѣшенія 13 и 2. Всѣ рѣшенія даннаго уравненія заключаются въ формулахъ:

$$x=13+17t,\quad y=4+6t,$$

гдѣ t есть произвольное цѣлое число.

374. Замѣчаніе. Нахожденіе одной системы рѣшеній изложенною выше методою (**371**) слишкомъ затруднительно при большихъ a и b. Мы изложимъ иныя методы, быстрѣе приводящія къ цѣли.

375. Частные виды уравненія.

1°. Уравненіе или имѣетъ видъ: $x\pm by=c$, или же можетъ быть приведено (**373**) къ этому виду; отсюда находимъ: $x=c\mp by$; сдѣлавъ $y=0$, получимъ $x=c$. Итакъ, одна система рѣшеній будетъ слѣдующая: $x_0=c,\ y_0=0$.

Всѣ остальныя суть:

$$x = c \mp bt, \quad y = t.$$

2°. Уравненіе имѣетъ видъ: $ax \pm y = c$; отсюда $y = \pm c \mp ax$; сдѣлавъ $x = 0$, найдемъ $y = \pm c$. Одна система: $x_0 = 0$, $y_0 = \pm c$. Всѣ остальныя суть:

$$x = \mp t, \quad y = \pm c + at.$$

3°. Уравненіе имѣетъ видъ: $ax \pm by = 0$. Одна система слѣдующая: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Всѣ остальныя суть:

$$x = \mp bt, \quad y = at.$$

376. Рѣшеніе уравненія $ax \pm by = c$. Покажемъ на примѣрѣ нахожденіе одной системы рѣшеній этого уравненія, причемъ разсужденіе будетъ общее и приведетъ насъ къ методѣ, вообще болѣе удобной, чѣмъ метода, изложенная выше **(370)**.

Возьмемъ уравненіе:

$$7x - 59y = 12.$$

Рѣшаемъ уравненіе относительно неизвѣстнаго, имѣющаго меньшій коэффиціентъ, т.-е. относительно x; получаемъ:

$$x = \frac{12 + 59y}{7}.$$

Исключивъ изъ правой части этого уравненія цѣлую алгебраическую часть, найдемъ:

$$x = 1 + 8y + \frac{5 + 3y}{7}.$$

Для того, чтобы x и y были числами цѣлыми, необходимо и достаточно подобрать такое цѣлое значеніе для y, при которомъ $\frac{5+3y}{7}$ было бы цѣлымъ числомъ.

Итакъ, положимъ:

$$\frac{5 + 3y}{7} = t, \qquad [a]$$

гдѣ t какое нибудь цѣлое число.

Равенство [a] даетъ намъ:

$$3y - 7t = -5.$$

Рѣшаемъ уравненіе это относительно того неизвѣстнаго, у котораго коэффиціентъ менѣе, т.-е. относительно y, и находимъ:

$$y = \frac{-5 + 7t}{3}.$$

Исключивъ цѣлую алгебрическую часть, найдемъ:

$$y = -1 + 2t + \frac{-2 + t}{3}.$$

Для того, чтобы y и t были цѣлыми, необходимо и достаточно подобрать такое цѣлое t, при которомъ $\frac{-2+t}{3}$ представляло бы цѣлое число. Итакъ, положимъ: $\frac{-2+t}{3} = t_1$, гдѣ t_1 есть нѣкоторое цѣлое число.

Послѣднее равенство даетъ.

$$t - 3t_1 = 2.$$

Мы получили слѣдующій рядъ уравненій:

$$7x - 59y = 12,\ 3y - 7t = -5,\ t - 3t_1 = 2.$$

Послѣднее уравненіе мы умѣемъ рѣшать.

Оно даетъ: $t_1 = 0$, $t = 2$. Поставивъ во второе уравненіе, вмѣсто t, число 2, найдемъ: $y = 3$, и тогда первое уравненіе дастъ: $x = 27$. Итакъ, одна система цѣлыхъ рѣшеній такова:

$$x_0 = 27,\ \ y_0 = 3.$$

Всѣ же цѣлыя рѣшенія даются формулами:

$$x = 27 + 59t,\ y = 3 + 7t.$$

Разсматривая внимательно методу рѣшенія предложеннаго уравненія, видимъ, что вопросъ приводится къ послѣдовательному рѣшенію нѣсколькихъ уравненій, которыя суть:

1) Данное уравненіе въ x и y съ коэффиціентами при неизвѣстныхъ, равными a и b.

2) Уравненіе въ x и t, при $a < b$, или же въ y и t, при $a > b$. Коэффиціенты его суть: a или b и остатокъ r_1 при дѣленіи b на a, или же a на b.

3) Уравненіе въ t и t_1; коэффиціенты его суть: предъидущій остатокъ r_1 и остатокъ r_2 при дѣленіи a на r_1, или же при дѣленіи b на r_1.

4) Уравненіе въ t_1 и t_2; коэффиціенты его суть: остатокъ r_2 и остатокъ r_3 при дѣленіи r_1 на r_2, и т. д.

Мы непремѣнно придемъ, при a и b взаимно простыхъ, къ такому уравненію въ t_{n-1} и t_n, въ которомъ коэффиціенты суть: r_n и 1.

И въ самомъ дѣлѣ, припомнимъ, какимъ образомъ въ ариѳметикѣ находится общій наибольшій дѣлитель двухъ цѣлыхъ чиселъ. Мы дѣлимъ тамъ большее число на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, и т. д., т.-е. дѣлаемъ то же самое, что дѣлали при рѣшеніи нашего уравненія, до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ остатку, равному нулю.

Предыдущій остатокъ будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ. Принимая же во вниманіе, что данныя числа суть числа взаимно простыя, т. е. имѣютъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ единицу, заключаемъ, что этотъ предъидущій остатокъ непремѣнно долженъ быть равенъ единицѣ.

Итакъ, непремѣнно придемъ къ уравненію въ t_{n-1} и t_n, въ которомъ коэффиціенты суть: r_n и 1. Сдѣлавъ въ этомъ уравненіи $t_n = 0$, получимъ $t_{n-1} = \alpha_{n-1}$, гдѣ α_{n-1} есть нѣкоторое цѣлое число.

Положивъ въ предъидущемъ уравненіи $t_{n-1} = \alpha_{n-1}$, найдемъ: $t_{n-2} = \alpha_{n-2}$, гдѣ α_{n-2} есть нѣкоторое цѣлое число, и т. д.; положивъ во второмъ уравненіи $t_1 = \alpha_1$, получимъ x, или же y, равнымъ α_0, и тогда уравненіе дастъ: y, или же x, равнымъ β_0.

Рѣшеніе будетъ окончено.

377. Нѣкоторыя упрощенія. Предъидущая метода допускаетъ нѣкоторыя упрощенія, которыя мы выяснимъ на примѣрахъ.

1°. Разсмотримъ уравненіе:

$$17x - 29y = 100.$$

Рѣшая его относительно x, получимъ:

$$x = \frac{100 + 29y}{17}. \qquad [1]$$

При исключеніи цѣлой алгебрической части изъ дроби мы можемъ поступать такимъ образомъ: дѣлить 100 на 17 съ цѣлію получить положительный остатокъ, равный 15, и тогда частное будетъ равно 5;

или же дѣлить 100 на 17 съ цѣлію получить отрицательный остатокъ, равный — 2, и тогда частное будетъ равно 6.

Далѣе, можемъ дѣлить 29 на 17 съ цѣлію получить положительный остатокъ, равный 12, и тогда частное будетъ равно единицѣ, или же дѣлить 29 на 17 съ цѣлію получить отрицательный остатокъ равный — 5, и тогда частное будетъ равно 2. Итакъ, возможны четыре комбинаціи остатковъ:

$$15,\ 12;\ 15,\ -5;\ -2,\ 12;\ -2,\ 5.$$

Удобнѣе всего выбрать вторую комбинацію. И въ самомъ дѣлѣ, если выберемъ вторую комбинацію, то исключеніе цѣлой части, при этой комбинаціи остатковъ, дастъ:

$$x = 5 + 2y + \frac{15 - 5y}{17}.$$

Можемъ вынести въ числителѣ за скобки 5, и тогда

$$x = 5 + 2y + \frac{5(3 - y)}{17}.$$

Для того, чтобы числа x и y были цѣлыми, необходимо и достаточно выбрать такое цѣлое y, при которомъ $\frac{5(3-y)}{17}$ было бы цѣлымъ; для этого необходимо и достаточно чтобы $\frac{3-y}{17}$ было цѣлымъ, ибо 5 и 17 суть числа взаимно простыя. (Замѣтимъ здѣсь слѣдующее: всегда случится, что тотъ множитель, который удастся вынести за скобки въ числителѣ, будетъ взаимно простымъ съ знаменателемъ. И въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ оказалось бы, что остатокъ при дѣленіи одного коэффиціента на другой и этотъ другой имѣли бы общимъ множителемъ число, отличное отъ единицы, и тогда оказалось бы, какъ показываетъ теорія общаго наибольшаго дѣлителя, что коэффиціенты даннаго уравненія имѣли бы также этого общаго множителя, что несовмѣстно съ условіемъ, по которому коэффиціенты уравненія взаимно простые).

Итакъ, полагаемъ:

$$\frac{3-y}{17} = t, \text{ откуда } y + 17t = 3.$$

Вопросъ оконченъ, ибо коэффиціентъ при одномъ изъ неизвѣстныхъ равенъ единицѣ.

Уравненія, которыя мы здѣсь имѣемъ, суть слѣдующія:

$$17x - 29y = 100, \quad y + 17t = 3.$$

Сдѣлавъ $t = 0$, найдемъ $y = 3$.

Первое уравненіе даетъ: $x = 11$. Найдя одну систему рѣшеній, получимъ всѣ цѣлыя рѣшенія по формуламъ;

$$x = 11 + 29t, \quad y = 3 + 17t. \qquad [a]$$

2. Возьмемъ третью систему остатковъ.

Исключеніе цѣлой алгебрической части изъ дроби [1] даетъ:

$$x = 6 + y + \frac{-2 + 12y}{17} = 6 + y + \frac{-2(1 - 6y)}{17}.$$

Полагаемъ: $\frac{1 - 6y}{17} = t$, откуда $6y + 17t = 1$.

Рѣшаемъ уравненіе это относительно y и находимъ:

$$y = \frac{1 - 17t}{6} = -3t + \frac{1 + t}{6}.$$

Здѣсь мы взяли систему остатковъ: 1 и -1.

Полагаемъ: $\frac{1 + t}{6} = t_1$, откуда $t - 6t_1 = -1$.

Мы пришли, слѣдовательно, къ уравненіямъ:

$$17x - 29y = 100, \quad 6y + 17t = 1, \quad t - 6t_1 = -1.$$

Дѣлаемъ въ третьемъ уравненіи $t_1 = 0$ и получаемъ: $t = -1$; полагаемъ во второмъ уравненіи $t = -1$ и находимъ $y = 3$; первое уравненіе даетъ $x = 11$.

3. Разсмотримъ теперь первую систему остатковъ.

Исключеніе цѣлой алгебрической части изъ дроби [1] даетъ:

$$x = 5 + y + \frac{15 + 12y}{17} = 5 + y + \frac{3(5 + 4y)}{17}.$$

Полагаемъ $\frac{5 + 4y}{17} = t$, откуда $4y - 17t = -5$. Рѣшивъ уравненіе это относительно y, найдемъ:

$y = \frac{-5 + 17t}{4} = -1 + 4t + \frac{-1 + t}{4}$. Полагаемъ: $\frac{-1 + t}{4} = t_1$, откуда $t - 4t_1 = 1$.

Имѣемъ, слѣдовательно, уравненія:

$$17x - 29y = 100,\ 4y - 17t = -5,\ t - 4t_1 = 1.$$

Полагаемъ $t_1 = 0$, тогда $t = 1$, $y = 3$, $x = 11$.

378. Приложеніе теоріи непрерывныхъ дробей къ нахожденію одной системы рѣшеній неопредѣленнаго уравненія.

1°. Разсмотримъ сперва уравненіе $ax + by = c$, гдѣ a и b суть числа взаимно простыя и положительныя. Обратимъ дробь $\frac{a}{b}$ въ непрерывную и образуемъ предпослѣднюю подходящую $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ **(201)**. Данная дробь $\frac{a}{b}$ будетъ послѣднею подходящею, образованною по данному выше закону **(202)**, ибо a и b суть числа взаимно простыя.

Мы имѣли **(205)**:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = (-1)^n. \qquad [1]$$

Здѣсь могутъ имѣть мѣсто два случая:

1) n четное. Равенство [1] даетъ:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 1, \quad \text{откуда} \quad acQ_{n-1} - bcP_{n-1} = c.$$

Сравнивъ равенство это съ предложеннымъ уравненіемъ, увидимъ, что уравненіе удовлетворяется слѣдующими значеніями буквъ x и y:

$$x = cQ_{n-1},\ \ y = -cP_{n-1}.$$

2) n нечетное. Равенство [1] даетъ:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = -1, \quad \text{откуда} \quad -acQ_{n-1} + bcP_{n-1} = c.$$

Сравнивъ это равенство съ предложеннымъ уравненіемъ, найдемъ:

$$x = -cQ_{n-1},\ y = cP_{n-1}.$$

2°. Разсмотримъ теперь уравненіе $ax - by = c$, гдѣ a и b суть числа положительныя. Находимъ опять равенство [1]. Оно, въ случаѣ n четнаго, даетъ: $x = cQ_{n-1}$, $y = cP_{n-1}$; въ случаѣ же n нечетнаго получимъ: $x = -cQ_{n-1}$, $y = -cP_{n-1}$. Метода эта требуетъ, разумѣется, чтобы b было отлично отъ единицы. При $b = 1$ уравненіе рѣшается непосредственно.

Вмѣсто дроби $\frac{a}{b}$ можно было бы взять дробь $\frac{b}{a}$ и ее обращать въ непрерывную. Разсужденія остались бы тѣми же.

Примѣры.

1°. Дано уравненіе: $102x - 173y = 4$. Имѣемъ:

$$\frac{173}{102} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}}}.$$

Предпослѣдняя подходящая равна $\frac{39}{23}$. Имѣемъ: $173 \,.\, 23 - 102 \,.\, 39 = 1$; отсюда

$$102 \,.\, (-39 \,.\, 4) - 173(-23 \,.\, 4) = 4.$$

Сравнивъ равенство это съ предложеннымъ уравненіемъ, получимъ:

$$x = -156, \quad y = -92.$$

2°. Разсмотримъ уравненіе: $10x + 27y = 7$. Имѣемъ:

$$\frac{10}{27} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}}}.$$

Предпослѣдняя подходящая равна $\frac{3}{8}$. Имѣемъ: $10 \,.\, 8 - 27 \,.\, 3 = -1$, отсюда $10\,(-8 \,.\, 7) + 27\,(3 \,.\, 7) = 7$.

Сравнивъ равенство это съ предложеннымъ уравненіемъ, получимъ: $x = -8 \,.\, 7$, $y = 3 \,.\, 7$.

379. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій въ числахъ цѣлыхъ и положительныхъ.

Разсмотримъ здѣсь два случая:

1°. Уравненіе имѣетъ видъ $ax - by = c$, гдѣ a и b суть числа положительныя. Подобное уравненіе имѣетъ безчисленное множество системъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній.

И въ самомъ дѣлѣ, цѣлыя рѣшенія даются формулами:

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 + at.$$

Для того, чтобы x и y были положительныя, необходимо и достаточно, чтобы t удовлетворяло неравенствамъ:

$$x_0 + bt \geqslant 0, \quad y_0 + at \geqslant 0.$$

Неравенства эти даютъ соотвѣтственно (**367**):

$$t \geqslant -\frac{x_0}{b},\ t \geqslant -\frac{y_0}{a}.$$

Для того, чтобы эти неравенства были удовлетворены, достаточно взять для t значенія, не меньшія наибольшаго изъ чиселъ: $-\frac{x_0}{b}$, $-\frac{y_0}{a}$. Такихъ значеній для t существуетъ безчисленное множество.

Примѣръ. Возьмемъ уравненіе $5x-7y=3$. Всѣ цѣлыя значенія его даются формулами:

$$x=2+7t,\ y=1+5t. \qquad [a]$$

Неравенства будутъ: $2+7t\geqslant 0$, $1+5t\geqslant 0$, откуда $t\geqslant -\frac{2}{7}$, $t\geqslant -\frac{1}{5}$. Эти неравенства удовлетворяются совмѣстно слѣдующими цѣлыми значеніями t:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \infty, \qquad [b]$$

и другихъ цѣлыхъ значеній t, удовлетворяющихъ нашимъ условіямъ, не существуетъ.

Давая теперь въ формулахъ $[a]$ буквѣ t значенія $[b]$, получимъ безчисленное множество цѣлыхъ, положительныхъ системъ рѣшеній.

Сдѣлаемъ здѣсь одно замѣчаніе. Возьмемъ слѣдующія формулы:

$$x=9+7t,\ \ y=6+5t. \qquad [a']$$

для всѣхъ цѣлыхъ системъ рѣшеній нашего уравненія.

Неравенства будутъ: $9+7t\geqslant 0$, $6+5t\geqslant 0$, откуда $t\geqslant -\frac{9}{7}$, $t\geqslant -\frac{6}{5}$. Эти неравенства удовлетворяются совмѣстно слѣдующими цѣлыми значеніями t:

$$-1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \infty. \qquad [c]$$

Казалось бы на первый взглядъ, что мы пришли къ результату, несогласному съ тѣмъ, къ которому пришли, исходя изъ формулъ $[a]$. Казалось бы, въ самомъ дѣлѣ, что число чиселъ въ рядѣ $[c]$ единицею болѣе числа чиселъ въ рядѣ $[b]$. Такое заключеніе было бы справедливо тогда, когда ∞ выражало бы собою число. Безконечность въ рядѣ $[b]$ не выражаетъ собою числа; она выражаетъ только, что мы можемъ въ формулахъ $[a]$ брать, для полученія положительныхъ рѣшеній, вмѣсто t всѣ цѣлыя числа, не меньшія нуля. Безконечность въ рядѣ $[c]$ выражаетъ, что мы можемъ брать въ формулахъ $[a']$, вмѣсто t, всѣ цѣлыя числа, не меньшія (-1).

2°. Уравненіе имѣетъ видъ: $ax+by=c$, гдѣ a и b суть числа положительныя. Очевидно, что, при отрицательномъ c, уравненіе не будетъ имѣть ни одной положительной системы рѣшеній.

При положительномъ c уравненіе имѣетъ ограниченное число цѣлыхъ положительныхъ системъ рѣшеній, которое, иногда, можетъ приводиться къ нулю. Напримѣръ, если c не равно нулю и менѣе a и b, то не существуетъ ни одной цѣлой положительной системы рѣшеній.

Въ разсматриваемомъ случаѣ формулы, дающія цѣлыя рѣшенія, будутъ:

$$x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at.$$

Неравенства, которымъ должны удовлетворять t, суть слѣдующія:

$$x_0 - bt \geqslant 0, \quad y_0 + at \geqslant 0,$$

откуда

$$t \leqslant + \frac{x_0}{b}, \ t \geqslant - \frac{y_0}{a}.$$

Если $\frac{x_0}{b}$ будетъ менѣе $\left(-\frac{y_0}{a}\right)$, то ясно, что эти два неравенства несовмѣстны, и уравненіе не имѣетъ ни одной системы положительныхъ рѣшеній.

Если же $\frac{x_0}{b}$ будетъ не менѣе $\frac{y_0}{a}$, то неравенства будутъ удовлетворены для всѣхъ значеній t, заключенныхъ между $\left(-\frac{y_0}{a}\right)$ и $\frac{x_0}{b}$.

Примѣры. 1°. $3x + 7y = 0$. Всѣ цѣлыя рѣшенія могутъ быть изображены формулами:

$$x = -7 - 7t, \quad x = 3 + 3t.$$

Неравенства будутъ:

$$-7 - 7t \geqslant 0, \ 3 + 3t \geqslant 0,$$

отсюда

$$t \leqslant -1, \quad t \geqslant -1.$$

Единственное значеніе t, удовлетворяющее этимъ условіямъ, равно (-1). Отсюда слѣдуетъ, что единственная положительная система рѣшеній будетъ слѣдующая:

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Напишемъ, для повѣрки, цѣлыя рѣшенія нашего уравненія въ такомъ видѣ:

$$x = -7t, \quad x = 3t.$$

Неравенства будутъ: $-7t \geqslant 0, 3t \geqslant 0$, откуда $t \leqslant 0, \ t \geqslant 0$. Единственное значеніе для t, удовлетворяющее этимъ условіямъ, равно нулю, и, слѣдовательно, единственныя положительныя рѣшенія уравненія будутъ: $x = 0$, $y = 0$. Получили предъидущій результатъ.

2°. $3x+2y=4$. Всѣ цѣлыя рѣшенія изображаются формулами: $x=-2t$, $y=2+3t$. Неравенства будутъ: $-2t\geqslant 0$, $2+3t\geqslant 0$, откуда $t\leqslant 0, t\geqslant -\frac{2}{3}$. Единственное цѣлое значеніе для t, удовлетворяющее этимъ условіямъ, равно нулю, и, слѣдовательно, единственная цѣлая положительная система рѣшеній будетъ: $x=0$, $y=2$.

3°. $5x+6y=41$. Цѣлыя рѣшенія даются формулами:

$$x=7-6t,\quad y=1+5t.$$

Неравенства будутъ: $7-6t\geqslant 0$, $1+5t\geqslant 0$, откуда $t\leqslant \frac{7}{6}$, $t\geqslant -\frac{1}{5}$. Единственныя цѣлыя значенія для t, удовлетворяющія этимъ неравенствамъ, суть: $t=0$, $t=1$. Положительныя системы рѣшеній предложеннаго уравненія будутъ слѣдующія:

$$x=7,\quad y=1;\quad x=1,\quad y=6.$$

Для повѣрки возьмемъ слѣдующія формулы цѣлыхъ рѣшеній нашего уравненія:

$$x=-5-6t,\quad y=11+5t.$$

Неравенства будутъ: $-5-6t\geqslant 0$, $11+5t\geqslant 0$, откуда $t\leqslant -\frac{5}{6}$, $t\geqslant -\frac{11}{5}$. Единственныя цѣлыя значенія для t, удовлетворяющія этимъ неравенствамъ, суть -1 и -2. Системы положительныхъ рѣшеній предложеннаго уравненія будутъ:

$$x=1,\quad y=6;\quad x=7,\quad y=1.$$

* § III. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени съ тремя и съ большимъ числомъ неизвѣстныхъ.

380. Метода рѣшенія неопредѣленнаго уравненія съ двумя неизвѣстными въ числахъ цѣлыхъ (**376**) можетъ быть приложена и къ тѣмъ случаямъ, когда число неизвѣстныхъ болѣе двухъ.

Пояснимъ на примѣрахъ.

Примѣръ I. Разсмотримъ уравненіе

$$23x-53y+80z=101.$$

Разрѣшая его относительно того изъ неизвѣстныхъ, которое имѣетъ наименьшій коэффиціентъ (въ данномъ случаѣ относительно x), получимъ:

$$x=\frac{101+53y-80z}{23}=4+2y-3z+\frac{9+7y-11z}{23}. \qquad [a]$$

Для того, чтобы значенія x, y и z были цѣлыя, необходимо и достаточно подобрать такія цѣлыя значенія для y и z, при которыхъ

$$\frac{9+7y-11z}{23}=t,$$

гдѣ t цѣлое число. Уравненіе это, будучи рѣшено относительно неизвѣстнаго съ меньшимъ коэффиціентомъ (въ данномъ случаѣ относительно y), даетъ:

$$y=\frac{-9+11z+23t}{7}=-1+z+3t+\frac{-2+4z+2t}{7}. \qquad [b]$$

Полагая: $\dfrac{-2+4z+2t}{7}=t_1$, гдѣ t_1 есть нѣкоторое цѣлое число, и рѣшая уравненіе относительно t, получимъ:

$$t=\frac{2-4z+7t_1}{2}=1-2z+3t_1+\frac{t_1}{2}. \qquad [c]$$

Полагаемъ, наконецъ, $\dfrac{t_1}{2}=t_2$, откуда $t_1=2t_2$, и останавливаемся.

Уравненія [a], [b] и [c] даютъ:

$$\begin{aligned} x &= 4+2y-3z+t, \\ y &= -1+z+3t+t_1, \\ t &= 1-2z+3t_1+t_2, \\ t_1 &= 2t_2. \end{aligned}$$

Уравненія эти позволятъ выразить x, y и z, при помощи буквъ t_2 и z, такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} x &= 9-15z+53t_2, \\ y &= 2-5z+23t_2, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Давая здѣсь буквамъ t_2 и z совершенно произвольныя цѣлыя значенія, будемъ получать для x и y соотвѣтствующія цѣлыя значенія. Посмотримъ, какія цѣлыя значенія должно присвоить буквѣ t_2 для того, чтобы x, y и z были положительныя. Необходимо, чтобы

$$9-15z+53t_2 \geqslant 0, \quad 2-5z+23t_2 \geqslant 0,$$

или же

$$9+53t_2 \geqslant 15z, \quad 2+23t_2 \geqslant 5z. \qquad [d]$$

При положительныхъ значеніяхъ z необходимо, чтобы

$$9+53t_2 \geqslant 0, \quad 2+23t_2 \geqslant 0.$$

Неравенства эти говорятъ намъ, что значенія t_2 должны быть болѣе нуля или равны ему.

Испытываемъ, напримѣръ, $t_2=0$. Неравенства [d] даютъ $z \leqslant \frac{3}{5}$, $z \leqslant \frac{2}{5}$. Неравенства эти удовлетворяются единственнымъ цѣлымъ положительнымъ значеніемъ: $z=0$, в тогда система рѣшеній будетъ:

$$x=9,\quad y=2,\quad z=0.$$

Испытываемъ $t_2=1$. Неравенства [d] даютъ:

$$z \leqslant 4\frac{2}{15},\quad z \leqslant 5.$$

Цѣлыя положительныя значенія z, удовлетворяющія этимъ неравенствамъ, суть: 4, 3, 2, 1, 0, и тогда

$$\begin{array}{lll} x=2, & y=5, & z=4. \\ x=17, & y=10, & z=3. \\ x=32, & y=15, & z=2. \\ x=47, & y=20, & z=1. \\ x=62, & y=25, & z=0. \end{array}$$

Испытываемъ $t_2=2$, и т, д.

Примѣръ II. Дано уравненіе $17x+13y+8z=89$. Уравненіе это дастъ

$$z=\frac{89-13y-17x}{8}=11-y-2x+\frac{1-5y-x}{8}.$$

Полагаемъ: $\frac{1-5y-x}{8}=t$, откуда $x=1-5y-8t$. Итакъ,

$$x=1-5y-8t,\quad z=9+9y+17t. \qquad [a]$$

Для нахожденія положительныхъ значеній x, y и z, пишемъ неравенства:

$$1-5y-8t \geqslant 0,\quad 9+9y+17t \geqslant 0.$$

Неравенства эти даютъ:

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{1-8t}{5},\quad y \geqslant \frac{-9-17t}{9}. \qquad [d]$$

Для того, чтобы неравенства эти не противорѣчили другъ другу, необходимо, чтобы

$$\frac{1-8t}{5} \geqslant \frac{-9-17t}{9},$$

откуда $t \geqslant -4\frac{2}{13}$, т.-е. t не можетъ имѣть значеній, отличныхъ отъ значеній:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1+2,\ \ldots,\ +\infty. \qquad [b]$$

Кромѣ того, t должно удовлетворять условію:

$$\frac{1-8t}{5} \geqslant 0,$$

которое даетъ для t значенія:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots,\ -\infty. \qquad [c]$$

Сравнивъ результаты [b] и [c], найдемъ, что t можетъ имѣть только значенія:

$$0,\ -1,\ -2.\ -3,\ -4.$$

Подставляя ихъ послѣдовательно въ неравенства [d], найдемъ:

при $t=\ \ 0,\ y \leqslant \frac{1}{5},\ y \geqslant -1$, откуда $y=0$.

при $t=-1,\ y \leqslant \frac{9}{5},\ y \geqslant \frac{8}{9}$, откуда $y=1$.

при $t=-2,\ y \leqslant \frac{17}{5},\ y \geqslant \frac{25}{9}$, откуда $y=3$.

при $t=-3,\ y \leqslant 5,\ y \geqslant \frac{42}{9}$, откуда $y=5$.

при $t=-4,\ y \leqslant \frac{33}{5},\ y \geqslant \frac{59}{9}$, нѣтъ цѣлыхъ значеній для y.

Подставляя въ равенства [a] найденныя соотвѣтствующія цѣлыя и положительныя значенія для y и t, получимъ:

$$y=0,\ x=1,\ z=9;$$
$$y=1,\ x=4,\ z=1;$$
$$y=3,\ x=2,\ z=2;$$
$$y=5,\ x=0,\ z=3.$$

Другихъ цѣлыхъ и положительныхъ системъ рѣшеній данное уравненіе не имѣетъ.

* § IV. Рѣшеніе неопредѣленной системы уравненій первой степени.

381. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Предположимъ, что дана система двухъ уравненій:

$$ax+by+cz=d,\quad a_1x+b_1y+c_1z=d_1.$$

Исключивъ одно изъ неизвѣстныхъ, напр. z, получимъ уравненіе вида: $Ax+By=C$, гдѣ A, B и C суть числа взаимно простыя. Если A и B суть числа взаимно простыя, то уравненіе имѣетъ безконечное множество системъ цѣлыхъ рѣшеній, заключенныхъ въ формулахъ:

$$x=\alpha-Bt,\quad y=\beta+At.$$

Подставивъ значенія эти въ одно изъ данныхъ уравненій, получимъ уравненіе въ t и z вида: $A_1t+B_1z=C_1$, гдѣ A_1, B_1, C_1, суть числа взаимно простыя. Если A_1 и B_1 суть числа взаимно простыя, то

$$t=\alpha_1-B_1t_1,\quad z=\beta_1+A_1t_1.$$

Поставивъ значеніе t въ выраженія, найденныя для x и y, найдемъ:

$$x=(\alpha-B\alpha_1)+BB_1t_1,\quad y=(\beta+A\alpha_1)-AB_1t_1.$$

Неизвѣстныя x, y и z выражены въ t_1.

Примѣръ.

Дана система: $5x-11y=1$, $3x-4z=0$. Исключивъ отсюда x, получимъ: $-33y+20z=3$. Рѣшимъ это уравненіе. Полагаемъ: $z=3z_1$, и тогда уравненіе приводится къ слѣдующему $-11y+20z_1=1$, отсюда

$$y=\frac{-1+20z_1}{11}=2z_1-\frac{1+2z_1}{11}.$$

Полагаемъ: $\frac{1+2z_1}{11}=t$, откуда $z_1=\frac{-1+11t}{2}=5t+\frac{-1+t}{2}$.

Полагаемъ: $\frac{-1+t}{2}=t_1$, откуда $t=1+2t_1$. Сдѣлавъ $t_1=0$, получимъ послѣдовательно: $t=1$, $z_1=5$, $y=9$, $z=15$. Всѣ рѣшенія суть:

$$y=9-20t,\quad z=15-33t.$$

Подставивъ значеніе z во второе уравненіе, получимъ: $x+44t=20$. Итакъ,

$$x=20-44t,\quad y=9-20t,\quad z=15-33t. \qquad [1]$$

Для нахожденія всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ системъ рѣшеній пишемъ неравенства:

$$20-44t\geqslant 0,\ 9-20t\geqslant 0,\ 15-33t\geqslant 0.$$

Неравенства эти дадутъ соотвѣтственно:

$$t\leqslant\frac{20}{44},\ \text{откуда } t=0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -\infty;$$

$$t\leqslant\frac{9}{20},\ \text{откуда } t=0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -\infty;$$

$$t\leqslant\frac{15}{33},\ \text{откуда } t=0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -\infty.$$

Итакъ, данная система уравненій имѣетъ безчисленное множество системъ цѣлыхъ положительныхъ рѣшеній, которыя найдемъ, подставивъ въ формулы [1], вмѣсто t, послѣдовательно значенія:

$$0, -1, -2, \ldots, -\infty.$$

382. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными. *Примѣръ I.* Дана система:

$$4x+3y+2z+8v=36, \quad 3x-4y+7z+5v=12.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій v, найдемъ:

$$-4x+47y-46z=84,$$

откуда

$$x=\frac{-84+47y-46z}{4}=-21+12y-11z+t,$$

гдѣ $t=\frac{-y-2z}{4}$. Это уравненіе даетъ: $y=-2z-4t$.

Выражая x въ z и t, получимъ: $x=-21-35z-47t$.

Подставляя полученныя значенія для x и y во второе изъ данныхъ уравненій, найдемъ: $-18z-25t+v=15$.

Выразивъ теперь x, y и v при помощи z и t, будемъ имѣть:

$$x=-21-35z-47t, \quad y=-2z-4t, \quad v=15+18z+25t. \qquad [1]$$

Давая въ этихъ формулахъ буквамъ z и t цѣлыя значенія, будемъ получать для x, y и v соотвѣтствующія цѣлыя значенія. Рѣшимъ вопросъ: какія цѣлыя значенія можно присвоивать буквѣ t и какія цѣлыя и положительныя значенія можно присвоивать буквѣ z для того, чтобы соотвѣтствующія значерія x, y и v были положительныя? Для рѣшенія вопроса пишемъ неравенства:

$$-21-35z-47t\geqslant 0, \quad -2z-4t\geqslant 0, \quad 15+18z+25t\geqslant 0, \quad z\geqslant 0. \qquad [2]$$

Неравенства эти дадутъ:

$$0\leqslant z\leqslant -\frac{21+47t}{35}, \quad 0\leqslant z\leqslant -2t, \quad z\geqslant\frac{-15-25t}{18}. \qquad [a]$$

Неравенства:

$$z\leqslant -\frac{21+47t}{35}, \quad z\leqslant -2t$$

имѣютъ одинаковый смыслъ, слѣдовательно они не будутъ противорѣчить и тогда, когда

$$-\frac{21+47t}{35}\leqslant -2t, \text{ или } t\leqslant\frac{21}{23}, \qquad [b]$$

и тогда, когда

$$-\frac{21+47t}{35} \geqslant -2t, \text{ или } t \geqslant \frac{21}{23}. \qquad [c]$$

Въ случаѣ [b] мы должны имѣть неравенство:

$$-\frac{21+47t}{35} \geqslant -\frac{15+25t}{18}, \text{ или } t \geqslant -\frac{147}{29} \qquad [d]$$

для того, чтобы неравенства [a] не противорѣчили другъ другу. Неравенства [b] и [d], при совмѣстномъ существованіи, даютъ:

$$t=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5. \qquad [e]$$

Въ случаѣ [c] мы должны имѣть неравенство:

$$-2t \geqslant \frac{-15-25t}{18}, \text{ или } t \leqslant \frac{15}{11} \qquad [f]$$

для того, чтобы неравенства [a] не противорѣчили другъ другу. Неравенства [c] и [f], при совмѣстномъ существованіи, даютъ:

$$t=1. \qquad [g]$$

Изъ значеній [e] и [g], найденныхъ для буквы t, мы должны выбрать тѣ значенія, которыя удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$-2t \geqslant 0,\ -\frac{21+47t}{35} \geqslant 0.$$

Первое неравенство даетъ:

$$t \leqslant 0, \text{ т.-е. } t=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\infty.$$

Изъ втораго неравенства находимъ: $t \leqslant -\frac{21}{47}$.

Этому неравенству удовлетворяютъ:

$$t=-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -\infty.$$

Эти результаты показываютъ, что значенія: $t=1$ и $t=0$ должны быть отброшены.

Итакъ, значенія t, удовлетворяющія неравенствамъ [a], суть:

$$t=-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5.$$

Подставляемъ значенія эти послѣдовательно въ неравенства [a] и находимъ:

$$\text{при } t=-1,\ z\leqslant\frac{26}{35},\ z\geqslant\frac{10}{18},\ \text{нѣтъ цѣлаго } z.$$

$$t=-2,\ z\leqslant\frac{73}{35},\ z\geqslant\frac{35}{18},\ z=2.$$

$$t=-3,\ z\leqslant\frac{120}{35},\ z\geqslant\frac{60}{18},\ \text{нѣтъ цѣлаго } z.$$

$$t=-4,\ z\leqslant\frac{167}{35},\ z\geqslant\frac{85}{18},\ \text{нѣтъ цѣлаго } z.$$

$$t=-5,\ z\leqslant\frac{214}{35},\ z\geqslant\frac{110}{18},\ \text{нѣтъ цѣлаго } z.$$

Отсюда слѣдуетъ, что неравенствамъ [2] удовлетворяютъ совмѣстно изъ всѣхъ цѣлыхъ t и изъ всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ z только $t=-2$ и $z=2$. Подставляя значенія эти въ равенства [1], найдемъ одну цѣлую и положительную систему рѣшеній:

$$x=3,\ \ y=4,\ \ z=2,\ \ v=1$$

предложенной системы уравненій.

✱ § V. Рѣшеніе нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ уравненій второй степени въ числахъ цѣлыхъ.

383. Рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій второй степени въ числахъ цѣлыхъ составляетъ вопросъ, выходящій изъ предѣловъ элементарной алгебры. Мы ограничимся нѣкоторыми указаніями.

384. Рѣшеніе уравненія $mxy+nx^2+px+qy=r$. Уравненіе это содержитъ въ квадратѣ лишь одно неизвѣстное и можетъ быть рѣшено методою, которую выяснимъ на слѣдующемъ примѣрѣ. Дано уравненіе:

$$3xy+2x^2=5y+4x+5.$$

Рѣшая его относительно y, найдемъ:

$$y=\frac{-2x^2+4x+5}{3x-5}.$$

Исключимъ цѣлую алгебраическую часть изъ правой части этого равенства. Для избѣжанія дробныхъ коэффиціентовъ умножимъ обѣ части равенства на 9 и получимъ:

$$9y=-6x+2+\frac{55}{3x-5}.$$

Такъ какъ x и y суть числа цѣлыя, то $3x-5$ должно дѣлить 55. Единственн.ле случаи, которые подлежатъ разсмотрѣнію, суть, слѣдовательно, слѣдующіе:

$$3x-5=\pm 55,\quad 3x-5=\pm 11,$$
$$3x-5=\pm 5,\quad 3x-5=\pm 1.$$

Изъ нихъ только три случая даютъ цѣлыя и положительныя значенія для x, и именно

$$3x-5=55,\quad \text{откуда}\quad x=20;$$
$$3x-5=1,\quad \text{откуда}\quad x=2;$$
$$3x-5=-5,\quad \text{откуда}\quad x=0.$$

При $x=20$ мы не получимъ цѣлаго положительнаго значенія для y. При $x=2$, $y=5$; система эта представляетъ единственную систему цѣлыхъ и положительныхъ рѣшеній предложеннаго уравненія.

Упражненія.

Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ слѣдующія уравненія:

1. $8x+65y=81$.
2. $19x+5y=119$.
3. $3x+7y=250$.
4. $17x+23y=183$.
5. $7x+10y=297$.
6. $13x+19y=1170$.

Найти общія формулы цѣлыхъ рѣшеній и наименьшія цѣлыя значенія для x и y въ уравненіяхъ:

7. $7x-9y=29$.
8. $9x-11y=8$.
9. $19x-5y=119$.
10. $17x-49y+8=0$.
11. Раздѣлить 200 на такія двѣ части, чтобы, при дѣленіи одной на 6 и другой на 11, получились соотвѣтственно остатки 5 и 4.
12. Найти n положительныхъ цѣлыхъ чиселъ въ ариѳметической прогрессіи, имѣющей сумму n^2. Показать, что, при нечетномъ n, получаются два рѣшенія.
13. Опредѣлить наименьшее число, которое, при дѣленіи на 28, даетъ въ остаткѣ 21; при дѣленіи же на 19 даетъ въ остаткѣ 17.
14. Найти общій видъ чиселъ, которыя, при дѣленіи на 3, 5, 7, даютъ соотвѣтственно остатки 2, 4, 6.
15. Найти наименьшее число, которое, при дѣленіи на 28, 19 и 15, даетъ въ остаткѣ 13, 2 и 7.
16. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе $17x+23y+3z=200$.
17. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ систему: $5x+4y+z=272$, $8x+9y+3z=656$.

18. Число состоитъ изъ трехъ цифръ, которыхъ сумма равна 20; если отъ него отнять 16 и остатокъ раздѣлить на 2, то получится число, изображенное тѣми же цифрами, написанными въ обратномъ порядкѣ. Опредѣлить число.

19. Найти три правильныя дроби, составляющія ариѳметическую прогрессію, знаменатели которыхъ равны 6, 9, 18 и сумма которыхъ равна $2\frac{2}{3}$.

20. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$3xy - 4y + 3x = 14.$$

21. Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29.$$

КНИГА III.

Уравненія высшихъ степеней.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Уравненія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

385. Общая форма уравненія второй степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Если обѣ части уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ x суть выраженія цѣлыя и раціональныя относительно x и если наивысшій показатель буквы x равенъ двумъ, то уравненіе называется уравненіемъ второй степени или *квадратнымъ*. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что квадратное уравненіе можетъ заключать члены только трехъ родовъ: члены, содержащіе квадратъ неизвѣстнаго x; члены, содержащіе первую степень x; члены, независимые отъ x. Перенеся всѣ члены въ первую часть уравненія, соединивъ въ одинъ членъ всѣ члены съ x^2, въ одинъ — всѣ члены съ x и въ одинъ — всѣ извѣстные члены, придадимъ уравненію *общую форму*

$$ax^2+bx+c=0,$$

въ которой a, b, c суть данныя числа, положительныя или отрицательныя, независимыя отъ x.

Примѣръ. Дано уравненіе

$$3x-\frac{2}{5}+\frac{x^2}{9}=8+\frac{2x^2}{3}-\frac{26x}{15}.$$

Мы послѣдовательно преобразовываемъ его въ слѣдующія уравненія:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{2x^2}{3}+3x+\frac{26x}{15}-8-\frac{2}{5}=0,$$
$$5x^2-30x^2+135x+78x-360-18=0,$$
$$-25x^2+213x-378=0,$$
$$25x^2-213x+378=0.$$

Рѣшенія квадратнаго уравненія называются его *корнями*.

Коэффиціентъ a не можетъ быть нулемъ, ибо, въ противномъ случаѣ, уравненіе перестало бы быть квадратнымъ. Что же касается до коэффиціентовъ b и c, то они могутъ быть нулями, и тогда уравненіе принимаетъ одну изъ формъ:

$$ax^2+c=0,\quad ax^2+bx=0.$$

Въ этихъ случаяхъ уравненіе называется неполнымъ.

§ I. Рѣшеніе уравненія второй степени.

386. Случай, когда уравненіе имѣетъ форму $ax^2+c=0$. Если уравненіе второй степени имѣетъ форму

$$ax^2+c=0, \qquad [1]$$

то оно можетъ быть разсматриваемо, какъ уравненіе первой степени относительно x^2, и тогда

$$x^2=-\frac{c}{a}.$$

Если число $\left(-\frac{c}{a}\right)$ *есть число положительное*, то оно представляетъ квадратъ неизвѣстнаго. Значеніе x есть, слѣдовательно, квадратный корень числа $\left(-\frac{c}{a}\right)$, имѣющій два значенія, различныя по знакамъ, но одинаковыя по модулю. *Имѣемъ два рѣшенія*:

$$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}. \qquad [2]$$

Если же число $\left(-\frac{c}{a}\right)$ *есть число отрицательное*, то не существуетъ ни числа положительнаго, ни числа отрицательнаго, квадратъ котораго былъ бы отрицательный. *Уравненіе* [1] *не имѣетъ корней.* Говорятъ, что *оно имѣетъ два мнимыхъ корня*, представляемыхъ формулами [2].

387. Случай, когда уравненіе имѣетъ форму $ax^2+bx=0$. Если членъ, независимый отъ x, равенъ нулю, то уравненіе имѣетъ форму:

$$ax^2+bx=0; \qquad [1]$$

можно x сдѣлать множителемъ и написать:

$$x(ax+b)=0.$$

Для того, чтобы произведеніе двухъ множителей было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю. Мы получимъ, слѣдовательно, всѣ рѣшенія уравненія, если положимъ:

$$x=0, \quad ax+b=0.$$

Уравненія эти суть уравненія первой степени, корни которыхъ соотвѣтственно таковы:

$$x_1=0, \quad x_2=-\frac{b}{a}. \qquad [2]$$

Итакъ, *уравненіе имѣетъ два корня, изъ которыхъ одинъ равенъ всегда нулю.*

388. Рѣшеніе полнаго уравненія. Разсмотримъ теперь полное уравненіе

$$ax^2+bx+c=0 \qquad [1]$$

и постараемся привести его къ формѣ [1] (386), въ которой первая часть есть квадратъ, содержащій неизвѣстное; вторая же вполнѣ извѣстна. Для этой цѣли умножаемъ обѣ части на $4a$ (имѣемъ право это сдѣлать, ибо $4a$ не равно нулю), переносимъ затѣмъ $4a$ во вторую часть и получаемъ эквивалентное уравненіе:

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Мы видимъ, что первая часть состоитъ изъ двухъ членовъ квадрата $(2ax+b)^2$, при чемъ для полнаго квадрата недостаетъ члена b^2. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ уравненія b^2, получимъ:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

или

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Мы привели уравненіе къ искомой формѣ, а именно (b^2-4ac) представляетъ квадратъ числа $(2ax+b)$. Если, слѣдовательно, (b^2-4ac) есть число положительное, то значеніе $(2ax+b)$ будетъ квадратный корень этого числа; принимая во вниманіе, что корень этотъ имѣетъ два значенія, равныя по модулямъ, но противоположныя по знакамъ, найдемъ непосредственно:

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac},\quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac}.$$

Эти уравненія первой степени даютъ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Уравненіе, слѣдовательно, имѣетъ два рѣшенія. Обыкновенно эти два рѣшенія заключаютъ въ одной формулѣ и пишутъ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad [2]$$

предполагая, что $+\sqrt{b^2-4ac}$ представляетъ *положительное* значеніе радикала и $-\sqrt{b^2-4ac}$ представляетъ его отрицательное значеніе. Если же, наоборотъ, количество (b^2-4ac) есть число отрицательное, то $\sqrt{b^2-4ac}$ не представляетъ никакого числа, ни положительнаго, ни отрицательнаго. *Разсматриваемое уравненіе не имѣетъ никакого рѣшенія.* Въ этихъ случаяхъ говорятъ, что *уравненіе имѣетъ два мнимыхъ корня*, представляемыхъ формулою [2].

Можетъ случиться, что (b^2-4ac) *равняется нулю;* въ этомъ случаѣ оба значенія $\sqrt{b^2-4ac}$ приводятся къ нулю. Уравненіе обращается въ слѣдующее: $(2ax+b)^2=0$, при чемъ оба корня дѣлаются равными: $x=-\frac{b}{2a}$. *Уравненіе имѣетъ*, слѣдовательно, *одно рѣшеніе.* Принято говорить, что *оно имѣетъ два равныхъ корня.*

389. Уравненіе второй степени имѣетъ всегда два корня. Предъидущее изслѣдованіе показало намъ, что уравненіе второй степени имѣетъ иногда два рѣшенія, иногда одно, и, наконецъ, иногда не имѣетъ ни одного рѣшенія. Мы условились говорить, что уравненіе всегда имѣетъ два рѣшенія, которыя могутъ быть вещественныя и различныя, вещественныя и равныя и, наконецъ, мнимыя. Можетъ, на первый взглядъ, показаться страннымъ выборъ такой формы, позволяющій однако заключать, во всѣхъ случаяхъ, о существованіи двухъ корней. Эти выраженія и это введеніе въ исчисленія мнимыхъ чиселъ суть слѣдствіе того духа обобщенія, который господствуетъ въ алгебрѣ. И въ самомъ дѣлѣ, невозможно было бы производить дѣйствія надъ *буквенными* выраженіями, если бы форма результатовъ мѣнялась вмѣстѣ съ численнымъ значеніемъ буквъ. Нужно было бы безпрестанно подраздѣлять вопросы для того, чтобы получать формулы, соотвѣтствующія тому или другому предположенію. Принятіе чиселъ отрицательныхъ и мнимыхъ имѣетъ цѣлію избѣжаніе этихъ затрудненій. Въ вопросѣ частномъ введеніе этихъ чиселъ не приноситъ никакой пользы, но въ общемъ изученіи цѣлаго класса вопросовъ числа эти позволяютъ выражать и доказывать правила и результаты, относящіеся ко всѣмъ вопросамъ класса, между тѣмъ какъ отсутствіе этихъ чиселъ потребовало бы доказательствъ и формулъ, различныхъ для различныхъ вопросовъ одной и той же природы.

390. Опредѣленіе мнимаго выраженія. Вообще *мнимымъ выраженіемъ* называется квадратный корень изъ отрицательнаго числа. Выраженіе это не заключаетъ въ себѣ ни малѣйшей идеи объ измѣреніи величинъ. Мнимое выраженіе, подобно числу отрицательному, не представляетъ никакой величины. Дѣйствія надъ мнимыми выраженіями, подобно дѣйствіямъ надъ числами отрицательными, имѣютъ условный смыслъ и представляютъ драгоцѣнное средство обобщенія.

Первое изъ соглашеній состоитъ въ введеніи мнимой единицы или мнимаго знака, обозначаемаго знакомъ i, которому, условно, приписываютъ свойство, выражаемое равенствомъ:

$$i^2 = -1. \qquad [\alpha]$$

Второе соглашеніе состоитъ въ разсматриваніи числа $\sqrt{-A}$, какъ произведенія двухъ чиселъ: $\sqrt{A}$ и i, такъ что

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A} \cdot i. \qquad [\beta]$$

Отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot i = i.$$

Условливаются производить всѣ дѣйствія надъ мнимыми выраженіями по тѣмъ же самымъ правиламъ, по которымъ они производятся надъ количествами дѣйствительными (вещественными) *(вещественными* или *дѣйствительными* количествами называются положительныя и отрицательныя числа).

Вслѣдствіе этого соглашенія соглашеніе [β] не противорѣчитъ понятію о квадратномъ корнѣ. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$(\sqrt{A}\,.\,i)^2=(\sqrt{A})^2\,.\,i^2=A\,.\,-1=-A.$$

391. Форма мнимыхъ корней уравненія второй степени. Мнимые корни уравненія второй степени суть выраженія формы $A+\sqrt{-B}$, въ которой B есть число положительное. Обозначивъ буквою b квадратный корень этого числа, такъ что $B=b^2$, приведемъ мнимое выраженіе къ формѣ $A+\sqrt{-b^2}$. Послѣдняя форма, въ силу соглашенія [β], принимаетъ видъ

$$A+b\sqrt{-1}=A+bi.$$

Выраженія этой формы называются *комплексными* выраженіями. Всякое вещественное число можетъ быть разсматриваемо, какъ частный случай мнимаго, если положимъ $b=0$, такъ что, напримѣръ,

$$7=7+0\,.\,i,\quad -2=-2+0\,.\,i,\ \text{и т. д.}$$

Мы займемся впослѣдствіи этими выраженіями; теперь же замѣтимъ, что вообще *правила* дѣйствій, доказанныя для чиселъ вещественныхъ, будутъ служить, какъ *опредѣленія* дѣйствій, производимыхъ надъ комплексными выраженіями. Безъ этихъ соглашеній дѣйствія надъ комплексными выраженіями теряютъ смыслъ.

392. Правило. Формула [2] даетъ, во всѣхъ случаяхъ, корни уравненія [1]. Она показываетъ, что *для полученія корней должно взять коэффиціентъ при x, перемѣнить у него знакъ, прибавить къ нему и вычесть изъ него отдѣльно квадратный корень числа, образованнаго вычитаніемъ изъ квадрата этого коэффиціента учетвереннаго произведенія коэффиціента при x^2 на независимый членъ, и полученный результатъ раздѣлить на удвоенный коэффиціентъ при x^2.*

393. Упрощеніе. Случается иногда, что формула эта и правило, ею выражаемое, значительно упрощаются.

1°. Раздѣливъ всѣ члены уравненія на a, мы приведемъ уравненіе къ формѣ:

$$x^2+px+q=0. \qquad [3]$$

Можно прямо рѣшить это уравненіе, перенеся q во вторую часть, прибавивъ потомъ къ обѣимъ частямъ $\frac{p^2}{4}$ и извлекая, наконецъ, квадратные корни изъ результатовъ. Проще вывести новую формулу изъ [2], сдѣлавъ $a=1$, $b=p$, $c=q$. Формула обратится въ слѣдующую:

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

или, выполнивъ раздѣленіе радикала на 2,

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \qquad [4]$$

Нужно знать наизусть эту формулу и употреблять ее всегда, когда $a=1$. Она показываетъ, что *для рѣшенія уравненія* [3] *должно взять половину коэффиціента при x, измѣнить у нея знакъ, прибавить и вычесть потомъ послѣдовательно квадратный корень числа, образованнаго вычитаніемъ всего извѣстнаго члена изъ квадрата этой половины.*

2°. Можетъ случиться, что коэффиціентъ b при x будетъ четный. Если сдѣлаемъ множителя 2 явнымъ, положивъ $b=2k$, то уравненіе [1] приметъ форму:

$$ax^2+2kx+c=0. \qquad [5]$$

Можно было бы прямо рѣшить это уравненіе изложенною методою, умноживъ обѣ части на a и образовавъ въ первой части квадратъ выраженія $(ax+k)$. Но проще сдѣлать предположеніе $b=2k$ въ формулѣ [2]; она обратится въ слѣдующую:

$$x=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a},$$

или, по сокращеніи на 2,

$$x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}. \qquad [6]$$

Итакъ, *для нахожденія корней въ этомъ случаѣ должно взять половину коэффиціента при x съ измѣненнымъ знакомъ, прибавить и вы-*

честь квадратный корень числа, которое получимъ, вычтя изъ квадрата этой половины произведеніе коэффиціента при x^2 *на независимый членъ, и раздѣлить результатъ на коэффиціентъ при* x^2.

394. *Приложенія.* 1°. Дано уравненіе: $x^2-7x+10=0$.

Будемъ имѣть:

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2};\ \begin{cases} x_1=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5. \\ x_2=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2. \end{cases}$$

2°. Дано уравненіе: $3x^2+14x-440=0$.

Найдемъ:

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+3\,.\,440}}{3}=\frac{-7\pm\sqrt{1369}}{3}=\frac{-7\pm 37}{3};$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-7+37}{3}=10. \\ x_2=\frac{-7-37}{3}=-\frac{44}{3}. \end{cases}$$

3° Дано уравненіе: $7x^2-13x+3=0$.

Имѣемъ:

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-4\,.\,7\,.\,3}}{14}=\frac{13\pm\sqrt{85}}{14};\ \begin{cases} x_1=\frac{13+\sqrt{85}}{14}, \\ x_2=\frac{13-\sqrt{85}}{14}. \end{cases}$$

4°. Дано уравненіе: $x^2-6x+9=0$.

Имѣемъ (корни равные): $x=3\pm\sqrt{9-9}=3;\ \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=3. \end{cases}$

5°. Дано уравненіе: $2x^2-11x+20=0$.

Имѣемъ (корни мнимые):

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-4\,.\,2\,.\,20}}{4}=\frac{11\pm\sqrt{-39}}{4};\ \begin{cases} x_1=\frac{11}{4}+\frac{\sqrt{39}}{4}\,.\,i, \\ x_2=\frac{11}{4}-\frac{\sqrt{39}}{4}\,.\,i. \end{cases}$$

6°. Дано буквенное уравненіе: $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Уничтоживъ знаменателей, перенеся члены и соединивъ подобные члены, получимъ:

$$(a-b)^2x^2-(a^2+b^2)(a+b)x+ab(a+b)^2=0,$$

откуда

$$x=\frac{(a^2+b^2)(a+b)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2(a+b)^2-4ab(a+b)^2(a-b)^2}}{2(a-b)^2},$$

или

$$x=\frac{(a+b)\left[a^2+b^2\pm\sqrt{(a-b)^4+4a^2b^2}\right]}{2(a-b)^2}.$$

§ II. Изслѣдованіе формулъ.

395. Случай, когда корни вещественные и неравные. Мы видѣли, что уравненіе [1] имѣетъ два вещественныхъ неравныхъ корня:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

если (b^2-4ac) представляетъ положительное число.

Всегда можно предположить, что a есть число положительное, ибо, въ противномъ случаѣ, перемѣнивъ знаки у всѣхъ членовъ уравненія, сдѣлаемъ число это положительнымъ. Итакъ, знаменатель обоихъ корней можетъ считаться положительнымъ, и знакъ корня одинаковъ, слѣдовательно, со знакомъ числителя.

Число c можетъ быть положительнымъ, нулемъ или отрицательнымъ. *Если c положительное*, то (b^2-4ac) менѣе b^2, и, слѣдовательно, $\sqrt{b^2-4ac}$ менѣе модуля числа b; отсюда вытекаетъ, что знакъ числителей одинаковъ со знакомъ $(-b)$, т.-е. въ этомъ случаѣ *оба корня имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, одинаковый со знакомъ* $(-b)$. *Если c отрицательное*, то (b^2-4ac) болѣе b^2; отсюда слѣдуетъ, что $\sqrt{b^2-4ac}$ болѣе модуля числа b, т.-е. знакъ числителя одинаковъ съ тѣмъ знакомъ, который помѣщенъ передъ радикаломъ $\sqrt{b^2-4ac}$; *оба корня имѣютъ*, слѣдовательно, *противоположные знаки;* причемъ, если b положительное, то модуль корня x_1 болѣе модуля корня x_2; если же b отрицательное, то, наоборотъ, модуль корня x_2 будетъ болѣе модуля корня x_1. *Въ частномъ случаѣ, когда* $c=0$, $\sqrt{b^2-4ac}$ равенъ модулю числа b; отсюда слѣдуетъ, что $x_1=-\frac{b}{a}$, $x_2=0$, *если b положительное;* $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$, *если b отрицательное.*

396. Случай, когда корни вещественные равные. Если

$$(b^2 - 4ac) = 0,$$

то оба корня равны между собою и равны числу $-\frac{b}{2a}$; *знакъ корней противоположенъ знаку при* b.

Замѣтимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе можетъ написаться такимъ образомъ:

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = 0, \quad \text{или} \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Первая часть уравненія представляетъ, слѣдовательно, полный квадратъ, умноженный на a.

397. Случай, когда корни мнимые. *Если* $(b^2 - 4ac)$ *есть число отрицательное*, то корни мнимые. Положивъ, для сокращенія,

$$-\frac{b}{2a} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \beta,$$

придадимъ корнямъ форму:

$$x_1 = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \quad x_2 = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе можетъ написаться въ видѣ, который полезно замѣтить.

Имѣемъ, очевидно,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}.$$

Первые три члена въ скобкахъ представляютъ полный квадратъ: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; послѣдніе же два приводятся къ $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Уравненіе можетъ написаться такимъ образомъ:

$$a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\} = 0.$$

Число $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$, будучи положительнымъ, можетъ разсматриваться, какъ квадратъ своего квадратнаго корня. Можемъ, слѣдовательно, писать:

$$a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)^2\right\} = 0.$$

Результатъ этотъ показываетъ, что *въ случаѣ* (b^2-4ac) *отрицательнаго, лѣвая часть уравненія представляетъ произведеніе числа* a *на сумму квадратовъ двухъ вещественныхъ выраженій.* Форма эта очень хорошо показываетъ, почему уравненіе, въ этомъ случаѣ, не имѣетъ никакого рѣшенія: никакое значеніе буквы x не обратитъ выраженія $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ въ отрицательное число, т.-е. первое слагаемое въ скобкахъ никогда не можетъ сдѣлаться числомъ отрицательнымъ, второе же слагаемое есть всегда число положительное, а потому сумма этихъ двухъ слагаемыхъ, ни при какомъ вещественномъ x, не можетъ быть нулемъ.

398. Таблица изслѣдованія. Результаты предъидущаго изслѣдованія могутъ быть заключены въ слѣдующей таблицѣ:

$b^2-4ac>0$. Оба корня вещественные неравные.
$$\begin{cases} c=0 \ \{ \text{ одинъ корень нуль, одинъ корень } = -\frac{b}{a}; \\ c>0 \begin{cases} b<0, \text{ оба корня положительные,} \\ b>0, \text{ оба корня отрицательные;} \end{cases} \\ c<0 \ \{ \text{ оба корня различныхъ знаковъ.} \end{cases}$$

$b^2-4ac=0$. Оба корня вещественные и равные.
$$\left\{ x_1=x_2=-\frac{b}{2a}: \ \right\{ \text{первая часть представляетъ полный квадратъ.}$$

$b^2-4ac<0$. Оба корня мнимые.
$$\begin{cases} x_1=\alpha-\beta\sqrt{-1} \\ x_2=\alpha+\beta\sqrt{-1} \end{cases} : \ \{ \text{первая часть есть сумма двухъ квадратовъ.}$$

399. Замѣчаніе. 1°. Если знаки a и c различны, то корни всегда вещественные, ибо (b^2-4ac) представляетъ тогда сумму.

2°. Для того, чтобы корни были равны по модулю, но противоположны по знаку, необходимо и достаточно, чтобы $b=0$. И въ самомъ дѣлѣ, если числа α и $-\alpha$ суть корни, то имѣемъ тождественно:

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0, \\ a\alpha^2-b\alpha+c=0, \end{cases}$$

откуда, вычитая эти тождества,

$$2b\alpha=0,$$

или, такъ какъ α не есть нуль,

$$b=0.$$

Очевидно, что условіе это и достаточно.

§ III. Свойства корней.

400. Теорема I. *Сумма корней квадратнаго уравненія равна частному, получаемому отъ раздѣленія коэффиціента при x съ измѣненнымъ знакомъ на коэффиціентъ при x^2.*

И въ самомъ дѣлѣ, сложивъ формулы [2] (388), найдемъ:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}. \qquad [1]$$

401. Теорема II. *Произведеніе корней равно частному, получаемому отъ раздѣленія извѣстнаго члена на коэффиціентъ при x^2.*

Перемноживъ формулы [2] по частямъ, получимъ:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

или

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \qquad [2]$$

Предъидущія два предложенія въ высшей степени важны.

Приложенія ихъ многочисленны. Дадимъ нѣкоторыя изъ нихъ.

402. Разложеніе лѣвой части уравненія второй степени на множителей первой степени. Если x_1 и x_2 означаютъ корни уравненія:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad [1]$$

то:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія [1] на a и замѣнивъ $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ предъидущими значеніями, найдемъ для лѣвой части:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2,$$

или, какъ легко въ этомъ убѣдиться,

$$(x - x_1)(x - x_2).$$

Итакъ, *лѣвая часть уравненія второй степени, приведеннаго къ виду*

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

представляетъ произведеніе двухъ биномовъ, равныхъ разностямъ между буквою x и каждымъ изъ корней.

Лѣвая часть уравненія, написаннаго въ формѣ:

$$ax^2+bx+c=0,$$

можетъ быть представлена такимъ образомъ:

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

403. Разложеніе трехчлена второй степени на множителей первой степени. Предъидущая теорема прилагается непосредственно къ разложенію трехчлена второй степени на множителей первой степени. Она же можетъ быть доказана и прямо такимъ образомъ.

Разсмотримъ трехчленъ

$$ax^2+bx+c;$$

имѣемъ тождественно:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}; \quad [1]$$

мы можемъ замѣнить здѣсь выраженіе $\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ тождественно равнымъ ему выраженіемъ:

$$-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2;$$

подстановка эта преобразуетъ выраженіе [1] въ произведеніе числа a на разность двухъ квадратовъ, т.-е. въ выраженіе:

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)^2\right\}.$$

Но извѣстно, что разность квадратовъ двухъ чиселъ равна произведенію суммы этихъ чиселъ на разность ихъ, а потому предъидущее выраженіе, тождественное трехчлену ax^2+bx+c, можетъ написаться такимъ образомъ:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right),$$

или

$$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Выраженіе это представляетъ выраженіе, найденное выше, и именно:

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

Полученная формула прилагается очевидно и къ тому случаю, когда корни x_1 и x_2 мнимые, но только въ этомъ случаѣ оба множителя: $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ не имѣютъ никакого ариѳметическаго значенія.

Замѣтимъ, что *корнями трехчлена* ax^2+bx+c называютъ такія числа, которыя, будучи подставлены вмѣсто буквы x въ трехчленъ, обращаютъ его въ нуль. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что корни трехчлена ax^2+bx+c одинаковы съ корнями уравненія

$$ax^2+bx+c=0.$$

Предъидущія разсужденія показываютъ намъ, что *трехчленъ второй степени* ax^2+bx+c *разлагается на трехъ множителей, изъ которыхъ одинъ равенъ коэффиціенту* a *при* x^2 *и остальные два суть разности, въ которыхъ уменьшаемыя равны буквѣ* x, *вычитаемыя же суть корни разсматриваемаго трехчлена.*

404. Важное замѣчаніе. Буква x, входящая въ трехчленъ ax^2+bx+c, и буква x, входящая въ уравненіе $ax^2+bx+c=0$, имѣютъ различные смыслы. Буква x, входящая въ трехчленъ ax^2+bx+c, не подчинена никакимъ условіямъ и способна принимать всякія значенія; буква же x, входящая въ уравненіе $ax^2+bx+c=0$, способна принимать только два значенія, которыя, между прочимъ, обращаютъ трехчленъ ax^2+bx+c въ нуль, т.-е. суть корни этого трехчлена.

Примѣры. 1°. Разложить на множителей трехчленъ $-15n^2+16n+64$. Рѣшаемъ уравненіе $-15n^2+16n+64=0$, или эквивалентное уравненіе

$$n^2-\frac{16}{15}n-\frac{64}{15}=0.$$

Корни этого уравненія суть:

$$n=\frac{8}{15}\pm\sqrt{\frac{64}{15^2}+\frac{64}{15}}=\frac{8}{15}\pm\sqrt{\frac{64(1+15)}{15^2}}=\frac{8\pm 8.4}{15};$$

$$n_1=\frac{8.5}{15}=\frac{8}{3},\ \ n_2=\frac{-8.3}{15}=-\frac{8}{5}.$$

Имѣемъ:

$$-15n^2+16n+64=-15\left(n-\frac{8}{3}\right)\left(n+\frac{8}{5}\right)=-(3n-8)(5n+8).$$

2°. Разложить на множителей выраженіе $3x-x^2-n(1-n)-2$.

Разсматривая это выраженіе, какъ трехчленъ второй степени относительно x, представляемъ его въ видѣ: $-x^2+3x+(n^2-n-2)$. Рѣшаемъ уравненіе:

$x^2-3x-(n^2-n-2)=0$, принявъ за неизвѣстное букву x.

Корни этого уравненія суть:

$$x_1=1+n,\ \ x_2=2-n.$$

Разложеніе будетъ слѣдующее:

$$3x-x^2-n(1-n)-2=-(x-1-n)(x-2+n). \qquad [\alpha]$$

Мы можемъ разсмотрѣть предложенное выраженіе, какъ трехчленъ второй степени относительно буквы n, и представить его въ видѣ:

$$n^2-n+(3x-x^2-2).$$

Для разложенія его на множителей первой степени относительно n, пишемъ уравненіе:

$$n^2-n+(3x-x^2-2)=0$$

и, принявъ за неизвѣстное букву n, находимъ корни:

$$n_1=2-x,\ \ n_2=-1+x.$$

Разложеніе будетъ слѣдующее:

$$(n-2+x)(n+1-x).$$

Очевидно, что разложеніе это тождественно съ разложеніемъ [α].

3°. Сократить дробь: $\frac{a^3+1}{a^2+3a+2}$. Разлагая числителя и знаменателя на множителей, получимъ:

$$a^3+1=(a+1)(a^2-a+1);\ \ a^2+3a+2=(a+2)(a+1).$$

Дробь принимаетъ видъ: $\frac{a^2-a+1}{a+2}$. Замѣтимъ, что корни трехчлена a^2-a+1 мнимые, а потому трехчленъ не раскладывается на вещественныхъ множителей первой степени относительно буквы a.

405. Задача. Доказанныя выше свойства корней позволяютъ рѣшить слѣдующую задачу:

Найти два числа, зная ихъ сумму и ихъ произведеніе.

Обозначимъ заданныя сумму и произведеніе неизвѣстныхъ чиселъ соотвѣтственно буквами S и P. Неизвѣстныя числа суть корни уравненія:

$$x^2-Sx+P=0,$$

ибо сумма корней равна именно S и произведеніе корней равно именно P.

Легко написать это уравненіе въ такой формѣ, которая *à priori* покажетъ тождественность двухъ вопросовъ. И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе можемъ написать такимъ образомъ:

$P=Sx-x^2$, или $P=x(S-x)$. Форма эта говоритъ, что рѣшить уравненіе $x^2-Sx+P=0$, значитъ найти такихъ два числа: x и $(S-x)$, которыхъ произведеніе было бы равно P, причемъ сумма была бы равна $x+S-x$, или S.

406. Опредѣленіе, à priori, знаковъ корней. При помощи соотношеній, дающихъ сумму и произведеніе корней, мы можемъ опредѣлить знаки корней, не находя корней.

Если число $\frac{c}{a}$ есть число положительное, то и произведеніе корней x_1 и x_2 положительно, а потому знаки корней одинаковы. Для рѣшенія вопроса о томъ, каковъ знакъ, обращаемся къ соотношенію [1] (**400**). Оно говоритъ намъ, что въ случаѣ $\left(-\frac{b}{a}\right)$ положительнаго, корни имѣютъ знакъ $(+)$; въ случаѣ же $\left(-\frac{b}{a}\right)$ отрицательнаго — знакъ $(-)$.

Если число $\frac{c}{a}$ есть число отрицательное, то и произведеніе корней x_1 и x_2 отрицательно, а потому знаки корней различны.

Въ этомъ случаѣ знакъ числа $\left(-\frac{b}{a}\right)$ покажетъ, который изъ корней имѣетъ наибольшій модуль.

Напримѣръ, знаки корней уравненія

$$x^2-3x-4=0$$

различны, ибо произведеніе ихъ равно -4; отрицательный корень имѣетъ меньшій модуль, ибо сумма корней положительна и равна 3.

407. Замѣчаніе. *Прежде чѣмъ прилагать предъидущія правила, должно испытать, вещественны ли корни.* Казалось бы, напримѣръ, что корни уравненія

$$x^2-3x+10=0$$

положительны, а между тѣмъ выраженіе (b^2-4ac), равное -31, говоритъ намъ, что корни мнимы.

408. Задача. Теорема **(402)**, имѣющая важное значеніе въ анализѣ, позволяетъ рѣшить непосредственно слѣдующій вопросъ:

Образовать уравненіе второй степени, корни котораго были бы заданныя числа α, β. Искомое уравненіе, очевидно, таково:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0, \quad \text{или} \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

Видимъ, *à priori*, что первая часть уничтожается и при $x=\alpha$ и при $x=\beta$.

Видимъ также, что коэффиціентъ при x равенъ суммѣ корней, взятыхъ съ противоположными знаками, причемъ весь извѣстный членъ равенъ произведенію корней.

Примѣры. 1°. Каково уравненіе, корни котораго суть: $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$? Сумма $2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$, произведеніе $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$. Искомое уравненіе есть, слѣдовательно, $x^2-4x+1=0$.

2°. Уравненіе второй степени, имѣющее корни: $(a+b)$ и $(a-b)$, есть, слѣдовательно, $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

✱ § IV. Предѣлы корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда a стремится къ нулю.

409. 1°. Предположимъ, что въ уравненіи

$$ax^2+bx+c=0$$

коэффиціентъ a есть перемѣнное число, стремящееся къ нулю, причемъ числа b и c суть или числа постоянныя, не равныя нулю, или числа перемѣнныя, стремящіяся къ предѣламъ, неравнымъ нулю. Посмотримъ, къ какимъ предѣламъ стремятся формулы:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

выражающія значенія корней предложеннаго уравненія.

Количество $(b^2 - 4ac)$, помѣщенное подъ знакомъ радикала, стремится къ $lim(b^2)$, и, слѣдовательно,

$$\sqrt{b^2 - 4ac}$$

стремится къ $lim(b)$ или къ $lim(-b)$, смотря по тому, представляетъ ли число b число положительное, или отрицательное.

Итакъ, одинъ изъ числителей стремится къ нулю, другой — къ $lim(-2b)$. Но знаменатель $2a$ стремится къ нулю; слѣдовательно, модуль одного изъ корней безпредѣльно возрастаетъ, а другой корень принимаетъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$.

Раскроемъ эту *кажущуюся неопредѣленность*, предположивъ, что $b > 0$. Корень, принимающій неопредѣленную форму, есть x_1. Умноживъ числителя и знаменателя дроби, представляющей значеніе x_1, на

$$-b - \sqrt{b^2 - 4ac},$$

найдемъ:

$$x_1 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Если коэффиціентъ a стремится къ нулю, то знаменатель стремится къ $lim(-2b)$, и, слѣдовательно,

$$lim(x_1)_{a=0} = lim\left(-\frac{c}{b}\right).$$

Итакъ, *если a стремится къ нулю, то формулы даютъ для корней предѣлы:*

$$lim\left(-\frac{c}{b}\right) \text{ и } \pm\infty.$$

Если $b < 0$, то корень, принимающій неопредѣленную форму, есть x_2; подобно предъидущему найдемъ, что *предѣлы корней суть:*

$$\pm\infty \text{ и } lim\left(-\frac{c}{b}\right).$$

410. Посмотримъ теперь, что дастъ само уравненіе; оно можетъ написаться такимъ образомъ:

$$bx + c = -ax^2.$$

Уравненіе это, не имѣя корня, равнаго нулю, ибо c не $= 0$, эквивалентно уравненію:

$$\left(b + \frac{c}{x}\right)\frac{1}{x} = -a.$$

Если коэффиціентъ a стремится къ нулю, то значенія буквы x измѣняются, причемъ произведеніе:

$$\left(b + \frac{c}{x}\right)\frac{1}{x}$$

стремится къ нулю.

Но для того, чтобы произведеніе двухъ сомножителей стремилось къ нулю, *необходимо*, чтобы одинъ изъ сомножителей стремился къ нулю, и *достаточно*, чтобы, при этомъ, другой сомножитель оставался конечнымъ; слѣдовательно, для удовлетворенія предѣльному уравненію, должны положить:

$$lim\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ или } lim\left(b + \frac{c}{x}\right) = 0.$$

Это дастъ: или

$$x = \infty,$$

и тогда $b + \frac{c}{x}$ стремится къ $lim\,(b)$ и остается, слѣдовательно, конечнымъ; или:

$$x = lim\left(-\frac{c}{b}\right),$$

и множитель $\frac{1}{x}$, стремящійся къ $lim\left(-\frac{b}{c}\right)$, остается конечнымъ.

Итакъ, одинъ изъ корней стремится къ $lim\left(-\frac{c}{b}\right)$, а модуль другаго безпредѣльно возрастаетъ.

Примѣръ. Къ какимъ предѣламъ стремятся корни уравненія:

$$(a^2 - b^2)x^2 - (2a^2 + 3ab - b^2)x + (a^2 + 3ab + 2b^2) = 0,$$

когда a стремится къ b?

Коэффиціентъ при x^2 стремится къ нулю. Слѣдовательно, модуль одного изъ корней неопредѣленно возрастаетъ, а другой стремится къ значенію, принимаемому дробью

$$\frac{a^2+3ab+2b^2}{2a^2+3ab-b^2}$$

при $a=b$, т.-е. стремится къ $\frac{3}{2}$.

Можно легко повѣрить эти результаты, ибо, въ общемъ случаѣ, корни предложеннаго уравненія суть:

$$x_1=\frac{a+b}{a-b},\ x_2=\frac{a+2b}{a+b}.$$

411. **2°**. Положимъ теперь, что *a и b совмѣстно стремятся къ нулю, но c не стремится къ нулю.*

Обѣ формулы принимаютъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$. Для раскрытія неопредѣленностей представляемъ корни въ видѣ:

$$x_1=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},\ x_2=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Видимъ, что, при совмѣстномъ стремленіи a и b къ нулю, оба корня принимаютъ форму $\frac{m}{0}$, т.-е. оба корня суть безконечности.

Уравненіе приводитъ къ тѣмъ же результатамъ, ибо, будучи написано въ видѣ:

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a,$$

дастъ:

$$lim\left(\frac{1}{x}\right)=0,\text{ отсюда } x=\infty;\ lim\left(b+\frac{c}{x}\right)=0,\text{ отсюда } x=lim\left(-\frac{c}{b}\right)=\infty.$$

Итакъ, *когда a и b совмѣстно стремятся къ нулю, тогда модули обоихъ корней безпредѣльно возрастаютъ.*

Примѣръ. Къ какимъ предѣламъ стремятся корни уравненія:

$$(a+b)^2x^2-(a^2-ab-2b^2)x+(2a^2-3ab+b^2)=0,$$

когда a стремится къ $(-b)$? Если a стремится къ $(-b)$, то коэффиціенты:

$$(a+b)^2 \text{ и } (a^2-ab-2b^2)$$

совмѣстно стремятся къ нулю, между тѣмъ какъ коэффиціентъ

$$(2a^2-3ab+b^2)$$

стремится къ $6b^2$; слѣдовательно, оба корня суть безконечности.

Этотъ результатъ легко повѣряется, ибо, въ общемъ случаѣ, корни предложеннаго уравненія суть:

$$x_1 = \frac{a-b}{a+b},\ x_2 = \frac{2a-b}{a+b}.$$

412. 3°. Наконецъ, предположимъ, что всѣ *коэффиціенты* a, b, c *совмѣстно стремятся къ нулю.*

Формулы приводятъ насъ къ истинной неопредѣленности; и въ самомъ дѣлѣ, уравненіе, принимающее форму:

$$0 \,.\, x^2 + 0 \,.\, x + 0 = 0,$$

удовлетворяется при всякомъ значеніи буквы x; оно есть тождество.

§ V. Свойства трехчлена второй степени.

413. Опредѣленіе трехчлена второй степени. Трехчленомъ второй степени называется полиномъ формы:

$$ax^2 + bx + c,$$

состоящій изъ трехъ членовъ, въ которомъ a, b, c суть числа положительныя или отрицательныя, независимыя отъ x. Буква x означаетъ число, способное принимать всевозможныя значенія. При измѣненіи значеній буквы x значеніе трехчлена измѣняется и переходитъ черезъ различныя состоянія величины. Во многихъ вопросахъ весьма важно опредѣлить только знакъ того значенія, которое принимаетъ трехчленъ при назначенномъ значеніи буквы x. Этимъ вопросомъ мы здѣсь и займемся. Напомнимъ, что *корнями* трехчлена называются такія значенія буквы x, вещественныя или комплексныя (мнимыя), которыя обращаютъ трехчленъ въ нуль. Назвавъ эти корни буквами x_1 и x_2, мы можемъ придать трехчлену форму:

$$a(x - x_1)(x - x_2).$$

Нашъ вопросъ рѣшается при помощи слѣдующихъ трехъ теоремъ:

414. Теорема I. *Если корни трехчлена $ax^2 + bx + c$ суть числа вещественныя, неравныя, то для всякаго значенія буквы x, заключеннаго между корнями, трехчленъ принимаетъ значеніе, знакъ котораго противоположенъ знаку a. Для всякаго же значенія буквы x, лежащаго внѣ корней, трехчленъ принимаетъ значеніе, знакъ котораго одинаковъ со знакомъ a.*

Напишемъ трехчленъ въ видѣ:

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

и назовемъ меньшій изъ корней буквою x_1, такъ что $x_1 < x_2$. Возьмемъ какое ни есть значеніе α буквы x, лежащее внутри корней, т.-е. удовлетворяющее неравенству:

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

Неравенство это говоритъ, что числа $(\alpha - x_1)$ и $(\alpha - x_2)$ суть числа противоположныхъ знаковъ.

Трехчленъ принимаетъ значеніе:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = a(\alpha - x_1)(\alpha - x_2),$$

знакъ котораго противоположенъ знаку a, ибо произведеніе

$$(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)$$

есть число отрицательное. Возьмемъ теперь значеніе β, лежащее внѣ корней, т.-е. удовлетворяющее или неравенству:

$$\beta > x_2 > x_1,$$

или же неравенству:

$$\beta < x_1 < x_2.$$

И въ томъ, и въ другомъ случаяхъ видимъ, что знаки разностей $\beta - x_1$ и $\beta - x_2$ одинаковы.

Трехчленъ принимаетъ значеніе

$$a\beta^2 + b\beta + c = a(\beta - x_1)(\beta - x_2),$$

знакъ котораго одинаковъ со знакомъ a, ибо произведеніе

$$(\beta - x_1)(\beta - x_2)$$

есть число положительное.

Примѣры. 1°. Возьмемъ трехчленъ $3x^2 + 5x + \frac{4}{3}$.

Корни этого трехчлена суть $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{4}{3}$. Для всѣхъ значеній буквы x, лежащихъ между $-\infty$ и $-\frac{4}{3}$, и между $-\frac{1}{3}$ и $+\infty$, трехчленъ принимаетъ значенія положительныя. Для всѣхъ значеній буквы x, лежащихъ между

$-\frac{4}{3}$ и $-\frac{1}{3}$, трехчленъ принимаетъ значенія отрицательныя. При значеніяхъ же буквы x, равныхъ $-\frac{4}{3}$ и $-\frac{1}{3}$, трехчленъ обращается въ нуль.

2°. Разсмотримъ трехчленъ: $-x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$. Корни этого трехчлена суть: -3 и $\frac{1}{2}$.

Для всѣхъ значеній x, заключенныхъ между $-\infty$ и -3 и между $\frac{1}{2}$ и $+\infty$, трехчленъ принимаетъ значенія отрицательныя.

Для всѣхъ значеній буквы x, лежащихъ между -3 и $\frac{1}{2}$, трехчленъ принимаетъ значенія положительныя. Для значеній же буквы x, равныхъ -3 и $\frac{1}{2}$, трехчленъ обращается въ нуль.

415. Теорема II. *Если корни трехчлена ax^2+bx+c суть числа вещественныя, равныя, то при всякомъ вещественномъ значеніи буквы x, отличномъ отъ корня трехчлена, трехчленъ принимаетъ значеніе, знакъ котораго одинаковъ со знакомъ a.*

Въ этомъ случаѣ трехчленъ можетъ быть написанъ (**395**) въ формѣ:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Форма эта говоритъ, что при всякомъ x, отличномъ отъ $-\frac{b}{2a}$, трехчленъ принимаетъ значеніе, знакъ котораго одинаковъ со знакомъ a, ибо, при всякомъ вещественномъ x, отличномъ отъ $-\frac{b}{2a}$, *квадратъ*: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ принимаетъ значеніе положительное.

416. Теорема III. *Если корни трехчлена ax^2+bx+c суть числа комплексныя* (мнимыя), *то трехчленъ при всякомъ вещественномъ x, не обращаясь въ нуль, принимаетъ значенія, знакъ которыхъ одинаковъ со знакомъ a.*

Мы видѣли (**396**), что въ этомъ случаѣ трехчленъ представляетъ произведеніе числа a на сумму квадратовъ двухъ вещественныхъ чиселъ, изъ которыхъ одинъ никогда не равенъ нулю. Такъ какъ сумма эта всегда положительная, то знакъ произведенія всегда одинаковъ со знакомъ a.

417. *Примѣры.* **1°**. Корни трехчлена $-x^2+6x-9$ вещественные и равные 3; трехчленъ, при всякомъ x, за исключеніемъ 3, принимаетъ значенія отрицательныя.

2°. Трехчленъ x^2-3x+7, имѣя комплексные корни, принимаетъ, при всякомъ вещественномъ x, значенія положительныя.

* **418. Наибольшее и наименьшее значеніе трехчлена.** Разсмотримъ трехчленъ второй степени:

$$ax^2+bx+c$$

и опредѣлимъ тѣ границы, между которыми лежатъ всѣ значенія, принимаемыя трехчленомъ при измѣненіи значеній буквы x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для рѣшенія этого вопроса опредѣлимъ, какое значеніе Ω мы можемъ назначить для трехчлена при томъ условіи, чтобы значеніе x, соотвѣтствующее этому значенію Ω, было вещественнымъ. Для этой цѣли напишемъ уравненіе:

$$ax^2+bx+c=\Omega$$

и, рѣшивъ его относительно x, получимъ:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+4a\Omega}}{2a}. \tag{1}$$

Результатъ этотъ говоритъ, что, для вещественности x, необходимо и достаточно, чтобы назначенное значеніе Ω удовлетворяло условію:

$$b^2-4ac+4a\Omega\geqslant 0. \tag{2}$$

Различимъ два случая:

1°. $a<o$. Предъидущее условіе дастъ:

$$\Omega\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Оно говоритъ, что *если въ трехчленъ* ax^2+bx+c *коэффиціентъ* a *есть число отрицательное, то границы, между которыми лежатъ всѣ значенія, принимаемыя трехчленомъ для всевозможныхъ вещественныхъ значеній буквы* x, *суть* $-\infty$ *и* $\frac{4ac-b^2}{4a}$, *причемъ число* $\frac{4ac-b^2}{4a}$ *представляетъ наибольшее изъ всѣхъ значеній, которыя способенъ принимать трехчленъ. Значеніе* x, *соотвѣтствующее этому наибольшему значенію, равно, какъ показываетъ формула* (1), *числу* $-\frac{b}{2a}$.

2°. $a>o$. Условіе (2) дастъ:

$$\Omega\geqslant\frac{4ac-b}{4a}.$$

Этотъ результатъ говоритъ, что *если въ трехчленъ* ax^2+bx+c *коэффиціентъ* a *есть число положительное, то границы, между которыми лежатъ всѣ значенія, принимаемыя трехчленомъ для всевозможныхъ вещественныхъ значеній буквы* x, *суть* $\frac{4ac-b^2}{4a}$ *и* $+\infty$, *причемъ число* $\frac{4ac-b^2}{4a}$ *представляетъ наименьшее изъ всѣхъ значеній, которыя способенъ принимать трехчленъ. Значеніе* x, *соотвѣтствующее этому наименьшему значенію, равно, какъ показываетъ формула* (1), *числу* $-\frac{b}{2a}$.

*** 419. Задача.** *Представить данное число* $2b$, *положительное или отрицательное, суммою такихъ двухъ слагаемыхъ, произведеніе которыхъ было бы наибольшее.*

Обозначивъ буквами x и y искомыя слагаемыя, получимъ, по условію,

$$x+y=2b.$$

Выраженіе, наибольшее значеніе котораго ищется, равно xy. Исключивъ изъ этого выраженія, при помощи предъидущаго уравненія, букву y, приведемъ выраженіе къ формѣ:

$$x(2b-x)=-x^2+2bx,$$

представляющей трехчленъ второй степени, который, дѣйствительно, имѣетъ, при $x=b$, наибольшее значеніе, ибо коэффиціентъ при x^2 отрицательный; соотвѣтствующее значеніе y будетъ равно также b.

Итакъ, *произведеніе* xy *двухъ чиселъ* x *и* y, *сумма которыхъ постоянна и равна* $2b$, *будетъ наибольшимъ тогда и только тогда, когда сомножители* x *и* y *будутъ равны между собою и равны слѣдовательно* b, *причемъ само наибольшее значеніе будетъ равно* b^2.

*** 420.** Предъидущая задача рѣшаетъ, напримѣръ, слѣдующіе вопросы:

1°. *Между всѣми прямоугольниками одного и того же периметра* $2p$ *опредѣлить тотъ, площадь котораго наибольшая.*

Сумма основанія и высоты постоянна и равна p; отсюда слѣдуетъ, что площадь, измѣряемая ихъ произведеніемъ, будетъ наибольшая тогда, когда высота и основанія равны между собою, и искомый прямоугольникъ есть квадратъ, сторона котораго равна $\frac{1}{2}\,p$.

2°. *Между всѣми треугольниками одного и того же периметра* $2p$ *и одного и того же основанія* a *опредѣлить тотъ, площадь котораго наибольшая.*

Площадь треугольника, стороны котораго суть a, x и y, равна

$$\Omega = \sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}.$$

Она достигаетъ наибольшей величины вмѣстѣ съ

$$\Omega^2 = p(p-a)(p-x)(p-y).$$

Такъ какъ множители p и $(p-a)$ суть постоянныя и положительныя числа, то Ω^2 достигаетъ наибольшей величины вмѣстѣ съ произведеніемъ: $(p-x)(p-y)$ двухъ множителей, сумма которыхъ, равная $2p-(x+y)=2p-(2p-a)=a$, постоянна, а потому это произведеніе будетъ наибольшимъ тогда, когда $p-x=p-y$, или когда $x=y$, т.-е. когда треугольникъ будетъ равнобедренный.

* § VI. Рѣшеніе неравенствъ второй степени.

421. Неравенства второй степени. Неравенство съ однимъ неизвѣстнымъ называется *неравенствомъ второй степени,* если оно можетъ быть приведено къ одной изъ слѣдующихъ двухъ формъ:

$$Ax^2+Bx+C>0, \quad Ax^2+Bx+C<0,$$

гдѣ A, B, C суть заданныя числа, положительныя или отрицательныя, независимыя отъ x.

Рѣшить неравенство значитъ опредѣлить границы, между которыми лежатъ тѣ значенія буквы x, которыя удовлетворяютъ неравенству.

Замѣтимъ, что неравенство второе, перемѣною знака у всѣхъ его членовъ **(153)**, принимаетъ первую форму.

Для того, чтобы рѣшить неравенство

$$Ax^2+Bx+C>0,$$

находимъ корни: x_1 и x_2 трехчлена Ax^2+Bx+C.

Могутъ встрѣтиться три случая:

1°. Корни x_1 и x_2 суть числа вещественныя, неравныя. Если A есть число положительное, то неравенству **(410)** удовлетворяютъ только тѣ значенія буквы x, которыя лежатъ внѣ чиселъ x_1 и x_2, ибо тогда лѣвая часть неравенства принимаетъ значенія, одинаковыя по знаку съ числомъ A, т.-е. положительныя, что и требуется.

Если же A есть число отрицательное, то неравенству (**410**) удовлетворяютъ только значенія x, лежащія внутри корней, ибо тогда трехчленъ принимаетъ значенія, противоположныя, по знаку, числу A, т.-е. положительныя, что и требуется.

2°. Корни x_1 и x_2 суть числа вещественныя, равныя. Если A положительное, то неравенство удовлетворяется при всякомъ вещественномъ x_1, за исключеніемъ x_1, ибо тогда трехчленъ (**411**) принимаетъ значенія, одинаковыя, по знаку, съ A, т.-е. положительныя, что и требуется.

Если же A отрицательное, то неравенство невозможно.

3°. Корни x_1 и x_2 суть числа мнимыя (комплексныя). Если A есть число положительное, то неравенство удовлетворено при всякомъ вещественномъ x. Если же A представляетъ число отрицательное, то неравенство невозможно.

Примѣры. 1°. Рѣшить неравенство: $3x^2+5x+\frac{4}{3}<0$, или, что то же, неравенство: $-3x^2-5x-\frac{4}{3}>0$. Корни трехчлена $-3x^2-5x-\frac{4}{3}$ суть $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{4}{3}$.

Неравенство удовлетворено при всякомъ x, удовлетворяющемъ неравенствамъ:

$$-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{3}.$$

Неравенство же: $3x^2+5x+\frac{4}{3}>0$ удовлетворяется при всякомъ x, удовлетворяющемъ и неравенствамъ: $-\infty\leqslant x<-\frac{4}{3}$ и неравенствамъ:

$$-\frac{1}{3}<x\leqslant+\infty.$$

При другихъ же значеніяхъ буквы x неравенство не удовлетворяется.

2°. Дано неравенство: $-x^2+6x-9<0$, или, что то же, $x^2-6x+9>0$. Корни трехчлена суть числа вещественныя, равныя 3. Неравенство удовлетворено при всякомъ x, за исключеніемъ $x=3$.

3°. Дано неравенство: $x^2-3x+7>0$. Корни трехчлена суть числа мнимыя. Неравенство удовлетворено при всякомъ x. Неравенство же: $-x^2+3x-7>0$ невозможно.

4°. Рѣшить неравенство:

$$\frac{x^2+x-6}{2a+1}>x+6(2a-1).$$

Перенеся члены правой части этого неравенства въ лѣвую часть и приведя ихъ къ одному знаменателю, получимъ:

$$\frac{x^2-2ax-24a^2}{2a+1}>0.$$

Умноживъ лѣвую часть этого неравенства на положительное число $(2a+1)^2$ получимъ неравенство:

$$(x^2-2ax-24a^2)(2a+1)>0,$$

равносильное данному.

Разсмотримъ два случая:

Случай 1. Число $(2a+1)>0$, т.-е. $a>-\frac{1}{2}$; въ этомъ случаѣ предъидущее неравенство эквивалентно неравенству:

$$x^2-2ax-24a^2>0.$$

Корни трехчлена, помѣщеннаго въ лѣвой части, суть:

$$x_1=-4a,\quad x_2=6a.$$

Если a, большее $-\frac{1}{2}$, есть число положительное, т.-е. заключено между 0 и ∞, то $6a$ представляетъ большій корень, и наше неравенство удовлетворено значеніями буквы x, удовлетворяющими неравенствамъ: $x<-4a$ и $x>6a$. Если же a есть число отрицательное, т.-е. заключено между $-\frac{1}{2}$ и 0, то большій корень есть $-4a$, и наше неравенство удовлетворено значеніями буквы x, удовлетворяющими неравенствамъ: $x<6a$ и $x>-4a$.

Случай 2. Число $2a+1<0$, т.-е. $a<-\frac{1}{2}$. Неравенство наше эквивалентно неравенству:

$$-x^2+2ax+24a^2>0.$$

Оно удовлетворяется значеніями буквы x, лежащими внутри корней трехчлена, равныхъ $6a$ и $-4a$. Въ этомъ случаѣ a отрицательное; слѣдовательно, $-4a$ представляетъ большій корень, и искомыя значенія буквы x удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$6a<x<-4a.$$

5°. Рѣшить неравенство:

$$3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2x+1}.$$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя къ одному знаменателю получимъ;

$$\frac{6x^2-2x-1}{(x-1)(2x+1)}>0.$$

Умноживъ лѣвую часть этого неравенства на положительное число: $(x-1)^2(2x+1)^2$, получимъ равносильное данному неравенство:

$$(6x^2-2x-1)(x-1)(2x+1)>0.$$

Разложивъ лѣвую часть этого неравенства на *линейныхъ* сомножителей:

$$12\left[x-\left(-\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right)\right]\left(x-\frac{\sqrt{7}+1}{6}\right)(x-1)\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]>0,$$

увидимъ, что она уничтожается при слѣдующихъ, и только при слѣдующихъ, значеніяхъ буквы x:

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{7}-1}{6},\ \frac{\sqrt{7}+1}{6},\ 1, \tag{g}$$

расположенныхъ въ возрастающемъ порядкѣ ихъ величины, и эти значенія не удовлетворяютъ неравенству.

Предъидущее неравенство эквивалентно, очевидно, слѣдующему:

$$\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[x-\left(-\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right)\right]\left(x-\frac{\sqrt{7}+1}{6}\right)(x-1)>0. \tag{α}$$

Разсмотримъ по очереди значенія буквы x, удовлетворяющія неравенствамъ:

$$-\infty \leqslant x < -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < x < -\frac{\sqrt{7}-1}{6},\ -\frac{\sqrt{7}-1}{6} < x < \frac{\sqrt{7}+1}{6},$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{6} < x < 1,\ 1 < x \leqslant \infty,$$

т.-е., въ сущности, разсмотримъ всѣ значенія буквы x, за исключеніемъ чиселъ (g), и посмотримъ, какія изъ нихъ удовлетворяютъ неравенству (α)?

Значенія буквы x, лежащія въ промежуткѣ отъ $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$, обращаютъ каждаго изъ линейныхъ сомножителей, фигурирующихъ въ лѣвой части неравенства (α), въ отрицательное число, и такъ какъ число сомножителей четное, то эти значенія обращаютъ все произведеніе въ положительное число и, слѣдовательно, удовлетворяютъ неравенству. Значенія буквы x, лежащія во второмъ промежуткѣ, т.-е. между $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{\sqrt{7}-1}{6}$, обращаютъ перваго сомножителя въ положительное число, а остальныхъ въ отрицательныя числа, и, слѣдовательно, не удовлетворяютъ неравенству.

Значенія буквы x, лежащія въ третьемъ промежуткѣ, т.-е между

$$-\frac{\sqrt{7}-1}{6} \text{ и } \frac{\sqrt{7}+1}{6},$$

обращаютъ первыхъ двухъ сомножителей въ положительныя числа, а послѣднихъ двухъ — въ отрицательныя, и, слѣдовательно, удовлетворяютъ неравенству.

Значенія буквы x, лежащія въ четвертомъ промежуткѣ, т.-е. между $\frac{\sqrt{7}+1}{6}$ и 1, обращаютъ первыхъ трехъ сомножителей въ положительныя числа, а послѣдняго — въ отрицательное, и, слѣдовательно, не удовлетворяютъ неравенству.

И наконецъ, значенія буквы x, лежащія въ послѣднемъ промежуткѣ, т.-е. между 1 и $+\infty$, обращая каждаго изъ сомножителей въ положительное число, удовлетворяютъ неравенству.

Итакъ, значенія буквы x, удовлетворяющія предложенному неравенству, таковы:

$$-\infty \leqslant x < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{7}-1}{6} < x < \frac{\sqrt{7}+1}{6}, \quad 1 < x \leqslant \infty.$$

6°. Рѣшить неравенство:

$$\frac{2x-25}{2x^2+4x-6} + \frac{2x+11}{2x^2-2} > \frac{1}{x+3}.$$

Перенеся всѣ члены въ лѣвую часть и приведя къ одному знаменателю, найдемъ:

$$\frac{x^2-3x+5}{(x+3)(x-1)(x+1)} > 0.$$

Умноживъ лѣвую часть на положительное число: $(x+3)^2(x-1)^2(x+1)^2$, получимъ неравенство:

$$(x^2-3x+5)(x+3)(x-1)(x+1) > 0,$$

эквивалентное данному.

Трехчленъ (x^2-3x+5), фигурирующій въ лѣвой части этого неравенства, не имѣя корней, представляетъ изъ себя число положительное при всякомъ значеніи буквы x, а потому предъидущее неравенство равносильно слѣдующему:

$$[x-(-3)][x-(-1)](x-1) > 0.$$

Разсмотрѣвъ четыре промежутка:

$$-\infty \leqslant x < -3, \quad -3 < x < -1, \quad -1 < x < 1, \quad 1 < x \leqslant \infty,$$

увидимъ, подобно предъидущему, что нашему неравенству удовлетворяютъ слѣдующія значенія буквы x:

$$-3 < x < -1, \quad 1 < x \leqslant \infty.$$

422. Приложеніе первое. *Изслѣдовать корни уравненія*

$$(2\lambda+1)x^2 - 2(\lambda+1)x - (\lambda-2) = 0,$$

когда λ *измѣняется отъ* $-\infty$ *до* $+\infty$.

Разсмотримъ сперва, при какихъ значеніяхъ буквы λ корни предложеннаго уравненія суть или корни вещественные, или равные, или мнимые.

Корни нашего уравненія даются формулою:

$$x=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{3\lambda^2-\lambda-1}}{2\lambda+1}. \tag{1}$$

Они вещественны только при такихъ значеніяхъ буквы λ, которыя удовлетворяютъ условію:

$$3\lambda^2-\lambda-1\geqslant 0, \tag{2}$$

при чемъ знакъ $=$ соотвѣтствуетъ равнымъ корнямъ предложеннаго уравненія.

Такъ какъ корни:

$$\lambda_1=-\frac{\sqrt{13}-1}{6},\quad \lambda_2=\frac{\sqrt{13}+1}{6}$$

трехчлена, помѣщеннаго въ лѣвой части неравенства (2), суть вещественные, при чемъ коэффиціентъ 3 при λ^2 положительный, то условіе (2) удовлетворяется при слѣдующихъ значеніяхъ буквы λ:

$$-\infty\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1,\quad \lambda_2\leqslant\lambda\leqslant\infty. \tag{3}$$

При значеніяхъ же λ, удовлетворяющихъ неравенствамъ:

$$\lambda_1<\lambda<\lambda_2,$$

условіе (2) не удовлетворено, и, слѣдовательно, предложенное уравненіе имѣетъ, для этихъ значеній, мнимые корни.

Изслѣдуемъ теперь знаки корней для значеній λ, удовлетворяющихъ условіямъ (3). Для рѣшенія вопроса обратимъ вниманіе на значенія буквы λ, обращающія коэффиціенты предложеннаго уравненія въ нули. Значенія эти суть:

$$\lambda_3=-\frac{1}{2},\quad \lambda_4=-1,\quad \lambda_5=2.$$

Разсмотримъ слѣдующіе шесть промежутковъ:

$$-\infty\ \ldots\ \underset{\lambda_4}{-1}\ \ldots\ \underset{\lambda_3}{-\frac{1}{2}}\ \ldots\ \underset{\lambda_1}{-\frac{\sqrt{13}-1}{6}}\ \ldots\ \underset{\lambda_2}{+\frac{\sqrt{13}+1}{6}}\ \ldots\ \underset{\lambda_5}{+2}\ \ldots\ +\infty.$$

Найдемъ сперва значенія корней предложеннаго уравненія для $\lambda = \pm\infty$. Для этой цѣли раздѣлимъ числителя и знаменателя формулы (1) на λ и въ полученной такимъ образомъ формулѣ:

$$x = \frac{1+\frac{1}{\lambda} \pm \sqrt{3-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}}}{2+\frac{1}{\lambda}}$$

сдѣлаемъ $\lambda = \pm\infty$, что дастъ:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Перейдемъ теперь къ первому промежутку, т.-е. къ значеніямъ λ, удовлетворяющимъ неравенствамъ:

$$-\infty < \lambda < -1.$$

Для этихъ значеній произведеніе корней предложеннаго уравненія: $-\frac{\lambda-2}{2\lambda+1}$ и ихъ сумма: $\frac{2(\lambda+1)}{2\lambda+1}$ представляютъ соотвѣтственно числа отрицательное и положительное; слѣдовательно, *знаки корней различны, при чемъ модуль положительнаго корня болѣе модуля корня отрицательнаго.* Для $\lambda = -1$ сумма корней равна нулю, слѣдовательно знаки корней различны, а модули равны, при чемъ самые корни суть:

$$-\sqrt{3} \text{ и } +\sqrt{3}.$$

Для втораго промежутка, т.-е. для значеній λ:

$$-1 < \lambda < -\frac{1}{2},$$

произведеніе и сумма корней отрицательны, слѣдовательно *знаки корней различны, при чемъ модуль отрицательнаго корня болѣе модуля корня положительнаго.*

При $\lambda = -\frac{1}{2}$ коэффиціентъ при x^2 обращается въ 0; слѣдовательно, *одинъ изъ корней обращается въ* $\mp\infty$, *а другой равняется* $\frac{5}{2}$.

Для третьяго промежутка:

$$-\frac{1}{2} < \lambda < -\frac{\sqrt{13}-1}{6}$$

произведеніе и сумма корней положительны, слѣдовательно, *корни положительны*.

Для $\lambda = -\frac{\sqrt{13}-1}{6}$ оба корня равны между собою и суть:

$$x_1 = x_2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Для четвертаго промежутка:

$$-\frac{\sqrt{13}-1}{6} < \lambda < \frac{\sqrt{13}+1}{6}$$

корни уравненія суть корни мнимые.

Для $\lambda = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$ корни равны и суть:

$$x_1 = x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Для пятаго промежутка:

$$\frac{\sqrt{13}+1}{6} < \lambda < 2$$

произведеніе и сумма корней положительны, слѣдовательно *оба корня положительны*.

Для $\lambda = 2$ имѣемъ:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{6}{5}.$$

И наконецъ, для шестаго промежутка:

$$2 < \lambda < \infty$$

произведеніе корней отрицательно, а сумма положительна; слѣдовательно, *знаки корней противоположны, при чемъ модуль положительнаго корня болѣе модуля корня отрицательнаго.*

423. Приложеніе второе.

1°. *Каковы суть необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы данное число l лежало внѣ корней уравненія $ax^2+bx+c=0$, предполагаемыхъ вещественными?*

Найдемъ сперва *необходимыя* условія. Если оба корня суть или болѣе l или менѣе l, то l лежитъ внѣ корней уравненія, и, слѣдовательно, знакъ числа al^2+bl+c, равнаго $a(l-x_1)(l-x_2)$, одинаковъ со знакомъ коэффиціента a; слѣдовательно, число $a(al^2+bl+c)$ есть число положительное, неравное нулю.

Итакъ, одно изъ *необходимыхъ* условій таково:

$$a(al^2+bl+c)>0.$$

Если каждый изъ корней *болье* l, т.-е. если

$$x_1>l,\ x_2>l,\ \text{то}\ x_1+x_2>2l,$$

откуда

$$l<\frac{x_1+x_2}{2},\ \text{или } \textit{необходимо}, \text{ чтобы } l<-\frac{b}{2a}.$$

Если же каждый изъ корней *менье* l, то, наоборотъ, *необходимо*, чтобы

$$l>-\frac{b}{2a}.$$

Условія эти и *достаточны*. И въ самомъ дѣлѣ, если число

$$a(al^2+bl+c)=a^2(l-x_1)(l-x_2)$$

есть число положительное, то число l есть или число, большее каждаго изъ корней, или число, меньшее каждаго изъ корней. Въ первомъ случаѣ число l болѣе полусуммы корней, во второмъ — менѣе этой полусуммы.

2°. *Каково необходимое и достаточное условіе для того, чтобы данное число l лежало внутри корней квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$, въ случаь вещественности этихъ корней?*

Необходимо и достаточно, чтобы

$$a(al^2+bl+c)<0.$$

Примьры. 1°. *Опредьлить λ такимъ образомъ, чтобы корни уравненія:*

$$x(x-1)(\lambda^2-3\lambda+1)+(2\lambda-3)=0$$

были вещественны и чтобы число $l=1$ лежало внутри этихъ корней. Число λ называется *параметромъ*. Для вещественности корней число λ должно удовлетворять условію:

$$(\lambda^2-3\lambda+1)^2-4(2\lambda-3)(\lambda^2-3\lambda+1)\geqslant 0,$$

которое можетъ написаться такимъ образомъ:

$$(\lambda^2-3\lambda+1)(\lambda^2-11\lambda+13)\geqslant 0.$$

Легко видѣть (**421**), что условіе это удовлетворяется при слѣдующихъ значеніяхъ буквы λ:

$$(i)\ -\infty \leqslant \lambda \leqslant \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \ \frac{11-\sqrt{69}}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ \ \frac{11+\sqrt{69}}{2} \leqslant \lambda \leqslant +\infty.$$

Для того, чтобы число $l=1$ лежало внутри корней, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\lambda^2-3\lambda+1)(2\lambda-3)<0.$$

Легко видѣть, что неравенство это удовлетворяется при слѣдующихъ значеніяхъ буквы λ:

$$(k)\qquad -\infty \leqslant \lambda < \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \ \frac{3}{2} < \lambda < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Результаты эти, въ соединеніи съ результатами (i), говорятъ намъ, что искомыя значенія буквы λ должны быть заключены въ слѣдующихъ границахъ:

$$-\infty \leqslant \lambda < \frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \ \frac{3}{2} < \lambda < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

2°. *Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы корни уравненія:*

$$(\lambda+1)x^2-3\lambda x+4\lambda=0$$

были вещественны и чтобы число (-1) *было менѣе каждаго изъ корней.*

Условіе вещественности корней таково:

$$-7\lambda^2-16\lambda \geqslant 0.$$

Оно даетъ слѣдующія границы для l:

$$(i)\qquad -\frac{16}{7} \leqslant \lambda \leqslant 0.$$

Для того, чтобы число (-1) было менѣе каждаго изъ корней, необходимы и достаточны слѣдующія неравенства:

$$(\lambda+1)(\lambda+1+3\lambda+4\lambda)>0 \text{ и } \frac{3\lambda}{2(\lambda+1)}>-1.$$

Неравенства эти даютъ слѣдующія границы для λ:

первое . . . . $-\infty \leqslant \lambda < -1,\ -\frac{1}{8} < \lambda \leqslant +\infty,$

второе . . . . $-\infty \leqslant \lambda < -1,\ -\frac{2}{5} < \lambda \leqslant +\infty.$

Результаты эти, вмѣстѣ съ результатами (i), даютъ слѣдующія искомыя границы для числа λ:

$$-\frac{16}{7}<\lambda<-1,\quad -\frac{1}{8}<\lambda<0.$$

424. Приложеніе третье. Разсмотримъ несократимую раціональную дробь $\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ и найдемъ наибольшее и наименьшее изъ значеній, принимаемыхъ дробью при измѣненіи значеній буквы x отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для рѣшенія этого вопроса опредѣлимъ, какія изъ значеній способна принимать эта дробь при указанныхъ измѣненіяхъ значеній буквы x.

Съ этою цѣлію назначимъ произвольное значеніе Ω и опредѣлимъ, существуютъ ли вещественныя значенія буквы x, удовлетворяющія уравненію:

$$\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}=\Omega. \tag{g}$$

Опредѣливъ границы, между которыми должны лежать тѣ значенія буквы Ω, для которыхъ написанное уравненіе имѣетъ вещественные корни, мы и найдемъ наибольшее и наименьшее значенія, которыя можно присвоить буквѣ Ω, т.-е. найдемъ искомыя наибольшее и наименьшее значенія предложенной раціональной дроби.

Уравненіе (g), вслѣдствіе несократимости данной дроби, будетъ равносильно слѣдующему уравненію:

$$x^2(a-m\Omega)+x(b-n\Omega)+(c-p\Omega)=0. \tag{A}$$

Примѣры. 1°. Дана дробь $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-8}$. Уравненіе ($A$) будетъ таково:

$$x^2(1-\Omega)-x(3-2\Omega)+(2+8\Omega)=0.$$

Рѣшивъ уравненіе это относительно x, найдемъ:

$$x=\frac{3-2\Omega\pm\sqrt{36\Omega^2-36\Omega+1}}{2(1-\Omega)}.$$

Условіе вещественности x:

$$36\Omega^2-36\Omega+1\geqslant 0$$

опредѣляетъ слѣдующія границы для Ω:

$$(i)\qquad -\infty\leqslant\Omega\leqslant\frac{3-2\sqrt{2}}{2},\quad \frac{3+2\sqrt{2}}{6}\leqslant\Omega\leqslant\infty. \qquad (k)$$

Результаты эти говорятъ, что 1) наша дробь не способна принимать значеній, заключенныхъ между $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$ и $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$; 2) она измѣняется въ двухъ областяхъ: въ границахъ (i) первой области она не имѣемъ наименьшаго значенія, но имѣетъ наибольшее, равное $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$; въ границахъ (k) второй области она не имѣетъ наибольшаго значенія, но имѣетъ наименьшее, равное $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$.

Интересно прослѣдить за ходомъ измѣненій, которыя претерпѣваетъ наша дробь въ то время, какъ x измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, переходя черезъ всѣ значенія. Для этой цѣли: 1) найдемъ тѣ значенія, которыя принимаетъ дробь при $x=0$, $-\infty$, $+\infty$; 2) опредѣлимъ границы измѣненій дроби и соотвѣтствующія значенія буквы x; 3) опредѣлимъ далѣе тѣ значенія буквы x, при которыхъ дробь обращается въ нуль; значенія эти называются *нулями* дроби и суть корни ея числителя; 4) опредѣлимъ еще тѣ значенія буквы x, при которыхъ дробь обращается въ безконечность; значенія эти называются *полюсами* дроби и суть корни ея знаменателя. Расположивъ всѣ вышепоименованныя значенія буквы x въ возрастающемъ порядкѣ и написавъ рядомъ съ ними соотвѣтствующія значенія дроби, получимъ таблицу, которая и укажетъ намъ ходъ измѣненій дроби.

Въ данномъ примѣрѣ нули дроби суть 1 и 2; ея полюсы суть -2 и 4; при $x=\pm\infty$ дробь обращается въ 1; при $x=0$ она принимаетъ значеніе, равное $-\frac{1}{4}$; сама дробь можетъ написаться такимъ образомъ:

$$\Omega=\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-4)}.$$

Вотъ таблица хода измѣненій дроби:

x		Ω	
$-\infty$	....	1	
-2	....	$\pm\infty$	
0	....	$-\frac{1}{4}$	
1	....	0	
$10-6\sqrt{2}$	....	$\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$	(max)
2	....	0	
4	....	$\mp\infty$	
$10+6\sqrt{2}$	....	$\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$	(min)
$+\infty$	....	$+1$.	

Таблица эта говоритъ:

При измѣненіи x отъ $-\infty$ до -2 дробь, оставаясь положительною, возрастаетъ отъ 1 до $+\infty$. При $x=-2$ она, перемѣнивъ знакъ, ибо множитель $(x+2)$ становится положительнымъ, переходитъ скачкомъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$ или, какъ говорятъ, претерпѣваетъ разрывъ, и затѣмъ, при возрастаніи x отъ -2 до 0, отъ 0 до 1 и отъ 1 до $10-6\sqrt{2}$, возрастаетъ отъ $-\infty$, т.-е. отъ границы, до $-\frac{1}{4}$, отъ $-\frac{1}{4}$ до 0, и отъ 0 до границы $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$.

Далѣе, при возрастаніи x отъ $10-6\sqrt{2}$ до 2 и отъ 2 до 4, дробь убываетъ отъ границы $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$ до 0 и отъ 0 до $-\infty$; при $x=4$ дробь, перемѣнивъ знакъ, ибо множитель $(x-4)$ становится положительнымъ, переходитъ скачкомъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$, т.-е. претерпѣваетъ разрывъ; при измѣненіи x отъ 4 до $10+6\sqrt{2}$ дробь убываетъ отъ границы $(+\infty)$ до границы $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$, и, наконецъ, при измѣненіи x отъ $10+6\sqrt{2}$ до $+\infty$, дробь медленно возрастаетъ.

Видимъ, слѣдовательно, что наша дробь проходитъ два раза область, имѣющую границами (i); что же касается до второй области, имѣющей границами (k), то дробь проходитъ одинъ разъ всю область и еще часть этой области, имѣющую границами $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$ и $+1$, при чемъ, при вторичномъ прохожденіи, не достигаетъ границы $+1$, хотя къ ней неопредѣленно приближается.

Замѣтимъ, что наша дробь, проходя первую область первый разъ и приближаясь къ границѣ $\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$, *возрастаетъ* и, достигнувъ этой границы съ тѣмъ, чтобы начать описывать вторично первую область въ обратномъ направленіи, *убываетъ*; такое значеніе дроби, достигнувъ котораго дробь перестаетъ возрастать, чтобы начать убывать, называется *maximum*'омъ дроби. Далѣе, дробь, проходя вторую область въ первый разъ и приближаясь къ границѣ $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$, *убываетъ* и, достигнувъ этой границы съ тѣмъ, чтобы начать описывать вторично вторую область въ обратномъ направленіи, *возрастаетъ*; такое значеніе дроби, достигнувъ котораго дробь перестаетъ убывать, чтобы начать возрастать, называется *minimum*'омъ дроби.

2°. Дана дробь $\frac{3-2x}{x^2-2x+7}$. Уравненіе (A) будетъ таково:

$$\Omega x^2-2(\Omega-1)x+(7\Omega-3)=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x=\frac{\Omega-1\pm\sqrt{-6\Omega^2+\Omega+1}}{\Omega}.$$

Условіе вещественности:

$$-6\Omega^2+\Omega+1\geqslant 0$$

опредѣлить слѣдующія границы для Ω:

$$-\frac{1}{3} \leqslant \Omega \leqslant \frac{1}{2}.$$

Результатъ этотъ говоритъ, что въ данномъ случаѣ наша дробь измѣняется только въ одной области.

Причина этого заключается въ томъ, что наша дробь не имѣетъ двухъ полюсовъ, ибо ея знаменатель $x^2 - 2x + 7$ не имѣетъ корней, и это отсутствіе полюсовъ не позволяетъ нашей дроби дѣлать скачковъ изъ одной области въ другую.

Границы этой области: $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ суть соотвѣтственно наименьшее и наибольшее изъ значеній, которыя способна принимать дробь.

Ходъ измѣненій дроби будетъ слѣдующій:

x	Ω	
$-\infty$	0	
-1	$\frac{1}{2}$	(max)
0	$\frac{3}{7}$	
$\frac{3}{2}$	0	
4	$-\frac{1}{3}$	(min)
$+\infty$	$0.$	

3°. Дана дробь:

$$\frac{x^2-6x+3}{x^2+4x+4} = \frac{x^2-6x+3}{(x+2)^2} = \frac{(x-3-\sqrt{6})(x-3+\sqrt{6})}{(x+2)^2}.$$

Уравненіе (A) будетъ слѣдующее:

$$x^2(1-\Omega) - 2x(3+2\Omega) + (3-4\Omega) = 0,$$

Корни его суть:

$$x = \frac{3+2\Omega \pm \sqrt{19\Omega+6}}{1-\Omega}.$$

Условіе вещественности:

$$19\Omega + 6 \geqslant 0$$

даетъ

$$-\frac{6}{19} \leqslant \Omega \leqslant \infty.$$

Здѣсь также, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, дробь измѣняется въ одной области, но только одна изъ границъ равна безконечности, такъ что наименьшее значеніе дроби равно $-\frac{1}{19}$, а наибольшее равно $+\infty$.

Замѣтимъ, что хотя наша дробь и имѣетъ полюсъ, равный -2, но знаменатель дроби представляетъ квадратъ, такъ что при переходѣ x черезъ

(-2), дробь хотя и обращается въ ∞, но не дѣлаетъ скачка изъ $+\infty$ въ $-\infty$, или обратно. Составимъ таблицу хода измѣненій дроби:

x		y	
$-\infty$	....	1	
-2	....	$+\infty$	(max)
0	....	$\frac{3}{4}$	
$3-\sqrt{6}$	....	0	
$\frac{9}{5}$	....	$-\frac{6}{19}$	(min)
$3+\sqrt{6}$	....	0	
$+\infty$	....	$1.$	

Замѣтимъ, что если символъ $+\infty$ разсматривать, какъ число, то въ данномъ примѣрѣ $+\infty$ является *maximum*'омъ дроби.

4°. Разсмотримъ такую дробь: $\frac{2x^2+3x-5}{2x^2+3x-7}$. Уравненіе ($A$) будетъ:

$$x^2(2-2\Omega)+x(3-3\Omega)-(5-7\Omega)=0.$$

Рѣшивъ его, найдемъ:

$$x=\frac{-3+3\Omega\pm\sqrt{65\Omega^2-114\Omega+49}}{4-4\Omega}.$$

Условіе вещественности:

$$65\Omega^2-114\Omega+49\geqslant 0$$

даетъ:

$$-\infty\leqslant\Omega\leqslant\frac{49}{65},\quad 1\leqslant\Omega\leqslant+\infty.$$

Замѣтимъ здѣсь слѣдующую особенность: граница $+1$ второй области, въ которой Ω способна измѣняться, не достигается нашею дробью, ибо соотвѣтствующее значеніе для $x=\pm\infty$. И въ самомъ дѣлѣ, подставляя значеніе 1 вмѣсто Ω въ выраженіе для x, найдемъ, что соотвѣтствующее этому значенію значеніе буквы x имѣетъ неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$. Для раскрытія этой неопредѣленности раздѣлимъ числителя и знаменателя выраженія для x на $\Omega-1$ и получимъ:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{\dfrac{65\left(\Omega-\frac{49}{65}\right)}{\Omega-1}}}{-4}.$$

При $\Omega = 1$ будемъ имѣть: $x = \pm\infty$. Повѣримъ этотъ результатъ. Напишемъ нашу дробь въ такомъ видѣ:

$$\frac{2x^2+3x-5}{2x^2+3x-7} = \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}.$$

Сдѣлавъ здѣсь $x = \pm\infty$, найдемъ, что соотвѣтствующее значеніе дроби равно 1.

Таблица хода измѣненій дроби будетъ слѣдующая:

x		Ω
$-\infty$	....	1
$\frac{-3-\sqrt{65}}{4}$	....	$\pm\infty$
$-\frac{10}{4}$	....	0
$-\frac{3}{4}$	....	$\frac{49}{65}$ (max)
0	....	$\frac{5}{7}$
1	....	0
$\frac{-3+\sqrt{65}}{4}$	....	$\mp\infty$
$+\infty$	....	$1.$

5°. Возьмемъ дробь $\frac{x^2-1}{2x+1}$. Уравненіе (A) будетъ таково:

$$x^2 - 2\Omega x - (1+\Omega) = 0.$$

Условіе вещественности:

$$\Omega^2 + \Omega + 1 \geqslant 0$$

показываетъ, что дробь Ω способна принимать всякое значеніе.

6°. *Разложить число q^2 на двухъ сомножителей, сумма которыхъ была бы наименьшая.*

Назовемъ этихъ сомножителей буквами x и y. Изъ всѣхъ значеній буквъ x и y, удовлетворяющихъ уравненію: $xy = q^2$, требуется выбрать такія, при которыхъ сумма $x+y$ имѣла бы наименьшее значеніе. Уравненіе даетъ $y = \frac{q^2}{x}$, и сумма преобразовывается въ слѣдующую:

$$x + \frac{q^2}{x} = \frac{x^2+q^2}{x}.$$

Уравненіе (A) для этой дроби будетъ таково:

$$x^2 - \Omega x + q^2 = 0.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x = \frac{\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4q^2}}{2}.$$

Условіе вещественности:

$$\Omega^2 - 4q^2 \geqslant 0$$

даетъ:

$$-\infty \leqslant \Omega \leqslant -2q, \quad 2q \leqslant \Omega \leqslant +\infty,$$

когда q положительное, и

$$-\infty \leqslant \Omega \leqslant 2q, \quad -2q \leqslant \Omega \leqslant +\infty,$$

когда q отрицательное.

Результаты эти говорятъ, что изъ всѣхъ положительныхъ значеній, принимаемыхъ дробью, наименьшее равно $\pm 2q$, и изъ всѣхъ отрицательныхъ значеній — наибольшее равно $\mp 2q$, при чемъ верхніе значки соотвѣтствуютъ положительному q, нижніе — отрицательному.

Соотвѣтствующія этимъ наименьшему и наибольшему значеніямъ, значенія буквы x суть:

$$x = +q, \quad x = -q, \quad \text{для} \quad q > 0,$$

и

$$x = -q, \quad x = +q, \quad \text{для} \quad q < 0,$$

при чемъ соотвѣтственныя значенія сомножителя y будутъ таковы:

$$y = +q, \quad y = -q, \quad \text{для} \quad q > 0;$$
$$y = -q, \quad y = +q \quad \text{для} \quad q < 0,$$

т.-е. наименьшему и наибольшему значеніямъ суммы $x + y$ отвѣчаютъ равные сомножители произведенія q^2.

Предыдущая задача позволяетъ рѣшить слѣдующій вопросъ: *Между всѣми треугольниками одной и той же площади s^2 опредѣлить тотъ, периметръ котораго наименьшій.* Легко видѣть, что это есть квадратъ, сторона котораго равна s.

425. Приложеніе четвертое. Рѣшимъ задачу, обратную задачѣ объ извлеченіи квадратнаго корня изъ числа A съ данною точностью.

Дано раціональное число $\frac{a}{b}$, квадратъ котораго не болѣе A. Положимъ, что это число представляетъ квадратный корень числа A съ точностью до $\frac{1}{x}$. Найти x.

Искомое x удовлетворяетъ слѣдующему уравненію:

$$\frac{E\sqrt{Ax^2}}{x} = \frac{a}{b}.$$

Уравненіе это равносильно слѣдующимъ двумъ неравенствамъ:

$$(1) \qquad \left(x \cdot \frac{a}{b}\right)^2 \leqslant Ax^2, \left(x \cdot \frac{a}{b} + 1\right)^2 > Ax^2$$

и уравненію:

$$(2) \qquad \frac{ax}{b} = u,$$

гдѣ u есть цѣлое и положительное число. Первое изъ неравенствъ (1) удовлетворяется по заданію; второе же, при помощи уравненія (2), перепишется такимъ образомъ:

$$(3) \qquad u^2\left(1 - A \cdot \frac{b^2}{a^2}\right) + 2u + 1 > 0.$$

Корни трехчлена, помѣщеннаго въ лѣвой части этого неравенства, суть вещественные и различныхъ знаковъ, ибо коэффиціентъ $\left(1 - A\frac{b^2}{a^2}\right)$ есть число отрицательное; отсюда слѣдуетъ, что неравенство (3) удовлетворено такими значеніями буквы u, которыя заключены между корнями:

$$u_1 = \frac{a(a - b\sqrt{A})}{b^2A - a^2}, \quad u_2 = \frac{a(a + b\sqrt{A})}{b^2A - a^2}.$$

Но u_1 есть число отрицательное, число же u должно быть положительнымъ и цѣлымъ; слѣдовательно, для u мы должны взять *цѣлыя* значенія, удовлетворяющія неравенствамъ:

$$(4) \qquad 0 < u < \frac{a(a + b\sqrt{A})}{b^2A - a^2}.$$

Соотвѣтствующія значенія для x опредѣлятся изъ уравненія (2).

Примѣры. 1°. *Данное приближенное значеніе* $\sqrt{10}$, *съ недостаткомъ, съ точностью до* $\frac{1}{x}$, *равно* 3. *Опредѣлить всѣ значенія буквы* x.

Неравенство (4) даетъ:

$$0 < u \leqslant 18,$$

откуда

$$u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.$$

Соотвѣтствующія значенія x опредѣлятся изъ (2) и будутъ таковы:

$$x=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3},\ 3,\ \frac{10}{3},\ \frac{11}{3},\ 4,\ \frac{13}{3},\ \frac{14}{3},\ 5,\ \frac{16}{3},\ \frac{17}{3},\ 6.$$

Число 3 представляетъ, слѣдовательно, квадратный корень 10, съ недостаткомъ, съ слѣдующими точностями:

$$\frac{1}{x}=3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{3}{10},\frac{3}{11},\frac{1}{4},\frac{3}{13},\frac{3}{14},\frac{1}{5},\frac{3}{16},\frac{3}{17},\frac{1}{6},$$

т.-е.

$$3=\frac{E\sqrt{10\cdot\frac{1}{3^2}}}{\frac{1}{3}}=\frac{E\sqrt{10\cdot\frac{2^2}{3^2}}}{\frac{2}{3}}=\frac{E\sqrt{10\cdot 1^2}}{1}=\ldots=\frac{E\sqrt{10\cdot 6^2}}{6}.$$

2°. *Данное приближенное значеніе $\sqrt{10}$, съ недостаткомъ, съ точностью до $\frac{1}{x}$, равно $\frac{22}{7}$. Опредѣлить всѣ значенія буквы x.*

Неравенство (4) даетъ:

$$0<u\leqslant 161;$$

а потому,

$$x=1\cdot\frac{7}{22},\ 2\cdot\frac{7}{22},\ 3\cdot\frac{7}{22},\ \ldots,\ 22\cdot\frac{7}{22},\ldots,\ 160\cdot\frac{7}{22},\ 161\cdot\frac{7}{22}.$$

Число $\frac{22}{7}$ представляетъ, слѣдовательно, корень квадратный изъ 10, съ недостаткомъ, съ слѣдующими точностями:

$$\frac{1}{x}=\frac{22}{7}:1,\ \frac{22}{7}:2,\ \frac{22}{7}:3,\ldots,\ \frac{22}{7}:22,\ \ldots,\ \frac{22}{7}:160,\ \frac{22}{7}:161,$$

такъ что:

$$\frac{22}{7}=\frac{E\sqrt{10\cdot 1^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{1\cdot\frac{7}{22}}=\frac{E\sqrt{10\cdot 2^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{2\cdot\frac{7}{22}}=\ldots=$$

$$=\frac{E\sqrt{10\cdot 22^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{22\cdot\frac{7}{22}}=\ldots=\frac{E\sqrt{10\cdot 161^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{161\cdot\frac{7}{22}}.$$

Все это легко повѣряется непосредственно; напримѣръ:

$$\frac{E\sqrt{10\cdot 47^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{47\cdot\frac{7}{22}}=\frac{47}{47\cdot\frac{7}{22}}=\frac{22}{7};$$

но уже, напримѣръ,

$$\frac{E\sqrt{10\cdot 162^2\cdot\frac{7^2}{22^2}}}{162\cdot\frac{7}{22}}=\frac{163}{162\cdot\frac{7}{22}}=\frac{163}{162}\cdot\frac{22}{7}\text{ не }=1\cdot\frac{22}{7}.$$

* § VII. Рѣшеніе нѣкоторыхъ ирраціональныхъ неравенствъ.

426. Дадимъ нѣсколько примѣровъ рѣшеній ирраціональныхъ неравенствъ.

Примѣры. **1°.** *Рѣшить неравенство:*

$$\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}}<a-1,$$

гдѣ a есть данное вещественное число.

Очевидно, что это неравенство можетъ рѣшаться только при томъ предположеніи, что радикалъ вещественный. Посмотримъ, при какихъ значеніяхъ буквы x онъ будетъ таковымъ. Для этой цѣли рѣшимъ неравенство:

$$(3x+a)(x-a)>0.$$

Неравенство это требуетъ, чтобы x лежало внѣ чиселъ: $-\frac{a}{3}$ и a. Если $a<0$, то границы для x суть:

$$-\infty\leqslant x<a\ \text{ и }\ -\frac{a}{3}<x\leqslant\infty;$$

если же $a>0$, то, наоборотъ,

$$-\infty\leqslant x<-\frac{a}{3}\ \text{ и }\ a<x\leqslant\infty.$$

Но, при $a<0$, правая часть неравенства, т.-е. $(a-1)$, отрицательна, между тѣмъ какъ лѣвая положительна; а потому невозможно удовлетворить неравенству.

Предположимъ, слѣдовательно, что $a>0$; должно еще, чтобы $a>1$, и тогда обѣ части неравенства суть положительныя числа, и мы получимъ эквивалентное неравенство, возвысивъ обѣ части даннаго неравенства въ квадратъ и сохранивъ смыслъ неравенства.

Возвышеніе это дастъ:

$$\frac{3x+a}{x-a}<(a-1)^2,$$

или

$$\frac{(3x+a)-(a-1)^2(x-a)}{x-a}<0.$$

Умноживъ обѣ части этого неравенства на $(x-a)^2$ и сдѣлавъ нѣкоторыя преобразованія, найдемъ:

$$(a^2-2a-2)(x-a)\left(x-\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a\right)>0. \qquad (i)$$

Изслѣдуемъ знаки множителя (a^2-2a-2). Онъ отрицателенъ для всѣхъ значеній a, лежащихъ между $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$, и положителенъ для всѣхъ значеній a, лежащихъ внѣ чиселъ: $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$; но a должно быть болѣе 1, слѣдовательно остается изслѣдовать только два случая:

Случай первый. a лежитъ между 1 и $1+\sqrt{3}$. Въ этомъ случаѣ множитель (a^2-2a-2) отрицательный, и, слѣдовательно, для удовлетворенія неравенству (i), значенія буквы x должны заключаться между числами:

$$a \text{ и } \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a.$$

Посмотримъ, которое изъ этихъ чиселъ есть большее число?

Для отвѣта на вопросъ замѣтимъ, что трехчленъ a^2-2a+2, имѣющій комплексные корни, представляетъ, при всякомъ a, положительное число; что же касается до знаменателя, то онъ, въ разсматриваемомъ случаѣ, отрицателенъ, а потому

$$a>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a.$$

Итакъ,

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a<x<a.$$

Но, для вещественности радикала, входящаго въ неравенство, необходимо еще, чтобы число x лежало въ слѣдующихъ границахъ:

$$-\infty\leqslant x<-\frac{a}{3}, \text{ или } a<x\leqslant\infty.$$

Слѣдовательно, остается сравнить по величинѣ числа:

$$-\frac{a}{3} \text{ и } \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a;$$

предположимъ на удачу, что

$$-\frac{a}{3}>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a; \qquad (h)$$

умноживъ обѣ части этого неравенства на отрицательное число $\frac{a^2-2a-2}{a}$ и измѣнивъ смыслъ неравенства, получимъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, равносильное неравенство:

$$0<(2a-2)^2;$$

но это неравенство справедливо, слѣдовательно и произвольно написанное неравенство (h) также справедливо. Итакъ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a<x<-\frac{a}{3}.$$

Случай второй. a болѣе $1+\sqrt{3}$. Въ этомъ случаѣ множитель (a^2-2a-2) положителенъ, а потому значенія буквы x, удовлетворяющія неравенству, должны лежать внѣ чиселъ:

$$a \text{ и } \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a;$$

для сравненія этихъ чиселъ по величинѣ напишемъ произвольно:

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a<a;$$

въ разсматриваемомъ случаѣ это неравенство равносильно такому:

$$a^2-2a+2<a^2-2a-2, \quad \text{или} \quad 4<0,$$

что несправедливо, а потому

$$\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a>a,$$

и, слѣдовательно, число x должно лежать въ границахъ

$$-\infty\leqslant x<a \quad \text{и} \quad \infty\geqslant x>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a.$$

Комбинируя эти результаты съ условіями вещественности радикала, найдемъ слѣдующія границы:

$$-\infty\leqslant x<-\frac{a}{3}, \ \infty\geqslant x>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a.$$

Вотъ *результатъ изслѣдованія*:

$$a<1 \ . \ . \ . \text{ неравенство невозможно.}$$

$$1<a<1+\sqrt{3} \ . \ . \ . \frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a<x<-\frac{a}{3}.$$

$$a>1+\sqrt{3} \ . \ . \ . \ x<-\frac{a}{3} \text{ и } x>\frac{a^2-2a+2}{a^2-2a-2}a.$$

Примѣръ 2°. Рѣшить неравенство

$$\frac{\sqrt{3x-2a}}{x+a}>\frac{\sqrt{3x-a}}{x+5a},$$

въ которомъ a представляетъ вещественное число.

Для вещественности радикаловъ необходимо одновременно:

$$x > \frac{2a}{3}, \quad x > \frac{a}{3}.$$

Если $a < 0$, то необходимо и достаточно, чтобы

$$x > \frac{a}{3}.$$

Если же $a > 0$, то необходимо и достаточно, чтобы

$$x > \frac{2a}{3}.$$

Случай первый: $a < 0$. Необходимо опредѣлить знаки обѣихъ частей неравенства; для этой цѣли сдѣлаемъ различныя предположенія относительно знаковъ количествъ: $(x+a)$ и $(x+5a)$.

1°. Если $(x+a) < 0$, т.-е. $x < -a$, то подавно: $x+5a < 0$, и тогда обѣ части даннаго неравенства отрицательны; возвышаемъ въ квадратъ обѣ части неравенства, измѣняя ихъ знаки; отбрасываемъ положительнаго знаменателя и дѣлимъ обѣ части неравенства на отрицательное число a; все это даетъ:

$$23x^2 + 54ax - 49a^2 > 0.$$

Для того, чтобы это неравенство удовлетворялось, необходимо и достаточно, чтобы значенія буквы x лежали внѣ корней трехчлена, которые вещественны, неравны и имѣютъ различные знаки.

Корни эти суть:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a, \quad x_2 = +\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a,$$

и очевидно, что $x_2 < x_1$, ибо $a < 0$.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ новымъ условіямъ:

$$x < \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a, \quad x > -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a.$$

Но мы знаемъ уже, что x должно быть болѣе $\frac{a}{3}$ и менѣе $(-a)$, т.-е. должно быть заключено между $\frac{a}{3}$ и $(-a)$.

Располагая эти значенія и значенія x_1 и x_2 въ возрастающемъ порядкѣ [для этой цѣли подставляемъ въ трехчленъ, корни котораго суть x_1 и x_2, вмѣсто буквы x числа $(-a)$ и $\frac{a}{3}$ (**423**)], получимъ рядъ:

$$-\infty \;\ldots\; \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \;\ldots\; \frac{a}{3} \;\ldots\; -a \;\ldots\; -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \;\ldots\; +\infty.$$

Видимъ, что *невозможно* удовлетворить неравенству, если

$$a<0 \text{ и } x<-a.$$

2°. Если $(x+5a)<0$ и $(x+a)>0$, т.-е. если $-a<x<-5a$, то $(x+a$ и $(x+5a)$ имѣютъ различные знаки, и такъ какъ $x>\frac{a}{3}$, то *неравенство удовлетворяется.*

3°. Если $x+5a>0$, то подавно $x+a>0$, и наше неравенство будетъ равносильно такому:

$$23x^2+54ax-49a^2<0,$$

откуда

$$\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a<x<-\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a;$$

но, кромѣ того, $x>-5a$ и $x>\frac{a}{3}$, т.-е. $x>-5a$. Образовавъ возрастающій рядъ:

$$-\infty \ldots \frac{\sqrt{1857}-27}{23}a \ldots \frac{a}{3} \ldots -a \ldots -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \ldots -5a \ldots +\infty,$$

увидимъ, что неравенство *невозможно.*

Итакъ, *когда a есть отрицательное число, то необходимо, для удовлетворенія неравенству, взять x въ слѣдующихъ границахъ:*

$$-a<x<-5a.$$

Случай второй: $a>0$. Для вещественности радикаловъ необходимо и достаточно, чтобы $x>\frac{2a}{3}$. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, количества $(x+a)$ и $(x+5a$ суть количества положительныя. Неравенство наше равносильно слѣдующему:

$$23x^2+54ax-49a^2>0.$$

Число x должно быть взято внѣ корней. Написавъ возрастающій рядъ:

$$-\infty \ldots -\frac{\sqrt{1856}+27}{23}a \ldots \frac{2a}{3} \ldots \frac{\sqrt{1856}-27}{23}a \ldots +\infty,$$

увидимъ, что, *при положительномъ a, необходимо и достаточно*:

$$x>\frac{\sqrt{1856}-27}{23}a.$$

Упражненія.

1. $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}$; $x=\pm\frac{a}{2}\left(\frac{a^2-4}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. $\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$; $x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$.

3. $\sqrt{(1+x)^2-ax}+\sqrt{(1-x)^2+ax}=x$; $x=\pm 2\sqrt{(1-a)\left(1-\frac{a}{3}\right)}$,

$x=0$; последнее рѣшеніе не удовлетворяетъ уравненію.

4. $\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3}=\frac{20-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}$; $x=5,\ -6,\ \frac{-1\pm\sqrt{377}}{2}$.

Послѣдніе два корня удовлетворяютъ уравненію только тогда, когда у радикала возьмемъ знакъ (—).

5. $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30$; $x=3,\ x=-\frac{9}{2}$,

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{329}}{4}.$$

6. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$; $x=\pm\frac{1}{2}$.

7. $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}$; полагая $z=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$,

найдемъ: $z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ x=\frac{z^m-1}{z^m+1}$.

8. $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2=1+\frac{cx}{ab}$; $x=a\left(1\pm 2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

9. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=0$;

$$x=\frac{-(a+b+c)\pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}.$$

10. Образовать суммы: квадратовъ, кубовъ, четвертыхъ степеней и обратныхъ четвертымъ степенямъ корней уравненія $ax^2+bx+c=0$.

$$x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2},\ x_1^3+x_2^3=\frac{3abc-b^3}{a^3},$$

$$x_1^4+x_2^4=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4},\ \frac{1}{x_1^4}+\frac{1}{x_2^4}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^3}.$$

11. Доказать, что уравненіе

$$(b^2-4ac)x^2+2(2ac'+2ca'-bc')x+(b'^2-4a'c')=0$$

имѣетъ всегда вещественные корни, если (b^2-4ac) отрицательно. Достаточно разобрать случай, когда и $b'^2-4a'c'$ отрицательно. Положивъ:

$$b^2-4ac=-\alpha^2,\quad b'^2-4a'c'=-\alpha_1^2,$$

покажемъ, что количество, помѣщенное подъ знакомъ радикала, представляетъ произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма двухъ квадратовъ.

12. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы уравненіе:

$$(\lambda-1)x^2-2(\lambda+1)x+(\lambda-2)=0$$

имѣло равные корни; повѣрить результаты.

13. Образовать уравненіе второй степени съ раціональными коэффиціентами, имѣющее корнемъ:

или $\sqrt{3}-5$, или $\dfrac{3}{4}+\sqrt{2}$, или $\dfrac{5}{3-\sqrt{2}}$, или $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

14. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы корни уравненія:

$$2x^2+(2\lambda-1)x+(\lambda-2)=0$$

повѣряли равенство: $3x_1-4x_2=11$.

15. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ корней уравненія $(\lambda^2-5\lambda+3)x^2+(2\lambda-1)x+2=0$ былъ вдвое болѣе другаго.

16. Дано уравненіе: $7x^2-4x+5=0$; вычислить, не рѣшая уравненія, значеніе выраженія: $4x_1^3-6x_1x_2^2+4x_2^3-6x_1^2x_2$.

17. Дано уравненіе: $3x^2+17x-14=0$; вычислить, не рѣшая уравненія, значеніе выраженія: $\dfrac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2}{4x_1x_2^2+4x_1^2x_2}$.

18. Дано уравненіе: $5x^2-13x+11=0$; вычислить произведеніе значеній, принимаемыхъ выраженіемъ $\dfrac{3x+1}{2x-3}$, въ которомъ буква x замѣняется послѣдовательно каждымъ изъ корней предложеннаго уравненія.

19. Опредѣлить λ и μ такимъ образомъ, чтобы уравненія:

$$(2\lambda+1)x^2-(3\lambda-1)x+2=0,\quad (\mu+2)x^2-(2\mu+1)x-1=0$$

имѣли общіе корни.

20. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы два уравненія:

$$3x^2-(\lambda-1)x+\lambda+1=0,\quad 2x^2+(2\lambda-1)x+2\lambda+2=0$$

имѣли общій корень. Каковъ этотъ корень?

21. Какія значенія должно присвоить количествамъ p и q для того, чтобы корни уравненія $x^2+px+q=0$ были именно p и q?

22. Опредѣлить количество a такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ корней уравненія $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ былъ квадратомъ другаго.

23. Даны два уравненія: $x^2 - 5x + k = 0$, $x^2 - 7x + 2k = 0$. Требуется опредѣлить k такимъ образомъ, чтобы одинъ изъ корней втораго уравненія былъ въ два раза болѣе одного изъ корней перваго уравненія.

24. Разложить на линейныхъ сомножителей трехчлены:

$$8x^2 - 15x + 3,\quad 2 + 11x - 5x^2,\quad 4x^2 + 17,\quad 3x^2 - 4x + 8,\quad x^2 + x + 1.$$

25. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы трехчленъ

$$(\lambda + 3)x^2 + (\lambda + 1)x - (\lambda - 1)$$

былъ полнымъ квадратомъ.

26. Разложить на линейныхъ сомножителей трехчленъ

$$(a^2 - 4b^2)x^2 + 2(a^2 + 2b^2)x + a^4 - b^4.$$

27. Написать условіе, при которомъ выраженіе $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ есть квадратъ выраженія, линейнаго относительно x.

28. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы числа 2 и 3 лежали внутри корней квадратнаго уравненія: $3x^2 + (\lambda - 1)x + (3\lambda + 2) = 0$.

29. Опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы число 3 лежало между корнями уравненія: $(\lambda + 2)x^2 - 4\lambda x + (\lambda - 1) = 0$.

30. Какое значеніе должно присвоить буквѣ y въ уравненіи:

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0$$

для того, чтобы уравненіе это относительно x имѣло равные корни? Между какими границами должно измѣняться значеніе y для того, чтобы значенія x были вещественны?

31. Для какихъ значеній a уравненіе $x^2 - 2(a - 3)x + (a^2 - 1) = 0$ имѣетъ равные корни? Указать для каждаго изъ этихъ значеній знаки корней.

32. Показать, что уравненіе $\frac{a^2}{x - p} + \frac{b^2}{x - q} - 1 = 0$ имѣетъ вещественные корни, каковы бы ни были постоянныя a, b, p и q.

33. Изслѣдовать вполнѣ корни уравненій:

$$(3\lambda - 1)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda = 0,\quad (\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda + 1)(2x - 1) = 0,$$

когда λ измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$.

34. Рѣшить отдѣльно неравенства:

$$\frac{5x}{4} - \frac{6x - 1}{8} < \frac{4x + 1}{12} - \frac{1}{6},\quad \frac{x^2 - 1}{a - 1} - \frac{3x}{5} < \frac{x^2}{2a - 2},$$

$$\frac{x^2}{a^2 - 2a - 3} + \frac{x - a}{a + 1} < \frac{2x + a}{a - 3},\quad x(x^4 - 7x^2 + 12) > 0,\quad \frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0,$$

$x-1-x^2<0$, $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0$, $\frac{x^2+10x+16}{x-1}>10$, $\frac{x^2-12x+35}{(x+3)(x^2+5x+4)}>0$,

$\frac{5x^2-2x+3}{(x-1)(x^2-x+1)}<0$, $\frac{2ax+3b}{5bx-4a}<4$, $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-7x+12}<\frac{1}{x^2-4x+3}$.

35. Какое значеніе должно присвоить n для того, чтобы трехчленъ x^2+2x+n, при всякомъ вещественномъ x, былъ болѣе 10.

36. Рѣшая нѣкоторую задачу, пришли къ уравненію:

$$(a+2b)x^2-4abx+(a-b)b^2=0,$$

гдѣ a и b количества положительныя, при чемъ x должно быть заключено между 0 и $3b$. Изслѣдовать задачу.

37. Найти наибольшія и наименьшія значенія слѣдующихъ дробей:

$$\frac{2x^2-10x+9}{12x-14},\ \frac{x^2+4x-2}{x^2-4x+4},\ x-3+\frac{4}{x-5},\ \frac{15x-24}{9x^2-15x+20},\ \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$\frac{x^2-2x-3}{3x-x^2-2},\ \frac{(x-3)(x+5)}{x^2},\ \frac{2x^2-24x+48}{x^2-10x-25},\ \frac{2x^2-2x+4}{3x^2-4x+5},\ \frac{x^2-1}{5x^2+4x},$$

$$\frac{x^2-10x+21}{x^2-6x+5},\ \frac{2x^2+2}{x^2-3x+2},\ \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9}.$$

38. Опредѣлить p и p' такимъ образомъ, чтобы дробь $\frac{x^2+px-3}{x^2+p'x+5}$ достигала maximum'a или minimum'a при $x=2$ и $x=3$.

39. Найти соотношеніе, которое должно существовать между a и a_1 для того, чтобы maximum и minimum дроби $\frac{x^2+2ax+1}{x^2+2a_1x+1}$ были равны по величинѣ, но противоположны по знаку.

40. Рѣшить неравенство:

$$\frac{\sqrt{a^4+2x^3}}{3a-x}<3a+x.$$

ГЛАВА ВТОРАЯ.

* Комплексныя числа.

---

§ I. Дѣйствія надъ комплексными числами.

427. Цѣль введенія комплексныхъ чиселъ въ алгебру. Многіе изъ вопросовъ алгебры не могутъ имѣть отвѣтовъ въ видѣ чиселъ раціональныхъ или ирраціональныхъ, называемыхъ числами *вещественными* или *дѣйствительными*.

Къ подобнаго рода вопросамъ принадлежитъ, напримѣръ, вопросъ о рѣшеніи квадратнаго уравненія $ax^2+bx+c=0$ въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты его a, b, c удовлетворяютъ неравенству: $b^2-4ac<0$, и, слѣдовательно, когда уравненіе не имѣетъ вещественныхъ корней.

Вопросы этого рода мы можемъ разсматривать, или какъ вопросы невозможные, или какъ вопросы, требующіе отъ насъ новыхъ представленій о числѣ.

Руководствуясь тѣмъ духомъ обобщенія, который долженъ господствовать въ алгебрѣ, мы введемъ въ алгебру числа особой природы, называемыя *комплексными*, сдѣлавъ рядъ новыхъ соглашеній и опредѣленій, не противорѣчащихъ, однако, ни одному изъ принятыхъ уже опредѣленій и соглашеній.

428. Опредѣленія и соглашенія. Введемъ особаго рода символъ, который, покамѣсть, будемъ обозначать такимъ образомъ:

$$(a\,,b),$$

гдѣ a и b суть какія ни есть вещественныя числа, и будемъ называть этотъ символъ *комплекснымъ* числомъ. Относительно этого символа сдѣлаемъ слѣдующія соглашенія:

1°. Два символа (a, b) и (c, d) будемъ называть *равными* тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

2°. Символъ $(a, 0)$ будемъ считать равнымъ вещественному числу a.

3°. Символъ $(0, a)$ будемъ обозначать черезъ ai, гдѣ i есть, покамѣсть, не число, а значекъ, помѣщенный подлѣ числа a.

4°. Символы $(0, 1)$ и $(0, 0)$ должны означаться, слѣдовательно, такимъ образомъ: $1i$ и $0i$; мы будемъ считать ихъ, если понадобится, соотвѣтственно равными i и 0.

429. Сумма комплексныхъ чиселъ. *Суммою комплексныхъ чиселъ:* (a, b) *и* (c, d) *называется комплексное число* $(a+c, b+d)$. Для означенія суммы комплексныхъ чиселъ будемъ употреблять знакъ $+$ и будемъ, слѣдовательно, писать:

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d). \tag{1}$$

Сдѣлавъ въ этомъ условномъ равенствѣ: $b=0$ и $c=0$, найдемъ:

$$(a, 0)+(0, d)=(a, d).$$

Принявъ во вниманіе соглашенія 2° и 3°, получимъ:

$$a+di=(a, d).$$

Перемѣнивъ здѣсь букву d на букву b, найдемъ:

$$a+bi=(a, b).$$

Результатъ этотъ говоритъ намъ, что символъ (a, b), при помощи тѣхъ соглашеній, которыя мы сдѣлали относительно него, и при помощи понятія о суммѣ, можетъ быть изображенъ суммою $a+bi$.

Наши соглашенія и равенство (1) могутъ быть представлены теперь такимъ образомъ:

1°. Два комплексныхъ числа: $a+bi$ и $c+di$ мы будемъ считать равными тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$, такъ что равенство:

$$a+bi=c+di$$

влечетъ за собою равенства: $a=c$, $b=d$, и обратно.

2°. Комплексное число $a+0i$ равно вещественному числу a. Это соглашеніе говоритъ, что вещественное число можетъ быть разсматриваемое, какъ число комплексное.

3°. Комплексное число $0+ai$ будетъ обозначаться символомъ ai.

4°. Комплексныя числа $0+1i$ и $0+0i$ будутъ обозначаться черезъ $1i$ и $0i$ или просто черезъ i и 0, при чемъ мы будемъ, если понадобится, писать:

$$0+1i=0+i.$$

5°. Равенство (1) можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i. \tag{2}$$

Всѣ эти соглашенія не противорѣчатъ ни одному изъ прежнихъ понятій, ибо если символъ $a+bi$ представляетъ изъ себя биномъ, въ которомъ значекъ i есть число, а bi есть произведеніе, то всѣ наши соглашенія дѣйствительно имѣютъ мѣсто.

430. Разность комплексныхъ чиселъ. *Разностью комплексныхъ чиселъ $a+bi$ и $c+di$ называется такое комплексное число $x+yi$, которое, будучи сложено съ числомъ $c+di$, дастъ число $a+bi$.* Разность означается знакомъ (—).

Итакъ, по опредѣленію, имѣемъ:

$$(x+yi)+(c+di)=a+bi,$$

отсюда

$$(x+c)+(y+d)i=a+bi.$$

Равенство это, на основаніи соглашенія 1°, распадается на два равенства:

$$x+c=a,\ y+d=b,$$

которыя даютъ:

$$x=a-c,\quad y=b-d,$$

такъ что

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i. \tag{3}$$

Равенство это не противорѣчитъ понятію о разности биномовъ.

431. Замѣчаніе 1. Разсмотримъ вмѣстѣ съ комплекснымъ числомъ $c+di$ комплексное число c_1+d_1i, гдѣ $c_1=-c$, $d_1=-d$; тогда, на основаніи равенствъ (2) и (3), найдемъ:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i=(a+c_1)+(b+d_1)i=$$
$$=(a+bi)+(c_1+d_1i)$$

и

$$(a+bi)-(c_1+d_1i)=(a+bi)+(c+di).$$

Послѣднія равенства говорятъ, что числа $c+di$ и c_1+d_1i могутъ быть разсматриваемы, какъ числа съ противоположными знаками, такъ что мы можемъ писать:

$$c+di=-(c_1+d_1i) \text{ и } (c_1+d_1i)=-(c+di).$$

432. Замѣчаніе 2. Установивъ понятіе о разности комплексныхъ чиселъ, мы можемъ ввести комплексное число $(a-bi)$, разсматривая его слѣдующимъ образомъ:

$$a-bi=(a+0i)-(0+bi)=a+(-b)i.$$

Комплексныя числа $a+bi$ и $a-bi$ называются *сопряженными*; ихъ *сумма*:

$$(a+bi)+(a-bi)=(a+bi)+[a+(-b)i]=2a+0i=2a$$

равна вещественному числу $2a$.

433. Произведеніе комплексныхъ чиселъ. *Произведеніемъ комплексныхъ чиселъ:*

$$a_1+b_1i,\ a_2+b_2i,\ .\ .\ .\ ,\ a_n+b_ni$$

называется комплексное число $x+yi$, которое получается такимъ образомъ: перемножаемъ комплексныя числа, какъ биномы, разсматривая знакъ i, какъ число; располагаемъ произведеніе по степенямъ i; въ полученномъ многочленѣ:

$$P_0+P_1i+P_2i^2+\ .\ .\ .\ +P_{n-1}i^{n-1}+P_ni^n$$

подставляемъ вмѣсто i^{4k+4} число 1, вмѣсто i^{4k+3} знакъ $-i$, вмѣсто i^{4k+2} число (-1) и вмѣсто i^{4k+1} знакъ i, такъ что многочленъ преобразуется въ слѣдующій:

$$P_0+P_1i-P_2-P_3i+P_4+P_5i-P_6-P_7i+\ .\ .\ .\ ;$$

пишемъ этотъ многочленъ въ видѣ:

$$(P_0 - P_2 + P_4 - P_6 + \ldots) + (P_1 - P_3 + P_5 - P_7 + \ldots)i$$

и принимаемъ числа:

$$P_0 - P_2 + P_4 - P_6 + \ldots$$
$$P_1 - P_3 + P_5 - P_7 + \ldots$$

за искомыя x и y.

Разсмотримъ, въ частности, два комплексныхъ числа:

$$a + bi \quad \text{и} \quad c + di.$$

Ихъ произведеніе будетъ таково:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 =$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

434. Слѣдствіе 1. То понятіе о произведеніи комплексныхъ чиселъ, которое мы дали, не противорѣчитъ понятію о произведеніи вещественныхъ чиселъ, при чемъ послѣднее заключается въ первомъ, какъ частный случай.

И въ самомъ дѣлѣ, предположивъ, что

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 0,$$

найдемъ:

$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i)(a_3 + 0i) \ldots (a_n + 0i) = a_1a_2a_3 \ldots a_n +$$
$$+ 0 \cdot i - 0 - 0 \cdot i + 0 + 0i - 0 - 0i + \ldots,$$

или

$$(a_1 + 0i)(a_2 + 0i) \ldots (a_n + 0i) = a_1a_2a_3 \ldots a_n + 0i = a_1a_2a_3 \ldots a_n;$$

но и лѣвая часть этого равенства также равна $a_1a_2a_3 \ldots a_n$.

435. Слѣдствіе 2. Если въ произведеніи:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

положимъ: $b = 0, \; c = 0, \; d = 1,$

то найдемъ:

$$(a + 0i) \cdot (0 + 1i) = 0 + ai,$$

или

$$a \cdot i = ai.$$

Результатъ этотъ, позволяющій разсматривать символъ ai, какъ произведеніе a на i въ нашемъ условномъ смыслѣ, уподобляетъ комплексное выраженіе $a + bi$ биному.

436. Слѣдствіе 3. Произведеніе комплексныхъ чиселъ не зависитъ отъ порядка перемноженій. И въ самомъ дѣлѣ,

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$(c + di)(a + bi) = (ca - db) + (da + cb)i,$$

т.-е. получили одинъ и тотъ же результатъ.

437. Слѣдствіе 4. *Цѣлою и положительною степенью даннаго комплекснаго числа называется произведеніе комплексныхъ чиселъ, равныхъ данному; число сомножителей называется показателемъ степени.* Степень обозначается такимъ образомъ: $(a + bi)^n$.

Изъ понятія о степени вытекаютъ слѣдующія равенства:

$$[(a + bi)^n]^p = [(a + bi)^p]^n = (a + bi)^{np},$$
$$(a + bi)^p \cdot (a + bi)^q = (a + bi)^{p+q}.$$

438. Слѣдствіе 5. Если условимся понимать подъ символомъ i^n степень $(0 + 1i)^n$, то, на основаніи понятія о произведеніи **(433)**, найдемъ:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -1,\ i^4 = +1,$$

а отсюда получимъ:

$$\left.\begin{aligned} i^{4p} = (i^4)^p = +1, \quad i^{4p+1} = i^{4p} \cdot i = i, \\ i^{4p+2} = i^{4p} \cdot i^2 = -1, \quad i^{4p+3} = i^{4p} \cdot i^3 = -i. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Примѣры. $i^{482} = -1$, ибо показатель 482 принадлежитъ формѣ $4p + 2$; $i^{83} = -i$, ибо показатель 83 принадлежитъ формѣ $4n + 3$.

439. Слѣдствіе 6. Произведеніе комплексныхъ чиселъ:

$$a_1 + b_1 i,\quad a_2 + b_2 i,\ .\ .\ .\ ,\ a_n + b_n i,$$

разсматриваемыхъ, какъ биномы, равно произведенію, опредѣленному въ **(433)**, если будутъ приняты равенства (4).

440. Слѣдствіе 7. *Произведеніе комплексныхъ чиселъ равно нулю тогда и только тогда, когда, по крайней мѣрѣ, одинъ изъ множителей равенъ нулю.* Дано произведеніе:

$$(a+bi)(c+di),$$

равное комплексному числу:

$$(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Если это выраженіе равно нулю, т.-е. равно комплексному числу $(0+0i)$, то необходимо, чтобы совмѣстно:

$$\begin{cases} ac-bd=0 \\ ad+bc=0. \end{cases}$$

Составивъ сумму квадратовъ лѣвыхъ частей этихъ равенствъ, получимъ:

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=0,$$

или

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0.$$

Это равенство требуетъ, чтобы по крайней мѣрѣ одинъ изъ сомножителей: a^2+b^2, c^2+d^2 былъ равенъ нулю; положимъ, что $a^2+b^2=0$, отсюда $a=0$, $b=0$, и, слѣдовательно,

$$a+bi=0.$$

Условіе это, очевидно, и достаточно.

441. Частное отъ дѣленія комплексныхъ чиселъ. *Частнымъ отъ дѣленія двухъ комплексныхъ чиселъ: $(a+bi)$ и $(c+di)$ называется комплексное число $(x+yi)$, которое, будучи умножено на дѣлителя, воспроизведетъ дѣлимое.*

Опредѣленіе это даетъ:

$$(x+yi)(c+di)=a+bi;$$

отсюда, на основаніи понятія о произведеніи, получимъ:

$$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi;$$

равенство это равносильно слѣдующимъ двумъ:

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Рѣшая эту систему уравненій относительно x и y, найдемъ:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Форма этихъ выраженій показываетъ, что значенія для x и y всегда возможны, ибо знаменатель $(c^2 + d^2)$ обращается въ нуль только тогда, когда $c = 0$ и $d = 0$, т.-е. когда комплексное число $(c + di)$ равно нулю. Искомое частное, слѣдовательно, существуетъ и имѣетъ форму:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i. \tag{3}$$

Примѣры. $\frac{1 - i}{1 + i} = -i,\quad \frac{2 - i}{3 + 2i} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$

442. Замѣчаніе. Частное (3) мы можемъ получить условно еще такимъ образомъ: умножимъ числителя и знаменателя дроби $\frac{a + bi}{c + di}$ на $(c - di)$ и найдемъ:

$$\frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i.$$

443. Квадратный корень комплекснаго числа.

Квадратнымъ корнемъ комплекснаго числа $(a + bi)$ *называется такое комплексное число* $(x + yi)$, *которое, будучи возвышено въ квадратъ, дастъ* $a + bi$. Покажемъ, что подобный корень существуетъ. Итакъ, пусть

$$(x + yi)^2 = a + bi,$$

или

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = a + bi.$$

Для того, чтобы равенство это имѣло мѣсто, необходимо и достаточно, чтобы совмѣстно:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b; \end{cases} \tag{[1]}$$

отсюда легко найдемъ:

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2,$$

и, слѣдовательно,

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad [2]$$

Первое изъ равенствъ [1] и равенство [2] даютъ намъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Мы предполагаемъ въ нашихъ разсужденіяхъ, что x и y вещественны; слѣдовательно, полагаемъ, что x^2+y^2 представляетъ количество положительное. Отсюда вытекаетъ, что радикалъ $\sqrt{a^2+b^2}$ долженъ быть взятъ со знакомъ $+$. Что касается до знаковъ при x и y, то, принимая во вниманіе, что произведеніе xy должно быть равно $\frac{b}{2}$, заключаемъ, что знаки x и y должны быть *одинаковы*, если b положительно, и *различны*, если b отрицательно. Двойные знаки при x и y показываютъ, что искомый корень имѣетъ два значенія, отличающіяся другъ отъ друга только знаками.

Итакъ,

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.\,i\right],\text{ если } b>0;$$

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,.\,i\right],\text{ если } b<0.$$

Примѣры. 1°. $\sqrt[4]{-1}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt{i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\,.\,i\right)$, ибо $a=0$, $b=1$.

2°. $\sqrt{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\pm\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$.

444. Замѣчаніе. Приложимъ предъидущія формулы къ представленію $\sqrt{A}$, гдѣ A есть отрицательное число, въ видѣ комплекснаго числа. Для этой цѣли положимъ въ предъидущихъ формулахъ: $a=A$, $b=0$ и получимъ:

$$\sqrt{A}=\sqrt{A+0\,.\,i}=\pm\left[\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2}}{2}}\,.\,i\right],$$

или

$$\sqrt{A}=\pm\left[\sqrt{\frac{A-A}{2}}+\sqrt{\frac{-A-A}{2}}\,i\right]=\pm\sqrt{-A}\,.\,i.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $A=-1$, найдемъ:

$$\sqrt{-1}=\pm\sqrt{1}\,.\,i=\pm 1i=\pm i.$$

Результатъ этотъ говоритъ намъ, что *знакъ i, вслѣдствіе нашихъ соглашеній, можетъ быть разсматриваемъ, какъ квадратный корень числа* -1.

Результаты эти въ высшей степени примѣчательны: они позволяютъ разсматривать *квадратные корни отрицательныхъ чиселъ, какъ числа особой природы, названныя нами комплексными.*

Итакъ, вводя комплексныя числа въ алгебру при извѣстныхъ соглашеніяхъ, не противорѣчащихъ понятію о числѣ вещественномъ, мы получили возможность обобщить вполнѣ представленіе о квадратномъ корнѣ.

445. Рѣшеніе квадратнаго уравненія. Разсмотримъ квадратное уравненіе:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

и постараемся найти, если возможно, такое комплексное число $y+zi$, гдѣ y и z суть вещественныя числа, которое представляло бы корень этого уравненія, т.-е. которое удовлетворяло бы условію:

$$a(y+zi)^2+b(y+zi)+c=0.$$

Условіе это, будучи переписано такимъ образомъ:

$$(ay^2-az^2+by+c)+(2ayz+bz)i=0, \qquad (2)$$

можетъ быть замѣнено равносильною ему системою:

$$\left\{\begin{array}{l} ay^2-az^2+by+c=0, \\ \quad (2ay+b)z \qquad =0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Система эта распадается на двѣ:

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{r} ay^2-az^2+by+c=0, \\ z=0; \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{r} ay^2-az^2+by+c=0, \\ 2ay+b=0 \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Система (4) равносильна слѣдующей:

$$\left\{ \begin{array}{r} ay^2+by+c=0, \\ z=0. \end{array} \right.$$

Она дастъ вещественное значеніе для z, равное 0; что же касается до y, то его значеніе будетъ вещественно только тогда, когда $b^2-4ac \geqslant 0$, и въ этомъ случаѣ искомое комплексное число будетъ:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} + 0i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

т.-е. мы получаемъ для даннаго квадратнаго уравненія два вещественныхъ корня, что мы имѣли и выше (388).

Перейдемъ теперь къ системѣ (5). Второе уравненіе этой системы даетъ вещественное значеніе для y:

$$y = -\frac{b}{2a}.$$

Поставивъ это значеніе въ первое уравненіе системы (5), найдемъ:

$$4a^2z^2 = 4ac - b^2, \quad z^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}.$$

Результатъ этотъ говоритъ намъ, что z будетъ вещественно только тогда, когда $b^2-4ac \leqslant 0$, и тогда корни нашего уравненія представятъ два комплексныхъ числа, заключенныхъ въ формулѣ:

$$-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\, i. \qquad (6)$$

Принявъ во вниманіе, что

$$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{4ac-b^2}\cdot i,$$

можемъ во всѣхъ случаяхъ писать:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Результаты эти въ высшей степени примѣчательны; они показываютъ, что, вводя въ алгебру комплексныя числа, мы можемъ установить слѣдующую **теорему**.

Квадратное уравненіе имѣетъ всегда два корня, значенія которыхъ выражаются одною и тою же формулою во всѣхъ случаяхъ.

Формула (6) говоритъ намъ, что, при a, b и c вещественныхъ, корни квадратнаго корня суть *сопряженныя* комплексныя числа.

Корни эти во всѣхъ случаяхъ имѣютъ свойства, выражаемыя слѣдующими равенствами:

$$1)\quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$2)\quad x_1 x_2 = -\frac{c}{a},$$

$$3)\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

легко доказываемыми.

§ II. Модуль комплекснаго числа.

446. Модуль. *Модулемъ комплекснаго числа $a + bi$ называется положительное значеніе квадратнаго корня изъ суммы квадратовъ вещественнаго слагаемаго a и коэффиціента b при знакѣ i.* Итакъ, модуль числа $(a + bi)$ равенъ $+\sqrt{a^2 + b^2}$. Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что модуль положительнаго числа a есть само число; модуль же отрицательнаго числа $(-a)$ равенъ a (**19**).

Примѣры. $Mod(3 + 7i) = \sqrt{58}$, $Mod\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$, $Mod(i) = 1$, $Mod(-i) = 1$, $Mod(-7) = 7$.

447. Модуль суммы комплексныхъ чиселъ. *Квадратъ модуля суммы двухъ комплексныхъ чиселъ заключенъ между квадратами суммы и разности модулей слагаемыхъ.*

Разсмотримъ два комплексныхъ числа: $a+bi$ и $c+di$. Квадраты ихъ модулей соотвѣтственно суть:

$$\rho^2=a^2+b^2,\quad \rho_1{}^2=c^2+d^2.$$

Квадратъ модуля R суммы:

$$(a+bi)+(c+di)$$

этихъ выраженій есть:

$$R^2=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(ac+bd),$$

или же

$$R^2=\rho^2+\rho_1{}^2+2(ac+bd).$$

Сравнимъ это выраженіе съ выраженіями:

$$(\rho+\rho_1)^2=\rho^2+\rho_1{}^2+2\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2},$$
$$(\rho-\rho_1)^2=\rho^2+\rho_1{}^2-2\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2},$$

которыя, вслѣдствіе неравенства: $(ad-bc)^2\geqslant 0$, дающаго: $a^2d^2+b^2c^2\geqslant 2abcd$, или $a^2d^2+b^2c^2=2abcd+\omega$, гдѣ $\omega\geqslant 0$, могутъ написаться такимъ образомъ:

$$(\rho+\rho_1)^2=\rho^2+\rho_1{}^2+2\sqrt{(ac+bd)^2+\omega},$$
$$(\rho-\rho_1)^2=\rho^2+\rho_1{}^2-2\sqrt{(ac+bd)^2+\omega}.$$

Сравненіе это легко дастъ:

$$(\rho-\rho_1)^2\leqslant R^2\leqslant(\rho+\rho_1)^2,\ \text{ч. и т. д.}$$

Если $\rho>\rho_1$, то неравенство это можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$\rho-\rho_1\leqslant R\leqslant\rho+\rho_1;$$

въ противоположномъ же случаѣ получимъ:

$$\rho_1-\rho\leqslant R\leqslant\rho+\rho_1.$$

Неравенства эти показываютъ, что *модуль суммы комплексныхъ чиселъ не превышаетъ суммы модулей этихъ чиселъ.*

Если $\omega = 0$, т.-е. если $ad - bc = 0$, или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, и если число $ac + bd$ есть число положительное, то

$$R = \rho + \rho_1.$$

Если же, при $\omega = 0$, число $ac + bd$ есть число отрицательное, то

$$R = \pm(\rho - \rho_1),$$

смотря по тому, будетъ ли ρ болѣе или менѣе ρ_1.

448. Модули произведенія, частнаго, степени и корня. Докажемъ, что

1°. *Модуль произведенія комплексныхъ чиселъ равенъ произведенію модулей этихъ чиселъ.*

Возьмемъ два комплексныхъ числа: $(a + bi)$ и $(c + di)$, модули которыхъ соотвѣтственно суть: $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{c^2 + d^2}$. Произведеніе этихъ комплексныхъ чиселъ, равное

$$(ac - bd) + (ad + bc)i,$$

имѣетъ модулемъ $\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}$, и ясно, что

$$\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

2°. *Модуль частнаго двухъ комплексныхъ чиселъ равенъ частному модулей этихъ чиселъ.* Доказательство аналогично предъидущему.

3°. *Модуль степени комплекснаго числа равенъ той же степени модуля этого числа.*

4°. *Модуль квадратнаго корня комплекснаго числа равенъ квадратному корню модуля этого числа.*

449. Произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ.

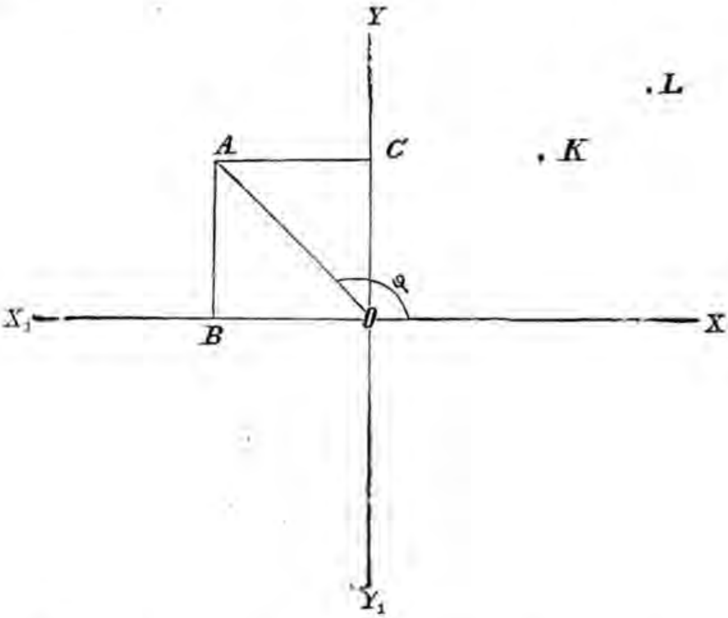
Разсмотримъ произведеніе сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ: $(a + bi)$ и $(a - bi)$. Оно можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$(a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ab)i = (a^2 + b^2) + 0 \cdot i = a^2 + b^2$$

и показываетъ, что *произведеніе двухъ сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ равно квадрату модуля этихъ чиселъ.*

§ III. Геометрическое представленіе комплексныхъ чиселъ.

450. Аффиксъ комплекснаго числа. Комплексныя числа имѣютъ весьма простое геометрическое представленіе. Вообразимъ двѣ неопредѣленныхъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ въ точкѣ 0, прямыхъ XX_1 и YY_1.



Одну изъ этихъ прямыхъ, напримѣръ XX_1, назовемъ *осью* x-*овъ*, другую YY_1 — *осью* y-*овъ*. Каждая изъ этихъ осей имѣетъ, считая отъ точки O, два направленія: ось x-овъ — направленія OX и OX_1, ось y-овъ — направленія OY и OY_1. Согласимся откладывать на одномъ изъ направленій оси x-овъ, напримѣръ на направленіи OX, положительныя числа, отнесенныя къ какой нибудь единицѣ линейной мѣры, а на другомъ направленіи OX_1 — модули отрицательныхъ чиселъ, отнесенные къ той же единицѣ. Направленіе OX будемъ называть *положительнымъ*, направленіе OX_1 — *отрицательнымъ*. Пойдемъ по окружности, описанной изъ центра O, по направленію, обратному движенію часовой стрѣлки отъ того направленія оси x-овъ, на которомъ мы условились откладывать положительныя числа; на томъ изъ направленій оси y-овъ, которое встрѣтимъ первымъ, будемъ откладывать также положительныя числа, на другомъ — модули отрицательныхъ чиселъ; если, напримѣръ, за положительное направленіе оси $x^{\text{-овъ}}$ примемъ, какъ приняли, направленіе OX, то положительное направленіе оси $y^{\text{-овъ}}$ будетъ OY, отрицательное — OY_1. Углы XOY, YOX_1, X_1OY_1 и Y_1OX будемъ называть соотвѣтственно 1-мъ, 2-мъ, 3-мъ и 4-мъ углами.

Разсмотримъ комплексное число $a+bi$. Условимся откладывать число a, если оно положительное, и его модуль, если оно отрицательное, соотвѣтственно на направленіяхъ OX и OX_1; условимся откладывать число b, если оно положительное, и его модуль, если оно отрицательное, соотвѣтственно на направленіяхъ OY и OY_1. Изъ концовъ отложенныхъ такимъ образомъ длинъ возставимъ соотвѣтственно перпендикуляры къ осямъ $x^{\text{-овъ}}$ и $y^{\text{-овъ}}$ до ихъ взаимнаго пересѣченія; эти перпендикуляры пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ A и только въ одной этой точкѣ.

Итакъ, *всякому комплексному числу $a+bi$, при принятыхъ соглашеніяхъ, будетъ отвѣчать одна и только одна точка на плоскости.*

Обратно, *всякой точкѣ A, взятой на плоскости, будетъ отвѣчать, при принятыхъ соглашеніяхъ, одно и только одно комплексное число,* которое получимъ такимъ образомъ: опускаемъ изъ точки A перпендикуляры на оси $x^{\text{-овъ}}$ и $y^{\text{-овъ}}$; дѣлимъ образованные отрѣзки осей на принятую единицу мѣры, присвоиваемъ полученнымъ числамъ знаки $+$ или $-$, смотря по тому, на какихъ направленіяхъ осей отложились соотвѣтственные отрѣзки, и при помощи полученныхъ такимъ образомъ чиселъ: a и b составляемъ комплексное число $a+bi$.

Точка A называется **аффиксомъ** комплекснаго числа и означается символомъ: (a, b). Длина прямой OA называется *векторомъ* комплекснаго числа $a+bi$, направленіе OA называется *направленіемъ* вектора. Уголъ, составляемый положительнымъ направленіемъ оси $x^{\text{о-въ}}$ съ направленіемъ вектора, отсчитанный въ сторону, обратную движенію часовой стрѣлки, называется *аргументомъ* комплекснаго числа.

Изъ всѣхъ этихъ соглашеній вытекаетъ, что

1) аффиксъ числа $0=0+0i$ есть точка 0; аргументъ этого числа равенъ нулю.

2) аффиксъ вещественнаго числа $a=a+bi$ лежитъ на положительномъ или отрицательномъ направленіи оси $x^{\text{-овъ}}$, смотря по тому, представляетъ ли число a число положительное или число отрицательное, и его аргументъ соотвѣтственно равенъ 0 или π.

3) аффиксъ комплекснаго числа $bi=0+bi$ лежитъ на положительномъ или отрицательномъ направленіи оси $y^{\text{-овъ}}$, смотря по тому,

представляетъ ли число b число положительное или число отрицательное, и его аргументъ соотвѣтственно равенъ $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$.

4) аффиксъ комплекснаго числа $a+bi$, гдѣ a и b не суть нули, лежитъ: въ первомъ углѣ, когда a и b положительныя; во второмъ — когда a отрицательное и b положительное; въ третьемъ — когда a отрицательное и b отрицательное; въ четвертомъ — когда a положительное и b отрицательное; аргументъ этого комплекснаго числа соотвѣтственно заключенъ между 0 и $\frac{\pi}{2}$, или между $\frac{\pi}{2}$ и π, или между π и $\frac{3\pi}{2}$, или между $\frac{3\pi}{2}$ и 2π.

5) Аффиксы сопряженныхъ комплексныхъ чиселъ: $a+bi$ и $a-bi$ расположены симметрично относительно оси $x^{\text{-овъ}}$.

6) Аффиксы комплексныхъ чиселъ: $a+bi$ и $a-bi$ расположены симметрично относительно точки O.

Существенная разница между числами вещественными и комплексными состоитъ въ томъ, что если даны два какихъ нибудь вещественныхъ числа, напримѣръ 1 и -4, то мы знаемъ всѣ тѣ вещественныя числа, которыя лежатъ между данными числами. Аффиксы этихъ чиселъ суть точки оси $x^{\text{-овъ}}$, лежащія между точками, представляющими числа 1 и -4. Положимъ теперь, что даны два комплексныхъ числа, напримѣръ $(1+2i)$ и $(3+4i)$. Пусть аффиксы этихъ чиселъ суть точки K и L. Вообразимъ *непрерывный* рядъ точекъ на плоскости, образующихъ нѣкоторую кривую, проходящую черезъ точки K и L. Каждой точкѣ этой кривой будетъ отвѣчать нѣкоторое опредѣленное комплексное число, и всѣ эти комплексныя числа считаются числами, заключенными между $(1+2i)$ и $(3+4i)$. Итакъ, идя по нашей кривой, мы перейдемъ *непрерывно* отъ комплекснаго числа $1+2i$ къ комплексному числу $3+4i$ черезъ нѣкоторый рядъ комплексныхъ чиселъ. Вообразимъ теперь другую кривую, проходящую также черезъ точки K и L. Идя *непрерывно* по этой кривой, мы перейдемъ непрерывно отъ комплекснаго числа $1+2i$ къ комплексному числу $3+4i$ черезъ другой рядъ комплексныхъ чиселъ, отличный отъ ряда перваго. Замѣтимъ, что мы можемъ, при этихъ переходахъ, переходить и черезъ вещественныя числа, если наши кривыя будутъ пересѣкать ось $x^{\text{-овъ}}$, ибо точки пересѣченія суть аффиксы вещественныхъ чиселъ. Замѣтимъ еще, что переходъ отъ вещественнаго числа къ вещественному можетъ быть совершенъ также безконечнымъ количествомъ способовъ, если захотимъ совершать этотъ переходъ черезъ комплексныя числа.

451. Новая форма комплекснаго числа. Разсмотримъ какое нибудь комплексное число $a+bi$, и пусть его аффиксъ есть точка A. Назовемъ единицу мѣры буквою α. По опредѣленію имѣемъ:

$$a=-\frac{OB}{\alpha},\quad b=\frac{OC}{\alpha}.$$

Векторъ комплекснаго числа есть длина OA, аргументъ φ этого числа есть уголъ XOA. Чертежъ даетъ:

$$OA^2=OB^2+BA^2=OB^2+OC^2,$$

или

$$\left(\frac{OA}{\alpha}\right)^2=\left(-\frac{OB}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{OC}{\alpha}\right)^2=a^2+b^2,$$

или, наконецъ,

$$\frac{OA}{\alpha}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Правая часть этого равенства представляетъ модуль даннаго комплекснаго числа, и само равенство говоритъ: *модуль комплекснаго числа равенъ отношенію вектора этого числа къ принятой единицѣ линейной мѣры.*

Между вещественными числами a и b, фигурирующими въ комплексномъ числѣ $a+bi$, и модулемъ ρ и аргументомъ φ этого числа существуютъ весьма простыя соотношенія. И въ самомъ дѣлѣ, прямоугольный треугольникъ AOB даетъ:

$$OB=OA\cos AOB=OA\cos(\pi-\varphi)=-OA\cos\varphi,$$

$$AB=OA\sin AOB=OA\sin(\pi-\varphi)=OA\sin\varphi,$$

отсюда

$$-\frac{OB}{\alpha}=\frac{OA}{\alpha}\,.\cos\varphi,\ \frac{AB}{\alpha}=\frac{OC}{\alpha}=\frac{OA}{\alpha}\sin\varphi,$$

и, слѣдовательно,

$$a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Равенства эти будутъ справедливы, въ какомъ бы углѣ не лежалъ аффиксъ даннаго комплекснаго числа.

Равенства (1) опредѣляютъ φ, ибо.

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\rho};$$

одно изъ равенствъ, напримѣръ первое, опредѣляетъ два угла φ, не большіе 2π, второе же выбираетъ одинъ изъ этихъ угловъ.

Вслѣдствіе этихъ равенствъ всякое комплексное число $a+bi$ можетъ быть представлено въ слѣдующей изящной и простой формѣ:

$$a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{2}$$

Примѣры:

1°. $a+bi=A$, гдѣ A вещественное положительное число. Для него:

$$\rho=A,\ \cos\varphi=1,\ \sin\varphi=0,\ \text{т.-е. } \varphi=0,$$

и, слѣдовательно,

$$A=A(\cos 0+i\sin 0).$$

2°. $a+bi=A$, гдѣ A вещественное отрицательное число. Для него:

$$\rho=-A,\ \cos\varphi=-1,\ \sin\varphi=0,\ \text{т.-е. } \varphi=\pi,$$

и, слѣдовательно,

$$A=-A(\cos\pi+i\sin\pi).$$

3°. $a+bi=Bi$, гдѣ B вещественное положительное число. Для него:

$$\rho=B,\ \cos\varphi=0,\ \sin\varphi=1,\ \text{т.-е. } \varphi=\frac{\pi}{2},$$

и, слѣдовательно,

$$Bi=B\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

4°. $a+bi=Bi$, гдѣ B вещественное отрицательное число. Для него:

$$\rho=-B,\ \cos\varphi=0,\ \sin\varphi=-1,\ \text{т.-е. } \varphi=\frac{3\pi}{2}$$

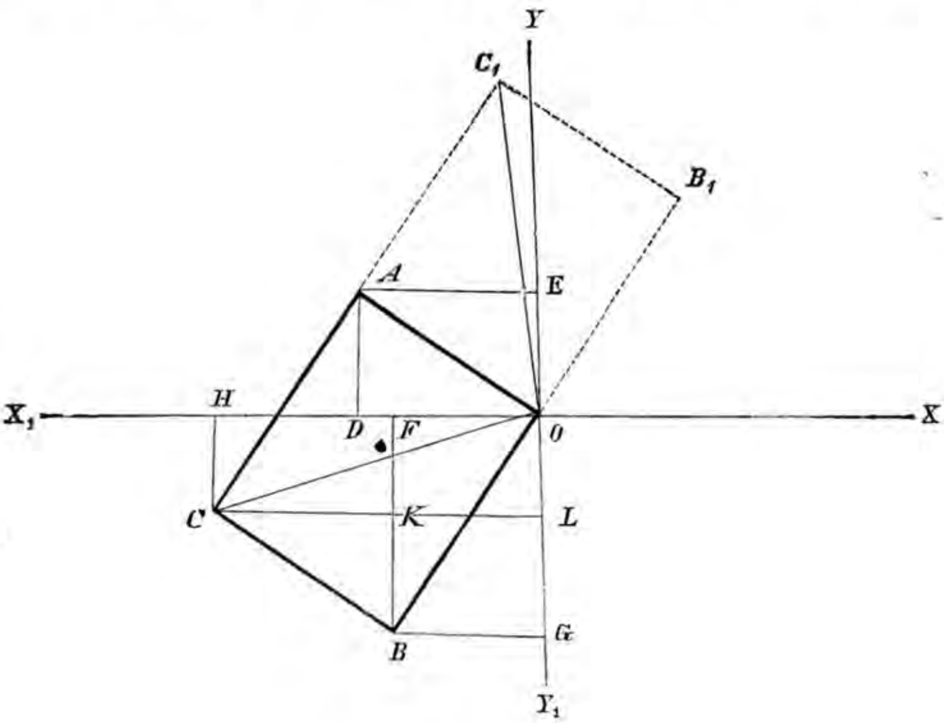
и, слѣдовательно,

$$Bi=-B\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

5°. $a+bi=+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Для него: $\rho=1$, $\cos\varphi=+\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.-е. $\varphi=-\frac{\pi}{3}$; и, слѣдовательно,

$$+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

452. Аффиксъ суммы комплексныхъ чиселъ. *Аффиксъ C суммы двухъ комплексныхъ чиселъ $a+bi$ и $c+di$, аффиксы которыхъ соотвѣтственно суть точки A и B, есть конецъ діагонали паралелограмма, построеннаго на векторахъ OA и OB данныхъ комплексныхъ чиселъ.*



Назовемъ единицу мѣры буквою α. Имѣемъ, по соглашенію,

$$a=-\frac{OD}{\alpha},\ b=+\frac{DA}{\alpha}=\frac{OE}{\alpha},\ c=-\frac{OF}{\alpha},\ d=-\frac{FB}{\alpha}=-\frac{OG}{\alpha}.$$

Точка C есть аффиксъ комплекснаго числа:

$$-\frac{OH}{\alpha}+\left(-\frac{OL}{\alpha}\right)i. \tag{3}$$

Чертежъ даетъ:

$$OH = OD + OF,\ OL = OG - OE,$$

отсюда

$$-\frac{OH}{a} = -\frac{OD}{a} - \frac{OF}{a},\ -\frac{OL}{a} = \frac{OE}{a} - \frac{OG}{a},$$

т.-е.

$$-\frac{OH}{a} = a + c,\ -\frac{OL}{a} = b + d.$$

Вслѣдствіе этихъ равенствъ число (3), имѣющее аффиксомъ точку C, напишется такимъ образомъ:

$$(a + c) + (b + d)i,$$

а это выраженіе представляетъ собою не что иное, какъ сумму данныхъ комплексныхъ чиселъ, ч. и т. д.

453. Замѣчаніе. Діагональ OC есть, слѣдовательно, векторъ суммы данныхъ комплексныхъ чиселъ. Этотъ векторъ представляетъ, какъ показываетъ чертежъ, замыкающую ломанной линіи, одна изъ сторонъ которой есть одинъ изъ векторовъ OA или OB данныхъ комплексныхъ чиселъ, напримѣръ векторъ OA, а другая есть отрѣзокъ, равный вектору OB, параллельный ему и въ одну сторону направленный.

Векторъ OC называется *геометрическою суммою* векторовъ OA и OB; для обозначенія этой суммы часто употребляютъ знакоположеніе:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

И вообще, векторъ суммы n комплексныхъ чиселъ, аффиксы которыхъ суть точки $A, B, C, \ldots, L$, есть замыкающая ломанной линіи, стороны которой суть: одинъ изъ векторовъ, напримѣръ OA, и отрѣзки:

$$AA_1,\ AA_2,\ \ldots,\ AA_{n-1},$$

соотвѣтственно равные векторамъ:

$$OB,\ OC,\ \ldots,\ OL,$$

параллельные имъ и въ одну сторону направленные. Этотъ векторъ суммы равенъ, слѣдовательно, отрѣзку OA_{n-1} и представляетъ геометрическую сумму векторовъ OA, OB, OC, . . . , OL, т.-е.

$$\overline{OA_{n-1}} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \ldots + \overline{OL}.$$

Аффиксъ суммы есть конецъ A_{n-1} этого вектора. Изъ этого построенія непосредственно вытекаетъ, то

$$OA_{n-1} \leqslant OA + OB + OC + \ldots + OL,$$

или же

$$\frac{OA_{n-1}}{\alpha} \leqslant \frac{OA}{\alpha} + \frac{OB}{\alpha} + \frac{OC}{\alpha} + \ldots + \frac{OL}{\alpha},$$

гдѣ α есть принятая единица мѣры. Неравенство это говоритъ, что *модуль суммы комплексныхъ чиселъ не превышаетъ суммы модулей этихъ чиселъ*, что мы имѣли и выше.

454. Аффиксъ разности комплексныхъ чиселъ. Разность двухъ комплексныхъ чиселъ: $a+bi$ и $c+di$, аффиксы которыхъ суть точки A и B, представляетъ сумму комплексныхъ чиселъ $a+bi$ и c_1+d_1i, гдѣ $c_1=-c_1$ $d_1=-d$, при чемъ аффиксъ B_1 комплекснаго числа c_1+d_1i расположенъ съ аффиксомъ B симметрично относительно точки O. Отсюда вытекаетъ, что векторъ OC_1 разности есть геометрическая сумма векторовъ OA и OB_1, и точка C_1 есть аффиксъ разности. Чертежъ непосредственно дастъ, что *векторъ OC_1 разности комплексныхъ чиселъ не менье разности векторовъ OA и OB уменьшаемаго и вычитаемаго*, а, слѣдовательно, и *модуль разности двухъ комплексныхъ чиселъ не менье модуля разности модулей этихъ чиселъ*.

§ IV. Предѣлъ перемѣннаго комплекснаго числа.

455. Понятіе о предѣлѣ. Въ главѣ о предѣлахъ мы разсматривали только перемѣнныя вещественныя числа. Теперь, когда мы ввели въ алгебру комплексныя числа, мы можемъ расширить наши представленія.

Разсмотримъ перемѣнное комплексное число $x+iy$, т.-е такое комплексное число, которое означаетъ каждое изъ слѣдующихъ другъ за другомъ, по опредѣленному закону, комплексныхъ чиселъ неограниченнаго ряда:

$$x_1+y_1i,\ x_2+y_2i,\ \ldots,\ x_n+y_ni,\ \ldots,\ x_{n+p}+y_{n+p},\ \ldots \qquad (1)$$

Мы будемъ говорить, что *перемѣнное число* $x+yi$ *или, что то же, перемѣнное число* x_n+y_ni *стремится къ предѣлу при неограниченномъ возрастаніи* n **тогда и только тогда**, *когда каждый изъ рядовъ:*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots \tag{2}$$

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots,\ y_{n+p},\ \ldots \tag{3}$$

стремится къ предѣлу, при чемъ предѣломъ перемѣннаго комплекснаго числа x_n+y_ni *будемъ называть комплексное число* $a+bi$, *въ которомъ* a *и* b *соотвѣтственно суть предѣлы чиселъ рядовъ* (2) *и* (3).

456. Теорема I. Относительно этого предѣла докажемъ слѣдующую теорему, относящуюся къ тому случаю, когда предѣлъ извѣстенъ. *Для того, чтобы данное комплексное число* $a+bi$ *представляло предѣлъ перемѣннаго числа* x_n+y_ni, *при неограниченномъ возрастаніи* n, *необходимо и достаточно, чтобы модуль разности*

$$(x_n+y_ni)-(a+bi) \tag{1}$$

становился и продолжалъ быть менѣе даннаго произвольнаго положительнаго числа ε, *начиная съ нѣкотораго* n.

Назвавъ модуль разности (1) буквою ρ_n, найдемъ:

$$\rho^2_n=(x_n-a)^2+(y_n-b)^2. \tag{2}$$

Докажемъ сперва необходимость условія; для этой цѣли положимъ, что $a+bi$ если дѣйствительно предѣлъ перемѣннаго числа $x+yi$. Изъ предъидущаго понятія о предѣлѣ вытекаютъ слѣдующія неравенства:

$$Mod(x_n-a)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ Mod(y_n-b)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

отсюда

$$(x_n-a)^2<\frac{\varepsilon^2}{2},\ (y_n-b)^2<\frac{\varepsilon^2}{2},$$

начиная съ нѣкотораго одного и того же n. При помощи этихъ неравенствъ равенство (2) дастъ:

$$\rho_n^2<\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2},\ \text{или}\ \rho_n^2<\varepsilon^2,$$

а отсюда

$$\rho_n < \varepsilon,$$

что мы и хотѣли показать.

Перейдемъ теперь къ доказательству достаточности условія.

Для этой цѣли положимъ:

$$\rho_n < \varepsilon;$$

отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\rho_n^2 < \varepsilon^2.$$

При помощи этого неравенства равенство (2) дастъ:

$$(x_n - a)^2 < \varepsilon^2, \quad (y_n - b)^2 < \varepsilon^2;$$

отсюда непосредственно получаемъ неравенства:

$$Mod(x_n - a) < \varepsilon, \quad Mod(y_n - b) < \varepsilon,$$

показывающія, что a и b суть соотвѣтственно предѣлы чиселъ x_n и y_n, или, что комплексное число $a + bi$ есть, на основаніи понятія о предѣлѣ комплекснаго числа, предѣлъ перемѣннаго комплекснаго числа $x_n + y_n i$.

457. Теорема II. *Для того, чтобы перемѣнное число $x_n + y_n i$ приближалось къ предѣлу, при неопредѣленномъ возрастаніи n, необходимо и достаточно, чтобы модуль разности:*

$$\Delta = (x_{n+p} + y_{n+p} i) - (x_n + y_n i)$$

становился и продолжалъ быть менѣе даннаго произвольнаго положительнаго числа ε, начиная съ нѣкотораго n и при всякомъ цѣломъ и положительномъ p.

Напишемъ равенство:

$$(Mod\,\Delta)^2 = (x_{n+p} - x_n)^2 + (y_{n+p} - y_n)^2. \tag{1}$$

Докажемъ сперва необходимость условія, т.-е. предположимъ, что предѣлъ существуетъ, и докажемъ, что условіе выполняется.

При этомъ предположеніи и при помощи понятія о предѣлѣ комплекснаго числа, получимъ неравенства:

$$Mod(x_{n+p}-x_n)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\quad Mod(y_{n+p}-y_n)<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$(x_{n+p}-x_n)^2<\frac{\varepsilon^2}{2},\quad (y_{n+p}-y_n)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

На основаніи этихъ неравенствъ равенство (1) дастъ:

$$(Mod\,\Delta)^2<\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2},\ \text{откуда}\ Mod\,\Delta<\varepsilon,\ \text{ч. и т. д.}$$

Перейдемъ теперь къ доказательству достаточности условія, т.-е. положимъ, что условіе выполняется, и докажемъ, что предѣлъ существуетъ. Итакъ, положимъ, что

$$Mod\,\Delta<\varepsilon,\ \text{откуда}\ (Mod\,\Delta)^2<\varepsilon^2;$$

равенство (1), при помощи этого неравенства, дастъ:

$$(x_{n+p}-x_n)^2<\varepsilon^2,\quad (y_{n+p}-y_n)^2<\varepsilon^2,$$

или

$$Mod(x_{n+p}-x_n)<\varepsilon,\quad Mod(y_{n+p}-y)<\varepsilon;$$

эти неравенства говорятъ, что перемѣнныя вещественныя числа x_n и y_n стремятся къ предѣламъ, а слѣдовательно стремится къ предѣлу и перемѣнное число x_n+y_ni.

Упражненія.

1. Образовать квадратныя уравненія съ вещественными коэффиціентами, имѣющія соотвѣтственно однимъ изъ корней слѣдующія выраженія:

$$4\sqrt{-5},\ 3\sqrt{-2}-4,\ \frac{1}{2+\sqrt{-5}},\ (3+\sqrt{-2})(4+3\sqrt{-2}),\ \frac{5+\sqrt{-3}}{5-\sqrt{-3}}.$$

2. Рѣшить квадратное уравненіе:

$$(2+\sqrt{-1})x^2-(1+2\sqrt{-1})x+(3-\sqrt{-1})=0.$$

3. $x^2-(9-2\sqrt{-1})x+(29+11i)=0.$

4. Доказать слѣдующія равенства:

$$(a)\qquad \rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,.\,r(\cos t+i\sin t)=\rho r[\cos(\varphi+t)+i\sin(\varphi+t)],$$

$$(b)\qquad \frac{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r(\cos t+i\sin t)}=\frac{\rho}{r}\,[\cos(\varphi-t)+i\sin(\varphi-t)],$$

$$(c)\qquad [\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^m=\rho^m[\cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi)],$$

гдѣ m есть цѣлое положительное число.

5. Показать, что $\sqrt[n]{1}$ имѣемъ n и только n различныхъ значеній, заключенныхъ въ формулѣ:

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

гдѣ k равно каждому изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3, ..., $(n-1)$. Приложить къ слѣдующимъ частнымъ случаямъ:

$$\sqrt{1},\ \sqrt[3]{1},\ \sqrt[4]{1},\ \sqrt[5]{1}.$$

6. Показать, что $\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ имѣетъ n и только n различныхъ значеній, заключенныхъ въ формулѣ:

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

гдѣ k равно каждому изъ чиселъ: 0, 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ и гдѣ $\sqrt[n]{\rho}$ есть положительное значеніе корня n-овой степени.

Приложить къ случаямъ:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt[4]{-16},\ \sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}},\ \sqrt[2]{i},\ \sqrt[3]{-i}.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, приводящіяся къ уравненіямъ второй степени.

§ I. Уравненія биквадратныя.

458. Рѣшеніе биквадратнаго уравненія. Уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ, приводящееся къ формѣ:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad [1]$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c не зависятъ отъ x, называется *биквадратнымъ*. Легко показать, что рѣшеніе этого уравненія можетъ быть приведено къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ:

$$x^2 = z. \qquad [2]$$

Уравненіе [1] преобразуется въ уравненіе второй степени относительно z:

$$az^2 + bz + c = 0. \qquad [3]$$

Уравненіе [3] даетъ два значенія для z:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставивъ найденныя значенія для z въ уравненіе [2], получимъ:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \qquad [4]$$

Полученный результатъ показываетъ, что биквадратное уравненіе имѣетъ четыре рѣшенія, которыя, по два, имѣютъ равные модули, но противоположные знаки.

459. Изслѣдованіе формулъ. Предположимъ, что коэффиціенты a, b, c биквадратнаго уравненія суть количества вещественныя.

1°. Если $(b^2 - 4ac) > 0$, то оба значенія z вещественны; они могутъ быть или оба положительныя, или оба отрицательныя, или одно изъ нихъ будетъ положительнымъ, другое же—отрицательнымъ.

Въ первомъ случаѣ четыре значенія для x вещественны, во второмъ случаѣ всѣ значенія для x комплексны.

И въ самомъ дѣлѣ, назовемъ эти отрицательныя значенія буквами z_1 и z_2. Для полученія значеній неизвѣстнаго x мы должны извлечь квадратные корни изъ отрицательныхъ чиселъ z_1 и z_2, что приведетъ насъ къ комплекснымъ числамъ:

$$x = \pm \sqrt{z_1}, \; x = \pm \sqrt{z_2}.$$

Представляя эти выраженія въ комплексной формѣ, найдемъ:

$$x = \pm i \sqrt{-z_1}, \; x = \pm i \sqrt{-z_2}.$$

Вещественныя части этихъ комплексныхъ чиселъ равны нулю. Замѣтимъ, что комплексныя числа, изображающія корни, суть попарно сопряженныя.

Въ третьемъ случаѣ два значенія неизвѣстнаго x вещественны и два значенія комплексны. Назвавъ положительное значеніе z буквою z_1, отрицательное же—буквою z_2, получимъ:

$$x = \pm \sqrt{z_1}, \; x = \pm i \sqrt{-z_2}.$$

Опять видимъ, что комплексные корни суть сопряженныя выраженія.

2°. Если $b^2-4ac=0$, то значенія для z вещественны и равны; отсюда слѣдуетъ, что значенія для x по два равны; они вещественны, если знаки b и a противоположны; они комплексны, если знаки b и a одинаковы.

3°. Если $b^2-4ac<0$, то значенія для z комплексны и сопряженны. Обозначимъ:

$$z_1=A+Bi,\ z_2=A-Bi.$$

Для неизвѣстнаго x получимъ четыре значенія:

$$x=\pm\sqrt{A+Bi}$$
$$x=\pm\sqrt{A-Bi}.$$

Представляя значенія эти въ комплексной формѣ (**443**), найдемъ:

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,.\,i\right],$$

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}\,.\,i\right].$$

Результаты эти показываютъ опять, что комплексные корни попарно сопряженны.

*** 460. Преобразованіе выраженія $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.** Формула (4) показываетъ, что всѣ корни биквадратнаго уравненія

$$ax^4+bx^2+c=0$$

имѣютъ форму:

$$x=\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}},$$

гдѣ

$$A=-\frac{b}{2a},\quad B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Предположимъ, что всѣ корни вещественны, при чемъ положительное число B есть число раціональное, не представляющее квадрата положительнаго раціональнаго числа, т.-е. положимъ, что $\sqrt{B}$ есть ирраціональный корень положительнаго раціональнаго числа. Спрашивается, возможно ли представить выраженіе $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ въ формѣ:

$$\sqrt{y}+\sqrt{z},$$

гдѣ y и z суть вещественныя, положительныя и раціональныя количества?

Для отвѣта на этотъ вопросъ, напишемъ уравненіе:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}. \qquad (a)$$

Если искомыя y и z не связаны никакими условіями кромѣ условія (a), то уравненію (a) удовлетворяетъ безчисленное множество значеній для y и z. Рѣшимъ это уравненіе, если возможно, въ *числахъ, веществественныхъ, положительныхъ и раціональныхъ*. Будемъ считать значенія всѣхъ квадратныхъ корней, входящихъ въ уравненія, положительными. Возвысивъ обѣ части уравненія (a) въ квадратъ, получимъ:

$$A+\sqrt{B}=y+z+2\sqrt{yz}. \qquad (b)$$

Для того, чтобы y и z были раціональны, *необходимо*, чтобы $\sqrt{yz}$ было ирраціональное число, ибо, въ противоположномъ случаѣ, оказалось бы, что число $\sqrt{B}$, равное $y+z+2\sqrt{yz}-A$, было бы раціональнымъ, что противорѣчитъ условію.

Показавъ это, докажемъ, что уравненіе (b) распадается на слѣдующихъ два уравненія:

$$A=y+z,\ \ \sqrt{B}=2\sqrt{yz}. \qquad (c)$$

И въ самомъ дѣлѣ, предположивъ наоборотъ, что

$$A=y+z+\alpha,$$

гдѣ α есть раціональное число, отличное отъ нуля, получили бы изъ уравненія (b):

$$\sqrt{B}=\alpha+2\sqrt{yz},$$

откуда

$$B=\alpha^2+4\alpha\sqrt{yz}+4yz,$$

или

$$\sqrt{yz}=\frac{B-\alpha^2-4yz}{4\alpha},$$

что невозможно, ибо лѣвая часть есть число ирраціональное, а правая — раціональное.

Итакъ, должны заключить, что $A = y + z$, и тогда равенство (b) дастъ: $\sqrt{B} = 2\sqrt{yz}$.

Вычтя теперь уравненія (c) по частямъ, получимъ:

$$A - \sqrt{B} = y + z - 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2,$$

откуда

$$\sqrt{y} - \sqrt{z} = \pm\sqrt{A - \sqrt{B}}. \qquad (d)$$

Перемноживъ уравненія (a) и (d) по частямъ и приписавъ къ полученному уравненію первое изъ уравненій (c), получимъ двѣ системы уравненій:

$$\left\{\begin{matrix} y - z = +\sqrt{A^2 - B}, & y - z = -\sqrt{A^2 - B}, \\ y + z = \quad A & y + z = \quad A \end{matrix}\right\} \qquad (f)$$

имѣющія соотвѣтственно слѣдующія системы рѣшеній:

$$y = \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B}), \quad z = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B}), \qquad (e')$$

$$y = \frac{1}{2}(A - \sqrt{A^2 - B}), \quad z = \frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 - B}) \qquad (f')$$

Итакъ, если уравненіе (a) рѣшимо въ раціональныхъ числахъ, то системы рѣшеній могутъ имѣть только формы (e') и (f'), которыя будутъ раціональны тогда и только тогда, когда $A^2 - B$ есть квадратъ нѣкотораго раціональнаго числа C, такъ что

$$y = \frac{1}{2}(A + C), \quad z = \frac{1}{2}(A - C), \qquad (e')$$

$$y = \frac{1}{2}(A - C), \quad z = \frac{1}{2}(A + C). \qquad (f')$$

Но мы, вслѣдствіе возвышеній въ квадраты и перемноженія уравненій, могли ввести посторонніе рѣшенія; слѣдовательно, должны удостовѣриться, удовлетворяютъ ли уравненію (a) системы (e') и (f'), совпадающія для этого уравненія въ одну систему; это имѣетъ мѣсто, ибо

$$\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2 = y + z + 2\sqrt{yz} = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C) +$$

$$+ 2\sqrt{\frac{1}{4}(A^2 - C^2)} = A + \sqrt{B}.$$

Итакъ, слѣдовательно, *уравненіе* (a) *имѣетъ только тогда систему раціональныхъ рѣшеній, когда* A^2-B *представляетъ квадратъ раціональнаго числа* C, *при чемъ система эта слѣдующая*:

$$y=\frac{1}{2}(A+C),\quad z=\frac{1}{2}(A-C),$$

и мы будемъ имѣть преобразованіе:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}+\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)}.$$

461. *Замѣчанія.* **1°**. Если въ уравненіи (a) разсматриваются отрицательныя значенія корней, то уравненіе это будетъ имѣть предъидущую систему рѣшеній, такъ что мы можемъ писать:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}+\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)}\right],$$

гдѣ знаки ($+$) и ($-$) отвѣчаютъ соотвѣтственно положительному и отрицательному значеніямъ корня, помѣщеннаго въ лѣвой части равенства.

2°. Уравненіямъ (d):

$$\pm\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{y}-\sqrt{z},$$

въ которыхъ значенія корней $\sqrt{y}$ и $\sqrt{z}$ разсматриваются, какъ положительныя, отвѣчаютъ соотвѣтственно системы (e') и (f'), такъ что мы можемъ писать:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}(A+C)}-\sqrt{\frac{1}{2}(A-C)}\right],$$

гдѣ знаки ($+$) и ($-$) отвѣчаютъ соотвѣтственно положительному и отрицательному значеніямъ корня, помѣщеннаго въ лѣвой части равенства.

3°. Если мы приложимъ предъидущую формулу къ случаю, когда A^2-B есть отрицательное число, то мы придемъ къ комплекснымъ числамъ; такъ, напримѣръ, хотя и найдемъ:

$$\sqrt{2+\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{2+3i}{2}}+\sqrt{\frac{2-3i}{2}},$$

но должны замѣтить, что, приведя квадратные корни, помѣщенные въ правой части, къ комплекснымъ формамъ, снова придемъ къ числу $\sqrt{2+\sqrt{13}}$.

462. *Примѣры.* **1°.** Возьмемъ уравненіе $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Уравненіе въ z будетъ $z^2 - 13z + 36 = 0$. Корни его суть; $z_1 = 4$, $z_2 = 9$. Биквадратное уравненіе имѣетъ четыре вещественныхъ рѣшенія:

$$x_1 = +2,\ x_2 = -2,\ x_3 = +3,\ x_4 = -3.$$

2°. Возьмемъ уравненіе $x^4 - 20x^2 + 4 = 0$. Корни его даются формулою:

$$x = \pm\sqrt{10 \pm \sqrt{96}}.$$

Въ данномъ случаѣ преобразованіе (**460**) удается и даетъ:

$$x_1 = \sqrt{6} + 2,\ \ x_2 = -\sqrt{6} - 2,\ \ x_3 = \sqrt{6} - 2,\ \ x_4 = -\sqrt{6} + 2.$$

3°. Возьмемъ уравненіе $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$. Уравненіе въ z имѣетъ одинъ корень положительный и одинъ отрицательный: $z_1 = 4$, $z_2 = -9$.

Биквадратное уравненіе имѣетъ два вещественныхъ и два комплексныхъ корня:

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2,\ \ x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i.$$

4°. Разсмотримъ уравненіе $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$, Уравненіе въ z, т.-е. $z^2 - 2z + 2 = 0$, имѣетъ два комплексныхъ корнями: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 -$.

Биквадратное уравненіе имѣетъ четыре корня:

$$x = \pm\sqrt{1 + i},\ \ x = \pm\sqrt{1 - i}.$$

Представивъ эти корни въ комплексной формѣ (**443**), найдемъ:

$$x = \pm\left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} \pm i \cdot \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}\right].$$

463. Разложеніе лѣвой части биквадратнаго уравненія на множителей первой степени относительно x. Назовемъ корни уравненія [3] буквами z_1 и z_2. Мы знаемъ уже (**402**), что лѣвая часть этого уравненія можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$a(z - z_1)(z - z_2).$$

Замѣнивъ здѣсь букву z выраженіемъ x^2, представимъ лѣвую часть уравненія [1] въ видѣ:

$$a(x^2 - z_1)(x^2 - z_2),$$

или въ видѣ:

$$a(x - \sqrt{z_1})(x + \sqrt{z_1})(x - \sqrt{z_2})(x + \sqrt{z_2}).$$

Принявъ во вниманіе, что выраженія $\sqrt{z_1}$, $-\sqrt{z_1}$, $\sqrt{z_2}$, $-\sqrt{z_2}$

суть корни биквадратнаго уравненія, и назвавъ ихъ соотвѣтственно буквами x_1, x_2, x_3, x_4, представимъ лѣвую часть биквадратнаго уравненія въ видѣ произведенія:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Итакъ, *лѣвая часть биквадратнаго уравненія равна коэффиціенту при четвертой степени буквы x, умноженному на произведеніе четырехъ двучленовъ, равныхъ разностямъ между буквою x и каждымъ изъ корней.*

464. Замѣчаніе. Если всѣ корни биквадратнаго уравненія суть количества вещественныя, то предъидущее разложеніе не заключаетъ въ себѣ знака i. Если же нѣкоторые изъ корней комплексны, то предъидущее разложеніе будетъ заключать комплексный знакъ i. Но мы видѣли, что если биквадратное уравненіе $ax^4+bx^2+c=0$, въ которомъ коэффиціенты a, b, c суть количества вещественныя, имѣетъ комплексный корень вида $\alpha+\beta i$, то оно непремѣнно имѣетъ и сопряженный съ нимъ комплексный корень $\alpha-\beta i$. Двучлены разложенія, отвѣчающіе этимъ корнямъ, будутъ:

$$(x-\alpha-\beta i) \quad \text{и} \quad (x-\alpha+\beta i)$$

и дадутъ произведеніе

$$(x-\alpha)^2-\beta^2 i^2 = x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2),$$

т.-е. дадутъ трехчленъ второй степени съ вещественными коэффиціентами.

Итакъ, лѣвая часть биквадратнаго уравненія съ вещественными коэффиціентами равна коэффиціенту при четвертой степени буквы x, умноженному на произведеніе двухъ трехчленовъ второй степени съ вещественными же коэффиціентами.

465. Разложеніе биквадратнаго трехчлена на множителей первой степени относительно буквы x. Корнями трехчлена ax^4+bx^2+c называются такія числа, вещественныя или комплексныя, которыя, будучи подставлены вмѣсто буквы x въ трехчленъ, обращаютъ его тождественно въ нуль. Очевидно, что корни этого трехчлена суть корни биквадратнаго уравненія $ax^4+bx^2+c=0$. Назовемъ эти корни буквами x_1, x_2, x_3, x_4. Предъидущая теорема непосредственно показываетъ, что трехчленъ разлагается на множителей первой степени относительно буквы x:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Здѣсь также имѣетъ мѣсто замѣчаніе, сдѣланное выше (**464**).

466. *Примѣры.* **1°**. Разложить на множителей трехчленъ $-2x^4+26x^2-72=$ $=-2(x^4-13x^2+36)$. Корни трехчлена x^4-13x^2+36 суть: $+2, -2, +3, -3$, а потому

$$-2x^4+26x^2-72=-2(x-2)(x+2)(x-3)(x+3).$$

2°. Разложить на множителей трехчленъ $\frac{1}{2}x^4-10x^2+2=\frac{1}{2}(x^4-$ $-20x^2+4)$. Корни трехчлена x^4-20x^2+4 суть: $\sqrt{6}+2$, $-\sqrt{6}-2$, $\sqrt{6}-2$, $-\sqrt{6}+2$, а потому

$$\frac{1}{2}x^4-10x^2+2=\frac{1}{2}(x-\sqrt{6}-2)(x+\sqrt{6}+2)(x-\sqrt{6}+2)(x+\sqrt{6}-2).$$

3°. Разложить на множителей трехчленъ x^4+5x^2-36. Корни этого трехчлена суть: ± 2, $\pm 3i$, а потому

$$x^4+5x^2-36=(x-2)(x+2)(x+3i)(x-3i).$$

Въ это разложеніе вошли комплексные знаки. Для ихъ уничтоженія составляемъ произведеніе:

$$(x+3i)(x-3i)=x^2+9$$

и получаемъ:

$$x^4+5x^2-36=(x-2)(x+2)(x^2+9).$$

4°. Разложить на множителей трехчленъ x^4-10x^2+169. Корни этого трехчлена суть:

$$\pm\sqrt{5\pm 12i}=\pm(3\pm 2i),$$

а потому

$$x^4-10x^2+169=(x-3-2i)(x-3+2i)(x+3+2i)(x+3-2i).$$

Желая избѣжать комплексныхъ знаковъ, составляемъ:

$$(x-3-2i)(x-3+2i)=x^2-6x+13,$$
$$(x+3+2i)(x+3-2i)=x^2+6x+13$$

и получаемъ:

$$x^4-10x^2+169=(x^2-6x+13)(x^2+6x+13).$$

5°. Разложить на множителей трехчленъ x^4-18x^2+81. Корни этого трехчлена попарно равны 3 и 3, -3 и -3, а потому

$$x^4-18x^2+81=(x-3)^2(x+3)^2.$$

✻ § II. Взаимныя уравненія.

467. Общій видъ взаимныхъ уравненій перваго рода. Взаимными уравненіями перваго рода называются уравненія, которыя могутъ быть приведены къ виду:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \qquad [1]$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c суть какія ни есть числа, независимыя отъ x. Рѣшеніе подобныхъ уравненій можетъ быть приведено къ рѣшенію квадратныхъ уравненій.

Уравненіе [1] можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$x^2\left(ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}\right)=0,$$

или

$$x^2\left[a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c\right]=0,$$

или

$$x^2\left[a\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(c-2a\right)\right]=0,$$

или, наконецъ, такимъ образомъ:

$$x^2\left[a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(c-2a\right)\right]=0. \qquad [2]$$

Обозначивъ $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ черезъ z и назвавъ корни уравненія

$$az^2+bz+(c-2a)=0 \qquad [2']$$

буквами z_1 и z_2, преобразуемъ уравненіе [2] въ слѣдующее:

$$ax^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-z_1\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-z_2\right]=0,$$

или въ такое:

$$ax^2\cdot\frac{(x^2-z_1x+1)(x^2-z_2x+1)}{x^2}=0,$$

или, наконецъ, въ такое:

$$a(x^2-z_1x+1)(x^2-z_2x+1)=0, \qquad [3]$$

гдѣ z_1 и z_2 суть корни уравненія [2'], при чемъ лѣвая часть уравненія (3) тождественно равна лѣвой части уравненія [1].

Всѣ рѣшенія уравненія [3], а слѣдовательно и уравненія [1], суть рѣшенія двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2 - xz_1 + 1 = 0, \quad x^2 - xz_2 + 1 = 0.$$

Обозначимъ четыре корня этихъ уравненій буквами x_1, x_2, x_3, x_4. Лѣвыя части этихъ уравненій представятся соотвѣтственно въ видѣ произведеній:

$$(x - x_1)(x - x_2), \quad (x - x_3)(x - x_4).$$

Уравненіе [3], а слѣдовательно и уравненіе [1], представится такимъ образомъ:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Этотъ видъ уравненія вполнѣ явно показываетъ, что уравненіе [1] имѣетъ четыре корня, которые суть:

$$x = x_1, \ x = x_2, \ x = x_3, \ x = x_4.$$

Изложенное даетъ намъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Взаимное уравненіе*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

имѣетъ четыре рѣшенія, которыя суть корни двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2 - zx + 1 = 0, \qquad [\alpha]$$

гдѣ коэффиціентъ z представляетъ собою оба корня квадратнаго уравненія

$$az^2 + bz + (c - 2a) = 0. \qquad [\beta]$$

Лѣвая часть взаимнаго уравненія можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4), \qquad [\gamma]$$

въ которомъ буквы x_1, x_2, x_3, x_4 суть корни уравненія.

468. Изслѣдованіе. Для того, чтобы значенія x, удовлетворяющія уравненію [α], были вещественны, необходимо, чтобы его коэффиціенты были вещественны, т.-е. чтобы z было вещественно, и чтобы это вещественное значеніе удовлетворяло условію:

$$z^2 - 4 \geqslant 0,$$

т.-е. чтобы оно лежало внѣ промежутка, ограниченнаго числами -2 и $+2$, т.-е. чтобы его модуль былъ не менѣе 2.

Достаточность этихъ условій очевидна.

469. Сопряженные мнимые корни. Теорема. *Если взаимное уравненіе съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексный корень, то оно имѣетъ и сопряженный съ нимъ комплексный корень.*

1°. *Корни уравненія* [β] *вещественны.* Въ этомъ случаѣ уравненія [α] суть уравненія съ вещественными коэффиціентами, и тогда ихъ комплексные корни, если таковые окажутся, суть корни сопряженные.

2°. *Одинъ изъ корней уравненія* [β] *комплексный.* Уравненіе это, будучи уравненіемъ съ вещественными коэффиціентами, имѣетъ сопряженный комплексный корень. Обозначимъ эти корни такъ:

$$z_1 = m + ni, \quad z_2 = m - ni.$$

Уравненія [α] напишутся такимъ образомъ:

$$x^2 - (m + ni)x + 1 = 0, \quad x^2 - (m - ni)x + 1 = 0.$$

Рѣшивъ ихъ, найдемъ:

$$x = \frac{m + ni}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - n^2 - 4}{4} + \frac{1}{2}mni},$$

$$x = \frac{m - ni}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - n^2 - 4}{4} - \frac{1}{2}mni}.$$

Мы знаемъ уже (**443**), что выраженія:

$$\sqrt{\frac{m^2 - n^2 - 4}{4} + \frac{1}{2}mni}, \quad \sqrt{\frac{m^2 - n^2 - 4}{4} - \frac{1}{2}mni}$$

суть сопряженныя комплексныя числа. Обозначимъ ихъ черезъ $(M + Ni)$ и $(M - Ni)$, и тогда

$$x_1 = \left(\frac{m}{2} + M\right) + \left(\frac{n}{2} + N\right)i, \quad x_2 = \left(\frac{m}{2} - M\right) + \left(\frac{n}{2} - N\right)i.$$

$$x_3 = \left(\frac{m}{2} + M\right) - \left(\frac{n}{2} + N\right)i, \quad x_4 = \left(\frac{m}{2} - M\right) - \left(\frac{n}{2} - N\right)i.$$

Результаты эти показываютъ, что комплексные корни взаимнаго уравненія суть попарно сопряженные. Линейные множители $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$, $(x-x_3)$ и $(x-x_4)$ даютъ соотвѣтственно вещественныя произведенія, представляющія трехчлены второй степени относительно буквы x.

470. Взаимные корни. Теорема. *Если число α есть корень взаимнаго уравненія, то и число $\frac{1}{\alpha}$ есть также корень этого уравненія.*

Положимъ, что взаимное уравненіе имѣетъ корень α, такъ что имѣемъ тождественно:

$$a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + b\alpha + a = 0. \qquad [a]$$

Подставивъ теперь въ лѣвую часть уравненія число $\frac{1}{\alpha}$ вмѣсто буквы x, найдемъ:

$$a \cdot \frac{1}{\alpha^4} + b \cdot \frac{1}{\alpha^3} + c \cdot \frac{1}{\alpha^2} + b \cdot \frac{1}{\alpha} + a,$$

или

$$\frac{a + b\alpha + c\alpha^2 + b\alpha^3 + a\alpha^4}{\alpha^4}.$$

Выраженіе это тождественно равно нулю, ибо числитель, на основаніи тождества $[a]$, равенъ нулю, при чемъ знаменатель α^4 не равенъ нулю.

Итакъ, мы видимъ, что наша подстановка обратила лѣвую часть уравненія тождественно въ нуль, т.-е. видимъ, что $\frac{1}{\alpha}$ есть корень уравненія.

471. *Примѣры.* 1°. Рѣшить уравненіе $8x^4 + 52x^3 + 96x^2 + 52x + 8 = 0$. Здѣсь $a = 8$, $b = 52$, $c = 96$. Уравненіе въ z есть слѣдующее:

$$8z^2 + 52z + 80 = 0.$$

Корни его суть: $z_1 = -\frac{5}{2}$, $z_2 = -4$. Уравненія въ x будутъ:

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0,\ x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Корни ихъ суть: $x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -2$, $x_3 = -2 + \sqrt{3}$, $x_4 = -2 - \sqrt{3}$. Лѣвая часть уравненія представляется въ видѣ произведенія:

$$8\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + 2\right)\left(x + 2 - \sqrt{3}\right)\left(x + 2 + \sqrt{3}\right).$$

2°. Рѣшить уравненіе $x^4-2x^3+4x^2-2x+1=0$.

Здѣсь $a=1$, $b=-2$, $c=4$. Уравненіе въ z есть слѣдующее:

$$z^2-2z+2=0.$$

Корни его суть: $z_1=1+i$, $z_2=1-i$. Уравненія въ x будутъ:

$$x^2-(1+i)x+1=0,\quad x^2-(1-i)x+1=0.$$

Рѣшивъ ихъ, найдемъ:

$$x=\frac{1+i}{2}\pm\sqrt{-1+i},\ x=\frac{1-i}{2}\pm\sqrt{-1-i},$$

или, представляя въ комплексномъ видѣ,

$$x_1=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

$$x_2=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

$$x_3=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)-i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

$$x_4=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\right)-i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right).$$

3°. *Изслѣдовать корни уравненія*:

$$x^4+2\lambda x^3+(\lambda+1)x^2+2\lambda x+1=0$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Рѣшеніе предложеннаго уравненія приводится къ рѣшенію двухъ уравненій:

$$z^2+2\lambda z+(\lambda-1)=0, \tag{1}$$

$$x^2-zx+1=0. \tag{2}$$

Для того, чтобы корни уравненія въ x были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы z было вещественно и чтобы

$$z^2-4\geqslant 0. \tag{3}$$

Для того, чтобы корни уравненія въ z были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda^2-\lambda+1\geqslant 0.$$

Это условіе всегда удовлетворено (**416**).

Условіе (3) опредѣлитъ, для вещественности x, слѣдующія границы для z:

$$-\infty \leqslant z \leqslant -2,\quad 2 \leqslant z \leqslant \infty.$$

Опредѣлимъ теперь, при какихъ значеніяхъ λ корни уравненія (1) не выходятъ изъ указанныхъ границъ. Для этой цѣли подставимъ (423) въ лѣвую часть уравненія (1) вмѣсто z послѣдовательно числа: -2 и $+2$ и получимъ результаты подстановокъ:

$$-3(\lambda-1) \quad \text{и} \quad 5\left(\lambda+\frac{3}{5}\right). \tag*{(4) ... (5)}$$

Эти результаты обращаются соотвѣтственно въ нули при $\lambda=1$ и $\lambda=-\frac{3}{5}$.

Разсмотримъ послѣдовательно значенія λ, заключенныя въ каждомъ изъ трехъ промежутковъ:

$$-\infty \underbrace{\quad}_{1} -\frac{3}{5} \underbrace{\quad}_{2} 1 \underbrace{\quad}_{3} +\infty.$$

Для перваго промежутка каждый изъ корней уравненія (2) болѣе (-2) и только одинъ изъ корней болѣе 2, слѣдовательно одинъ изъ корней заключенъ между -2 и $+2$, а другой — между 2 и ∞. Отсюда слѣдуетъ, что меньшій корень уравненія (2) дастъ для x комплексныя значенія, а большій — вещественныя.

Для втораго промежутка каждый изъ корней уравненія (2) болѣе -2 и менѣе 2; отсюда слѣдуетъ, что оба корня даютъ для x комплексныя значенія.

Для третьяго промежутка оба корня менѣе 2 и только одинъ изъ корней менѣе (-2), слѣдовательно одинъ изъ корней заключенъ между -2 и $+2$, а другой — между $-\infty$ и -2. Отсюда слѣдуетъ, что большій корень дастъ для x комплексныя значенія, а меньшій — вещественныя.

Итакъ: для всѣхъ значеній λ, заключенныхъ между $-\infty$ и $-\frac{3}{5}$, предложенное уравненіе имѣетъ два вещественныхъ корня и два комплексныхъ сопряженныхъ.

Для всѣхъ значеній λ, заключенныхъ между $-\frac{3}{5}$ и 1, предложенное уравненіе имѣетъ четыре комплексныхъ корня, попарно сопряженныхъ.

Для всѣхъ значеній λ, заключенныхъ между 1 и $+\infty$, предложенное уравненіе имѣетъ два вещественныхъ корня и два сопряженныхъ комплексныхъ.

472. Общій видъ взаимныхъ уравненій втораго рода. Взаимными уравненіями втораго рода называются уравненія, которыя могутъ быть приведены къ виду:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

гдѣ коэффиціенты a, b, c не зависятъ отъ x.

Рѣшеніе этого уравненія, подобно предъидущему, можетъ быть приведено къ рѣшенію двухъ квадратныхъ уравненій:

$$x^2 - zx - 1 = 0, \qquad [\alpha']$$

гдѣ буква z означаетъ оба корня квадратнаго уравненія:

$$az^2 + bz + (c + 2a) = 0. \qquad [\beta']$$

Относительно этихъ уравненій можно показать, что

1°. *Если взаимное уравненіе втораго рода съ вещественными коэффиціентами имѣетъ комплексный корень, то оно имѣетъ и сопряженный съ нимъ комплексный корень.*

Доказательство аналогично доказательству (**469**).

2°. *Если взаимное уравненіе втораго рода имѣетъ корень α, то оно имѣетъ и корень* $\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$.

Доказательство аналогично доказательству (**470**).

473. Изслѣдованіе Условіе вещественности корней въ данномъ случаѣ единственное:

$$b^2 - 4a(c + 2a) \geqslant 0,$$

выражающее условіе вещественности корней уравненія $[\beta']$.

474. *Примѣръ.* Рѣшить уравненіе:

$$x^4 + 2\lambda x^3 - 3(\lambda + 1)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

Рѣшеніе этого уравненія приводится къ рѣшенію двухъ уравненій:

$$x^2 - zx - 1 = 0,$$
$$z^2 + 2\lambda z - (3\lambda + 1) = 0.$$

Для того, чтобы всѣ корни предложеннаго уравненія были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы корни уравненія въ z были вещественны, т.-е. чтобы

$$\lambda^2 + 3\lambda + 1 \geqslant 0;$$

другими словами, необходимо и достаточно, чтобы число λ лежало внѣ промежутка, ограниченнаго числами $-\frac{\sqrt{5} + 3}{2}$ и $\frac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

§ III. Уравненія двучленныя.

475. Общій видъ двучленныхъ уравненій. Двучленными уравненіями называются уравненія вида:

$$x^n - A = 0, \tag{1}$$

гдѣ A не зависитъ отъ x.

Корни этого уравненія опредѣляютъ всѣ значенія корня $n^{\text{-овой}}$ степени числа A. И въ самомъ дѣлѣ, уравненіе [1] эквивалентно уравненію:

$$x^n = A,$$

показывающему, что всякій корень уравненія [1] есть такое число, которое, будучи возвышено въ степень, показатель которой равенъ n, воспроизведетъ число A, т.-е. корень этотъ представляетъ значеніе $\sqrt[n]{A}$. Обратно, всякое значеніе $\sqrt[n]{A}$ представляетъ собою корень уравненія [1], ибо значеніе это, будучи подставлено вмѣсто буквы x въ лѣвую часть уравненія, обратитъ ее тождественно въ нуль.

Отсюда вытекаетъ, что вопросъ о нахожденіи всѣхъ корней уравненія [1] и вопросъ о нахожденіи всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$ суть вопросы равнозначущіе.

476. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій. Рѣшеніе двучленныхъ уравненій вида [1] можетъ быть приведено къ рѣшенію двучленнаго же уравненія, въ которомъ $A = 1$, или, другими словами, вопросъ о нахожденіи всѣхъ значеній $\sqrt[n]{A}$ можетъ быть сведенъ къ вопросу о нахожденіи всѣхъ значеній $\sqrt[n]{1}$. И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что мы нашли, какимъ ни есть образомъ, одно изъ значеній корня $n^{\text{-овой}}$ степени числа A. Назовемъ его буквою α, такъ что $\alpha^n = A$. Положимъ, что мы нашли всѣ значенія буквы x, т.-е. всѣ корни уравненія [1], и будемъ искать значенія другой буквы y, удовлетворяющія уравненію:

$$y - \frac{x}{\alpha} = 0.$$

Уравненіе это, будучи первой степени относительно буквы y, даетъ одно значеніе буквы y для каждаго значенія буквы x. Положимъ, что это значеніе буквы y найдено. Соотвѣтствующія значенія буквъ x и y связаны, слѣдовательно, такимъ соотношеніемъ:

$$x = \alpha y. \tag{2}$$

Подставивъ это значеніе буквы x въ уравненіе [1] и принявъ во вниманіе, что $\alpha^n = A$, найдемъ:

$$y^n - 1 = 0. \tag{3}$$

Изложенное показываетъ, что вопросъ о рѣшеніи уравненія

$$x^n - A = 0 \tag{1}$$

приводится къ рѣшенію двухъ уравненій:

$$[3] \qquad y^n - 1 = 0, \quad x = \alpha y, \qquad [2]$$

гдѣ α есть одно, какое ни есть, изъ значеній $\sqrt[n]{A}$. Уравненіе [3], будучи эквивалентно уравненію $y^n = 1$, показываетъ, что всѣ корни этого уравненія суть значенія $\sqrt[n]{1}$, и, на оборотъ, всѣ значенія $\sqrt[n]{1}$ суть корни этого уравненія.

Мы увидимъ, что уравненіе [3] имѣетъ n различныхъ значеній, и слѣдовательно уравненіе [2] будетъ имѣть также n различныхъ значеній, которыя найдемъ, умноживъ каждый изъ корней уравненія [3] на число α, т.-е. на какое ни есть значеніе $\sqrt[n]{A}$. Отсюда

Теорема. *Корень $n^{\text{овой}}$ степени числа A имѣетъ n различныхъ значеній, которыя найдемъ, умноживъ послѣдовательно всѣ значенія $\sqrt[n]{1}$ на какое ни есть изъ значеній $\sqrt[n]{A}$.*

477. Различныя значенія $\sqrt[n]{1}$. Займемся, слѣдовательно, рѣшеніемъ уравненія (3). Мы рѣшимъ его только для нѣкоторыхъ частныхъ значеній показателя n.

1°. *Показатель n равенъ двумъ.* Уравненіе $y^2 - 1 = 0$ имѣетъ два рѣшенія: $y_1 = +1$, $y_2 = -1$, и, слѣдовательно, $\sqrt{A}$ имѣетъ два значенія.

Назвавъ одно изъ нихъ буквою α, найдемъ: $\sqrt{A} = \alpha$, $\sqrt{A} = -\alpha$.

2°. *Показатель n равенъ тремъ.* Уравненіе $y^3 - 1 = 0$ можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$(y-1)(y^2+y+1) = 0$$

и распадается на два: $y - 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$.

Рѣшивъ ихъ, получимъ: $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Итакъ, $\sqrt[3]{1}$ имѣетъ три значенія, изъ которыхъ одно вещественное и два комплексныхъ сопряженныхъ. Назвавъ одно изъ комплексныхъ значеній, напримѣръ y_2, буквою ω, легко найдемъ, что

$$y_2=\omega,\ y_3=\omega^2,\ y_1=\omega^0.$$

Если бы назвали буквою ω значеніе y_3, то нашли бы:

$$y_3=\omega,\ y_2=\omega^2,\ y_1=\omega^0.$$

Корень ω, степени котораго суть всѣ корни уравненія, называется *первообразнымъ* корнемъ уравненія $y^3-1=0$. Замѣтимъ, что 1 не есть первообразный корень, между тѣмъ какъ остальные два корня суть корни *первообразные*. Итакъ, строка значеній $\sqrt[3]{1}$ будетъ слѣдующая:

$$\omega^0,\quad \omega,\quad \omega^2,$$

и, слѣдовательно, строка значеній $\sqrt[3]{A}$ будетъ:

$$\alpha\omega^0,\quad \alpha\omega,\quad \alpha\omega^2,$$

гдѣ α представляетъ одно изъ значеній $\sqrt[3]{A}$.

3⁰. *Показатель n равенъ четыремъ.* Уравненіе $y^4-1=0$ можетъ быть написано такимъ образомъ: $(y^2-1)(y^2+1)=0$. Оно распадается на два: $y^2-1=0$, $y^2+1=0$ и даетъ: $y_1=1$, $y_2=-1$, $y_3=+i$, $y_4=-i$.

Итакъ, $\sqrt[4]{1}$ имѣетъ четыре значеніями, изъ которыхъ два вещественныхъ и два комплексныхъ сопряженныхъ. Эти комплексныя значенія суть *первообразные* корни уравненія. Назвавъ одно изъ нихъ. напримѣръ i, буквою ω, найдемъ:

$$\omega=y_3=i,\ \ \omega^2=y_2=-1,\ \ \omega^3=y_4=-i,\ \ \omega^0=y_1=1.$$

Строка значеній $\sqrt[4]{1}$ есть

$$\omega^0,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,$$

при чемъ строка значеній $\sqrt[4]{A}$ будетъ

$$\alpha\omega^0, \quad \alpha\omega, \quad \alpha\omega^2, \quad \alpha\omega^3,$$

гдѣ α есть одно изъ значеній $\sqrt[4]{A}$.

4°. *Показатель n равенъ пяти.* Уравненіе $y^5-1=0$ можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0$$

и распадается на два: $y-1=0$, $y^4+y^3+y^2+y+1=0$.

Первое уравненіе даетъ $y=1$, второе же принадлежитъ къ типу взаимныхъ уравненій (467).

Въ данномъ случаѣ $a=1$, $b=1$, $c=1$. Уравненіе въ z слѣдующее: $z^2+z-1=0$. Рѣшивъ его, найдемъ: $z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Уравненія въ y будутъ:

$$y^2-\frac{-1+\sqrt{5}}{1}\cdot y+1=0, \quad y^2-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}y+1=0.$$

Рѣшивъ ихъ и представивъ корни въ комплексномъ видѣ, получимъ:

$$y_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i.\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i.\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i.\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

$$y_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{3}+i.\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Итакъ, $\sqrt[5]{1}$ имѣетъ пять значеній, изъ которыхъ одно вещественно и равно единицѣ; остальныя же четыре комплексны и попарно сопряженны. Каждый изъ комплексныхъ корней не принадлежитъ ни одному изъ двучленныхъ уравненій:

$$y-1=0, \quad y^2-1=0, \quad y^3-1=0, \quad y^4-1=0 \qquad [\beta]$$

степени ниже пятой.

Легко показать, что количества

$$\omega^0,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4, \qquad [\alpha]$$

гдѣ ω означаетъ одинъ изъ комплексныхъ корней, не равны между собою.

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ наоборотъ, что

$$\omega^p = \omega^q,$$

гдѣ показатели p и q заключаются въ рядѣ: 0, 1, 2, 3, 4, и пусть $p > q$. Равенство это дастъ: $\omega^{p-q} = 1$ и покажетъ, что ω принадлежитъ одному изъ уравненій [β], что несправедливо.

Легко показать, что всякая степень корня ω есть корень уравненія $y^5 - 1 = 0$. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождественно

$$(\omega^n)^5 = (\omega^5)^n = (1)^n = 1.$$

Тождество это можетъ быть написано такимъ образомъ: $(\omega^n)^5 - 1 = 0$. Оно показываетъ, что ω^n есть корень уравненія $y^5 - 1 = 0$. Послѣднее замѣчаніе какъ бы говоритъ намъ, что уравненіе $y^5 - 1 = 0$ имѣетъ безчисленное множество корней, и, слѣдовательно, $\sqrt[5]{1}$ имѣетъ какъ бы безчисленное множество значеній. Но легко показать, что всѣ степени ω выше четвертой приводятся къ одному изъ чиселъ [α]. И въ самомъ дѣлѣ, всякое цѣлое число q можетъ быть представлено въ формѣ $q = 5r + s$, гдѣ r есть цѣлое число, s есть число цѣлое положительное, меньшее пяти. Имѣемъ:

$$\omega^q = \omega^{5r+s} = \omega^{5r}\ .\ \omega^s = (\omega^5)^r\ .\ \omega^s = \omega^s,$$

т.-е. получаемъ одно изъ чиселъ ряда [α].

Итакъ, $\sqrt[5]{1}$ имѣетъ только пять различныхъ значеній:

$$\omega^0,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,$$

гдѣ ω есть одно изъ комплексныхъ значеній этого корня.

Отсюда слѣдуетъ, что корень пятой степени числа A имѣетъ также только пять различныхъ значеній:

$$\alpha\omega^0,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ \alpha\omega^4,$$

гдѣ α есть одно изъ значеній этого корня.

Корень ω называется *первообразнымъ* корнемъ уравненія $y^5 - 1 = 0$.

5°. *Показатель n равенъ шести* Уравненіе $y^6 - 1 = 0$ можетъ быть представлено въ видѣ: $(y^3 - 1)(y^3 + 1) = 0$ и распадается на два: $y^3 - 1 = 0$, $y^3 + 1 = 0$. Первое изъ уравненій мы уже рѣшили и нашли для его корней: $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Что же касается до втораго уравненія, то представляемъ его въ видѣ: $(y + 1)(y^2 - y + 1) = 0$; оно распадается на два: $y + 1 = 0$, $y^2 - y + 1 = 0$. Уравненія эти даютъ слѣдующія рѣшенія: $-1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итакъ, $\sqrt[6]{1}$ имѣетъ шесть значеній:

$$1, -1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Послѣднія два изъ этихъ значеній не принадлежатъ ни одному изъ уравненій $y^n - 1 = 0$, въ которыхъ n менѣе 6.

Назвавъ одно изъ этихъ двухъ значеній буквою ω, мы покажемъ совершенно такимъ же образомъ, какъ и въ предъидущемъ случаѣ, что всѣ значенія $\sqrt[6]{1}$ суть:

$$\omega^0, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5,$$

при чемъ всѣ значенія $\sqrt[6]{A}$ будутъ:

$$\alpha\omega^0, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \alpha\omega^5,$$

гдѣ α есть одно изъ значеній этого корня.

6°. *Показатель n равенъ восьми.* Уравненіе $y^8 - 1 = 0$ распадается на два уравненія: $y^4 - 1 = 0$, $y^4 + 1 = 0$. Первое уравненіе мы уже рѣшили и нашли его корни: $+1, -1, +i, -i$. Что же касается до втораго уравненія, то можемъ написать его въ видѣ: $(y^2 - i)(y^2 + i) = 0$. Оно распадается на два: $y^2 - i = 0$, $y^2 + i = 0$. Корни перваго уравненія суть:

$$y = \pm\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \textbf{(444)},$$

корни же втораго будутъ слѣдующіе:

$$y = \pm\sqrt{-i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Итакъ, $\sqrt[8]{1}$ имѣетъ восемь значеній:

$$+1,\ -1,\ +i,\ -i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Четыре послѣднія значенія не принадлежатъ ни одному изъ уравненій вида $y^n-1=0$, гдѣ n менѣе восьми. Легко покажемъ, что, назвавъ одно изъ этихъ значеній буквою ω, найдемъ для всѣхъ значеній $\sqrt[8]{1}$ строку значеній:

$$\omega^0,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \omega^6,\ \omega^7.$$

7°. *Показатель n равенъ десяти.* Уравненіе $y^{10}-1=0$ распадается на два: $y^5-1=0$, $y^5+1=0$. Первое изъ уравненій мы уже рѣшили. Что же касается до втораго, то представляемъ его въ видѣ:

$$(y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)=0.$$

Оно распадается на два: $y+1=0$, $y^4-y^3+y^2-y+1=0$. Первое уравненіе даетъ $y=1$; второе же уравненіе, принадлежа къ типу взаимныхъ, опредѣлитъ еще четыре корня.

478. Замѣчаніе. Не всѣ уравненія вида $y^n-1=0$ рѣшаются элементарными способами, подобными вышеприведеннымъ. Рѣшеніе этихъ уравненій, при всякомъ n, принадлежитъ высшей алгебрѣ.

* § IV. Трехчленныя уравненія.

479. Рѣшеніе трехчленнаго уравненія. Трехчленнымъ уравненіемъ называется уравненіе, приводящееся къ формѣ

$$ax^{2n}+bx^n+c=0, \qquad [1]$$

гдѣ a, b и c не зависятъ отъ x.

Легко показать, что рѣшеніе этого уравненія приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія и двухъ двучленныхъ $n^{\text{-овой}}$ степени. И въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ за неизвѣстное x^n, положивъ

$$x^n=z. \qquad [2]$$

Уравненіе [1] преобразовывается въ уравненіе степени второй относительно z:

$$az^2+bz+c=0. \qquad [3]$$

Рѣшивъ уравненіе [3] относительно z, найдемъ два значенія для z, вещественныхъ или комплексныхъ.

Эти комплексныя значенія будутъ сопряженныя, если коэффиціенты a, b, c вещественные. Обозначимъ эти значенія буквами z_1 и z_2. Подставляя ихъ послѣдовательно вмѣсто z въ уравненіе [2], получимъ два двучленныхъ уравненія:

$$x^n=z_1,\quad x^n=z_2.$$

Каждое изъ этихъ уравненій даетъ по n значеній для буквы x. Итакъ, мы получимъ теорему:

Теорема. *Трехчленное уравненіе:*

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

имѣетъ $2n$ *корней, которые суть всѣ* n *значеній* $\sqrt[n]{z_1}$ *и всѣ* n *значеній* $\sqrt[n]{z_2}$, *гдѣ* z_1 *и* z_2 *суть корни квадратнаго уравненія*

$$az^2+bz+c=0.$$

480. *Примѣры* 1°. Рѣшить уравненіе $x^6-7x^3-8=0$. Числа z_1 и z_2 суть корни уравненія $z^2-7z-8=0$, т.-е. $z_1=8$, $z_2=-1$.

Корни нашего уравненія суть всѣ значенія $\sqrt[3]{8}$, т.-е. $2, 2\alpha, 2\alpha^2$, гдѣ α есть одинъ изъ комплексныхъ корней уравненія $y^3-1=0$, и суть всѣ значенія $\sqrt[3]{-1}$, т.-е. $-1, -\alpha, -\alpha^2$. Взявъ, напримѣръ, для α значеніе $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, найдемъ:

$$x_1=2,\ x_2=-1+i\sqrt{3},\ x_3=-1-i\sqrt{3},\ x_4=-1,\ x_5=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_6=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Замѣтимъ, что комплексные корни суть корни попарно сопряженные: x_2 и x_3, x_5 и x_6. Лѣвая часть уравненія разлагается на шесть линейныхъ сомножителей:

$$(x-2)(x+1-i\sqrt{3})(x+1+i\sqrt{3})\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Желая избѣжать комплексные знаки, составляемъ произведенія, отвѣчающія сопряженнымъ корнямъ, и находимъ:

$$(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)(x^2-x+1).$$

2°. Рѣшить уравненіе $x^6+4x^3+8=0$. Уравненіе въ z будетъ $z^2+4z+8=0$. Корни его суть: $z_1=-2+2i$, $z_2=-2-2i$. Корни нашего уравненія суть всѣ значенія $\sqrt[3]{-2+2i}$ и всѣ значенія $\sqrt[3]{-2-2i}$.

Легко повѣрить, что одно изъ значеній перваго корня есть $(1+i)$ и одно изъ значеній втораго равно $(1-i)$.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ шесть значеній этихъ двухъ корней и, слѣдовательно, всѣ шесть корней уравненія суть:

$$(1+i),\ \alpha(1+i),\ \alpha^2(1+i),\ (1-i),\ \alpha(1-i),\ \alpha^2(1-i),$$

гдѣ α есть одинъ изъ комплексныхъ корней уравненія $y^3-1=0$, напр. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ V. Пониженіе степени уравненія.

481. Приведеніе уравненія къ нѣсколькимъ уравненіямъ низшихъ степеней. Иногда удается разложить непосредственно лѣвую часть предложеннаго уравненія на множителей, изъ которыхъ каждый представляетъ лѣвую часть одного изъ тѣхъ типовъ уравненій, которые мы разсмотрѣли. Вопросъ о рѣшеніи предложеннаго уравненія будетъ приведенъ, слѣдовательно, къ рѣшенію уравненій, лѣвыя части которыхъ суть эти множители.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^6-3x^5-40x^4+x^3-3x^2-40x=0$.

Мы видимъ во первыхъ, что лѣвая часть имѣетъ множителемъ x и, слѣдовательно, можетъ быть представлена въ видѣ произведенія:

$$x(x^5-3x^4-40x^3+x^2-3x-40).$$

Второй множитель подвергается слѣдующимъ преобразованіямъ:

$$x^5-3x^4-40x^3+x^2-3x-40=(x^5+x^2)-(3x^4+3x)-(40x^3+40)=x^2(x^3+1)-$$
$$-3x(x^3+1)-40(x^3+1)=(x^3+1)(x^2-3x-40)=(x+1)(x^2-x+1)(x^2-3x-40).$$

Итакъ, уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$x(x+1)(x^2-x+1)(x^2-3x-40)=0.$$

Всѣ корни предложеннаго уравненія суть корни уравненій:

$$x=0,\ x+1=0,\ x^2-x+1=0,\ x^2-3x-40=0,$$

и обратно, каждый изъ корней каждаго изъ уравненій принадлежитъ предложенному. Корни же этихъ уравненій суть: $0, -1, +\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, 8, -5$. Лѣвая часть уравненія можетъ быть представлена въ видѣ произведенія множителей, линейныхъ относительно x:

$$x(x+1)\left(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-8)(x+5).$$

482. Знаніе à priori нѣкоторыхъ корней уравненій. Положимъ, что намъ извѣстенъ одинъ изъ корней уравненія. Назовемъ его буквою a. Мы знаемъ, что лѣвая часть уравненія дѣлится безъ остатка на $(x-a)$ (**81**). Частное будетъ многочленъ, цѣлый относительно x, измѣреніе котораго будетъ единицею ниже измѣренія лѣвой части предложеннаго уравненія. Обозначимъ его такимъ образомъ: $Q(x)$.

Уравненіе можетъ написаться въ видѣ: $(x-a)Q(x)=0$. Его рѣшеніе приводится къ рѣшенію двухъ уравненій: $x-a=0$, $Q(x)=0$, степеней низшихъ.

Примѣръ. Рѣшить уравненіе $x^5-2x^4-6x^3+12x^2+x-2=0$.

Одинъ изъ корней его равенъ 2. Лѣвая часть уравненія дѣлится безъ остатка на $(x-2)$, и уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x-2)(x^4-6x^2+1)=0.$$

Рѣшеніе уравненія приводится къ рѣшенію двухъ уравненій:

$$x-2=0,\ x^4-6x^2+1=0.$$

Корни этихъ уравненій суть: $2, \pm(\sqrt{2}\pm 1)$.

* § VI. Ирраціональныя уравненія второй степени.

483. Дадимъ нѣсколько примѣровъ рѣшенія уравненій, въ которыхъ неизвѣстное входитъ подъ знаками квадратныхъ радикаловъ. Положимъ, что уравненіе содержитъ только одинъ радикалъ.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе:

$$3x+\sqrt{6x+10}=35.$$

Отдѣляемъ радикалъ въ одну часть равенства, перенося $3x$ направо, что дастъ:

$$\sqrt{6x+10}=35-3x. \qquad (1)$$

Возвысивъ въ квадратѣ обѣ части этого равенства, найдемъ:

$$6x + 10 = (35 - 3x)^2. \tag{2}$$

Уравненіе это равносильно слѣдующему:

$$x^2 - 24x + 135 = 0. \tag{3}$$

Корни этого уравненія 9 и 15, будучи вещественными и удовлетворяя уравненію (2), обращаютъ количество $(6x + 10)$ въ положительное число, слѣдовательно радикалъ $\sqrt{6x+10}$ будетъ количество вещественное. Корни уравненія (3) удовлетворяютъ необходимо одному изъ уравненій:

$$\sqrt{6x+10} = 35 - 3x, \tag{1}$$

$$-\sqrt{6x+10} = 35 - 3x. \tag{1'}$$

Тотъ изъ корней уравненія (3) удовлетворяетъ уравненію (1), который не превышаетъ $\frac{35}{3}$; корень этотъ равенъ 9; другой корень, равный 15, удовлетворяетъ уравненію (1').

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе:

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = b,$$

въ которомъ a и b представляютъ вещественныя и положительныя количества.

Отдѣляя радикалъ, получимъ:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = b - x. \tag{1}$$

Возвысивъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ:

$$a^2 - x^2 = (b - x)^2. \tag{2}$$

Уравненіе это равносильно слѣдующему:

$$2x^2 - 2bx + (b^2 - a^2) = 0. \tag{3}$$

Для вещественныхъ корней этого уравненія радикалъ $\sqrt{a^2 - x^2}$ есть необходимо вещественное число, ибо эти корни, удовлетворяя уравненію (2), обращаютъ выраженіе $a^2 - x^2$ въ положительное число. Каждый изъ корней удовлетворяетъ необходимо одному изъ уравненій:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = b - x, \tag{1}$$

$$-\sqrt{a^2 - x^2} = b - x. \tag{2}$$

Тотъ изъ корней уравненія (3), который удовлетворяетъ уравненію (1), необходимо долженъ быть не болѣе b.

Корни уравненія (3) вещественны при условіи:

$$b^2 - 2a^2 \leqslant 0.$$

Такъ какъ b и a суть, по условію, количества положительныя, то предъидущее неравенство дастъ:

$$b \leqslant a\sqrt{2}.$$

Но, кромѣ этого, корни должны быть не болѣе b.

Для того, чтобы узнать, какимъ образомъ число b помѣщается относительно корней уравненія (3), подставимъ вмѣсто x число b въ лѣвую часть этого уравненія (**423**); подстановка даетъ:

$$b^2 - a^2.$$

Если $b^2 - a^2 < 0$, т.-е., если $b - a < 0$, то число b заключено между корнями, и, слѣдовательно, только меньшій корень удовлетворяетъ уравненію (1), а большій — уравненію (1').

Но если $b > a$, что не противорѣчитъ условію $b \leqslant a\sqrt{2}$, то b болѣе обоихъ корней, ибо полусумма этихъ корней, равная $\frac{b}{2}$, менѣе b, такъ какъ b положительное. Въ этомъ случаѣ оба корня удовлетворяютъ уравненію (1').

Напишемъ рядъ возрастающихъ чиселъ:

$$0\ \ldots\ a\ \ldots\ a\sqrt{2}\ \ldots\ +\infty.$$

Если b заключено между 0 и a, то задача имѣетъ одно рѣшеніе:

$$x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

Если b заключено въ промежуткѣ между a и $a\sqrt{2}$, то задача имѣетъ два рѣшенія:

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},\ \ x_2 = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

И, наконецъ, если b заключено въ промежуткѣ между $a\sqrt{2}$ и ∞, то задача не имѣетъ ни одного рѣшенія.

На границахъ промежутковъ имѣемъ:

$$b = 0,\ x = -\frac{a\sqrt{2}}{2};\ b = a,\ x_1 = 0,\ x_2 = a;\ b = a\sqrt{2},\ x_1 = x_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

484. Если уравненіе содержитъ два квадратныхъ радикала, то отдѣляемъ ихъ въ одну часть уравненія и послѣ этого возвышаемъ обѣ части уравненія въ квадратъ; отдѣляемъ единственный радикалъ, остающійся послѣ этого возвышенія, и возвышаемъ второй разъ въ квадратъ.

Примѣръ I. Рѣшить уравненіе:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}-7=0.$$

Отдѣляя радикалы, получимъ:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7; \tag{1}$$

возвышая первый разъ въ квадратъ, найдемъ:

$$x+5+2x+8+2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=49; \tag{2}$$

отдѣливъ радикалъ, будемъ имѣть:

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x, \tag{3}$$

и, наконецъ, возвысивъ снова въ квадратъ, получимъ:

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2, \tag{4}$$

что приводится къ уравненію:

$$x^2-288x+1136=0. \tag{5}$$

Корни этого уравненія суть 4 и 284. Корень 284 долженъ быть отброшенъ, ибо онъ не удовлетворяетъ уравненію (3). Корень 4, удовлетворяющій уравненію (3), долженъ удовлетворять одному изъ уравненій:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7, \tag{1}$$

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=-7; \tag{1'}$$

но *à priori* видно, что онъ не удовлетворяетъ уравненію (1'), ибо сумма двухъ положительныхъ радикаловъ не можетъ быть равна отрицательному числу (—7). Итакъ, единственный вещественный корень предложеннаго уравненія есть 4.

A priori видно, что каждый вещественный корень уравненія (5) удовлетворяетъ одному изъ четырехъ уравненій:

$$\pm\sqrt{x+5}\pm\sqrt{2x+8}=7;$$

отброшенный корень 284 удовлетворяетъ уравненію:

$$-\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7.$$

Примѣръ II. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}, \qquad (1)$$

въ которомъ a, b, c представляютъ произвольныя вещественныя числа.

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части предложеннаго уравненія, получимъ:

$$a+x+b+x+2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}=c+x,$$

или, отдѣляя радикалъ,

$$2\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}=(c-a-b)-x. \qquad (2)$$

Возвысивъ снова въ квадратъ, найдемъ:

$$3x^2+2(a+b+c)x+[4ab-(c-a-b)^2]=0. \qquad (3)$$

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ корни этого уравненія вещественны? Необходимо и достаточно, чтобы

$$c^2-(a+b)c+[(a+b)^2-3ab]\geqslant 0. \qquad (4)$$

Корни трехчлена, помѣщеннаго въ лѣвой части этого неравенства, какъ легко видѣть, или комплексны или равны между собою, а потому условіе (4) всегда удовлетворено, и, слѣдовательно, корни уравненія (3) всегда вещественны.

Корни эти, прежде всего, должны удовлетворять уравненію (2), т.-е. должны удовлетворять условію:

$$x\leqslant c-a-b.$$

Подставивъ въ лѣвую часть уравненія (3), вмѣсто x, число $(c-a-b)$, получимъ результатъ подстановки:

$$c^2-(a+b)c+ab.$$

Трехчленъ этотъ, имѣющій корнями числа a и b, будетъ положительный или отрицательный, смотря по тому, находится ли c внѣ промежутка (a, b) или внутри его (**423**). Если c заключено внутри этого промежутка, то одинъ корень уравненія (3), и только одинъ, удовлетворяетъ уравненію (2).

Если, наоборотъ, c находится внѣ этого промежутка, то каждый изъ корней уравненія (3) будетъ или болѣе $c-a-b$, или менѣе $c-a-b$; для того, чтобы узнать, который изъ этихъ случаевъ имѣетъ мѣсто, сравнимъ полусумму корней уравненія (3), т.-е. число $-\frac{1}{3}(a+b+c)$, съ числомъ $(c-a-b)$.

Если положимъ:

$$-\frac{1}{3}(a+b+c)>(c-a-b),$$

т.-е. если

$$2c<a+b,$$

то ни одинъ изъ корней уравненія (3) не удовлетворяетъ уравненію (2). Если же

$$2c > a + b,$$

то оба корня удовлетворяютъ уравненію (2).

И наконецъ, тотъ изъ корней уравненія (3), который удовлетворяетъ уравненію (2), принадлежитъ одному изъ уравненій:

$$-\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}, \tag{1'}$$

$$+\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{c+x}, \tag{1}$$

ибо удвоенное произведеніе радикаловъ первой части имѣетъ знакъ $+$ въ преобразованномъ уравненіи (2).

Замѣтимъ однако, что если значеніе x дѣлаетъ вещественнымъ каждый изъ трехъ радикаловъ, то оно можетъ удовлетворять только уравненію (1), т.-е. предложенному.

Итакъ, слѣдовательно, мы должны сравнить значенія корней уравненія (3) съ числами: $-a$, $-c$, $-b$. Легко видѣть, что подстановки въ лѣвую часть уравненія (3), вмѣсто буквы x, чиселъ $-a$, $-c$, $-b$ даютъ отрицательные результаты; слѣдовательно, меньшій корень уравненія (3) дѣлаетъ радикалы — комплексными, большій — вещественными.

Замѣтимъ, что меньшій корень уравненія (3) придаетъ каждому радикалу форму mi; слѣдовательно, всякое значеніе для x, удовлетворяющее уравненію (2), принадлежитъ уравненію (1).

Итакъ, предположивъ, напримѣръ, что $a<b$, и написавъ возрастающій рядъ:

$$-\infty \underbrace{\quad}_{1} a \underbrace{\quad}_{2} b \underbrace{\quad}_{3} +\infty,$$

получимъ:

Если c заключено въ первомъ промежуткѣ $(-\infty, a)$, то ни одинъ изъ корней уравненія (3) не удовлетворяетъ уравненію (1), ибо тогда $2c < a + b$.

Если c заключено во второмъ промежуткѣ (a, b), то только меньшій корень уравненія (3) удовлетворитъ уравненію (1).

И, наконецъ, если c заключено въ третьемъ промежуткѣ $(b, +\infty)$, то оба корня уравненія (3) удовлетворяютъ уравненію (1), ибо тогда $2c > a + b$.

485. Уравненіе, содержащее четыре квадратныхъ радикала или же большее число ихъ, не можетъ быть, вообще, освобождено отъ этихъ радикаловъ послѣдовательными возвышеніями въ квадратъ.

§ VII. Частные пріемы приведенія нѣкоторыхъ уравненій къ квадратнымъ.

486. Дадимъ нѣсколько примѣровъ приведенія уравненій къ уравненіямъ квадратнымъ.

Примѣры. 1°. Возьмемъ уравненіе:

$$x+4\sqrt{x}=21,$$

отсюда

$$x+4\sqrt{x}+4=25, \text{ или } (\sqrt{x}+2)^2=25;$$

уравненіе это даетъ:

$$\sqrt{x}=-2\pm 5=3 \text{ и } -7, \text{ и, слѣдовательно, } x=9 \text{ и } 49.$$

Изъ этихъ двухъ рѣшеній только 9 удовлетворяетъ уравненію.

2°. Разсмотримъ уравненіе:

$$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6.$$

Оно равносильно уравненію:

$$x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}=\frac{25}{4},$$

или уравненію:

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Уравненіе это распадается на два:

$$x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\pm\frac{5}{2},$$

которыя послѣдовательно даютъ:

$$x^{-\frac{1}{2}}=2 \text{ и } -3,\ x^{-1}=4 \text{ и } 9, \text{ и, наконецъ, } x=\frac{1}{4} \text{ и } \frac{1}{9}.$$

3°. Разсмотримъ уравненіе:

$$x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+18}=24.$$

Уравненіе это равносильно слѣдующему:

$$x^2-7x+18+\sqrt{x^2-7x+18}=42.$$

Разсмотрѣвъ это уравненіе, какъ уравненіе квадратное относительно выраженія $\sqrt{x^2-7x+18}$, и рѣшивъ его относительно этого выраженія, найдемъ:

$$\sqrt{x^2-7x+18}=6 \text{ и } -7,\quad x^2-7x+18=36 \text{ и } 49.$$

Первое уравненіе имѣетъ рѣшеніями: 9 и -2, второе же даетъ:

$$\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{173}).$$

Сдѣлавъ подстановку, увидимъ, что только первыя два рѣшенія удовлетворяютъ предложенному уравненію; остальныя же два принадлежатъ уравненію

$$x^2 - 7x - \sqrt{x^2 - 7x + 18} = 24.$$

4°. Возьмемъ уравненіе:

$$x^4 + 3x + 1 = 3x^3 + \frac{4}{9}x^2.$$

Уравненіе это равносильно уравненію:

$$x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = \frac{4}{9}x^2,$$

или такому:

$$\left(x^2 - \frac{3x}{2}\right)^2 - 2\left(x^2 - \frac{3x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 1 = \frac{4}{9}x^2,$$

или такому:

$$\left(x^2 - \frac{3x}{2}\right)^2 - 2\left(x^2 - \frac{3x}{2}\right) + 1 = \frac{25}{36}x^2.$$

Уравненіе это, по извлеченіи квадратныхъ корней изъ обѣихъ частей, распадается на два уравненія:

$$x^2 - \frac{3x}{2} - 1 = \pm\frac{5}{6}x.$$

Они, будучи рѣшены, даютъ:

$$x = \frac{1}{6}(7 \pm \sqrt{85}), \quad x = \frac{1}{3}(1 \pm \sqrt{10}).$$

5°. Разсмотримъ уравненіе:

$$6x\sqrt{x} - 11x + 6\sqrt{x} - 1 = 0.$$

Оно можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(x - 3\sqrt{x})^2 + 2(x - 3\sqrt{x}) + 1 = x^2$$

и, по извлеченіи квадратныхъ корней изъ обѣихъ частей, распадается на два уравненія:

$$x - 3\sqrt{x} + 1 = x, \quad 2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0.$$

Уравненія эти имѣютъ рѣшеніями: первое — число $\frac{1}{9}$, второе — числа 1 и $\frac{1}{4}$.

6°. Возьмемъ уравненіе:

$$\frac{x+c+\sqrt{x^2-c^2}}{x+c-\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9(x+c)}{8c}.$$

Преобразуемъ это уравненіе при помощи того свойства пропорціи, по которому $\frac{a+b}{a-b}=\frac{p+q}{p-q}$, если $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$. Преобразованіе даетъ:

$$\frac{2(x+c)}{2\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{9x+17c}{9x+c}.$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части и сдѣлавъ нѣкоторыя упрощенія; получимъ:

$$\frac{x+c}{x-c}=\frac{(9x+17c)^2}{(9x+c)^2}.$$

Приложивъ снова предъидущее преобразованіе, найдемъ:

$$\frac{x}{c}=\frac{(9x+17c)^2+(9x+c)^2}{16c(18x+18c)}.$$

Уравненіе это, будучи равносильно квадратному уравненію:

$$63x^2-18cx-145c^2=0,$$

даетъ:

$$x_1=\frac{5c}{3},\quad x_2=-\frac{29c}{21}.$$

* § VIII. Освобожденіе уравненій отъ радикаловъ.

487. Всякое алгебрическое уравненіе, содержащее какіе ни есть радикалы, можетъ быть преобразовано въ уравненіе, не содержащее ихъ.

Положимъ, что уравненіе, по приведеніи всѣхъ его членовъ къ одному знаменателю, заключаетъ въ различныхъ степеняхъ радикалъ $\sqrt[n]{a}$, въ которомъ a представляетъ какое ни есть выраженіе, содержащее неизвѣстное x. Положимъ, что $\sqrt[n]{a}=y$; расположимъ лѣвую часть уравненія по степенямъ y, такъ что уравненіе приметъ форму:

$$A_1y^p+A_2y^{p-1}+A_3y^{p-2}+\ldots+A_py+A_{p+1}=0, \qquad [1]$$

гдѣ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{p+1}$ суть какія ни есть выраженія, не содержащія радикала $\sqrt[n]{a}$, но могущія содержать иные радикалы. Всегда можно положить, что показатель p менѣе показателя n радикала $\sqrt[n]{a}$, ибо еслибы p было не менѣе n, такъ что

$$p = nq + r,$$

гдѣ q представляетъ нѣкоторое цѣлое число, при чемъ r представляетъ цѣлое положительное число, меньшее n, то

$$y^p = y^{nq+r} = y^{nq} \cdot y^r = (y^n)^q \cdot y^r = a^q y^r,$$

т.-е. степень радикала y, показатель которой не менѣе n, приводится къ степени того же радикала, показатель которой менѣе n.

Помножая теперь обѣ части уравненія [1] послѣдовательно на

$$1, y, y^2, \ldots y^{n-1}$$

и понижая тѣ показатели радикала y, которые будутъ не менѣе n, до чиселъ, меньшихъ n, образуемъ систему n уравненій:

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + B_3 y^{n-3} + \ldots + B_{n-1} y + B_n = 0, \\ C_1 y^{n-1} + C_2 y^{n-2} + C_3 y^{n-3} + \ldots + C_{n-1} y + C_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_1 y^{n-1} + N_2 y^{n-2} + N_3 y^{n-3} + \ldots + N_{n-1} y + N_n = 0. \end{array}\right.$$

Эта система представляетъ систему уравненій первой степени относительно $(n-1)$ количествъ:

$$y, \ y^2, \ y^3, \ \ldots, \ y^{n-1}.$$

Исключивъ ихъ изъ системы, получимъ одно уравненіе, не содержащее радикала y.

488. Если уравненіе представляетъ уравненіе первой степени относительно радикала y, т.-е. имѣетъ видъ:

$$A_1 y + A_2 = 0,$$

то оно освобождается отъ радикала такимъ образомъ: переносимъ A_2 въ правую часть уравненія и получаемъ $A_1 y = -A_2$; возвышаемъ обѣ части этого равенства въ n-овую степень и находимъ $A_1^n a = (-A_2)^n$; видимъ, что радикалъ y исчезъ изъ уравненія.

489. *Примѣръ.* Разсмотримъ уравненіе

$$\sqrt{1 + 2x + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} - 1} = 0.$$

Уравненіе это, содержа два радикала:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} \text{ и } \sqrt[3]{x},$$

представляетъ уравненіе первой степени относительно перваго изъ нихъ. Пишемъ уравненіе въ видѣ:

$$\sqrt{1+2x+\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=1-\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}.$$

Возвысивъ обѣ части его въ квадратъ, найдемъ:

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}=(x-2)\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2}.$$

Уравненіе это, содержа два радикала:

$$\sqrt{1+\sqrt[3]{x}},\ \sqrt[3]{x},$$

представляетъ уравненіе первой степени относительно перваго изъ нихъ. Возвысивъ обѣ части уравненія въ квадратъ, получимъ:

$$(x-2)^2\sqrt[3]{x^2}+(x-1)\sqrt[3]{x}-(2x^2-4x+1)=0.$$

Уравненіе это содержитъ только одинъ радикалъ $\sqrt[3]{x}$. Назовемъ его буквою y. Уравненіе можетъ написаться такимъ образомъ:

$$(x-2)^2y^2+(x-1)y-(2x^2-4x+1)=0. \qquad [2]$$

Умноживъ его послѣдовательно на 1, y, y^2, найдемъ:

$$\left\{\begin{aligned} (x-2)^2y^2+ \quad &(x-1)y-(2x^2-4x+1)=0,\\ (x-1)y^2-(2x^2-4x+1)&y+(x-2)^2x \qquad\quad =0,\\ -(2x^2-4x+1)y^2- \quad &(x-2)^2xy+(x-1)x \qquad =0.\end{aligned}\right.$$

Система эта представляетъ систему уравненій первой степени относительно количествъ y, y^2.

Найдя ихъ значенія изъ двухъ уравненій и подставивъ въ третье, получимъ уравненіе

$$x^8-12x^7+58x^6-154x^5+244x^4-218x^3+75^2-x-1=0, \qquad [3]$$

освобожденное отъ радикаловъ.

490. Замѣчаніе I. Высшая Алгебра даетъ иныя средства освобожденія уравненій отъ радикаловъ.

Хотя мы здѣсь и не можемъ останавливаться на этомъ предметѣ, но замѣтимъ, что предъидущее преобразованіе можетъ быть совершено и такимъ образомъ. Обозначимъ буквою α одинъ изъ комплексныхъ корней двучленнаго уравненія $z^3-1=0$, удовлетворяющій тождествамъ: $\alpha^3-1=0$, $\alpha^2+\alpha+1=0$ (477). Разсмотримъ уравненіе [2], назвавъ для сокращенія:

$$(x-2)^2=A,\ (x-1)=B,\ -(2x^2-4x+1)=C.$$

Уравненіе напишется такъ:

$$Az^2+By+C=0.$$

Подставимъ въ лѣвую часть этого уравненія, вмѣсто буквы y, послѣдовательно αy и $\alpha^2 y$; вслѣдствіе этого образуются соотвѣтственно выраженія:

$$A\alpha^2y^2+B\alpha y+C,\ A\alpha y^2+B\alpha^2 y+C.$$

Умноживъ обѣ части уравненія [4] на произведеніе

$$(A\alpha^2y^2+B\alpha y+C)(A\alpha y^2+B\alpha^2y+C)$$

и принявъ во вниманіе, что

$$\alpha^3=1,\ \alpha^2+\alpha+1=0,\ \alpha^2+\alpha=-1,\ \alpha^4=\alpha,\ y^3=x,\ y^6=x^2,$$

получимъ

$$A^3x^2-3ABCx+C^3+B^3x=0.$$

Замѣнивъ здѣсь буквы A, B, C ихъ значеніями, придемъ къ уравненію [3].

491. Замѣчаніе II. Освобожденіе уравненій отъ радикаловъ вводитъ вообще посторонніе рѣшенія. Корни уравненія, освобожденнаго отъ радикаловъ, могутъ и не удовлетворять предложенному уравненію, если мы назначимъ радикаламъ опредѣленныя значенія изъ тѣхъ значеній, которыя способны принимать радикалы. Возьмемъ нѣсколько примѣровъ.

1°. Дано уравненіе $\sqrt{x-1}=7-x$. Освободивъ уравненіе отъ радикаловъ, получимъ квадратное уравненіе $x^2-15x+50=0$, имѣющее корнями $x_1=5$, $x^2=10$.

Подставимъ въ предложенное уравненіе вмѣсто x одно изъ его значеній, напримѣръ 5. Радикалъ $\sqrt{x-1}$ имѣетъ два значенія: $+2$, -2. Назначивъ для его значенія -2, увидимъ, что число 5 не удовлетворяетъ уравненію. Выбравъ же для его значенія $+2$, найдемъ, что 5 удовлетворяетъ уравненію. Испытаемъ второй корень, равный 10. Радикалъ имѣетъ два значенія: $+3$ и -3. Взявъ $+3$, найдемъ, что 10 не удовлетворяетъ уравненію; принявъ же -3, увидимъ, что 10 удовлетворяетъ уравненію.

2°. Разсмотримъ $\sqrt[3]{x-1}=x-7$. Уничтоживъ радикалъ, придемъ къ уравненію третьей степени: $x^3-21x^2+146x-342=0$, имѣющему корнями: $x_1=9$, $x_2=6+i\sqrt{2}$, $x_3=6-i\sqrt{2}$. Возьмемъ корень, равный 9. Радикалъ $\sqrt[3]{x-1}$ имѣетъ три значенія: 2, $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$. Принявъ для радикала значеніе 2, увидимъ, что 9 удовлетворяетъ уравненію; принявъ же для радикала остальныя два значенія, найдемъ, что 9 не удовлетворяетъ уравненію. Разсмотримъ корень, равный $6+i\sqrt{2}$. Радикалъ имѣетъ три значенія:

$$-1+i\sqrt{2},\ \frac{1-\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Принявъ первое значеніе, увидимъ, что $(6+i\sqrt{2})$ удовлетворяетъ уравненію. Взявъ же остальныя два, найдемъ, что корень этотъ не удовлетворяетъ уравненію.

3°. Возьмемъ уравненіе $\sqrt{2+x}+\sqrt{2x-5}=0$. Освободивъ уравненіе отъ радикаловъ, получимъ уравненіе первой степени, имѣющее рѣшеніемъ $x=7$.

Назначивъ каждому радикалу положительное значеніе, увидимъ, что уравненію не удовлетворяетъ 7. Такъ какъ уравненіе, освобожденное отъ радикаловъ, представляетъ уравненіе первой степени и, слѣдовательно, не имѣетъ иного рѣшенія, то предложенное уравненіе не удовлетворяется ни числами вещественными, ни числами комплексными.

492. Замѣчаніе III. Изложенною выше методою (**487**) мы можемъ преобразовать всякое уравненіе съ радикальными коэффиціентами въ уравненіе:

$$A_1x^m+A_2x^{m-1}+\ldots+A_mx+A_{m+1}=0,$$

въ которомъ коэффиціенты: $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ суть числа цѣлыя. Такого рода уравненія называются *алгебрическими*. Отсюда вытекаетъ, что всякое вещественное число x, получаемое, какъ результатъ дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корней, выполненныхъ надъ данными раціональными числами, удовлетворяетъ нѣкоторому *алгебрическому* уравненію. Дадимъ примѣръ. Возьмемъ число $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Оно удовлетворяетъ уравненію: $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$. Возвысивъ обѣ части этого равенства въ третью степень, найдемъ:

$$x^3-3\sqrt{2}\,.\,x^2+6x-2\sqrt{2}=3,$$

или

$$x^3+6x-3=\sqrt{2}\,(3x^2+2).$$

Произведя возвышеніе въ квадратъ обѣихъ частей этого равенства, получимъ уравненіе:

$$x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1=0$$

съ цѣлыми коэффиціентами. Замѣтимъ, что уравненію этому удовлетворяютъ тѣ шесть значеній, которыя получимъ для x, присвоивъ $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ всѣ значенія, принадлежащія этимъ радикаламъ.

Существуютъ, кромѣ разсмотрѣнныхъ нами сейчасъ чиселъ, такія числа, которыя, не представляя результатовъ дѣйствій сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корней, тѣмъ не менѣе удовлетворяютъ алгебрическимъ уравненіямъ. Всѣ числа, удовлетворяющія уравненіямъ вида:

$$A_1x^m+A_2x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0,$$

называются *алгебрическими*.

Тѣ же числа, которыя не удовлетворяютъ никакому алгебрическому уравненію, называются *трансцендентными*. Подобныя числа существуютъ. Въ послѣднее время доказано, что число π, выражающее отношеніе окружности къ діаметру, есть число *трансцендентное*. Трансцендентность этого числа показываетъ, что задача о превращеніи круга въ равномѣрный ему квадратъ невозможна при помощи циркуля и линейки.

Впослѣдствіи намъ придется разсматривать нѣкоторое число, обозначаемое въ математикѣ буквою e и представляющее предѣлъ ряда чиселъ:

$$2,\ 2+\frac{1}{1\,.\,2},\ 2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1.2.3},\ \ldots,\ 2+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+ \\ +\frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \ldots$$

Знаменитый современный французскій геометръ **Эрмитъ** доказалъ, что число это есть число трансцендентное.

Упражненія.

1. Рѣшить слѣдующія биквадратныя уравненія:

$$3x^4-7x^2+20=0,\ 15x^4-8x^2+10=0.$$

2. Образовать биквадратное уравненіе съ раціональными коэффиціентами, одинъ изъ корней котораго равенъ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

3. Образовать биквадратное уравненіе съ вещественными коэффиціентами, одинъ изъ корней котораго равенъ $5-2i$.

4. Опредѣлить параметръ λ такимъ образомъ, чтобы уравненіе

$$(\lambda-2)x^4-2(\lambda+3)x^2+(\lambda-1)=0$$

имѣло: всѣ корни вещественные, два корня вещественныхъ и два комплексныхъ и всѣ четыре корня комплексныхъ.

5. Изслѣдовать корни уравненій:

$$1)\ \ (\lambda-2)x^4+4(\lambda+3)x^2+(\lambda-1)=0,\quad 2)\ \ (3\lambda-1)x^4-(2\lambda+1)x^2+\lambda=0,$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

6. Изслѣдовать корни уравненія:

$$x^4+[2\lambda(\lambda-b)-a^2]x^2+\lambda^2[(\lambda-b)^2-a^2]=0,$$

гдѣ a и b суть данныя положительныя числа, при чемъ λ можетъ имѣть какое ни есть значеніе отъ $-\infty$ до $+\infty$.

7. Опредѣлить значенія параметра λ такимъ образомъ чтобы четыре корня уравненія:

$$x^4-(3\lambda+5)x^2+(\lambda+1)^2=0$$

составляли ариѳметическую прогрессію. Вычислить соотвѣтствующіе корни.

8. Рѣшить неравенства:

$$1)\ x^4-13x^2+36<0,\quad 2)\ (3x^4-2x^2+4)(5x^4+8x^2-1)<0.$$

9. Преобразовать сложные радикалы:

$$1)\ \sqrt{8\pm\sqrt{15}},\quad 2)\ \sqrt{11\pm2\sqrt{10}},\quad 3)\ \sqrt{a+2b+\sqrt{b(2a+3b)}},$$

$$4)\ \sqrt{a+b-c-2\sqrt{b(a-c)}},\quad 5)\ \sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}.$$

10. Образовать взаимныя уравненія перваго и втораго рода, имѣющія корнями числа 3 и 2.

11. Образовать взаимныя уравненія перваго и втораго рода съ вещественными коэффиціентами, имѣющія соотвѣтственно однимъ изъ корней комплексныя числа $2+3i$ и $1-i$.

12. Рѣшить уравненія:

$$1)\ 2x^4-5x^3+7x^2-5x+2=0,\ 2)\ 7x^3+6x^2-6x-7=0,$$

$$3)\ 3x^3-8x^2-8x+3=0,\ 4)\ 5x^4-16x^3+2x^2+16x+5=0.$$

13. Изслѣдовать корни уравненія:

$$(\lambda+1)\,x^4-2\lambda x^3+(\lambda+2)\,x^2-2\lambda x+(\lambda+1)=0,$$

при измѣненіи λ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

14. Найти всѣ алгебрическія выраженія, кубы которыхъ суть 0,125.

15. Найти всѣ алгебрическіе корни пятой степени числа (-32).

16. Разложить $64x^6-729$ на произведеніе трехчленовъ съ вещественными коэффиціентами.

17. Рѣшить слѣдующія трехчленныя уравненія или приводящіяся къ нимъ:

$$1)\ x^6-35x^3+216=0,\ 2)\ x^{10}+31x^5-32=0,$$

$$3)\ 3x+2\sqrt{x}-1=0,\ 4)\ 3x^3+42x^{\frac{3}{2}}-3321=0,$$

$$5)\ x^{\frac{1}{n}}-13x^{\frac{1}{2n}}-14=0,\ 6)\ x+2\sqrt{ax}+c=0,$$

$$7)\ x^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{2x^{\frac{1}{3}}}-\frac{13}{4}=0,\quad 8)\ 3x^n\sqrt[3]{x^n}+\frac{2x^n}{\sqrt[3]{x^n}}=16\ \left(\text{полагая } x=y^{\frac{3}{2n}}\right),$$

$$9)\ 2x+\sqrt{4x+8}=\frac{7}{2},\ 10)\ 2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5,$$

$$11)\ x+5-\sqrt{x+5}=6,\ 12)\ 2\left(x^{\frac{1}{n}}+x^{-\frac{1}{n}}\right)=5,$$

$$13)\ x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28},$$

14) $3x^2+15x-2\sqrt{x^2+5x+1}=2$,

15) $x(x+1)+3\sqrt{2x^2+6x+5}=25-2x$,

16) $x^2-2\sqrt{3x^2-2ax+4}+4=\frac{2a}{3}\left(x+\frac{a}{2}+1\right)$,

17) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=c^4$,

Отв. $x^2+5ax=-5a^2\pm\sqrt{a^4+c^4}$.

18) $a=x^4+(1-x)^4$. **Отв.** Уравненіе квадратное относительно $(x+\frac{1}{2})^2$.

19) $x^4-2x^3+x=a$. **Отв.** $(x^2-x)^2-(x^2-x)=a$.

20) $\sqrt{x}\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$,

Отв. $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)^2+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=42$, 9, $\left(\frac{29}{12}\right)^2$.

21) $x^2-8(x+1)\sqrt{x}+18x+1=0$.

Отв. $(x-4\sqrt{x})^2+2(x-4\sqrt{x}+1)=0$.

22) $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$,

Отв. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)+4=16x^2$.

23) $x^4+4a^3x=a^4$. **Отв.** $(x^2+a^2)^2=2a^2(x-a)^2$.

24) $x^4+ax^3+bx^2+cx+\frac{c^2}{a^2}=0$.

Отв. $\left(x+\frac{c}{ax}\right)^2+a\left(x+\frac{c}{ax}\right)+b-\frac{2c}{a}=0$.

25) $1+\sqrt{1-\frac{a}{x}}=\sqrt{1+\frac{x}{a}}$. **Отв.** $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)+1=0$.

26) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$.

Отв. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)+1=0$.

27) $nx^3+x+n+1=0$. **Отв.** $(x+1)\,[1+n(x^2-x+1)]=0$.

28) $\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1$.

29) $2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20$. **Отв.** $z=\sqrt[3]{x}$.

30) $\frac{x}{a+x}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}=\frac{b}{a}$. **Отв.** $z=\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b}}$.

31) $cx=(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)$. **Отв.** $z=\sqrt{1+x}$.

32) $(x+2)^2+2(x+2)\sqrt{x}-3\sqrt{x}=46+2x$. **Отв.** $z=x+\sqrt{x}+2$.

33) $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}-5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}=0$.

34) $(1+x)^{\frac{2}{5}}+(1-x)^{\frac{2}{5}}=(1-x^2)^{\frac{1}{5}}$.

35) $(a+x)^{\frac{1}{4}}+(a-x)^{\frac{1}{4}}=h$.

18. Рѣшить слѣдующія уравненія, нѣкоторые изъ корней которыхъ даны или легко угадываются.

1) $(x-2)(x-3)(x-4)=1\,.\,2\,.\,3$. **Отв.** Одинъ изъ корней равенъ 5.

2) $6x^3-5x^2+x=0$.

3) $x^3+x^2-4x-4=0$.

4) $\frac{x}{a}+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}=1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$. **Отв.** Одинъ корень равенъ a.

5) $x^2-\frac{2}{3x}=\frac{13}{9}$. **Отв.** Одинъ корень равенъ $-\frac{2}{3}$.

6) $x(x^2-2)=m(x^2+2mx+2)$. **Отв.** Одно рѣшеніе равно $(-m)$.

7) $(x^2-a^2)(x+a)b+(a^2-b^2)(a+b)x+(b^2-x^2)(b+x)a=0$.

8) $x^3+px^2+\left[p-1+\frac{1}{p-1}\right]x+1=0$. **Отв.** Одинъ корень $(1-p)$.

9) $3x^6+8x^4-8x^2=0$. **Отв.** Одно рѣшеніе $x^2=1$.

10) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. **Отв.** Два корня, равныхъ единицѣ.

11) $x^4+\frac{13}{3}x^2-39x-81=0$. **Отв.** Множитель (x^2-9).

19. Рѣшить и изслѣдовать ирраціональныя уравненія:

1) $\sqrt{6x-a}+4x-3a=0$. 2) $x+\sqrt{2x-a^2}=3a$,

3) $2x-\sqrt{x^2-a^2}=4a$, 4) $x-\sqrt{5x-15}=3$,

5) $x^2+7x+\sqrt{x^2+7x+10}=110$,

6) $2x^2-15=4\left(\sqrt{x^2+12x-20}-6x\right)$,

7) $x+4\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{12}{x-4}$,

8) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}$.

20. Рѣшить и изслѣдовать ирраціональныя уравненія:

1) $\sqrt{28+2x}=\sqrt{21+x}+1$,

2) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-5}=1$,

3) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$.

21. Сдѣлать раціональными уравненія:

$$1)\ \sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}=0,$$

$$2)\ \sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0,$$

$$3)\ \sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}=0,$$

$$4)\ \sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}-\sqrt{x-c}=0.$$

Они приводятся къ одному и тому же раціональному квадратному уравненію; показать, что это уравненіе имѣетъ вещественные корни и что если $a>b>c$, то одинъ изъ корней менѣе c, другой — болѣе a; опредѣлить число корней каждаго изъ предложенныхъ уравненій.

22. Рѣшить и изслѣдовать уравненіе:

$$x+\sqrt{x(a-x)}=b.$$

23. Рѣшить уравненіе:

$$2x+\sqrt{x(a-x)}=b.$$

Изслѣдовать въ предположеніи, что a и b положительныя и x должно быть менѣе a.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Системы уравненій высшихъ степеней и системы неравенствъ.

§ I. Уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными.

493. Общая форма уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными. Уравненіе второй степени, съ двумя неизвѣстными x и y, будучи приведено къ цѣлой формѣ, можетъ заключать члены только шести видовъ: члены съ x^2, члены съ xy, члены съ y^2, члены съ y, члены съ x и независимые члены. Уравненіе второй степени можетъ, слѣдовательно, всегда приводиться къ формѣ:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

494. Рѣшеніе системы двухъ уравненій, изъ которыхъ одно есть уравненіе первой степени. Рѣшеніе системъ уравненій есть одинъ изъ сложнѣйшихъ вопросовъ алгебры. Мы ограничимся здѣсь самыми простыми случаями.

Можно всегда рѣшить систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, въ которой одно уравненіе есть уравненіе первой степени, другое же—второй.

Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, систему:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ ax + by = c. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}[1]\\ [2]\end{matrix}$$

Изъ втораго уравненія выводимъ:

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

подставляя это значеніе въ уравненіе [1], получимъ уравненіе въ x второй степени:

$$(Ab^2 - Bab + Ca^2)x^2 + (Bbc - 2Cac + Db^2 - Eab)x + Cc^2 + \\ + Ebc + Fb^2 = 0, \qquad [3]$$

которое опредѣлитъ два значенія для x; подставивъ эти значенія послѣдовательно вмѣсто буквы x въ уравненіе [2], опредѣлимъ два соотвѣтствующихъ значенія y.

Предложенная система имѣетъ, слѣдовательно, двѣ системы рѣшеній. Если оба значенія x вещественныя, то обѣ системы рѣшеній вещественныя; онѣ мнимыя, если значенія x мнимыя.

495. Случай системы двухъ уравненій второй степени. *Если оба уравненія съ двумя неизвѣстными суть уравненія второй степени, то исключеніе одного изъ неизвѣстныхъ приводитъ, вообще, къ полному уравненію четвертой степени.*

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что дана система:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}[1]\\ [2]\end{matrix}$$

Для исключенія y можно было бы получить его значеніе изъ одного уравненія и подставить въ другое, но тогда окончательное уравненіе было бы осложнено радикалами, отъ которыхъ пришлось бы освобождаться.

Проще поступить такимъ образомъ: исключаемъ сперва y^2, умноживъ уравненія соотвѣтственно на C_1 и C и вычтя результаты, что дастъ:

$$(AC_1 - A_1C)x^2 + (BC_1 - CB_1)xy + (DC_1 - D_1C)x + \\ + (EC_1 - E_1C)y + (FC_1 - F_1C) = 0;$$

или, послѣ обозначенія каждаго коэффиціента одною буквою,

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0; \qquad [3]$$

уравненіе это можетъ замѣнять (**259**) одно изъ предложенныхъ уравненій.

Находимъ изъ [3] значеніе y:

$$y = -\frac{ax^2 + cx + e}{bx + d};$$

подставляя значеніе это въ уравненіе [1], найдемъ:

$$Ax^2-\frac{Bx(ax^2+cx+e)}{bx+d}+\frac{C(ax^2+cx+e)^2}{(bx+d)^2}+Dx-\frac{E(ax^2+cx+e)}{bx+d}+F=0. \quad [4]$$

Уравненіе это, по уничтоженіи знаменателей, приводится къ уравненію четвертой стéпени, содержащему, вообще, члены съ третьей и первою степенями неизвѣстнаго. Уравненіе подобнаго вида не можетъ быть рѣшено способами элементарной алгебры.

Итакъ, система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными не можетъ быть рѣшена, вообще, извѣстными уже методами. Встрѣчаются однако простыя системы, которыя, при помощи нѣкоторыхъ частныхъ пріемовъ, могутъ быть рѣшены.

Этимъ теперь и займемся.

496. Рѣшеніе нѣкоторыхъ простыхъ системъ.

1°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a, \\ xy&=b^2. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Мы видимъ непосредственно (**405**), что x и y суть корни уравненія

$$z^2-az+b^2=0;$$

рѣшивъ его, найдемъ:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}. \quad [2]$$

Для того, чтобы корни были вещественные, необходимо, чтобы $a^2 \geqslant 4b^2$.

2°. Возьмемъ систему:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=a, \\ xy&=b^2. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Система эта приводится къ предъидущей, если сдѣлаемъ $y=-v$, ибо тогда:

$$x+v=a, \ xv=-b^2,$$

и, слѣдовательно, $\begin{matrix} x \\ v \end{matrix}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$.

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y&=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{aligned}\right\}[2], \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x&=\frac{a-\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \\ y&=-\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2} \end{aligned}\right\}. \quad [3]$$

3°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a, \\ x^2+y^2&=b^2. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части перваго уравненія и вычтя второе, найдемъ:

$$2xy=a^2-b^2.$$

Зная сумму и произведеніе неизвѣстныхъ, которыя суть, слѣдовательно, корни уравненія

$$z^2-az+\frac{a^2-b^2}{2}=0,$$

найдемъ:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2-a^2}}{2}.$$

Если $2b^2-a^2 \geqslant 0$, то значенія x и y вещественныя; они мнимыя, если $2b^2-a^2<0$.

4°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2, \\ xy&=b^2. \end{aligned}\right\} \quad [1]$$

Умноживъ на 2 обѣ части втораго уравненія и послѣдовательно сложивъ результатъ съ уравненіемъ первымъ и вычтя изъ него, замѣнимъ предложенную систему системою эквивалентною (**259**):

$$\left.\begin{aligned} (x+y)^2&=a^2+2b^2, \\ (x-y)^2&=a^2-2b^2. \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Отсюда выводимъ:

$$\begin{aligned} x+y&=\pm\sqrt{a^2+2b^2}, \\ x-y&=\pm\sqrt{a^2-2b^2}. \end{aligned} \quad [3]$$

Сложивъ и вычтя по частямъ эти уравненія и раздѣливъ результаты на 2, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} x&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b^2}, \\ y&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2b^2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b^2}. \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

Замѣчаніе. Казалось бы, что существуетъ восемь системъ рѣшеній, которыя получимъ, комбинируя всевозможными способами знаки радикаловъ. Но должно замѣтить, что уравненія [3] образуютъ только четыре системы, и именно, если назовемъ $\sqrt{a^2+2b^2}=R$ и $\sqrt{a^2-2b^2}=R_1$,

$$\left.\begin{aligned} x+y&=R, \\ x-y&=R_1 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x+y&=-R, \\ x-y&=R_1 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x+y&=R, \\ x-y&=-R_1 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} x+y&=-R, \\ x-y&=-R_1. \end{aligned}\right\}$$

Далѣе, уравненія [1] симметричны относительно x и y; отсюда слѣдуетъ, что первая и третья системы эквивалентны; то же самое должно замѣтить относительно второй и четвертой системъ. Существуютъ, слѣдовательно, въ сущности, только двѣ системы рѣшеній. Эти системы будутъ вещественныя, если $a^2 \geqslant 2b^2$, и мнимыя, если $a^2 < 2b^2$.

5°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2, \\ xy &= b^2. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Приведемъ эту систему къ системѣ 2°, написавъ:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2, \\ x^2y^2 &= b^4. \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Находимъ сперва x^2 и y^2, потомъ x и y:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{-a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}} \end{aligned}\right\} [3], \text{ или же } \left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{-a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}} \end{aligned}\right\}. [4]$$

Замѣтимъ, что система [2] общнѣе системы [1], ибо мы возвышали въ квадратъ обѣ части уравненія [1]. Мы должны, слѣдовательно, брать совмѣстно только тѣ значенія буквъ x и y, произведеніе которыхъ равно b^2, т.-е. брать значенія, сопровождаемыя однимъ и тѣмъ же знакомъ. Существуютъ слѣдовательно, четыре системы: двѣ вещественныхъ и двѣ мнимыхъ.

6°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} 2y^2 - 4xy + 3x^2 &= 17, \\ y^2 - \ x^2 &= 16. \end{aligned}\right\}$$

Дѣлаемъ $y = vx$ и, подставляя въ оба уравненія, получаемъ:

$$x^2(2v^2 - 4v + 3) = 17, \quad x^2(v^2 - 1) = 16.$$

Опредѣляя отсюда x^2, находимъ:

$$x^2 = \frac{17}{2v^2 - 4v + 3}, \quad x^2 = \frac{16}{v^2 - 1};$$

отсюда

$$\frac{17}{2v^2 - 4v + 3} = \frac{16}{v^2 - 1},$$

или

$$15v^2 - 64v + 65 = 0.$$

Уравненіе это имѣетъ два рѣшенія: $\frac{5}{3}$, $\frac{13}{5}$.

Рѣшеніе $\frac{5}{3}$ даетъ: $x=\pm 3$, $y=vx=\pm 5$, рѣшеніе же $\frac{13}{5}$ опредѣляетъ: $x=\pm\frac{5}{3}, y=\pm\frac{13}{3}$.

§ II. Уравненія второй степени съ нѣсколькими неизвѣстными.

497. *Примѣры*. **1°**. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=b^2,\\ xy&=cz. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части перваго уравненія послѣ перенесенія z во вторую, найдемъ:

$$x^2+2xy+y^2=a^2-2az+z^2.$$

Замѣнивъ здѣсь x^2+y^2 и xy ихъ значеніями, полученными изъ двухъ другихъ уравненій, найдемъ:

$$2z^2-2(a+c)z+a^2-b^2=0,$$

откуда

$$z=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-2(a^2-b^2)}}{2}.$$

Опредѣливъ z, мы узнаемъ сумму $(x+y)$ изъ перваго уравненія и произведеніе xy изъ третьяго и поступимъ такъ, какъ въ n^0 **(496)**.

2°. Пусть дана система:

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=37,\\ x^2+xz+z^2&=28,\\ y^2+yz+z^2&=19. \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Вычтя второе уравненіе изъ перваго и третье изъ втораго, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} (y-z)(x+y+z)&=9,\\ (x-y)(x+y+z)&=9, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$y-z=x-y, \text{ т.-е. } x+z=2y, \qquad [2]$$

и, слѣдовательно,

$$(x-y)y=3. \qquad [3]$$

Послѣднее уравненіе даетъ: $x=\frac{3}{y}+y$. Подставивъ это значеніе въ первое изъ предложенныхъ уравненій, получимъ:

$$\left(\frac{3}{y}+y\right)^2+3+y^2+y^2=37,$$

или

$$3y^4-28y^2+9=0;$$

это биквадратное уравненіе даетъ:

$$y=\pm 3,\quad y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Слѣдовательно, $x=\pm 4,\quad x=\pm\frac{10}{3}\sqrt{3},\quad z=\pm 2,\quad z=\pm\frac{8}{3}\sqrt{3}.$

§ III. Уравненія высшихъ степеней.

498. *Примѣры.* 1°. Дана система:

$$\left.\begin{aligned} x^2y+xy^2&=30,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{5}{6}.\end{aligned}\right\}\qquad [1]$$

Освободивъ систему отъ знаменателей, напишемъ ее такимъ образомъ:

$$xy(x+y)=30,\quad 6(x+y)=5xy.$$

Взявъ xy и $(x+y)$ за вспомогательныя неизвѣстныя u и v, найдемъ:

$$uv=30,\quad 6v=5u. \qquad [2]$$

Второе уравненіе даетъ: $v=\frac{5}{6}u$. Подставивъ это значеніе въ уравненіе первое, получимъ: $\frac{5}{6}u^2=30$, или $u^2=36$; откуда $u=\pm 6$ и $v=\pm 5$. Значенія u и v должны быть взяты съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, ибо $\frac{v}{u}$, равное $\frac{5}{6}$, есть число положительное.

Принявъ $u=6$, $v=5$, получимъ: $x+y=5$, $xy=6$; откуда найдемъ, для x и y, значенія 2 и 3.

Принявъ же $u=-6$, $v=-5$, получимъ для x и y значенія: -6 и 1.

2°. Возьмемъ еще систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}&=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2},\\ 4y^2-xy&=x.\end{aligned}\right\}\qquad [1]$$

Первое уравненіе преобразовывается въ слѣдующее:

$$4x^2+(4+y)yx^2=(8+4y)xy^2+12y^4;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по $4y^4$, найдемъ:

$$x^2(2+y)^2-4xy^2(2+y)+4y^4=16y^4,$$

или

$$[x(2+y)-2y^2]^2=(4y^2)^2,$$

откуда

$$x(2+y)-2y^2=\pm 4y^2. \qquad [2]$$

Предложенная система эквивалентна, слѣдовательно, двумъ системамъ:

$$[3] \qquad \left\{ \begin{array}{c} x(2+y)-2y^2=4y^2, \\ 4y^2-xy=x. \end{array} \right. ; \quad \begin{array}{c} x(2+y)-2y^2=-4y^2, \\ 4y^2-xy=x. \end{array} \right\} \qquad [4]$$

Эти двѣ системы рѣшаются безъ затрудненій.

И въ самомъ дѣлѣ, второе изъ уравненій [3] даетъ: $x=\frac{4y^2}{y+1}$. Подставивъ значеніе это въ первое уравненіе, получимъ: $2y^2(1-y)=0$, откуда $y=0$ и $y=1$, и, слѣдовательно, $x=0$ и $x=2$.

Найдемъ подобнымъ же образомъ для системы [4]:

$$y=0 \text{ и } y=-\frac{5}{3}, \text{ и, слѣдовательно, } x=0 \text{ и } x=-\frac{50}{3}.$$

Итакъ, рѣшенія предложенной системы суть:

$$1)\ x=0,\ y=0;\ \ 2)\ x=2,\ y=1;\ \ 3)\ x=-\frac{50}{3},\ y=-\frac{5}{3}.$$

8°. Возьмемъ, наконецъ, систему:

$$\left. \begin{array}{r} x^3+y^3+x^2y+y^2x=13, \\ x^4y^2+x^2y^4=468. \end{array} \right\} \qquad [1]$$

Система эта можетъ написаться такимъ образомъ:

$$(x+y)(x^2+y^2)=13, \quad x^2y^2(x^2+y^2)=468.$$

Раздѣливъ второе уравненіе на первое, найдемъ:

$$x^2y^2=36(x+y),$$

уравненіе, могущее замѣнить одно изъ данныхъ. Назвавъ произведеніе xy и сумму $(x+y)$ соотвѣтственно буквами u и v, обратимъ систему въ слѣдующую:

$$v(v^2-2u)=13, \quad u^2=36v. \qquad [2]$$

Исключивъ v изъ этихъ уравненій, найдемъ:

$$\frac{u^6}{36^3}-\frac{2u^3}{36}-13=0,$$

трехчленное уравненіе, дающее

$$\frac{u^3}{36}=36\pm\sqrt{36^2+13\cdot 36}$$

откуда

$$u_1 = -6, u_2 = -6\alpha, u_3 = -6\alpha^2, u_4 = 6\sqrt[3]{13}, u_5 = 6\alpha\sqrt[3]{13}, u_6 = 6\alpha^2\sqrt[3]{13},$$

гдѣ α есть одинъ изъ мнимыхъ корней уравненія $y^3-1=0$. Значенія v, соотвѣтствующія вещественнымъ значеніямъ u, суть: $v=1$ и $v=\sqrt[3]{13^2}$.

Принявъ $u=-6$ и $v=1$, получимъ, для опредѣленія x и y, уравненіе: $z^2-z-6=0$, которое даетъ: $x=3$, $y=-2$. Взявъ же $u=6\sqrt[3]{13}$ и $v=\sqrt[3]{13^2}$, найдемъ уравненіе: $z^2-\sqrt[3]{13^2}.\ z+6\sqrt[3]{13}=0$, которое дасть:

$$x=\frac{\sqrt[3]{13^2}}{2}+i\frac{\sqrt{11\sqrt[3]{13}}}{2},\quad y=\frac{\sqrt[3]{13^2}}{2}-i.\frac{\sqrt{11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

§ IV. Рѣшеніе системы двухъ неравенствъ, изъ которыхъ, по крайней мѣрѣ, одно есть неравенство второй степени.

499. *Примѣръ I.* Рѣшить систему:

$$5x^2+y^2>xy+x, \tag{1}$$
$$2x<3y. \tag{2}$$

Перепишемъ эти неравенства такимъ образомъ:

$$f(x)=5x^2-(y+1)x+y^2>0,$$
$$\varphi(x)=2x-3y<0.$$

Найдемъ сперва природу корней уравненія $f(x)=0$; для этой цѣли образуемъ:

$$F(y)=(y+1)^2-20y^2.$$

Корни $F(y)$ суть:

$$y_1=-\frac{2\sqrt{5}-1}{19},\quad y_2=\frac{2\sqrt{5}+1}{19}.$$

1°. Для всякаго значенія буквы y, удовлетворяющаго условіямъ:

$$-\infty\leqslant y<y_1,\quad y_2<y\leqslant\infty,$$

выраженіе $F(y)$ есть число отрицательное, слѣдовательно $f(x)$ имѣетъ мнимые корни, а потому неравенство (1) удовлетворено при всякомъ x. Остается, слѣдовательно, удовлетворить неравенству (2), т.-е. взять $x<\frac{3y}{2}$.

2°. Для всякаго значенія буквы y, удовлетворяющаго условіямъ $y_1 < y < y_2$ выраженіе $F(y)$ остается положительнымъ, и, слѣдовательно, корни уравненія $f(x)=0$:

$$x_1 = \frac{y+1-\sqrt{-19y^2+2y+1}}{10}, \quad x_2 = \frac{y+1+\sqrt{-19y^2+2y+1}}{10}$$

вещественны и различны. Отсюда слѣдуетъ, что для удовлетворенія неравенству (1) должно взять:

$$-\infty \leqslant x < x_1, \quad x_2 < x \leqslant +\infty.$$

Но должно удовлетворить неравенству (2) и, слѣдовательно, должно сравнить $\frac{3y}{2}$ съ числами x_1 и x_2. Чтобы сдѣлать это сравненіе, образуемъ:

$$f\left(\frac{3y}{2}\right) = \frac{1}{4}\,y(43y-6).$$

Замѣтивъ, что числа:

$$-\infty \ldots y_1 \ldots 0 \ldots \frac{6}{43} \ldots y_2 \ldots +\infty$$

идутъ въ возрастающемъ порядкѣ, изучимъ слѣдующіе три новыхъ случая:

I. $y_1 < y < 0$; тогда $f\left(\frac{3y}{2}\right) > 0$, и такъ какъ $\frac{y+1}{10} > \frac{3y}{2}$, то рядъ:

$$-\infty \ldots \frac{3y}{2} \ldots x_1 \ldots x_2 \ldots +\infty$$

есть рядъ возрастающій, и предъидущія неравенства приводятся къ

$$x < \frac{3y}{2}.$$

II. $0 < y < \frac{6}{43}$; тогда $f\left(\frac{3y}{2}\right) > 0$, и возрастающій рядъ будетъ слѣдующій:

$$-\infty \ldots x_1 \ldots \frac{3y}{2} \ldots x_2 \ldots +\infty.$$

Предложенныя неравенства приводятся къ

$$x < x_1.$$

III. $\frac{6}{43} < y < y_2$; тогда $f\left(\frac{3y}{2}\right) > 0$, и такъ какъ $\frac{y+1}{10} < \frac{3y}{2}$, то возрастающій рядъ будетъ слѣдующій:

$$-\infty \ldots x_1 \ldots x_2 \ldots \frac{3y}{2}.$$

Необходимо, слѣдовательно, для удовлетворенія предложеннымъ неравенствамъ взять:

$$x<x_1, \text{ или же } x_2<x<\frac{3y}{2}.$$

Результатъ изслѣдованія будетъ слѣдующій:

$y<0$ . . . . $x<\frac{3y}{2}$;

$0<y<\frac{6}{43}$ . . . . $x<\frac{y+1-\sqrt{-19y^2+2y+1}}{10}$;

$\frac{6}{43}<y<\frac{2\sqrt{5}+1}{19}$ $\left\{\begin{array}{l} x<\frac{y+1-\sqrt{-19y^2+2y+1}}{10}, \\ \text{или } \frac{y+1+\sqrt{-19y^2+2y+1}}{10}<x<\frac{3y}{2} \end{array}\right.$

$y>\frac{2\sqrt{5}+1}{19}$ . . . . $x<\frac{3y}{2}$.

500. *Примѣръ II.* Рѣшить систему:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2+x \geqslant 3y^2-xy, \\ 3x^2-y^2 \leqslant 2xy. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

Переписываемъ эту систему такимъ образомъ:

$$f(x)=2x^2+(y+1)x-3y^2 \geqslant 0,$$
$$\varphi(x)=3x^2-\quad 2yx-\ y^2 \leqslant 0$$

и замѣчаемъ, что корни каждаго изъ уравненій:

$$f(x)=0, \quad \varphi(x)=0,$$

при всякомъ вещественномъ значеніи y, вещественны, ибо условія невещественности: $7y^2+2y+1<0$, $7y^2<0$ не удовлетворяются при вещественномъ y. Положимъ, что корни перваго уравненія суть α и β ($\alpha<\beta$), а корни втораго равны α_1 и β_1 ($\alpha_1<\beta_1$).

Для удовлетворенія первому неравенству должно взять:

$$x \leqslant \alpha \quad \text{или} \quad x \geqslant \beta;$$

для удовлетворенія же второму необходимо, чтобы

$$\alpha_1 \leqslant x \leqslant \beta_1.$$

Задача приводится, слѣдовательно, *къ расположенію въ возрастающемъ порядкѣ корней уравненій: $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$.*

Для этой цѣли образуемъ тождество:

$$3f(x)-2\varphi(x)=(7y+3)x-7y^2. \qquad (3)$$

Подставивъ въ него, вмѣсто буквы x, число α_1, найдемъ:

$$3f(\alpha_1)=(7y+3)\alpha_1-7y^2;$$

это равенство говоритъ, что *знакъ числа* $f(\alpha_1)$ *одинаковъ со знакомъ числа*

$$(7y+3)\alpha_1-7y^2.$$

Различимъ два случая, смотря по тому, будетъ ли y менѣе или болѣе числа $\left(-\frac{3}{7}\right)$.

1°. $y<-\frac{3}{7}$. Въ этомъ предположеніи знакъ $f(\alpha_1)$ противоположенъ знаку числа $\left(\alpha_1-\frac{7y^2}{7y+3}\right)$; чтобы имѣть знакъ этой разности, образуемъ подстановку:

$$\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)=-\frac{3y^2}{(7y+3)^2}(28y+3).$$

Количество это будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, будетъ ли y менѣе или болѣе числа $\left(-\frac{3}{28}\right)$; слѣдовательно, при сдѣланномъ предположеніи: $y<-\frac{3}{7}$, результататъ подстановки положителенъ, а потому $\frac{7y^2}{7y+3}$ менѣе каждаго изъ чиселъ: α_1 и β_1, ибо знаки этихъ чиселъ противоположны; отсюда заключаемъ, что $f(\alpha_1)$ и $f(\beta_1)$ отрицательны, и возрастающій рядъ будетъ таковъ:

$$-\infty\ \ldots\ \alpha\ \ldots\ \alpha_1\ \ldots\ \beta_1\ \ldots\ \beta\ \ldots\ +\infty,$$

т.-е., слѣдовательно, невозможно удовлетворить въ одно и то же время предложеннымъ неравенствамъ.

2°. Если $y=-\frac{3}{7}$, то заключеніе будетъ то же, ибо

$$3f(\alpha_1)=3f(\beta_1)=-7y^2.$$

3°. Если $-\frac{3}{7}<y<-\frac{3}{28}$, то $\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)>0$; слѣдовательно, положительное число $\frac{7y^2}{7y+3}$ болѣе каждаго изъ чиселъ α_1 и β_1, знаки которыхъ противоположны; отсюда заключаемъ, что $f(\alpha_1)$ и $f(\beta_1)$ отрицательны, а потому невозможно удовлетворить предложеннымъ неравенствамъ.

4°. Если $y=-\frac{3}{28}$, то $\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)=0$; подставивъ въ тождество (3), вмѣсто буквы x, выраженіе $\frac{7y^2}{7y+3}$, найдемъ:

$$f\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)=0.$$

Отсюда заключаемъ, что система удовлетворяется:

$$y = -\frac{3}{28}, \quad x = \left(\frac{7y^2}{7y+3}\right)_{y=-\frac{3}{28}} = \frac{1}{28}.$$

5°. Если $y > -\frac{3}{28}$, то $\varphi\left(\frac{7y^2}{7y+3}\right) < 0$, и возрастающій рядъ будетъ таковъ:

$$-\infty \ldots \alpha \ldots \alpha_1 \ldots \beta \ldots \beta_1 \ldots +\infty.$$

Система удовлетворяется слѣдующими значеніями:

$$\beta \leqslant x \leqslant \beta_1, \quad y > -\frac{3}{28},$$

т.-е.

$$\frac{-y-1+\sqrt{25y^2+2y+1}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{y+2\sqrt{y^2}}{3} \text{ вмѣстѣ съ } y > -\frac{3}{28}.$$

Вотъ, слѣдовательно, результатъ изслѣдованія:

$y < -\frac{3}{28}$ . . . . невозможность

$y = -\frac{3}{28}$ . . . . $x = \frac{1}{28}$

$y > -\frac{3}{28}$ . . . $\frac{-y-1+\sqrt{25y^2+2y+1}}{4} \leqslant x \leqslant \frac{y+2\sqrt{y^2}}{3}$.

Упражненія.

1. $4x^2+7y^2=148$, $3x^2-y^2=11$. **Отв.** $x=\pm 3$, $y=\pm 4$.
2. $x+y=100$, $xy=2400$. **Отв.** $x=60, 40$; $y=40, 60$.
3. $x+y=4$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. **Отв.** $x=2$, $y=2$.
4. $x+y=7$, $x^2+2y^2=34$. **Отв.** $x=4, \frac{16}{3}$; $y=3, \frac{5}{3}$.
5. $x-y=12$, $x^2+y^2=74$. **Отв.** $x=7, 5$; $y=-5, -7$.
6. $x-\frac{x-y}{2}=4$, $y-\frac{x+3y}{x+2}=1$. **Отв.** $x=2, 5$; $y=6, 3$.
7. $x^2+y^2=65$, $xy=28$. **Отв.** $x=\pm 7, \pm 4$; $y=\pm 4, \pm 7$.
8. $xy=1$, $3x-5y=2$. **Отв.** $x=-1, \frac{5}{3}$; $y=-1, \frac{3}{5}$.

9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2,\ x+y=2.$ **Отв.** $x=1,\ y=1.$

10. $x^2+xy+2y^2=74,\ 2x^2+2xy+y^2=73.$ **Отв.** $x=\pm 3,\ \mp 8;\ y=\pm 5.$

11. $2x+3y=37,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{14}{45}.$ **Отв.** $x=5,\ \frac{333}{28};\ y=9,\ \frac{370}{84}.$

12. $x^2+3xy=54,\ xy+4y^2=115.$ **Отв.** $x=\pm 3,\ \pm 36;\ y=\pm 5,\ \mp\frac{23}{2}.$

13. $x^2+xy=15,\ xy-x^2=2.$ **Отв.** $x=\pm 3,\ \pm\frac{5}{\sqrt{2}};\ y=\pm 2,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

14. $x^2+xy+4y^2=6,\ 3x^2+8y^2=14.$ **Отв.** $x=\mp 2,\ \pm\sqrt{\frac{2}{5}},$

$y=\pm\frac{1}{2},\ \mp 2\sqrt{\frac{2}{5}}.$

15. $x^2+xy=12,\ xy-2y^2=1.$ **Отв.** $x=\pm 3,\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}};\ y=\pm 1,\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$

16. $x^2-xy+y^2=21,\ y^2-2xy+15=0.$ **Отв.** $x=\pm 4,\ \pm 3\sqrt{3};\ y=5,\ \pm\sqrt{3}.$

17. $x^2-4y^2=9,\ xy+2y^2=3.$ **Отв.** $x=\pm\frac{15}{\sqrt{11}},\ y=-\frac{3}{\sqrt{21}}.$

18. $7x^2-8xy=159,\ 5x+2y=7.$ **Отв.** $x=3,\ -\frac{53}{27};\ y=-4,\ \frac{227}{27}.$

19. $x^2-2xy-y^2=1,\ x+y=2.$ **Отв.** $x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\ y=2\mp\sqrt{\frac{5}{2}}.$

20. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3},\ x^2+y^2=45.$ **Отв.** $x=\pm 6;\ y=\pm 3,\ \mp 3.$

21. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2},\ x^2+y^2=20.$ **Отв.** $x=\pm 3\sqrt{2};\ y=\pm\sqrt{2},\ \mp\sqrt{2}.$

22. $0,\ 1y+0,\ 125x=y-x,\ y-0,\ 5x=0,\ 75xy-3x.$ **Отв.** $x=0;\ 4;\ y=0;\ 5.$

23. $\left.\begin{array}{l} y^2-4xy+20x^2+3y-264x=0,\\ 5y^2-38xy+x^2-12y+1056x=0.\end{array}\right\}$ **Отв.** $x=0;\ 15;\ y=0;\ 45.$

24. $x+y=x^2,\ 3y-x=y^2.$ **Отв.** $x=0;\ 2,\ \mp\sqrt{2};\ y=0;\ 2,\ 2\mp\sqrt{2}.$

25. $x^2+y^2=\frac{5}{2}xy,\ x-y=\frac{1}{4}xy.$ **Отв.** $x=0;\ 4,\ -2;\ y=0;\ 2,\ -4.$

26. $x+2y+\frac{3x}{y}=16;\ \ 3x+y+\frac{3x}{y}=23.$ **Отв.** $x=5,\ \frac{21}{5};\ y=3,\ \frac{7}{5}.$

27. $4(x+y)=3xy,\ x+y+x^2+y^2=26.$ **Отв.** $x=4;\ 2;\ y=2;\ 4.$

28. $x-y=2,\ x^3-y^3=8.$ **Отв.** $x=2,\ 0;\ y=0.\ -2.$

29. $x+y=5,\ x^3+y^3=65.$ **Отв.** $x=1;\ 4;\ y=4;\ 1.$

30. $x+y=11,\ x^3+y^3=1001.$ **Отв.** $x=1;\ 10;\ y=10;\ 1.$

31. $xy(x+y)=30,\ x^3+y^3=35.$ **Отв.** $x=3;\ 2;\ y=2;\ 3.$

32. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18,\ x+y=12$. **Отв.** $x=8;\ 4;\ y=4;\ 8$.

33. $x+y=18,\ x^3+y^3=4914$. **Отв.** $x=17;\ 1;\ y=1;\ 17$.

34. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=9,\ x+y=6$. **Отв.** $x=4;\ 2;\ y=2;\ 4$.

35. $x^2(x+y)=80,\ x^2(2x-3y)=80$. **Отв.** $x=4,\ y=1$.

36. $x^2y+y^2x=20,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{4}$. **Отв.** $x=1;\ 4;\ y=4;\ 1$.

37. $x^2+y^2=7+xy,\ x^3+y^3=6xy-1$. **Отв.** $x=2;\ 3;\ y=3;\ 2$.

38. $x^2+y^2=8,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}$. **Отв.** $x=\pm 2,\ y=\pm 2;\ x=\pm 2,\ y=\pm 2$.

39. $x+y=4,\ x^4+y^4=82$. **Отв.** $x=3,\ y=1;\ x=1,\ y=3$.

40. $x^5-y^5=3093,\ x-y=3$. **Отв.** $x=5,\ -2;\ y=2,\ -5$.

41. $\left(3-\frac{6y}{x+y}\right)^2+\left(3+\frac{6y}{x-y}\right)^2=82,\ xy=2$. **Отв.** $x=\pm 2,\ \pm 1;\ y=\pm 1,\ \pm 2$.

42. $x^2-x^2y^2+y^2=19,\ x-xy+y=4$.

Отв. $x=\frac{1}{4}\left(9\pm\sqrt{73}\right),\ y=\frac{1}{4}\left(9\mp\sqrt{73}\right)$.

43. $x^2-xy+y^2=7,\ x^4+x^2y^2+y^4=133$. **Отв.** $x=\pm 3,\ \pm 2;\ y=\pm 2,\ \pm 3$.

44. $x^2+xy+y^2=49,\ x^4+x^2y^2+y^4=931$. **Отв.** $x=\pm 5,\ \pm 3;\ y=\pm 3,\ \pm 5$.

45. $x^4-x^2+y^4-y^2=84,\ x^2+x^2y^2+y^2=49$. **Отв.** $x=\pm 3,\ \pm 2;\ y=\pm 2,\ \pm 3$.

46. $x(12-xy)=y(xy-3),\ xy(y+4x-xy)=12(x+y-3)$.

Отв. $x=0,\ \pm i\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3};\ y=0;\ 3\mp i\sqrt{3},\ \pm 2\sqrt{3}$.

47. $x+y+\sqrt{xy}=14,\ x^2+y^2+xy=84$. **Отв.** $x=8;\ 2;\ y=2;\ 8$.

48. $x+y-\sqrt{xy}=7,\ x^2+y^2+xy=133$. **Отв.** $x=9;\ 4;\ y=4;\ 9$.

49. $x+y=72,\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6$. **Отв.** $x=8;\ 64;\ y=64;\ 8$.

50. $x+\sqrt{x^2-y^2}=8,\ x-y=1$. **Отв.** $x=5;\ 13;\ y=4;\ 12$.

51. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1,\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78$. **Отв.** $x=4;\ 9;\ y=9;\ 4$.

52. $x+y=10,\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2}$. **Отв.** $x=2;\ 8;\ y=8;\ 2$.

53. $\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy},\ x+y=20$. **Отв.** $\sqrt{x}=2\pm\sqrt{6},\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{15}-5\right)$.

54. $\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x-y}},\ \frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{34}{15}$. **Отв.** $x=5,\ y=3$.

55. $\sqrt{3+x^2}+2y=8,\ 2x^2+\sqrt{5y^2+4x^4}=9$. **Отв.** $x=\pm 1,\ y=3$.

56. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4$. Отв. $x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}$.

57. $x^2-y^2=a^2,\ xy=b^2$. Отв. $x^2=\frac{1}{2}\left(a^2\pm\sqrt{a^4+4b^4}\right)$.

58. $x^4+y^4=a^4,\ x+y=b$. Отв. $xy=\frac{1}{2}\left(2b^2\pm\sqrt{2b^4+2a^4}\right)$.

59. $x^4+y^4=14x^2y^2,\ x+y=a$. Отв. $x=\frac{a}{2}\left(1\pm\sqrt{3}\right),\ \frac{a}{2}\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

60. $x^5-y^5=a^5,\ x-y=b$.

61. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=2y,\ x^4-y^4=a^4$. Отв. $x^2=\pm\frac{5a^2}{3},\ \pm a^2;\ y^2=\frac{4a^2}{3},\ 0$.

62. $2ab(a+b)x+y^2=abx^2+2aby,\ abx+(a+b)y=xy$.

Отв. $x=0,\ 2(a+b);\ y=0,\ 2ab$.

63. $2\sqrt{x^2-y^2}+xy=1,\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=a$. Отв. $4axy=(1-xy)^2$.

64. $x+y=a\sqrt{xy},\ x-y=c\sqrt{\frac{x}{y}}$. Отв. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{ay}{c},\ x=\frac{(c+ay)y}{ay-c}$, и т. д.

65. $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{a},\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=b$.

Отв. $x=\frac{a^3\pm b(2b^2-a^2)}{4(a^2-b^2)}$.

66. $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2}+\frac{y^2-b^2}{a^2-x^2}}+\sqrt{\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2}+\frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}}=4,\ xy=ab$.

Отв. $x^2=b^2(2\pm\sqrt{3});\ y^2=a^2(2\pm\sqrt{3})$.

67. $x^2+y^2-(x+y)=a,\ x^4+y^4+x+y-2(x^3+y^3)=b$.

Отв. $x(x-1)+y(y-1)=a,\ x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2=a+b$,

68. $a^nx^m+b^my^n=2\sqrt{a^mb^nx^my^n},\ xy=ab$.

Отв. Положивъ $\sqrt{x^{m+n}}=z$, найдемъ $z^2-2b^n\sqrt{a^{m-n}}\cdot z+b^{m+n}=0$.

69. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35, x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{5}}=5$. Отв. Беремъ за неизвѣстныя $x^{\frac{1}{4}}$ и $x^{\frac{1}{5}}$.

70. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{61}{\sqrt{xy}}+1, \sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3}=78$.

Отв. За неизвѣстныя беремъ $(x+y)$ и xy.

71. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y},\ x^2+y^2=34$.

Отв. $x=\pm 5,\ y=\pm 3;\ x=\pm\sqrt{\frac{59}{2}},\ y=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}$.

72. $(x+y)(xy+1)=18xy;\quad (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2$.

Отв. За вспомогательныя неизвѣстныя беремъ $x+\frac{1}{x}$ и $y+\frac{1}{y}$

74. $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,\quad x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b.$ **Отв.** Уравненія эти даютъ: $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{b}$.

75. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a,\ \dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$ **Отв.** Положимъ $\sqrt[3]{\dfrac{b+a}{b-a}}=v,$

легко найдемъ: $x=vy,\ y=\dfrac{a(1+v)}{1+v+v^2},\ \ x=\dfrac{av(1+v)}{1+v+v^2}.$

76. $\dfrac{xy}{z}=a,\ \ \dfrac{xz}{y}=b,\ \ \dfrac{yz}{x}=c.$ **Отв.** $x^2=ab,\ y^2=ac,\ z^2=bc.$

77. $x(y+z)=2p,\ y(z+x)=2q,\ z(x+y)=2v.$ **Отв.** Опредѣляемъ xy, xz, yz.

78. $xy^2z^3=4725, \dfrac{yz^2}{x}=6\dfrac{3}{7},\ \dfrac{z}{x^2y}=\dfrac{3}{245}.$ **Отв.** $x=7,\ y=5,\ z=3.$

79. $x+y+z=13,\ x^2+y^2+z^2=61,\ 2yz=x(z+y).$

Отв. $x=4,\ y=3,\ z=6;\ x=9,$ y и z мнимые.

80. $yz=bc,\ \ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ \ \ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1.$

Отв. $x=0,\ 2a;\ y=b,\ -b;\ z=c,\ -c.$

81. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9,\ \ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13,\ 8x+3y=5.$

Отв. $x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{26};\ \ y=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{15}{3};\ \ z=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{15}{44}.$

82. $y+z=\dfrac{1}{x},\ z+x=\dfrac{1}{y},\ x+y=\dfrac{1}{z}.$

Отв. Уравненія первой степени относительно $xy,\ xz,\ yz$.

83. $xyz=a^2(x+y)=b^2(y+z)=c^2(x+z).$

Отв. Уравненія первой степени относительно $\dfrac{1}{xy},\ \dfrac{1}{xz},\ \dfrac{1}{yz}.$

84. $x^2+yz=y^2+zx=c,\ z^2+xy=a.$

Отв. Вычитая второе уравненіе изъ перваго, получимъ: $x=y$ и $x+y=z$; присоединяемъ сюда третье уравненіе.

85. $\dfrac{1}{29}\left(x+\dfrac{y}{z}\right)=\dfrac{1}{34}\left(y+\dfrac{x}{z}\right)=\dfrac{1}{z},\ x+y+z=15.$

Отв. Образуемъ квадратное уравненіе въ z и найдемъ: $z=6,\ x=4,$ $y=5;\ z=-\dfrac{5}{2},\ x=\dfrac{355}{42},\ y=\dfrac{190}{21}.$

86. $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2},\ \ xyz=1.$

Отв. Исключивъ z, найдемъ: $x+y+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{7}{2},\ \ xy+\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{7}{2}.$

Получимъ: $x=2,\ \ y=1,\ \ z=\dfrac{1}{2}.$

87. $xy+xz+yz=26$, $xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)=162$, $xy(x^2+y^2)+$
$+xz(x^2+z^2)+yz(y^2+z^2)=538$.

Отв. Образуемъ квадратное уравненіе въ $(x+y+z)$, одно изъ рѣшеній котораго равно 9. Далѣе, образуемъ кубическое уравненіе въ xy, корни котораго суть 6, 8, 12. Найдемъ потомъ $x=2$, $y=3$, $z=4$.

88. $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$.

Отв. Можно показать, что $xyz=0$.

89. $2x+\frac{y^2}{z}=2y+\frac{z^2}{y}=2y+\frac{x^2}{y}=a$. **Отв.** $x=\frac{a}{3}$ и $9x^2(a-x)=a^3$.

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Рѣшеніе и изслѣдованіе задачъ высшихъ степеней.

§ 1. Задачи съ однимъ неизвѣстнымъ.

Задача I.

501. *Опредѣлить глубину колодца, зная, что звукъ отъ удара камня объ дно колодца достигъ нашего уха черезъ t секундъ отъ начала паденія* (сопротивленіе воздуха не принимается во вниманіе).

Назовемъ искомую глубину колодца буквою x. Наблюдаемый промежутокъ времени t состоитъ изъ двухъ слагаемыхъ:

1°. Изъ промежутка y, въ теченіе котораго камень пробѣгаетъ высоту x равномѣрно ускореннымъ движеніемъ съ ускореніемъ g, причемъ

$$x=\frac{1}{2}gy^2,\ \text{откуда}\ y=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

2°. Изъ промежутка z, въ теченіе котораго звукъ проходитъ пространство x равномѣрнымъ движеніемъ со скоростью v, причемъ

$$z=\frac{x}{v}.$$

Уравненіе вопроса будетъ таково:

$$\frac{x}{v}+\sqrt{\frac{2x}{g}}=t. \qquad (1)$$

Для рѣшенія этого ирраціональнаго уравненія отдѣляемъ радикалъ въ лѣвую часть:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} \tag{2}$$

и, по возвышеніи обѣихъ частей въ квадратъ, находимъ:

$$gx^2 - 2v(v + gt)x + gv^2t^2 = 0. \tag{3}$$

Уравненіе (3) не равносильно данному; оно получается также и отъ возвышенія въ квадратъ обѣихъ частей уравненія:

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v}.$$

Тотъ изъ корней уравненія (3) долженъ быть принятъ, который вещественъ, положителенъ и удовлетворяетъ уравненію (2), т.-е. который повѣряетъ неравенство:

$$t - \frac{x}{v} > 0, \text{ или, что то же, } x < vt.$$

Изучимъ послѣдовательно каждое изъ этихъ условій. Для вещественности корней необходимо и достаточно, чтобы

$$v^2(v + gt)^2 - g^2v^2t^2 \geqslant 0, \text{ или, что то же, } v^2(v^2 + 2gvt) \geqslant 0.$$

Условіе это, очевидно, всегда выполняется, ибо количества v, g, t всегда положительны.

Корни уравненія (3) всегда положительны, ибо произведеніе и сумма ихъ положительны.

И, наконецъ, для того, чтобы выбрать тотъ изъ корней уравненія (3), который удовлетворяетъ условію: $x < vt$, подставляемъ въ лѣвую часть уравненія (3) число vt вмѣсто буквы x (**423**); результатъ подстановки:

$$-2v^2t$$

представляетъ число отрицательное; слѣдовательно, только меньшій корень удовлетворяетъ задачѣ, и отвѣтъ будетъ таковъ:

$$x = \frac{v}{g}\left(v + gt - \sqrt{v^2 + 2gvt}\right).$$

Задача II.

502. *Тяжелое тѣло брошено вертикально вверхъ въ пустотѣ съ начальною скоростью v_0. Найти промежутокъ времени, необходимый для поднятія до высоты h надъ точкою исхода.*

Въ равномѣрно замедленномъ движеніи, каковымъ обладаетъ тѣло, движущееся вертикально вверхъ, пробѣгаемое пространство e связано съ соотвѣтствующимъ ему промежуткомъ времени t соотношеніемъ:

$$e = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \qquad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что искомый промежутокъ времени x долженъ удовлетворять уравненію:

$$h = v_0 x - \frac{1}{2} g x^2,$$

или, что то же,

$$g x^2 - 2 v_0 x + 2h = 0. \qquad (2)$$

Задача требуетъ вещественныхъ и положительныхъ рѣшеній. Условіе вещественности корней уравненія (2) даетъ:

$$v_0^2 - 2gh \geqslant 0, \text{ или } h \leqslant \frac{v_0^2}{2g}.$$

Разсмотримъ, слѣдовательно, три случая:

Случай первый:

$$h > \frac{v_0^2}{2g}.$$

Въ этомъ случаѣ корни уравненія (2) мнимые, и задача невозможна. Этотъ результатъ можно видѣть *à priori*.

И въ самомъ дѣлѣ, движущееся тѣло остановится въ своемъ восходящемъ движеніи, когда его уменьшающаяся скорость обратится въ нуль; но скорость къ концу промежутка времени t дѣлается равною:

$$v = v_0 - gt$$

и обращается въ нуль въ концѣ промежутка

$$t = \frac{v_0}{g};$$

пространство, пробѣгаемое тѣломъ въ этотъ промежутокъ, равно:

$$e = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Это есть наибольшая высота, какой можетъ достигнуть тѣло при начальной скорости v_0.

Случай второй:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Корни уравненія (2) равны, при чемъ общее значеніе ихъ таково:

$$\frac{v_0}{g}.$$

Результатъ этотъ согласуется съ найденнымъ сейчасъ результатомъ.

Случай третій:

$$h < \frac{v_0^2}{2g}.$$

Корни уравненія (2) вещественны, неравны и оба положительны.

Тотъ изъ корней уравненія (2) долженъ быть принятъ, который не превышаетъ $\frac{v_0}{g}$, ибо $\frac{v_0}{g}$ есть промежутокъ времени, необходимый для поднятія на кульминаціонную высоту.

Для того, чтобы сдѣлать выборъ, подставляемъ въ лѣвую часть уравненія (2) число $\frac{v_0}{g}$ (**423**) вмѣсто буквы x. Результатъ подстановки:

$$2h - \frac{v_0^2}{g}$$

отрицателенъ; слѣдовательно, меньшій корень

$$x = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$$

рѣшаетъ вопросъ.

Посмотримъ, что представляетъ большій корень?

Онъ можетъ быть написанъ такимъ образомъ:

$$x = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Первое слагаемое $\frac{v_0}{g}$ представляетъ промежутокъ времени, необходимый для поднятія до кульминаціонной высоты. Второе же слагаемое представляетъ промежутокъ времени, необходимый для паденія съ кульминаціонной высоты, т. е. съ высоты $\frac{v_0^2}{2g}$, до высоты h, фигурирующей въ выраженіи перваго корня. И въ самомъ дѣлѣ, этотъ промежутокъ θ получается изъ слѣдующей формулы:

$$\frac{v_0^2}{2g} - h = \frac{g\theta^2}{2},$$

откуда

$$\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Итакъ, слѣдовательно, большій корень уравненія (2) представляетъ промежутокъ времени, необходимый для поднятія на кульминаціонную высоту и на паденіе съ этой высоты до высоты h, фигурирующей въ выраженіи меньшаго корня.

Задача III.

(Раздѣленіе отрѣзка прямой въ среднемъ и крайнемъ отношеніи).

503. *На прямой данъ опредѣленный отрѣзокъ $AB = a$. Требуется найти на этой прямой такую точку C, чтобы разстояніе ея отъ конца A было среднимъ пропорціональнымъ между длиною отрѣзка a и разстояніемъ ея отъ другаго конца B.*

A priori видно, что искомая точка не можетъ лежать вправо отъ точки B. Положимъ, что искомая точка C лежитъ между точками A и B. Принявъ за неизвѣстное отрѣзокъ $AC = x$, получимъ:

$$AC = x, \quad BC = a - x,$$

и уравненіе вопроса будетъ таково:

$$x^2 = a(a - x). \tag{1}$$

Легко видѣть, что уравненіе это будетъ соотвѣтствовать также и тому случаю, когда искомая точка C_1 лежитъ влѣво отъ точки A, если только примемъ $AC_1 = -x$, ибо тогда

$$AC_1 = -x, \quad BC_1 = -x + a,$$

и уравненіе вопроса опять будетъ:

$$x^2 = a(a - x).$$

Уравненіе (1) можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \tag{2}$$

Корни его вещественны, имѣютъ противоположные знаки, причемъ положительный корень менѣе a и модуль отрицательнаго корня болѣе a. Отсюда слѣдуетъ, что положительный корень опредѣляетъ точку C, а модуль отрицательнаго корня—точку C_1; разстоянія этихъ точекъ отъ точки A соотвѣтственно суть:

$$AC = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad AC_1 = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

504. Если примемъ за неизвѣстныя: $BC = x$, $BC_1 = x$, то уравненія для обѣихъ точекъ C и C_1 соотвѣтственно суть:

$$(a - x)^2 = ax, \quad (x - a)^2 = ax,$$

которыя, очевидно, приводятся къ одному:

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0.$$

Корни этого уравненія вещественны, положительны, причемъ одинъ корень менѣе a, а другой болѣе a; меньшій корень опредѣляетъ точку C, большій—точку C_1.

505. Построеніе. Для опредѣленія положенія точекъ C и C_1, при помощи циркуля, обратимся къ уравненію (2). Оно даетъ:

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 x_2 = -a^2,$$

откуда

$$AC_1 - AC = a, \quad AC_1 \cdot AC = a^2.$$

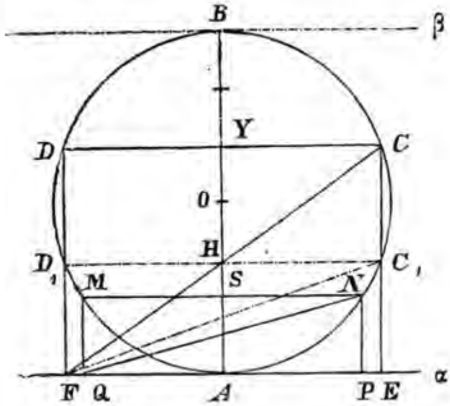
Возставляемъ перпендикуляръ къ данной прямой въ точкѣ B; откладываемъ на немъ отрѣзокъ $BO = \frac{AB}{2}$; описываемъ окружность изъ точки 0 радіусомъ, равнымъ OB; окружность встрѣтитъ направленіе AO въ точкахъ D и D_1, причемъ

$$AD = AC, \quad AD_1 = AC_1.$$

Задача IV.

506. *Дана окружность O и касательная къ ней въ точкѣ A. Требуется построить хорду MN, параллельную этой касательной, такимъ образомъ, чтобы діагональ прямоугольника MNPQ имѣла данную длину m.*

Примемъ за неизвѣстное x разстояніе AS искомой хорды отъ точки A, причемъ замѣтимъ, что это неизвѣстное должно быть ве-



щественнымъ, положительнымъ и должно не превышать $2r$, гдѣ r радіусъ данной окружности. Чертежъ даетъ:

$$\overline{NQ}^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2;$$

выразивъ NQ, NP, PQ въ данныхъ величинахъ и въ искомой такимъ образомъ:

$$\overline{PQ}^2 = 4\overline{NS}^2, \quad \overline{NS}^2 = SA \cdot SB = x(2r - x),$$

получимъ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній, слѣдующее уравненіе вопроса:

$$3x^2 - 8rx + m^2 = 0. \qquad (1)$$

Изслѣдованіе. Для удобства изслѣдованія введемъ, вмѣсто линейныхъ чиселъ: x, r, m, числа отвлеченныя:

$$\frac{x}{r} = y, \quad \frac{r}{r} = 1, \quad \frac{m}{r} = \lambda$$

и будемъ называть число λ *параметромъ*. Уравненіе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$3y^2 - 8y + \lambda^2 = 0. \tag{2}$$

Опредѣлимъ тѣ значенія параметра, при которыхъ корни уравненія (2) вещественны, положительны, причемъ одинъ изъ нихъ или оба не превышаютъ числа 2.

Для вещественности корней необходимо и достаточно, чтобы

$$16 - 3\lambda^2 \geqslant 0, \text{ или, что то же, } \lambda^2 - \frac{16}{3} \leqslant 0.$$

Неравенство это можетъ написаться такимъ образомъ:

$$\left(\lambda + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(\lambda - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \leqslant 0.$$

Оно, при положительныхъ значеніяхъ λ, каковыми они и должны быть, равносильно слѣдующему:

$$\lambda - \frac{4\sqrt{3}}{3} \leqslant 0. \tag{3}$$

Далѣе, корни уравненія (2) положительны, если они вещественны, ибо произведеніе и сумма ихъ положительны.

Остается сравнить число 2 съ корнями уравненія (2) при различныхъ значеніяхъ параметра λ.

Для этой цѣли подставляемъ (**423**) въ лѣвую часть уравненія (2) число 2, вмѣсто буквы y, и получаемъ результатъ подстановки:

$$\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2);$$

знакъ этого выраженія одинаковъ со знакомъ бинома:

$$\lambda - 2. \tag{4}$$

Замѣтивъ это, напишемъ возрастающій рядъ чиселъ:

$$0 \underbrace{\quad}_{1} 2 \underbrace{\quad}_{2} \frac{4\sqrt{3}}{3} \underbrace{\quad}_{3} \infty$$

Онъ даетъ: 1) Для всѣхъ значеній λ, заключенныхъ въ первомъ промежуткѣ, корни вещественны, причемъ только меньшій корень уравненія (2) не превышаетъ 2, ибо выраженіе (4), для разсматриваемыхъ значеній λ, отрицательно.

2) Для $\lambda=0$ одно рѣшеніе: $y=0$; для $\lambda=2$ имѣемъ два рѣшенія: $y=\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}r$ и $y=2$, $x=2r$.

3) Для всѣхъ значеній λ, заключенныхъ во второмъ промежуткѣ, корни вещественны, и каждый изъ нихъ не превышаетъ 2, ибо выраженіе (4), для этихъ значеній λ, положительно, причемъ полусумма корней, равная $\frac{4}{3}$, менѣе 2.

4) Для $\lambda=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ имѣемъ два равныхъ рѣшенія: $y_1=y_2=\frac{4}{3}$, $x_1=x_2=\frac{4}{3}r$.

5) Для третьяго промежутка корни уравненія (2) мнимые.

Предъидущее изслѣдованіе представляется слѣдующею таблицею:

$m>\frac{4r\sqrt{3}}{3}$ . . . . корни мнимые.

$m=\frac{4r\sqrt{3}}{3}$, $x_1=x_2=\frac{4r}{3}$, maximum m . . . . одно рѣшеніе.

$$m<\frac{4r\sqrt{3}}{3}\begin{cases} m>2r: x_1 \text{ и } x_2 \text{ веществ., положит. и менѣе } 2r \ldots \text{два рѣшенія.}\\ m=2r;\ x_1=\frac{2}{3}r,\ x_2=2r \ldots\ldots \text{два рѣшенія.}\\ m<2r;\ x_1<2r,\ x_2>2r \ldots\ldots \text{одно рѣшеніе.}\end{cases}$$

507. Всѣ эти результаты мы получимъ, изслѣдуя непосредственно формулы корней уравненія (1). Формулы эти суть:

$$x_1=\frac{4r-\sqrt{16r^2-3m^2}}{3},\ x_2=\frac{4r+\sqrt{16r^2-3m^2}}{3}.$$

Первая изъ формулъ говоритъ, что, при непрерывномъ возрастаніи m отъ 0 до $\frac{4r\sqrt{3}}{3}$, меньшій корень x_1, оставаясь вещественнымъ и положительнымъ, непрерывно возрастаетъ слѣдующимъ образомъ: отъ 0 до $\frac{2}{3}r$ — при измѣненіи m отъ 0 до $2r$; отъ $\frac{2}{3}r$ до r — при измѣненіи m отъ $2r$ до $r\sqrt{5}$, и отъ r до $\frac{4}{3}r$ — при измѣненіи m отъ $r\sqrt{5}$ до $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$. Вторая формула показываетъ, что, при непрерывномъ возрастаніи m, большій корень x_2, оставаясь положительнымъ, непрерывно убываетъ такимъ образомъ: отъ $\frac{8}{3}r$ до $2r$ — при измѣненіи m отъ 0 до $2r$, и эти значенія не рѣшаютъ задачи; отъ $2r$ до $\frac{5}{3}r$ — при измѣненіи m отъ $2r$ до $r\sqrt{5}$, и отъ $\frac{5}{3}r$ до $\frac{4}{3}r$ — при измѣненіи m отъ $r\sqrt{5}$ до $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$.

Все это можетъ быть изображено таблицею:

m	x_1	x_2
0	0	
.	.	
.	.	
.	.	
$2r$	$\frac{2}{3}r$	$2r$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$r\sqrt{5}$	r	$\frac{5}{3}r$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$\frac{4r\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4}{3}r$	$\frac{4}{3}r$

Таблица эта показываетъ, что, при непрерывномъ движеніи точки S по діаметру AB отъ точки A до точки, отстоящей отъ A на разстояніи $\frac{2}{3}r$, діагональ непрерывно увеличивается отъ 0 до $2r$; при движеніи точки S отъ точки, отстоящей на разстояніи $\frac{2}{3}r$, до точки, отстоящей на разстояніи $\frac{4}{3}r$, діагональ продолжаетъ увеличиваться отъ $2r$ до $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$; при дальнѣйшемъ же движеніи точки S до точки B діагональ уменьшается отъ $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$ до $2r$. Итакъ, діагональ принимаетъ по одному разу всѣ значенія отъ 0 до $2r$ и по два раза—всѣ значенія отъ $2r$ до $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$, причемъ форма корней говоритъ, что каждому изъ значеній, принимаемыхъ діагональю два раза, соотвѣтствуютъ положенія точки S, симметрично расположенныя относительно точки, отстоящей отъ A на разстояніи $\frac{4}{3}r$.

508. Прямое изслѣдованіе длины діагонали. Уравненіе (2) даетъ:

$$\lambda^2 = -3\left(y^2 - \frac{8}{3}y\right) = 3\left[\frac{16}{9} - \left(y - \frac{4}{3}\right)^2\right].$$

Равенство это говоритъ намъ, что, при возрастаніи y отъ 0 до $\frac{4}{3}$, т.-е. при возрастаніи x отъ 0 до $\frac{4}{3}r$, количество λ^2 возрастаетъ отъ 0 до $\frac{16}{3}$; слѣдовательно, діагональ m возрастаетъ отъ 0 до $\frac{4r\sqrt{3}}{3}$. При дальнѣйшемъ возрастаніи y отъ $\frac{4}{3}$ до 2, т.-е. при возрастаніи x отъ $\frac{4}{3}r$ до $2r$, количество λ^2 убываетъ отъ $\frac{16}{3}$ до 4; слѣдовательно, діагональ m убываетъ отъ $\frac{4r\sqrt{3}}{3}$ до $2r$.

Эти измѣненія m могутъ быть представлены слѣдующею таблицею:

$$\begin{array}{c|l|}
x & 0 \ldots < \ldots \frac{2}{3}r \ldots < 1 \ldots < \ldots \frac{4}{3}r \ldots < \ldots \frac{5}{3}r \ldots < \ldots 2r \\
m & 0 \ldots < \ldots 2r \ldots < r\sqrt{5} \ldots < \ldots \frac{4\sqrt{3}}{3}r \ldots > \ldots r\sqrt{5} \ldots > \ldots 2r
\end{array}.$$

Отсюда непосредственно вытекаетъ, что, при перемѣщеніи хорды MN параллельно самой себѣ изъ положенія $A\alpha$ въ положеніе $B\beta$, длина діагонали NQ растетъ до того момента, когда хорда MN переходитъ черезъ точку Y, отстоящую отъ A на разстояніи, равномъ $\frac{4}{3}r$. Далѣе, при стремленіи хорды къ положенію $B\beta$, длина діагонали убываетъ до $2r$.

Діагональ принимаетъ по одному разу всякое значеніе, заключенное между 0 и $2r$, когда точка A перемѣщается изъ A въ H, и по два раза всякое значеніе, заключенное между $2r$ и $\frac{4\sqrt{3}}{3}r$: первый разъ — когда точка S перемѣщается изъ H въ Y, второй разъ — когда точка S проходитъ пространство YB, и эти два положенія хорды симметрично расположены относительно DC, ибо трехчленъ λ^2 принимаетъ равныя значенія при

$$x = \frac{4}{3}r \pm y.$$

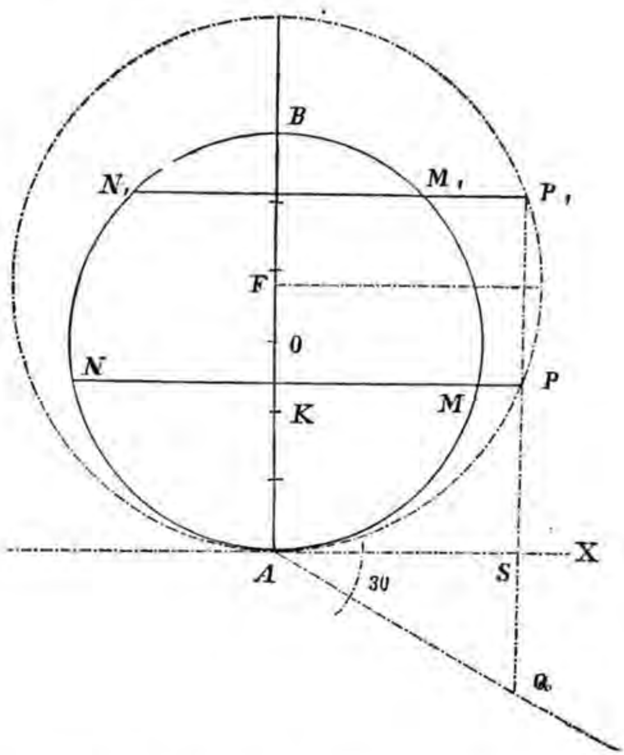
509. Построеніе рѣшеній. Разстоянія искомыхъ хордъ отъ точки A суть корни уравненія:

$$3x^2 - 8rx + m^2 = 0.$$

Для построенія этихъ корней замѣтимъ, что

$$x_1 + x_2 = \frac{8}{3}r, \quad x_1 x_2 = \left(\frac{m\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Должно построить, слѣдовательно, два отрѣзка, зная ихъ сумму и ихъ произведеніе.



Принимая точку F діаметра AB, отстоящую отъ A на разстояніи, равномъ $\frac{4}{3}r$, за центръ, радіусомъ, равнымъ AF, описываемъ окружность. На касательной AX беремъ длину AS, равную $\frac{m\sqrt{3}}{3}$, и проводимъ линію SPP', параллельную AB, которая встрѣтитъ вспомогательную окружность въ точкахъ P и P'; искомыя хорды суть PMN и $P'M'N'$.

И въ самомъ дѣлѣ:

$$SP + SP' = 2AF = \frac{8}{3}r,\ SP \cdot SP_1 = \overline{SA}^2 = \frac{m^2}{3}.$$

Замѣтимъ, что, для построенія $AS = \frac{m\sqrt{3}}{3}$, можемъ поступить такимъ образомъ: строимъ AZ такъ, чтобы $\angle XAZ = 30^0$; беремъ $AQ = \frac{2}{3}m$; проэкція AS отрѣзка AQ на касательную AX отвѣчаетъ вопросу, ибо $SQ = \frac{AQ}{2}$, и, слѣдовательно,

$$\overline{AS}^2 = \frac{4m^2}{9}\left(1 - \frac{1}{4}\right),\ \text{или}\ \overline{AS}^2 = \frac{m^2}{3}.$$

Мы снова получимъ всѣ обстоятельства предъидущаго изслѣдованія, если будемъ перемѣщать точку S отъ A къ X.

510. Замѣчаніе. Если за неизвѣстное примемъ разстояніе точки S отъ центра O, то для полученія одного и того же уравненія и въ томъ случаѣ, когда точка S лежитъ между точками O и A, и въ томъ случаѣ, когда она лежитъ внѣ ихъ, мы можемъ принять въ первомъ случаѣ $OS = x$, и тогда во второмъ должны взять $OS = -x$, и уравненіе будетъ таково:

$$3x^2 + 2rx + (m^2 - 5x^2) = 0.$$

Уравненіе это, по изслѣдованіи, дастъ предъидущіе результаты. Само изслѣдованіе предоставляемъ сдѣлать читателю.

Задача V.

511. *Данъ прямой круговой конусъ. Требуется найти такое количество, которое, будучи прибавлено къ радіусу основанія и отнято отъ высоты, не измѣнитъ объема конуса.*

Назвавъ буквами r, h и x соотвѣтственно радіусъ основанія конуса, его высоту и искомое положительное или отрицательное количество, получимъ уравненіе вопроса:

$$r^2h = (r + x)^2(h - x), \tag{1}$$

которое можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$x^3 - (h - 2r)x^2 - r(2h - r)x = 0.$$

Одинъ изъ корней этого уравненія равенъ 0; уничтоживъ его, получимъ уравненіе:

$$x^2 - (h - 2r)x - r(2h - r) = 0. \tag{2}$$

Измѣненные радіусъ основанія и высота будутъ:

$$r_1 = r + x, \quad h_1 = h - x. \tag{3}$$

512. Изслѣдованіе. Введемъ, вмѣсто линейныхъ чиселъ x, h и r, отвлеченныя числа:

$$\frac{x}{r} = y, \quad \frac{r}{r} = 1, \quad \frac{h}{r} = \lambda.$$

Уравненіе (2) и равенства (3) перепишутся такимъ образомъ:

$$y^2 - (\lambda - 2)y - (2\lambda - 1) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{r_1}{r} = 1 + y, \quad \frac{h_1}{r} = \lambda - y. \tag{3}$$

Для возможности задачи корни уравненія (2) должны быть вещественны; кромѣ этого, положительный корень уравненія (2), если онъ есть, и его отрицательный корень, если таковой существуетъ, должны быть, какъ показываютъ равенства (3), соотвѣтственно менѣе λ и болѣе (-1).

Условіе вещественности:

$$\lambda^2 + 4\lambda \geqslant 0$$

всегда выполнимо, ибо λ есть число положительное.

Обратимся теперь къ знакамъ корней; произведеніе корней равно:

$$1 - 2\lambda.$$

Случай первый. Если $\lambda > \frac{1}{2}$, то знаки корней различны; назовемъ отрицательный корень буквою y_1, положительный — буквою y_2.

Для того, чтобы отрицательный корень отвѣчалъ задачѣ, необходимо еще, чтобы

$$y_1 > -1,$$

т.-е. необходимо (**423**), чтобы лѣвая часть уравненія (2), послѣ замѣны буквы y числомъ (-1), обратилась въ положительное число; это не случится, ибо результатъ этой замѣны, равный $-\lambda$, есть число отрицательное; слѣдовательно, меньшій корень, который въ данномъ случаѣ и есть именно y_1, есть число, меньшее (-1). Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ отрицательный корень долженъ быть отброшенъ.

Для того, чтобы положительный корень y_2 отвѣчалъ задачѣ, необходимо и достаточно, чтобы

$$y_2 < \lambda,$$

т.-е. необходимо и достаточно (**423**), чтобы результатъ подстановки въ лѣвую часть уравненія (2) числа λ вмѣсто буквы y былъ положительный; это достаточно, ибо полусумма корней, равная $\frac{\lambda-2}{2}$, очевидно менѣе λ. Результатъ подстановки, равный 1, есть число положительное; слѣдовательно, положительный корень удовлетворяетъ задачѣ.

Итакъ, въ разсматриваемомъ случаѣ задача имѣетъ одно рѣшеніе:

$$y_2 = \frac{\lambda - 2 + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2}, \quad x_2 = \frac{h - 2r + \sqrt{h^2 + 4rh}}{2}.$$

Случай второй. Если $\lambda = \frac{1}{2}$, то одинъ изъ корней равенъ нулю и воспроизводитъ данный конусъ; второй корень, равный $-\frac{3}{2}$, долженъ быть отброшенъ.

Случай третій. Если $\lambda < \frac{1}{2}$, то произведеніе корней положительное, но сумма ихъ, равная $\lambda - 2$, отрицательная; слѣдовательно, каждый изъ корней отрицателенъ. Подставивъ въ лѣвую часть уравненія (1), вмѣсто буквы y, число (-1) и принявъ во вниманіе, что результатъ подстановки, равный (-1), есть число отрицательное, заключаемъ, что только большій корень долженъ быть принятъ.

Итакъ, во всѣхъ случаяхъ задача имѣетъ только одно рѣшеніе: положительное, когда $\lambda > \frac{1}{2}$; нуль — когда $\lambda = \frac{1}{2}$; отрицательное — когда $\lambda < \frac{1}{2}$, и это рѣшеніе во всѣхъ случаяхъ дается формулою:

$$x = \frac{h - 2r + \sqrt{h^2 + 2rh}}{2}.$$

513. Мы можемъ придти къ предъидущимъ результатамъ очень просто слѣдующею методою, которая въ достаточно большомъ числѣ случаевъ рѣшаетъ вопросъ.

Обозначимъ лѣвую часть уравненія (2) черезъ $f(y)$; подставимъ, вмѣсто буквы y, въ эту лѣвую часть послѣдовательно числа:

$$-\infty,\ -1,\ 0,\ \lambda,\ +\infty$$

и замѣтимъ знаки результатовъ подстановокъ:

$f(-\infty)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(\lambda)$	$f(+\infty)$.
$+$	$-$	знакъ $(1-2\lambda)$	$+$	$+$

Этотъ рядъ знаковъ говоритъ, что лѣвая часть уравненія (2) мѣняетъ знакъ, при измѣненіи y отъ $-\infty$ до -1, и мѣняетъ знакъ, при измѣненіи y отъ -1 до λ; отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (2) имѣетъ непремѣнно одинъ корень, и только одинъ, заключенный между $-\infty$ и -1, и одинъ корень, и только одинъ, заключенный между (-1) и λ. Но корень, заключенный между (-1) и $(-\infty)$, будучи менѣе (-1), долженъ быть отброшенъ, и онъ именно есть меньшій корень. Большій же корень, заключенный между (-1) и λ, будучи болѣе (-1) и менѣе λ, долженъ быть принятъ. Итакъ, задача имѣетъ только одно рѣшеніе, даваемое большимъ корнемъ.

Для того, чтобы узнать, при какихъ значеніяхъ параметра λ большій корень положителенъ и при какихъ — отрицателенъ, разсмотримъ три случая:

1) Если $\lambda > \frac{1}{2}$, то знакъ числа $f(0)$ есть $-$, и, слѣдовательно, корень заключенъ между 0 и λ, т.-е. онъ положителенъ.

2) Если $\lambda = \frac{1}{2}$, то $f(0) = 0$, и, слѣдовательно, 0 есть корень.

3) Если $\lambda < \frac{1}{2}$, то знакъ числа $f(0)$ есть $+$, и, слѣдовательно, корень заключенъ между (-1) и 0, т.-е. онъ отрицателенъ.

Задача VI.

514. *Дана полуокружность. Требуется изъ конца A діаметра AG провести такую хорду AB, чтобы, продолживъ эту хорду за полуокружность, отложивъ на продолженіи отрѣзокъ BC, равный радіусу окружности, соединивъ конецъ C отрѣзка съ другимъ концомъ G діаметра и проведя въ треугольникъ ACG линію BD, параллельную AG, получить для суммы $(AB + BD)$ данную длину a.*

Принявъ за неизвѣстное x длину искомой хорды и обозначивъ радіусъ окружности буквою r, легко найдемъ, изъ подобія треугольниковъ ACG и BCD, слѣдующее уравненіе вопроса:

$$x^2-(a-r)x+r(2r-a)=0. \tag{1}$$

515. Изслѣдованіе. Для удобства изслѣдованія введемъ, вмѣсто линейныхъ чиселъ: x, a и r, числа отвлеченныя:

$$\frac{x}{r}=y,\quad \frac{a}{r}=\lambda \ \text{ и } \ \frac{r}{r}=1.$$

Уравненіе (1) преобразуется въ слѣдующее:

$$y^2-(\lambda-1)y+(2-\lambda)=0. \tag{2}$$

Тотъ изъ вещественныхъ и положительныхъ корней уравненія (2) рѣшаетъ вопросъ, который не превышаетъ 2.

Условіе вещественности корней уравненія (2):

$$\lambda^2+2\lambda-7\geqslant 0$$

даетъ слѣдующія границы для параметра λ:

$$-\infty\leqslant\lambda\leqslant-1-\sqrt{8},\ -1+\sqrt{8}\leqslant\lambda\leqslant\infty.$$

Но λ долженъ быть положительнымъ; слѣдовательно, для вещественности корней уравненія (2), положительныя значенія параметра λ должны удовлетворять условію:

$$-1+\sqrt{8}\leqslant\lambda\leqslant+\infty. \tag{3}$$

Изслѣдуемъ теперь знаки корней.

Случай 1-й. Если $\lambda<2$, то оба корня уравненія (2) положительны, ибо произведеніе ихъ, равное $(2-\lambda)$, и сумма ихъ, равная $\lambda-1$, положительны.

Посмотримъ, при какихъ значеніяхъ параметра λ каждый изъ корней, или одинъ изъ нихъ, не превышаетъ 2. Подставимъ, для этой цѣли, въ лѣвую часть уравненія (2) число 2 вмѣсто буквы y (**423**); результатъ подстановки, равный $8-3\lambda$, представляетъ, для $\lambda<2$, число положительное, причемъ полусумма корней, равная $\frac{\lambda-1}{1}$, менѣе 2. Отсюда слѣдуетъ, что оба корня удовлетворяютъ вопросу.

Случай 2-й. Если $\lambda = 2$, то $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, т.-е. $x = 0$, $x = r$, и опять будемъ имѣть два рѣшенія вопроса.

Случай 3-й. Если $\lambda > 2$, то только одинъ корень уравненія (2) положителенъ. Спрашивается, при какихъ значеніяхъ параметра λ онъ не превышаетъ 2? Для этой цѣли разсматриваемъ результатъ подстановки числа 2, вмѣсто y, въ лѣвую часть уравненія (2), равный

$$8 - 3\lambda.$$

Если $\lambda < \frac{8}{3}$, то этотъ результатъ положителенъ, причемъ полусумма корней, равная $\frac{\lambda - 1}{2}$, менѣе 2; слѣдовательно, каждый изъ корней менѣе 2, и нашъ положительный корень удовлетворяетъ вопросу.

Если $\lambda > \frac{8}{3}$, то результатъ подстановки отрицателенъ, и слѣдовательно, положительный корень, превышая, какъ большій, число 2, долженъ быть отброшенъ.

Результатъ изслѣдованія дается слѣдующею таблицею:

$$\lambda < -1 + \sqrt{8} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{корни мнимые.}$$

$$\lambda = -1 + \sqrt{8} \ (\text{minimum});\ y = \sqrt{2} - 1;\ x = r\sqrt{2} - r. \ \text{одно рѣшеніе.}$$

$$\lambda > -1 + \sqrt{8} \begin{cases} \lambda < 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{два рѣшенія.} \\ \lambda = 2:\ y_1 = 0,\ y_2 = 1;\ x_1 = 0,\ x_2 = r. \ \text{два рѣшенія.} \\ \lambda > 2 \begin{cases} \lambda < \frac{8}{3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{одно рѣшеніе.} \\ \lambda = \frac{8}{3};\ y = 2;\ x = 2r \ \ldots \ \text{одно рѣшеніе.} \\ \lambda > \frac{8}{3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{нѣтъ рѣшеній.} \end{cases} \end{cases}$$

516. Предъидущіе результаты могутъ быть получены еще такимъ образомъ:

Выразимъ, при помощи уравненія (2), параметръ λ черезъ y. Мы получимъ слѣдующее выраженіе для λ:

$$\lambda = \frac{y^2 + y + 2}{y + 1}.$$

Опредѣлимъ maximum и minimum выраженія λ (**424**) и соотвѣтствующія имъ значенія буквы y; эти maximum и minimum суть:

$$-1 - \sqrt{8},\quad -1 + \sqrt{8},$$

причемъ соотвѣтствующія значенія буквы y равны:

$$-1-\sqrt{2}, \quad -1+\sqrt{2}.$$

Найдемъ далѣе: 1) значенія для λ при $y=\pm\infty$, они равны 1; 2) полюсы выраженія λ, они равны -1; 3) значеніе λ при $y=0$, оно равно $\sqrt{8}-1$; 4) значеніе λ при $y=2$, т.-е. при наибольшемъ значеніи, какое можетъ имѣть y по условіямъ задачи; это значеніе равно $\frac{8}{3}$; 5) опредѣлимъ другое значеніе y, при которомъ λ равно $\frac{8}{3}$; оно равно $-\frac{1}{3}$. Составимъ слѣдующую таблицу:

y	λ
$-\infty$	$-\infty$
$-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{8}$ (maximum)
-1	$\mp\infty$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
0	2
$-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{8}$ (minimum)
1	2
2	$\frac{8}{3}$
$+\infty$	$+\infty$.

Въ лѣвомъ столбцѣ этой таблицы расположены значенія y въ возрастающемъ порядкѣ; правый столбецъ содержитъ соотвѣтствующія значенія λ. Нашей задачѣ соотвѣтствуетъ часть этой таблицы, содержащая значенія y отъ 0 до 2. Эта часть таблицы говоритъ:

1) Всякому значенію λ, заключенному между 2 и $\frac{8}{3}$, соотвѣтствуетъ одно, и только одно, значеніе y, заключенное между 1 и 2.

2) Всякому значенію λ, заключенному между 2 и $\sqrt{8}-1$, соотвѣтствуютъ два, и только два, значенія y; одно изъ нихъ заключено между 0 и $(\sqrt{2}-1)$, другое — между 1 и $(\sqrt{2}-1)$.

3) Значеніямъ λ, заключеннымъ между $-1-\sqrt{8}$ и $-1+\sqrt{8}$, отвѣчаютъ мнимыя значенія y.

4) Всѣмъ остальнымъ вещественнымъ значеніямъ λ отвѣчаютъ или отрицательныя значенія буквы y, или такія положительныя значенія, которыя превышаютъ число 2.

Мы получили такимъ образомъ предъидущіе результаты.

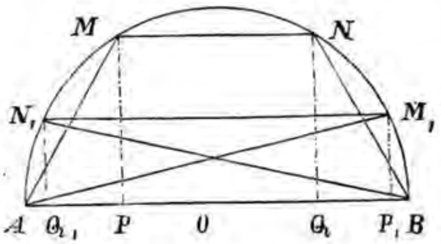
Задача VII.

517. *Дана полуокружность діаметра $AB = 2r$; требуется провести такую хорду MN, параллельную AB, чтобы*

$$\overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NB}^2 = m^2,$$

гдѣ m есть данное количество.

Примемъ за неизвѣстное x проэкцію AP хорды AM на діаметръ AB. Точка M можетъ лежать на первомъ квадрантѣ, но можетъ лe-



жать и на второмъ въ точкѣ M_1, и въ этомъ случаѣ за неизвѣстное x принимаемъ опять-таки проэкцію AP_1.

И въ томъ, и въ другомъ случаяхъ получаемъ одно и то же уравненіе:

$$4x^2 - 4rx + (4r^2 - m^2) = 0, \tag{1}$$

но только для точки M имѣемъ:

$$MN = 2r - 2x;$$

для точки же M_1 находимъ:

$$M_1N_1 = 2x - 2r.$$

518. Изслѣдованіе. Введемъ, вмѣсто линейныхъ чиселъ x, r и m, числа отвлеченныя:

$$\frac{x}{r} = y, \quad \frac{r}{r} = 1, \quad \frac{m}{r} = \lambda.$$

Уравненіе (1) преобразовывается въ слѣдующее:

$$4y^2 - 4y + (4 - \lambda^2) = 0. \tag{2}$$

Тотъ изъ вещественныхъ и положительныхъ корней уравненія (2) рѣшаетъ задачу, который не превышаетъ числа 2.

Условіе вещественности будетъ таково:

$$\lambda^2 - 3 \geqslant 0, \text{ или же } \lambda^2 \geqslant 3.$$

Мы разобьемъ, слѣдовательно, наше изслѣдованіе на три случая.

Случай 1. Если $\lambda^2 < 3$, то корни уравненія (2) мнимые, и задача невозможна.

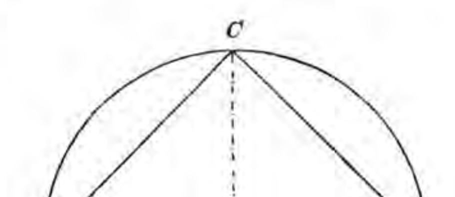
Случай 2. Если $\lambda^2 = 3$, то $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2} r$. $MN = 2r - 2x = r$, $AM = r$, т.-е. въ этомъ случаѣ ломанная линія $AMNB$ представляетъ правильный полушестиугольникъ.

Случай 3. Если $\lambda^2 > 3$, то корни уравненія (2) вещественные, неравные. Изслѣдуемъ знаки корней. Для этой цѣли подраздѣлимъ этотъ случай на три другіе:

$$\lambda^2 > 3 \begin{cases} \lambda^2 < 4, \\ \lambda^2 = 4, \\ \lambda^2 > 4. \end{cases}$$

I. Если $\lambda^2 < 4$, то оба корня положительны, ибо произведеніе и сумма ихъ положительны. Тотъ изъ этихъ корней рѣшитъ задачу, который не превыситъ 2. Для изслѣдованія этого обстоятельства подставляемъ въ лѣвую часть уравненія (2) число 2 вмѣсто буквы y; результатъ подстановки, равный $(12 - \lambda^2)$, представляетъ число положительное, причемъ полусумма корней, равная $\frac{1}{2}$, менѣе 2. Отсюда вытекаетъ, что каждый изъ корней удовлетворяетъ задачѣ, которая, слѣдовательно, въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ два рѣшенія.

II. Если $\lambda^2 = 4$, то одинъ изъ корней равенъ нулю, другой равенъ 1, такъ что $x_1 = 0$, $x_2 = r$, и, слѣдовательно, $MN = 2r - 2x = 2r$, $MN = 0$; $AM = 0$, $AM = r\sqrt{2}$; отсюда вытекаетъ, что въ разсма-



триваемомъ случаѣ мы имѣемъ два рѣшенія: діаметръ и полуквадратъ.

III. Если $\lambda^2 > 4$, то одинъ изъ корней уравненія (2) отрицательный. Онъ долженъ быть отброшенъ. Изслѣдуемъ положительный корень, который не долженъ превышать числа 2. Для этой цѣли разсмотримъ три новыхъ случая:

$$\lambda^2 > 4 \begin{cases} \lambda^2 < 12, \\ \lambda^2 = 12, \\ \lambda^2 > 12. \end{cases}$$

Въ первомъ случаѣ: Результатъ подстановки числа 2, вмѣсто буквы y, въ лѣвую часть уравненія (2), равный $12 - \lambda^2$, представляетъ число положительное, причемъ полусумма корней, равная $\frac{1}{2}$, менѣе 2. Отсюда вытекаетъ, что изслѣдуемый положительный корень рѣшаетъ задачу.

Во второмъ случаѣ:

$$y_1 = -1,\ y_2 = 2;\ x_2 = 2r,\ M_1N_1 = 2x - 2r = 2r,\ AM_1 = 2r.$$

Отсюда вытекаетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ имѣемъ одно рѣшеніе, причемъ фигура AM_1N_1B представляетъ сумму трехъ діаметровъ.

Въ третьемъ случаѣ: Результатъ подстановки, равный $12 - \lambda^2$, отрицателенъ, и, слѣдовательно, изслѣдуемый положительный корень, какъ большій корень уравненія, представляетъ число, большее 2, а потому не соотвѣтствуетъ задачѣ.

Результаты предъидущаго изслѣдованія могутъ быть выражены слѣдующею таблицею:

$\lambda^2 < 3$ . . . . корни мнимые.

$\lambda^2 = 3$ (min.); $x = \frac{1}{2} r$; $^1/_2$ правильнаго шестиугольн. одно рѣшеніе.

$$\lambda^2 > 3 \begin{cases} \lambda^2 < 4 \ \dots\dots\dots\dots & \text{два рѣшенія.} \\ \lambda^2 = 4;\ x_1 = 0,\ x_2 = r \ \dots\dots & \text{два рѣшенія.} \\ \lambda^2 > 4 \begin{cases} \lambda^2 < 12 \ \dots\dots\dots & \text{одно рѣшеніе.} \\ \lambda^2 = 12 \text{ (maximum)},\ x = 2r \ \dots & \text{одно рѣшеніе.} \\ \lambda^2 > 12 \ \dots\dots\dots & \text{нѣтъ рѣшеній.} \end{cases} \end{cases}$$

Посмотримъ, при какихъ значеніяхъ параметра λ получается точка M на первомъ квадрантѣ, и при какихъ — на второмъ? Для перваго квадранта неизвѣстное y не должно превышать числа 1. Подставляемъ въ лѣвую часть уравненія (2) число 1 вмѣсто буквы y; результатъ подстановки, равный

$$4 - \lambda^2,$$

представитъ положительное число для всѣхъ значеній λ^2, меньшихъ 4, причемъ полусумма корней уравненія (2), равная $\frac{1}{2}$, будетъ менѣе числа 1. Отсюда вытекаетъ, что, для всѣхъ значеній параметра λ, удовлетворяющихъ условію:

$$3 \leqslant \lambda^2 \leqslant 4.$$

мы будемъ имѣть двѣ точки M на первомъ квадрантѣ.

Если-же $\lambda^2 > 4$, то результатъ подстановки отрицательный, и, слѣдовательно, единственный въ этомъ случаѣ положительный корень уравненія (2) будетъ болѣе 1, такъ что онъ опредѣлитъ точку на 2-мъ квадрантѣ.

519. Если примемъ за неизвѣстное x хорду MN, то для хордъ MN и M_1N_1 получаются различныя уравненія, а именно:

$$\text{для хорды } MN \ldots\ldots x^2 - 2rx + (4r^2 - m^2) = 0,$$
$$\text{для хорды } M_1N_1 \ldots\ldots x^2 + 2rx + (4r^2 - m^2) = 0.$$

Каждый изъ вещественныхъ положительныхъ корней каждаго изъ этихъ уравненій не долженъ превышать $2r$, ибо неизвѣстное x въ обоихъ случаяхъ представляетъ хорду, которая не болѣе діаметра. Изслѣдованіе предоставляемъ сдѣлать читателю.

520. Изслѣдованіе суммы m^2 трехъ квадратовъ. Изъ уравненія (2) получается слѣдующее выраженіе для суммы λ^2 трехъ квадратовъ:

$$\lambda^2 = 4y^2 - 4y + 4 = (2y - 1)^2 + 3.$$

Прослѣдимъ за всѣми измѣненіями, которыя будетъ претерпѣвать число λ^2 при измѣненіи y отъ 0 до 2.

Та форма, которую мы придали выраженію λ^2, показываетъ, что. при возрастаніи y отъ 0 до $\frac{1}{2}$, т.-е. при возрастаніи x отъ 0 до $\frac{1}{2}r$, число λ^2 убываетъ отъ 4 до 3, т.-е. количество m^2 убываетъ отъ $4r^2$ до $3r^2$; при дальнѣйшемъ возрастаніи y отъ $\frac{1}{2}$ до 1 и отъ 1 до 2, т.-е. при возрастаніи x отъ $\frac{1}{2}r$ до r и, затѣмъ, отъ r до $2r$, число λ^2 возрастаетъ отъ 3 до 4 и, затѣмъ, отъ 4 до 12; слѣдовательно, количество m^2 возрастаетъ отъ $3r^2$ до $4r^2$ и, затѣмъ, отъ $4r^2$ до $12r^2$.

Эти результаты могутъ быть представлены слѣдующими таблицами:

$$\begin{array}{c|l} y & 0 \ \ldots < \ldots \frac{1}{2} \ldots < \ldots 1 \ \ldots < \ldots \ 2 \\ \lambda^2 & 4 \ \ldots > \ldots 3 \ \ldots < \ldots 4 \ \ldots < \ldots 12 \end{array}$$

и

$$\begin{array}{c|l} x & 0 \ \ldots < \ldots \frac{1}{2}r \ldots < \ldots r \ \ldots < \ldots \ 2r \\ m^2 & 4r^2 \ldots > \ldots 3r^2 \ldots < \ldots 4r^2 \ldots < \ldots 12r^2. \end{array}$$

Послѣдняя таблица говоритъ намъ, что количество m^2, имѣя, при $x=0$, значеніе $4r^2$, идетъ, сперва убывая до $3r^2$, а потомъ возрастая до $12r^2$; слѣдовательно, это количество m^2 проходитъ два раза черезъ каждое изъ значеній, заключенныхъ между $4r^2$ и $3r^2$, и только одинъ разъ черезъ каждое изъ значеній, заключенныхъ между $4r^2$ и $12r^2$. Результатъ этотъ показываетъ, что 1) предложенная задача невозможна для всѣхъ значеній m^2, не заключенныхъ между $3r^2$ и $12r^2$, и что 2) предложенная задача имѣетъ одно или два рѣшенія, смотря по тому, заключено ли m^2 между $12r^2$ и $4r^2$, или между $4r^2$ и $3r^2$.

Видимъ, что получены снова найденные выше результаты, но путемъ болѣе короткимъ.

521. Предъидущіе результаты можемъ получить еще такимъ образомъ. Обозначивъ лѣвую часть уравненія (2) черезъ $F(y)$, подставимъ въ нее, вмѣсто буквы y, послѣдовательно числа: $-\infty$, 0, $\frac{1}{2}$, 1 и 2 и замѣтимъ знаки результатовъ подстановокъ; получимъ слѣдующій рядъ знаковъ:

$f(-\infty)$	$f(0)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(\infty)$
$+$,	знакъ $(4-\lambda^2)$,	знакъ $(3-\lambda^2)$,	знакъ $(4-\lambda^2)$,	знакъ $(12-\lambda^2)$,	$+$.

Должно изслѣдовать только случай $\lambda^2 > 3$, ибо, при $\lambda^2 < 3$, корни уравненія (2) мнимые; при $\lambda^2 = 3$ они равны между собою и равны $\frac{1}{2}$ и могутъ быть приняты, ибо они положительны и не превышаютъ числа 2.

Если $\lambda^2 > 3$, но < 4, то предъидущій рядъ знаковъ будетъ таковъ

$$+ \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +.$$

Этотъ рядъ показываетъ, что одинъ корень заключенъ между 0 и $\frac{1}{2}$, другой — между $\frac{1}{2}$ и 1, и, слѣдовательно, оба рѣшаютъ вопросъ.

Если $\lambda^2 = 4$, то рядъ знаковъ будетъ слѣдующій:

$$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad +.$$

Этотъ рядъ говоритъ, что уравненіе имѣетъ корнями 0 и 1, и оба корня рѣшаютъ вопросъ.

Если $\lambda^2 > 4$, но < 12, то соотвѣтствующій этому предположенію рядъ знаковъ:

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad + \quad +$$

покажетъ, что одинъ корень заключенъ между 0 и $-\infty$, другой — между 1 и 2; первый корень, какъ отрицательный, долженъ быть отброшенъ; второй рѣшаетъ вопросъ.

Если $\lambda^2 = 12$, то соотвѣтствующій рядъ знаковъ:

$$+ \quad - \quad - \quad - \quad 0$$

покажетъ, что одинъ корень заключенъ между $-\infty$ и 0 и долженъ быть отброшенъ, другой корень равенъ 2 и рѣшаетъ вопросъ.

Если $\lambda^2 > 12$, то рядъ знаковъ:

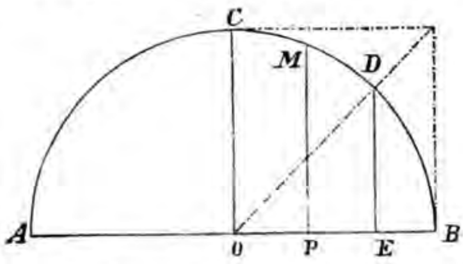
$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad +$$

покажетъ, что одинъ корень отрицателенъ, а другой, хотя и положителенъ, но болѣе 2, и, слѣдовательно, долженъ быть отброшенъ.

Всѣ эти результаты мы уже имѣли выше.

Задача VIII.

522. *Дана полуокружность діаметра $AB = 2r$. Требуется найти*



на ней такую точку M, чтобы проэкція P этой точки на діаметръ удовлетворяла уравненію

$$AP + PM = m,$$

гдѣ m есть данное количество.

Принявъ за неизвѣстное x отрѣзокъ AP, получимъ слѣдующее уравненіе вопроса:

$$\sqrt{x(2r-x)}=m-x. \tag{1}$$

Разсмотримъ совмѣстно съ нимъ уравненіе:

$$-\sqrt{x(2r-x)}=m-x. \tag{1'}$$

Оба эти уравненія, по уничтоженіи радикаловъ, приведутся къ одному и тому же уравненію:

$$2x^2-2(m+r)x+m^2=0, \tag{1''}$$

и этому уравненію удовлетворяютъ корни уравненій (1) и (1').

523. Изслѣдованіе. Введемъ отвлеченныя числа:

$$\frac{x}{r}=y,\quad \frac{r}{r}=1,\quad \frac{m}{r}=\lambda.$$

Предъидущія уравненія перепишутся такимъ образомъ:

$$(2)\qquad \sqrt{y(2-y)}=\lambda-y\ ,\ -\sqrt{y(2-y)}=\lambda-y. \qquad (3)$$

$$2y^2-2(\lambda+1)y+\lambda^2=0. \tag{4}$$

Ясно, что тотъ изъ вещественныхъ корней уравненія (4) будетъ рѣшать вопросъ, который 1) будетъ не менѣе 0, 2) удовлетворитъ уравненію (2), т.-е. будетъ не болѣе λ, и 3) будетъ не болѣе 2. Но легко видѣть, что послѣднее условіе выполняется само по себѣ, если удовлетворятся предъидующія условія, ибо $\lambda-y$ не представитъ числа мнимаго, а потому $y(2-y)$ не представитъ числа отрицательнаго; но y представится числомъ положительнымъ; слѣдовательно, число $(2-y)$ не представитъ отрицательнаго числа, т.-е. y будетъ не болѣе 2.

Итакъ, тотъ изъ вещественныхъ и положительныхъ корней уравненія (4) рѣшаетъ вопросъ, который не превышаетъ λ.

Условіе вещественности корней будетъ таково:

$$\lambda^2-2\lambda-1\leqslant 0 \tag{5}$$

Принявъ во вниманіе, что корни трехчлена, помѣщеннаго въ лѣвой части этого неравенства, суть.

$$1-\sqrt{2}\quad \text{и}\quad 1+\sqrt{2},$$

заключаемъ, что условіе (5) удовлетворяется слѣдующими значеніями параметра λ:

$$1-\sqrt{2}\leqslant\lambda\leqslant1+\sqrt{2}.$$

или

$$1-\sqrt{2}\leqslant\lambda\leqslant0,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant1+\sqrt{2}.$$

Но λ есть число положительное; слѣдовательно, условіе вещественности приводится къ слѣдующему:

$$0\leqslant\lambda\leqslant1+\sqrt{2}.$$

Это условіе даетъ три случая для изслѣдованія.

Случай первый. $\lambda>1+\sqrt{2}$. Уравненіе (4) имѣетъ мнимые корни, и задача невозможна.

Случай второй. $\lambda=1+\sqrt{2}$. Корни уравненія [4] равны между собою, и тогда ихъ общее значеніе, равное $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, будучи менѣе λ, рѣшаетъ вопросъ.

Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ искомая точка M дѣлитъ пополамъ квадрантъ BC.

Должно замѣтить, что $\lambda=1+\sqrt{2}$ есть наибольшее значеніе, какого можетъ достигать λ, такъ что наибольшее значеніе для данной суммы m равно $(1+\sqrt{2})r$, и этого значенія сумма m достигаетъ тогда, когда точка M займетъ положеніе средины квадранта BC.

Случай третій. $\lambda<1+\sqrt{2}$. Въ этомъ случаѣ корни уравненія (4) вещественны и неравны между собою. Они положительны, ибо произведеніе и сумма ихъ положительны.

Остается выбрать тотъ изъ корней, значеніе котораго не превышаетъ соотвѣтствующаго значенія λ. Для этой цѣли изслѣдуемъ знакъ подстановки числа λ, вмѣсто буквы y, въ лѣвую часть уравненія (4). Подстановка эта равна

$$\lambda^2-2\lambda,$$

и очевидно, что ея знакъ одинаковъ со знакомъ выраженія

$$\lambda-2.$$

Нашъ случай подраздѣляется, слѣдовательно, на слѣдующіе три:

1°. $\lambda > 2$. Въ этомъ случаѣ выраженіе $(\lambda - 2)$ положительно, причемъ полусумма корней, равная $\frac{\lambda+1}{2}$, при разсматриваемыхъ значеніяхъ λ, менѣе λ, ибо неравенство $\frac{\lambda+1}{2} < \lambda$ даетъ $\lambda > 1$, что не противорѣчитъ разсматриваемому случаю. Результатъ этотъ говоритъ, что наша задача въ разсматриваемомъ случаѣ имѣетъ два рѣшенія.

2°. $\lambda = 2$. Въ этомъ случаѣ корни уравненія суть: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, и оба рѣшаютъ вопросъ. Искомыя точки суть точки B и C.

3°. $\lambda < 2$. Въ этомъ случаѣ выраженіе $(\lambda - 2)$ отрицательно, и, слѣдовательно, только меньшій корень рѣшаетъ вопросъ.

Замѣтимъ, что, при $\lambda = 0$, корни уравненія суть 0 и 1, и корень 1 долженъ быть отброшенъ, такъ что существуетъ только одна искомая точка, и она есть точка A. Все изслѣдованіе можетъ быть представлено таблицею:

$\lambda > 1 + \sqrt{2}$ . . . . корни мнимые.

$\lambda = 1 + \sqrt{2}$ (maximum), $y_1 = y_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ . . . . одно рѣшеніе.

$$\lambda < 1 + \sqrt{2} \begin{cases} \lambda > 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{два рѣшенія.} \\ \lambda = 2;\ y_1 = 1,\ y_2 = 2 \ldots\ldots\ldots \text{два рѣшенія.} \\ \lambda < 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{одно рѣшеніе.} \end{cases}$$

524. Построеніе рѣшеній. Для построенія рѣшеній разсмотримъ случай, когда существуютъ два корня, т.-е. когда

$$2r \leqslant m < r(1 + \sqrt{2}).$$

Извѣстно, что

$$x_1 + x_2 = m + r, \quad x_1 x_2 = \frac{m^2}{2}.$$

Отложимъ:

$$AC = m \quad \text{и} \quad CD = r.$$

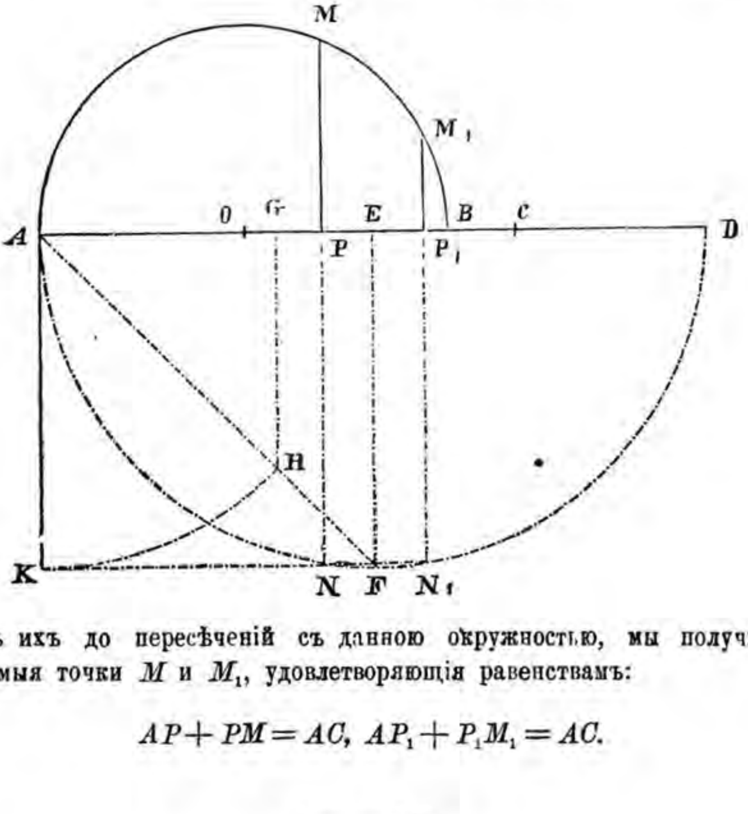
На $AD = m + r$, какъ на діаметрѣ, опишемъ полуокружность и на касательной къ этой окружности въ точкѣ A нанесемъ длину $AK = \frac{m\sqrt{2}}{2}$; съ этою цѣлію возставимъ перпендикуляръ къ линіи $AC = m$ въ ея срединѣ G; перпендикуляръ этотъ встрѣтитъ хорду квадранта AF въ точкѣ H, такъ что

$$AH = AG\sqrt{2};$$

возьмемъ $AK = AH$ и проведемъ KNN_1 параллельно AD. Длины KN и KN_1 отвѣчаютъ уравненію, ибо

$$KN \cdot KN_1 = \overline{KA}^2, \quad KN + KN_1 = AD.$$

Опустивъ изъ точекъ N и N_1 перпендикуляры на AD и продол-



живъ ихъ до пересѣченій съ данною окружностью, мы получимъ искомыя точки M и M_1, удовлетворяющія равенствамъ:

$$AP + PM = AC, \; AP_1 + P_1M_1 = AC.$$

Задача IX.

525. *Въ данной окружности проведены два радіуса, составляющіе между собою уголъ въ 45°. Требуется построить такой прямоугольникъ, одна сторона котораго PQ лежала бы на радіусѣ OX, концы N и M другой стороны лежали бы соотвѣтственно на радіусѣ OY и на данной окружности и діагональ котораго равнялась бы данной длинѣ m.*

Принявъ за неизвѣстное x отрѣзокъ OP и означивъ радіусъ окружности буквою r, при помощи треугольника MOP получимъ:

$$m^2 = r^2 + x^2 - 2x\sqrt{r^2 - x^2}. \qquad (1)$$

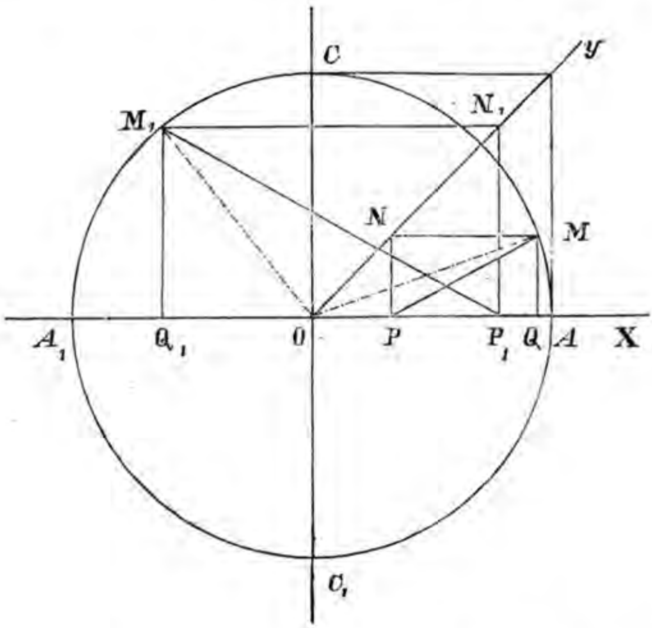
Уравненіе остается однимъ и тѣмъ же, пока точка M расположена на дугѣ AC, ибо въ этомъ случаѣ уголъ POM есть уголъ острый.

Если же точка M лежитъ на дугѣ CA_1, такъ что получается прямоугольникъ $M_1N_1P_1Q_1$, то, принявъ $OP_1 = x$, получаемъ уравненіе:

$$m^2 = r^2 + x^2 + 2x\sqrt{r^2 - x^2}, \tag{2}$$

отличающееся отъ предъидущаго.

Безполезно предполагать, что точка M перемѣщается на полуокружности A_1C_1A, ибо въ этомъ предположеніи мы получимъ рѣ-



шенія симметричныя, относительно точки O, тѣмъ рѣшеніямъ, которыя получимъ на полуокружности ACA_1.

Уравненія (1) и (2) могутъ быть написаны такимъ образомъ:

$$\pm 2x\sqrt{r^2 - x^2} = x^2 + r^2 - m^2, \tag{3}$$

гдѣ знакъ $+$ отвѣчаетъ уравненію (1), а знакъ $(-)$ соотвѣтствуетъ уравненію (2). Уравненія эти, по уничтоженіи радикала, приводятся къ одному и тому же биквадратному уравненію:

$$5x^4 - 2(m^2 + r^2)x^2 + (m^2 - r^2)^2 = 0. \tag{4}$$

526. Изслѣдованіе. Введемъ, вмѣсто линейныхъ чиселъ x, m и r, числа отвлеченныя: $\frac{x}{r}=y$, $\frac{r}{r}=1$, $\frac{m}{r}=\lambda$. Уравненія (3) и (4) перепишутся соотвѣтственно такимъ образомъ:

$$\pm 2y\sqrt{1-y^2}=y^2+1-\lambda^2, \tag{3'}$$

$$5y^4-2(\lambda^2+1)y^2+(\lambda^2-1)^2=0. \tag{4'}$$

Тотъ изъ вещественныхъ положительныхъ корней уравненія (4′) рѣшитъ задачу, который непревыситъ числа 1, ибо количество x не должно превышать радіуса r.

Замѣтимъ, что если корни уравненія (4′) вещественны, то два изъ нихъ непремѣнно положительны и два — отрицательны.

Замѣтимъ далѣе, что если корни вещественны, то модуль каждаго изъ нихъ не превышаетъ 1, ибо каждый изъ нихъ, непремѣнно удовлетворяя одному изъ уравненій (3′), даетъ для радикала $\sqrt{1-y^2}$ вещественное число, а это показываетъ, что модуль корня y не превышаетъ числа 1.

Итакъ, остается изслѣдовать вещественность корней уравненія (4′).

Такъ какъ уравненіе (4′) есть уравненіе биквадратное, то, для вещественности его корней, необходимо и достаточно, чтобы значенія x^2 были вещественны и положительны; но эти значенія положительны, если вещественны; слѣдовательно, для вещественности корней уравненія (4′) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\lambda^2+1)^2-5(\lambda^2-1)^2\geqslant 0.$$

Условіе это можетъ написаться такимъ образомъ:

$$[(\sqrt{5}+1)\lambda^2-(\sqrt{5}-1)][(\sqrt{5}-1)\lambda^2-(\sqrt{5}+1)]\leqslant 0.$$

Раздѣливъ каждый изъ сомножителей лѣвой части соотвѣтственно на положительныя числа $(\sqrt{5}+1)$ и $(\sqrt{5}-1)$, — принявъ во вниманіе, что

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2,\quad \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,$$

и разложивъ затѣмъ каждый изъ сомножителей на сомножителей, линейныхъ относительно λ, получимъ:

$$\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\leqslant 0.$$

Принявъ далѣе во вниманіе, что каждое изъ чиселъ:

$$\lambda+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right),\ \lambda+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

есть число положительное, получимъ условіе вещественности корней уравненія ($4'$):

$$\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\leqslant 0,$$

дающее слѣдующія границы для λ:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{5}$$

Посмотримъ теперь, при какихъ значеніяхъ λ, удовлетворяющихъ условію (5), искомая точка лежитъ на первомъ квадрантѣ AC, и при какихъ — на второмъ CA_1?

Для рѣшенія этого вопроса обратимся къ уравненіямъ ($3'$).

Они говорятъ, что должно быть:

для точекъ перваго квадранта . . . . . $y^2\geqslant\lambda^2-1$,
для точекъ втораго квадранта . . . . . $y^2\leqslant\lambda^2-1$.

Подставляемъ, слѣдовательно, въ лѣвую часть уравненія ($4'$), вмѣсто y^2, число λ^2-1. Результатъ подстановки будетъ таковъ:

$$(\lambda^2-1)(\lambda^2-2), \tag{6}$$

причемъ полусумма корней равна $\frac{\lambda^2+1}{5}$.

Разсмотримъ слѣдующіе три случая:

1°. $\lambda^2<1$. Для этихъ значеній λ^2 выраженіе (6) положительно, причемъ полусумма корней болѣе λ^2-1. Въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, обѣ точки лежатъ на квадрантѣ AC.

2°. $1<\lambda^2<2$. Выраженіе (6) отрицательное, т.-е. одна изъ точекъ лежитъ на квадрантѣ AC, другая — на квадрантѣ CA_1.

3°. $\lambda^2>2$. Выраженіе (6) положительное, но полусумма корней менѣе λ^2-1; слѣдовательно, обѣ точки лежатъ на квадрантѣ CA_1.

527. Условія (5) говорятъ намъ, что *наибольшее* значеніе m равно

$$r\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

т.-е. равно сторонѣ правильнаго звѣздообразнаго десятиугольника, вписаннаго въ данную окружность. Этому значенію m соотвѣтствуетъ прямоугольникъ, котораго вершина лежитъ на дугѣ A_1C. Наименьшее значеніе m равно

$$r \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

т.-е равно сторонѣ правильнаго выпуклаго десятиугольника. Ему отвѣчаетъ прямоугольникъ, котораго вершина M расположена на дугѣ AC.

Задача X.

528. *Дана окружность, діаметръ AB и касательная къ окружности въ точкѣ B. Требуется изъ точки A провести сѣкущую, которая встрѣтила бы окружность и касательную соотвѣтственно въ точкахъ M и P, удовлетворяющихъ условію: $AM^2+MP^2=k^2$.*

Примемъ за неизвѣстное x хорду AM. Чертежъ даетъ:

$$AM^2+MP^2=k^2,\ (AM+MP)^2=PB^2+4r^2,\ (AM+MP)MP=PB^2.$$

Равенства эти легко приводятъ къ уравненію:

$$x\sqrt{k^2-x^2}=4r^2-x^2. \qquad (1)$$

Совмѣстно съ предложенною задачею разсмотримъ задачу: *провести изъ точки A такую сѣкущую, чтобы точки M и P удовлетворяли условію: $AP^2+MP^2=k^2$.*

Принявъ въ этой послѣдней задачѣ за неизвѣстное x отрѣзокъ AP, легко получимъ уравненіе:

$$-x\sqrt{k^2-x^2}=4r^2-x^2. \qquad (2)$$

Уравненія (1) и (2), по уничтоженіи радикаловъ, приводятъ насъ къ одному и тому же биквадратному уравненію:

$$2x^4-(8r^2+k^2)x^2+16r^2=0. \qquad (3)$$

Введя отвлеченныя числа:

$$\frac{x}{r}=y,\ \ \frac{r}{r}=1,\ \ \frac{k}{r}=\lambda,$$

перепишемъ уравненія (1), (2) и (3) такимъ образомъ:

$$(1)\qquad y\sqrt{\lambda^2-y^2}=4-y^2,\quad -\sqrt{\lambda^2-y^2}=4-y^2,\qquad (2)$$

$$2y^4-(8+\lambda^2)y^2+16=0. \qquad (3)$$

Тотъ изъ вещественныхъ и положительныхъ корней уравненія (3) рѣшитъ предложенную задачу, квадратъ котораго будетъ не болѣе 4, и тотъ изъ этихъ корней рѣшитъ вторую задачу, квадратъ котораго будетъ не менѣе 4. Для того, чтобы уравненіе (3) имѣло вещественный и положительный корень, необходимо и достаточно, чтобы оно имѣло для y^2 положительное значеніе. Но легко видѣть, что если уравненіе (3) дастъ для y^2 значенія вещественныя, то оно дастъ для нихъ значенія положительныя, ибо произведеніе обоихъ y^2 и сумма ихъ суть числа положительныя при вещественномъ λ.

Найдемъ условіе вещественности для y^2; оно таково:

$$\lambda^4+16\lambda^2-64\geqslant 0,$$

или

$$\left(\lambda^2+8-8\sqrt{2}\right)\left(\lambda^2+8+8\sqrt{2}\right)\geqslant 0.$$

Условіе это, будучи равносильно слѣдующему:

$$\lambda^2+8-8\sqrt{2}\geqslant 0, \text{ или же } \lambda^2\geqslant 8\sqrt{2}-8,$$

заставляетъ разсматривать слѣдующіе три случая:

Случай 1. $\lambda^2<8\sqrt{2}-8$. Въ этомъ случаѣ оба значенія y^2 мнимыя, и, слѣдовательно, ни та, ни другая задача невозможна.

Случай 2. $\lambda^2=8\sqrt{2}-8$. Оба значенія y^2 равны $2\sqrt{2}$. Такъ какъ это значеніе менѣе 4, то предложенная задача имѣетъ одно рѣшеніе, вторая же задача невозможна.

Случай 3. $\lambda^2>8\sqrt{2}-8$. Оба значенія y^2 вещественны; слѣдовательно, они положительны, и уравненіе (3) имѣетъ два положительныхъ корня. Которую изъ задачъ они рѣшаютъ? Для отвѣта на вопросъ подставимъ въ лѣвую часть уравненія (3), вмѣсто y^2, число 4. Результатъ подстановки, равный

$$16-4\lambda^2=4(4-\lambda^2),$$

разбиваетъ разсматриваемый случай на слѣдующіе три:

$$\lambda^2>8\sqrt{2}-8\begin{cases}\lambda^2<4,\\ \lambda^2=4,\\ \lambda^2>4.\end{cases}$$

1°. Если $\lambda^2 < 4$, то $4 - \lambda^2$ есть число положительное, причемъ полусумма значеній y^2, равная $\frac{8+\lambda^2}{4}$, менѣе 4. Слѣдовательно, каждое изъ значеній y^2 менѣе 4, а потому предложенная задача имѣетъ два рѣшенія, вторая — ни одного.

2°. Если $\lambda^2 = 4$, то $y_1{}^2 = 2$, $y_2{}^2 = 4$. Эти результаты говорятъ, что предложенная задача имѣетъ два рѣшенія, вторая — одно, равное 2.

3°. Если $\lambda^2 > 4$, то одно значеніе y^2 менѣе 4, а второе — болѣе 4, и, слѣдовательно, каждая изъ задачъ имѣетъ по одному рѣшенію, причемъ рѣшенія этихъ задачъ соотвѣтственно суть:

$$y_1{}^2 = \frac{8 + \lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 + 16\lambda^2 - 64}}{4}, \quad y_2{}^2 = \frac{8 + \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 16\lambda^2 - 64}}{4}. \tag{4}$$

Обратимъ вниманіе на тотъ случай, когда $\lambda^2 = \infty$. *À priori* видно, что первая задача должна имѣть рѣшеніемъ 0, вторая — безконечность. Посмотримъ, получаются ли эти результаты изъ формулъ (4). Вторая изъ формулъ даетъ непосредственно желаемый результатъ, ибо она, при $\lambda^2 = \infty$, приводится къ формѣ:

$$y_2{}^2 = \frac{\infty + \infty}{4} = \infty.$$

Что же касается до первой формулы, то она, при $\lambda = \infty$, принимаетъ неопредѣленный видъ:

$$y_1{}^2 = \frac{\infty - \infty}{4}.$$

Для раскрытія этой неопредѣленности (**193**) преобразуемъ y^2 такимъ образомъ:

$$y_1{}^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{(8+\lambda^2)^2 - (\lambda^4 + 16\lambda^2 - 64)}{8 + \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 16\lambda^2 + 4}} = \frac{1}{4} \frac{128}{8 + \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 16\lambda^2 + 4}}.$$

Этотъ видъ показываетъ, что $y_1{}^2$, при $\lambda = \infty$, равняется нулю.

Изслѣдуемъ еще одно обстоятельство. Посмотримъ, когда точка M лежитъ на квадрантѣ AC и когда — на квадрантѣ CB въ обѣихъ задачахъ. Для квадранта AC первая задача требуетъ, чтобы $y^2 < 2$; вторая, чтобы $y^2 > 8$; для квадранта BC, наоборотъ, первая задача требуетъ, чтобы $y^2 > 2$; вторая —, чтобы $y^2 < 8$.

Обратимся сперва къ первой задачѣ. Подставимъ въ лѣвую часть уравненія (3), вмѣсто y^2, число 2; результатъ подстановки, равный

$$2(4-\lambda^2),$$

покажетъ, что, при $\lambda^2 < 4$, каждое изъ значеній y^2 болѣе числа 2, и, слѣдовательно, оба y^2 опредѣляютъ двѣ точки на квадрантѣ CB. Если $\lambda^2 = 4$, то получаются точки C и B.

Если $\lambda^2 > 4$, то меньшій корень, который одинъ и рѣшаетъ въ этомъ случаѣ задачу, будетъ менѣе 2, и точка M лежитъ, слѣдовательно, на квадрантѣ AC.

Обратимся ко второй задачѣ. Подставимъ въ лѣвую часть уравненія, вмѣсто y^2, число 8:

$$80-8\lambda^2 = 8(10-\lambda^2).$$

Если $\lambda^2 < 10$, то оба значенія y^2 будутъ менѣе 8, и точка M лежитъ на квадрантѣ CB. Если $\lambda^2 = 10$, то $y^2 = 8$, и точка M совпадаетъ съ точкою C. И наконецъ, если $\lambda^2 > 10$, то большій корень, рѣшающій задачу, будетъ болѣе 8, и точка M лежитъ на квадрантѣ AC. Чтобы резюмировать изслѣдованіе, напишемъ рядъ возрастающихъ значеній для λ^2:

$$\lambda^2 \ldots 0 \underbrace{\quad}_{1} 8\sqrt{2}-8 \underbrace{\quad}_{2} 4 \underbrace{\quad}_{3} 10 \underbrace{\quad}_{4} \infty.$$

Для значеній λ^2, лежащихъ 1) въ первомъ промежуткѣ, ни та, ни другая задача не имѣетъ рѣшеній.

2) во второмъ промежуткѣ, первая задача имѣетъ два рѣшенія, и оба лежатъ на квадрантѣ AB; вторая не имѣетъ рѣшеній.

3) въ третьемъ промежуткѣ, и та и другая задача имѣетъ по одному рѣшенію на квадрантѣ CB.

4) въ четвертомъ промежуткѣ, и та и другая задача имѣетъ по одному рѣшенію: первая — на квадрантѣ BC, вторая — на квадрантѣ AC.

529. Непосредственное изслѣдованіе λ^2. Рѣшимъ уравненіе (3) относительно λ^2:

$$\lambda^2 = \frac{2y^4-8y^2+16}{y^2}.$$

Прослѣдимъ за ходомъ измѣненій λ^2 въ то время, какъ y^2 будетъ измѣняться непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для этой цѣли составимъ таблицу:

y^2	λ^2
$-\infty$	$-\infty$
$-2\sqrt{2}$	$-8-8\sqrt{2}$ (maximum)
0	$\mp\infty$
1	10
2	4
$2\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}-8$ (minimum)
4	4
8	10
$+\infty$	$+\infty$.

Насъ интересуетъ часть этой таблицы, обнимающая измѣненія λ^2 при измѣненіи y^2 отъ 0 до $+\infty$.

Таблица эта говоритъ:

1) Каждому значенію λ^2, заключенному между 10 и $+\infty$, отвѣчаютъ два значенія y^2; одно лежитъ между 0 и 1, другое—между 8 и $+\infty$; первое рѣшаетъ первую задачу на квадрантѣ BC, второе—вторую на квадрантѣ AC.

2) Каждому значенію λ^2, лежащему между 4 и 10, отвѣчаютъ два значенія y^2; одно лежитъ между 1 и 2 и рѣшаетъ первую задачу, второе — между 4 и 8 и рѣшаетъ вторую задачу, и оба рѣшенія даютъ точки на квадрантѣ BC.

3) Каждому значенію λ^2, заключенному между $8\sqrt{2}-8$ и 4, отвѣчаютъ два значенія y^2; одно лежитъ между 2 и $2\sqrt{2}$, другое—между $2\sqrt{2}$ и 4; оба значенія рѣшаютъ первую задачу и даютъ двѣ точки на квадрантѣ AC.

4) Каждому значенію λ^2, заключенному между $-8-8\sqrt{2}$ и $8+8\sqrt{2}$, отвѣчаетъ мнимое значеніе для y^2.

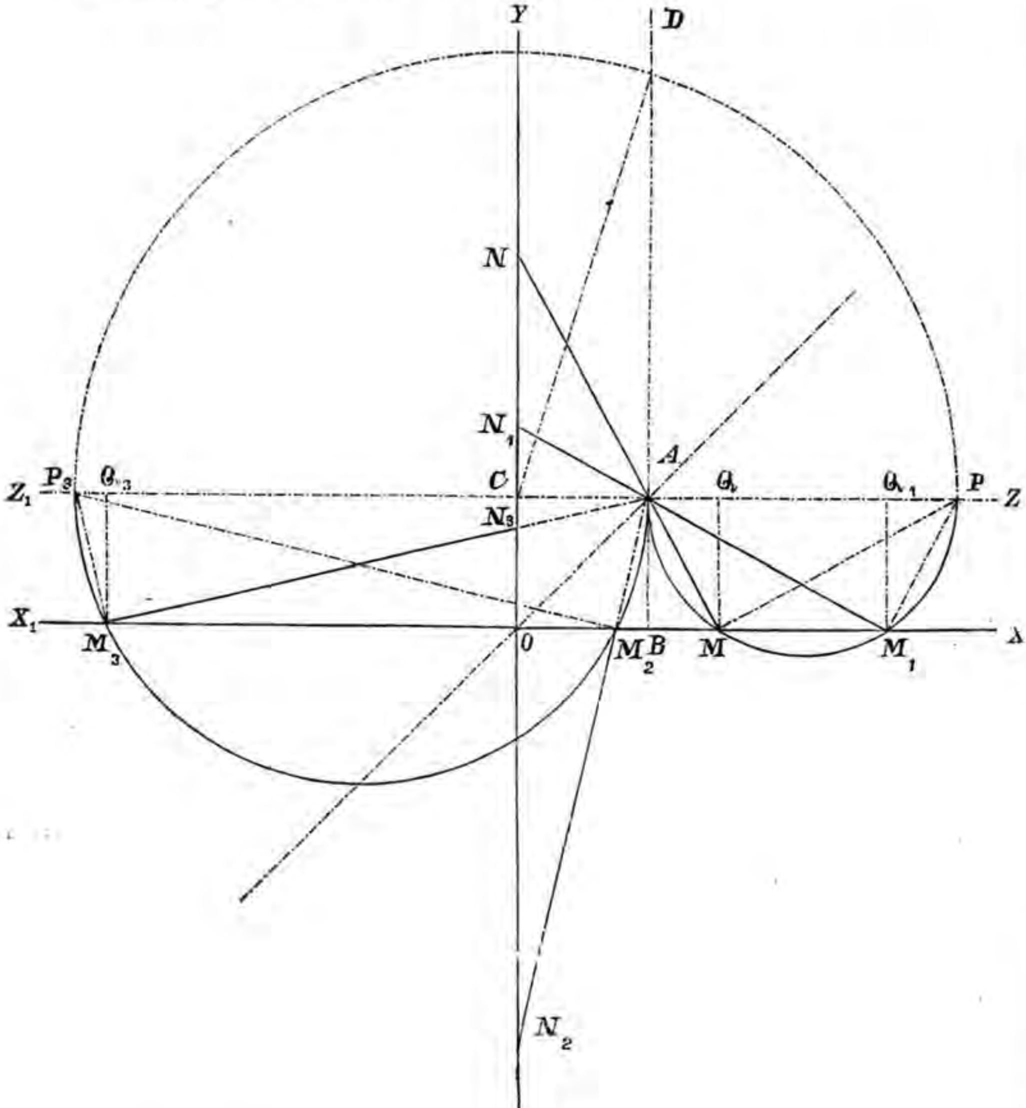
5) И, наконецъ, каждому значенію λ^2, заключенному между $-\infty$ и $-8-8\sqrt{2}$, отвѣчаютъ отрицательныя значенія для y^2.

Задача XI (Паппуса).

530. *Дана точка A на биссектрисѣ одного изъ угловъ, образованныхъ двумя взаимно перпендикулярными прямыми YY_1 и XX_1; требуется черезъ эту точку провести прямую такимъ образомъ, чтобы ея отрѣ-*

зокъ, заключенный между сторонами одного изъ четырехъ угловъ, равнялся данной длинѣ p.

Легко видѣть, что если данная точка лежитъ въ углѣ YOX, то для этого угла задача возможна только при



достаточно большихъ значеніяхъ данной длины p. Если задача имѣетъ рѣшеніе MN въ углѣ YOX, то она имѣетъ и другое рѣшеніе M_1N_1 въ томъ же углѣ, симметричное, относительно OA, первому рѣшенію.

Далѣе, непосредственно видно, что задача имѣетъ всегда по одному рѣшенію, и только по одному, въ каждомъ изъ угловъ YOX_1 и Y_1OX.

Это первое изученіе вопроса показываетъ намъ, что предложенная задача въ нѣкоторыхъ случаяхъ имѣетъ четыре рѣшенія. Если, слѣдовательно, за неизвѣстное будетъ принята такая величина, значенія которой опредѣляютъ каждое изъ вышеупомянутыхъ рѣшеній, то вопросъ приведется къ уравненію четвертой степени.

531. Примемъ за неизвѣстное x разстояніе точки 0 отъ точки, въ которой искомая прямая пересѣкаетъ ось XX_1, взятое со знакомъ $+$, когда это разстояніе направлено въ одну сторону, и со знакомъ $(-)$, когда оно направлено въ противоположную сторону. Возьмемъ, напримѣръ, соотвѣтственно:

$$x = OM,\ x = OM_1,\ x = OM_2,\ x = -OM_3.$$

Обозначивъ разстоянія точки M отъ сторонъ угла буквою a, легко получимъ во всѣхъ четырехъ случаяхъ слѣдующее уравненіе вопроса:

$$x^4 - 2ax^3 - (p^2 - 2a^2)x^2 + 2ap^2x - a^2p^2 = 0.$$

Итакъ, тотъ выборъ неизвѣстнаго, который мы сдѣлали, привелъ насъ къ полному уравненію четвертой степени, которое рѣшать мы не умѣемъ.

532. Выберемъ за неизвѣстное другую величину. Возьмемъ соотвѣтственно:

$$x = BM.\ x = BM_1,\ x = -BM_2,\ x = -BM_4.$$

Во всѣхъ четырехъ случаяхъ получимъ уравненіе:

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} = p^2,$$

которое можетъ быть приведено къ формѣ:

$$\left(x + \frac{a^2}{x}\right)^2 + 2a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = p^2.$$

Очевидно, что рѣшеніе этого уравненія приводится къ рѣшенію слѣдующихъ двухъ:

$$\begin{cases} y^2 + 2ay - p^2 = 0, \\ x^2 - \ yx + a^2 = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которыя мы умѣемъ рѣшить.

533. Вспомогательное неизвѣстное y имѣетъ весьма простое геометрическое значеніе. И въ самомъ дѣлѣ, опустимъ перпендикуляръ MQ на линію AZ, параллельную OX, и возставимъ къ MN перпендикуляръ MP. Получимъ:

$$AP = BM + QP = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Для рѣшенія N_3M_3 найдемъ:

$$-AP_3 = -AQ_3 - Q_3P_3 = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

Но уравненіе (3) даетъ только два рѣшенія для y; отсюда должно вытекать, что значенія для y, отвѣчающія прямымъ M_1N_1 и M_2N_2, должны быть соотвѣтственно равны значеніямъ y, отвѣчающимъ прямымъ MN и M_3N_3. Это дѣйствительно и оказывается. И въ самомъ дѣлѣ, построимъ M_1G перпендикулярно къ M_1N_1 (на чертежѣ точка G не назначена); легко убѣдиться, что треугольники AMP и AM_1G равны ($AM_1 = AN = MP$; $AM = AN_1 = M_1G$); изъ равенства треугольниковъ вытекаетъ равенство сторонъ AP и AG, показывающее, что точка G есть точка P, т.-е. что уголъ AM_1P прямой. Совершенно подобнымъ же образомъ покажемъ, что уголъ AM_2P_3 есть также прямой уголъ.

534. Изслѣдованіе. Итакъ, разстоянія AP и AP_3 суть модули корней уравненія:

$$y^2 + 2ay - p^2 = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравненія вещественны, неравны и имѣютъ противоположные знаки.

1°. Для того, чтобы положительный корень y_1 рѣшалъ задачу, необходимо и достаточно, чтобы окружность діаметра AP встрѣчала XX_1, т.-е. необходимо и достаточно, чтобы

$$y_1 \geqslant 2a,$$

а для этого необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки въ лѣвую часть уравненія (4), вмѣсто буквы y, числа $2a$ былъ отрицательный, т.-е. чтобы

$$p^2 - 8a^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$p \geqslant 2a\sqrt{2}.$$

Результатъ этотъ даетъ три случая.

Случай первый. $p < 2a\sqrt{2}$. Нѣтъ рѣшенія въ углѣ YOX.

Случай второй. $p = 2a\sqrt{2}$. Окружность діаметра AP касательна къ OX; точки M и M_1 сливаются, и единственное рѣшеніе есть перпендикуляръ къ OA. И только при этомъ положеніи прямой длина MN есть *minimum*.

Случай третій. $p > 2a\sqrt{2}$. Окружность пересѣчетъ OX въ двухъ точкахъ, и задача будетъ имѣть два рѣшенія въ углѣ XOY.

2°. Для того, чтобы отрицательный корень y_2 рѣшалъ задачу, необходимо и достаточно, чтобы окружность діаметра $(-y_2)$ встрѣчала XX_1, т.-е. чтобы

$$-\frac{y_2}{2} \geqslant a, \text{ или } y_2 \leqslant -2a.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $(-2a)$ заключалось между корнями уравненія (4), или, чтобы результатъ подстановки въ лѣвую часть (4), вмѣсто буквы y, числа $(-2a)$ былъ отрицательный, т.-е. чтобы

$$4a^2 - 4a^2 - p^2 = -p^2$$

было отрицательнымъ; это имѣетъ мѣсто. Итакъ, существуютъ всегда: одно рѣшеніе въ углѣ YOX_1 и одно въ углѣ XOY_1. Имѣемъ:

$p < 2a\sqrt{2}$ . . . . 2 рѣшенія (XOY_1 и YOX_1).

$p = 2a\sqrt{2}$ . . . . 3 рѣшенія.

$p > 2a\sqrt{2}$ . . . . 4 рѣшенія.

535. Построеніе. Остается построить найденныя значенія, разсматривая, напримѣръ, случай, когда задача имѣетъ четыре рѣшенія.

Уравненіе (4) даетъ два значенія:

$$y_1 = \sqrt{a^2 + p^2} - a, \quad y_2 = -(\sqrt{a^2 + p^2} + a).$$

Откладываемъ на линіи, параллельной OY, отрѣзокъ $AD = p$; тогда $CD = \sqrt{a^2 + p^2}$; замѣтимъ точки P и P_3, въ которыхъ ZZ_1 встрѣчается съ окружностью, описанною изъ точки C радіусомъ CD, и тогда:

$$AP = y_1 \text{ и } AP_3 = -y_2.$$

Это построеніе было извѣстно **Паппусу**, Александрійскому Геометру, жившему за 400 л. до Рождества Христова.

§ II. Задачи съ нѣсколькими неизвѣстными.

Задача XII.

536. *Вычислить катеты прямоугольнаго треугольника, зная гипотенузу a и высоту h, опущенную изъ вершины прямаго угла на гипотенузу.*

Обозначимъ неизвѣстные катеты буквами x и y; теорема Пиѳагора даетъ уравненіе:

$$x^2+y^2=a^2. \qquad [1]$$

Площадь треугольника имѣетъ выраженіями $\frac{xy}{2}$ и $\frac{ah}{2}$; слѣдовательно,

$$xy=ah. \qquad [2]$$

Уравненія [1] и [2] даютъ:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah}+\sqrt{a^2-2ah}\right),\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+2ah}-\sqrt{a^2-2ah}\right).$$

537. Изслѣдованіе. Для того, чтобы задача была возможна, необходимо и достаточно, чтобы x и y были вещественные, т.-е. чтобы $a\geqslant 2h$, или $h\leqslant\frac{a}{2}$.

Замѣчаніе. Эти неравенства не исключаютъ предѣльныхъ равенствъ: $a=2h$, $h=\frac{a}{2}$, ибо, при этомъ предположеніи, значенія x и y остаются вещественными и положительными. Эти предѣльныя равенства рѣшаютъ слѣдующіе два вопроса:

1°. *Между всѣми прямоугольными треугольниками, одной и той же высоты h, опредѣлить тотъ, гипотенуза котораго, по возможности, наименьшая.*

Это есть треугольникъ, котораго гипотенуза равна $2h$. Онъ равнобедренный, ибо, въ этомъ случаѣ, $x=y=h\sqrt{2}$.

2°. *Между всѣми прямоугольными треугольниками, одной и той же гипотенузы a, опредѣлить тотъ, высота котораго, по возможности, наибольшая.*

Это есть треугольникъ, высота котораго равна $\frac{a}{2}$. Онъ равнобедренный, ибо, въ этомъ случаѣ, $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Задача XIII.

538. *Опредѣлить катеты прямоугольнаго треугольника, зная его площадь m^2 и его периметръ $2p$.* Обозначимъ катеты буквами x и y и гипотенузу буквою z. Условія задачи даютъ:

$$z^2 = x^2 y^2 \ [1], \quad x + y + z = 2p \ [2], \quad 2m^2 = xy \ [3].$$

Умноживъ на 2 обѣ части третьяго уравненія и сложивъ съ первымъ, найдемъ:

$$z^2 + 4m^2 = (x + y)^2. \qquad [4]$$

Второе уравненіе даетъ:

$$(x + y)^2 = (2p - z)^2. \qquad [5]$$

Приравнявъ оба значенія $(x + y)^2$, даваемыя уравненіями [4] и [5], получимъ:

$$p^2 - pz = m^2, \quad \text{откуда} \quad z = \frac{p^2 - m^2}{p}. \qquad [6]$$

Опредѣливъ z, найдемъ, при помощи уравненій [2] и [3],

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p}, \quad xy = 2m^2;$$

эти равенства показываютъ, что x и y суть корни квадратнаго уравненія: $u^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} u + 2m^2 = 0$, дающаго

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{p^2 + m^2}{2p} \pm \sqrt{\frac{(p^2 + m^2)^2}{4p^2} - 2m^2}.$$

539. Изслѣдованіе. Такъ какъ значеніе [6] z должно быть положительнымъ, то одно изъ условій возможности задачи есть: $p > m$. Условіе это не достаточно; необходимо, кромѣ этого, чтобы значенія x и y были вещественныя и положительныя. Уравненіе, ихъ опредѣляющее, говоритъ, что они положительны, если они вещественны. Достаточно выразить, слѣдовательно, что они вещественны, т.-е. что

$$\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2}-2m^2 \geqslant 0, \text{ или } (p^2+m^2)^2-8p^2m^2 \geqslant 0.$$

Послѣднее неравенство можетъ быть написано въ видѣ:

$$(p^2+m^2+2pm\sqrt{2})(p^2+m^2-2pm\sqrt{2}) \geqslant 0.$$

Первый множитель положительный; необходимо, слѣдовательно, чтобы

$$p^2+m^2-2pm\sqrt{2} \geqslant 0. \qquad [1]$$

Таково условіе, которому должны удовлетворять p и m. Можно найти границы, между которыми способно измѣняться p, при данномъ значеніи m, или m, при данномъ значеніи p. Мы получимъ оба эти результата сразу, введя параметръ $\frac{p}{m}=\lambda$.

И въ самомъ дѣлѣ, раздѣливъ на m^2 обѣ части неравенства [8], найдемъ.

$$\lambda^2-2\lambda\sqrt{2}+1 \geqslant 0.$$

Неравенство это говоритъ, что λ долженъ быть не менѣе наибольшаго или же не болѣе наименьшаго изъ корней уравненія

$$\lambda^2-2\lambda\sqrt{2}+1=0,$$

т.-е. r долженъ быть не менѣе $(\sqrt{2}+1)$, или же не болѣе $(\sqrt{2}-1)$.

Мы видѣли уже, что $p>m$, и, слѣдовательно, λ не можетъ быть менѣе $\sqrt{2}-1$.

Необходимо, слѣдовательно, чтобы оно было не менѣе $(\sqrt{2}+1)$. Это условіе заключаетъ въ себѣ первое условіе; слѣдовательно, оно представляетъ единственное условіе возможности задачи.

Замѣчаніе. Прямоугольный треугольникъ, съ даннымъ периметромъ $2p$ и данною поверхностью m^2, возможенъ только тогда, когда $\frac{p}{m} \geqslant \sqrt{2}+1$. Неравенство это даетъ:

$$m \leqslant p(\sqrt{2}-1) \text{ и } p \geqslant m(\sqrt{2}+1).$$

Равенства:

$$m=p(\sqrt{2}-1),\ p=m(\sqrt{2}+1)$$

даютъ рѣшенія слѣдующихъ задачъ:

1°. *Между всѣми прямоугольными треугольниками одного и того же периметра $2p$ опредѣлить тотъ, поверхность котораго, по возможности, наибольшая.*

Это есть треугольникъ, площадь котораго равна $m^2=p^2(\sqrt{2}-1)^2$. Онъ равнобедренный, ибо катеты даются формулою: $x=y=p(2-\sqrt{2})$. Гипотенуза $z=2p(\sqrt{2}-1)$.

2°. *Между всѣми прямоугольными треугольниками одной и той же площади m^2 опредѣлить тотъ, периметръ котораго наименьшій.*

Это есть треугольникъ, периметръ котораго равенъ $2p=2m(\sqrt{2}+1)$. Онъ равнобедренный, ибо катеты даются формулою: $x=y=m\sqrt{2}$. Гипотенуза $z=2m$.

540. Нѣкоторыя задачи значительно упрощаются приличнымъ выборомъ неизвѣстной. Вотъ два примѣра:

Задача. *Найти четыре члена пропорціи, зная сумму среднихъ $2s$, сумму крайнихъ $2s_1$ и сумму квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ $4q^2$.*

Возьмемъ за неизвѣстное x произведеніе среднихъ; такъ какъ сумма этихъ среднихъ равна $2s$, то они суть корни уравненія $z^2-2sz+x=0$ и равны, слѣдовательно, $s+\sqrt{s^2-x}$, $s-\sqrt{s^2-x}$. Принявъ во вниманіе, что произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ, найдемъ, для крайнихъ членовъ, выраженія:

$$s'+\sqrt{s'^2-x},\ s'-\sqrt{s'^2-x}.$$

Образовавъ сумму квадратовъ найденныхъ четырехъ выраженій, получимъ $4s^2+4s'^2-4x$. Уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$4s^2+4s'^2-4x=4q^2.$$

Найдя отсюда x, получимъ, по выполненіи вычисленій, слѣдующія выраженія для членовъ пропорціи:

$$s'+\sqrt{q^2-s^2},\ s+\sqrt{q^2-s'^2},\ s-\sqrt{q^2-s'^2},\ s'-\sqrt{q^2-s^2}.$$

Замѣчаніе. Весьма естественно было принять произведеніе среднихъ за неизвѣстное, ибо произведеніе это, для каждой пропорціи, предполагаетъ только одно значеніе. Еслибы мы приняли за неизвѣстное одинъ изъ среднихъ, то непремѣнно пришли бы къ уравненію, по меньшей мѣрѣ, второй степени, ибо оба среднихъ члена должны получиться однимъ и тѣмъ же исчисленіемъ, такъ какъ выраженіе задачи не различаетъ ихъ другъ отъ друга.

Для того, чтобы задача была возможна, необходимо

$$s^2 \leqslant q^2, \quad s'^2 \leqslant q^2.$$

541. Задача. *Опредѣлить пропорцію, зная суммы* $4s$, $4q^2$ *и* $4c^3$ *первыхъ степеней, квадратовъ и кубовъ ея членовъ.* Примемъ за неизвѣстныя разность $4x$ между суммою крайнихъ и суммою среднихъ и произведеніе y крайнихъ; обозначивъ буквами a, b, c, d четыре члена пропорціи, получимъ:

$$a + d + c + b = 4s, \quad a + d - (c + b) = 4x. \qquad [1]$$

Выводимъ отсюда

$$a + d = 2s + 2x, \quad b + c = 2s - 2x. \qquad [2]$$

Принявъ во вниманіе, что

$$ad = y, \quad bc = y, \qquad [3]$$

найдемъ **(405)** для a, b, c, d значенія:

$$\left.\begin{aligned} a &= s + x + \sqrt{(s+x)^2 - y}, \quad & d &= s + x - \sqrt{(s+x)^2 - y}, \\ b &= s - x + \sqrt{(s-x)^2 - y}, \quad & c &= s - x - \sqrt{(s-x)^2 - y}. \end{aligned}\right\} \qquad [4]$$

Сдѣлавъ вычисленія, найдемъ для суммъ квадратовъ и кубовъ выраженія:

$$8(s^2 + x^2) - 4y, \quad 16s(s^2 + 3x^2) - 12sy$$

и получимъ, по упрощеніи, слѣдующія урввненія:

$$2x^2 - y = q^2 - 2s^2, \quad 12sx^2 - 3sy = c^3 - 4s^3. \qquad [5]$$

Рѣшивъ уравненія эти, найдемъ:

$$x^2 = \frac{c^3 - 3q^2 s + 2s^3}{6s}, \quad y = \frac{c^3 - 6q^2 s + 8s^3}{3s}.$$

Подставивъ значенія x и y въ формулы [4], опредѣлимъ всѣ члены пропорціи.

Упражненія.

1. Путешественникъ выходитъ изъ точки B, чтобы придти въ точку C. Въ тотъ же моментъ другой путешественникъ выходитъ изъ точки C, чтобы придти въ точку B. Оба путешественника совершаютъ путь равномѣрно. Отношеніе между ихъ скоростями таково, что первый приходитъ въ C по прошествіи четырехъ часовъ послѣ ихъ встрѣчи; второй же приходитъ въ B по прошествіи девяти часовъ послѣ этой встрѣчи. Опредѣлить отношеніе скоростей.

2. Найти двузначное число, имѣющее слѣдующія свойства: 1°. Частное отъ раздѣленія этого числа на произведеніе цифръ равно $\frac{16}{3}$; 2°. Разность между этимъ числомъ и девятью равна обращенному числу.

3. Найти трехзначное число, имѣющее слѣдующія свойства: 1°. Вторая цифра есть среднее пропорціональное между двумя другими цифрами; 2°. Отношеніе числа къ суммѣ цифръ равно $\frac{124}{7}$; 3°. Сумма искомаго числа и числа 594 равна обращенному числу.

4. Провести изъ точки A къ кругу O сѣкущую данной длины l и опредѣлить условія возможности. Даны: разстояніе a точки A отъ центра и радіусъ круга R.

5. Дана сфера радіуса R. Требуется разсѣчь ее плоскостью такимъ образомъ, чтобы отношеніе объемовъ наименьшаго изъ образованныхъ двухъ сферическихъ сегментовъ къ объему конуса съ тѣмъ же основаніемъ, имѣющаго вершину въ центрѣ сферы, равнялось m.

6. Рѣшить ту же задачу, предположивъ только, что вершина конуса есть тотъ изъ концовъ діаметра, перпендикулярнаго къ плоскости общаго основанія, который расположенъ въ большемъ сегментѣ.

7. Дана сфера радіуса R. Требуется разсѣчь ее плоскостью такимъ образомъ, чтобы отношеніе боковой поверхности меньшаго изъ образованныхъ сферическихъ сегментовъ къ боковой поверхности конуса съ тѣмъ же основаніемъ, имѣющаго вершину въ центрѣ сферы, равнялось m.

8. Рѣшить ту же задачу, предположивъ, что вершина конуса есть тотъ изъ концовъ діаметра, перпендикулярнаго къ плоскости общаго основанія, который расположенъ въ большемъ сегментѣ.

9. Раздѣлить трапецію, основанія которой суть a и b, линіями, параллельными основаніямъ, на три части, пропорціональныя числамъ m, n, p.

10. Вписать въ кругъ радіуса R равнобедренный треугольникъ, зная сумму a основанія и высоты. Изслѣдовать.

11. Данъ четыреугольникъ $ABCD$. Требуется построить другой четыреугольникъ $A'B'C'D'$, стороны котораго были бы соотвѣтственно параллельны сторонамъ даннаго и находились на равномъ отъ нихъ разстояніи, причемъ площадь, заключенная между периметрами обоихъ четыреугольниковъ, равнялась бы площади квадрата m^2.

Отв. Предположимъ, что четыреугольникъ $A'B'C'D'$ обвертываетъ четыреугольникъ $ABCD$. Обозначивъ буквами $2p$, s и x соотвѣтственно периметръ даннаго четыреугольника, сумму котангенсовъ полууглов его и разстояніе параллельныхъ сторонъ, получимъ:

$$sx^2 + 2px - m^2 = 0.$$

Изслѣдовать рѣшеніе. Испытать, можетъ ли представляться отрицательный корень, если предположимъ, что четыреугольникъ $A'B'C'D'$ помѣщенъ внутри четыреугольника $ABCD$.

12. Данъ кругъ радіуса R и другой кругъ, радіуса $\frac{R}{m}$, касательный внутри къ первому кругу. Требуется построить третій кругъ, касательный къ даннымъ кругамъ и къ діаметру, соединяющему ихъ центры.

Изслѣдовать.

13. Вычислить стороны x, y, z треугольника, зная, что объемы тѣлъ вращенія, происходящихъ отъ обращенія треугольника около каждой изъ его сторонъ, соотвѣтственно равны объемахъ трехъ сферъ, радіусы которыхъ суть α, β, γ.

Отв. Найдемъ соотношенія: $\alpha^3 x = \beta^3 y = \gamma^3 z$, и, слѣдовательно,

$$x^3 = \frac{16\alpha^3}{\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\beta^3} - \frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha^3}{\beta^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3} + \frac{\alpha^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)}.$$

Аналогичныя формулы получаются для y^3 и z^3.

14. Вписать въ сферу, радіуса R, цилиндръ, объемъ котораго былъ бы равенъ суммѣ объемовъ сферическихъ сегментовъ, имѣющихъ одинаковое съ цилиндромъ основаніе.

15. Данъ кругъ радіуса R. Проводимъ черезъ точку C, лежащую въ его плоскости, касательную къ кругу и заставляемъ вращаться совмѣстно около діаметра, проходящаго черезъ точку C, и касательную и полуокружность. Требуется опредѣлить точку C такимъ образомъ, чтобы отношеніе конической поверхности къ обвертываемой ею поверхности сегмента, съ тѣмъ же основаніемъ, равнялось данному числу p.

Изслѣдовать эти рѣшенія.

16. Даны: окружность діаметра AB; точка C, расположенная на радіусѣ OA на разстояніи, равномъ $\frac{1}{3}$ радіуса, считая отъ точки A; перпендикуляръ, возставленный къ направленію AB въ точкѣ D, находящейся отъ центра O въ разстояніи, равномъ $\frac{5}{3}$ радіуса. Найти на окружности такую точку M, для которой сумма квадратовъ ея разстояній отъ точки C и отъ даннаго перпендикуляра равнялась бы k^2.—Изслѣдованіе.

17. Описать около данной окружности трапецію даннаго периметра или данной площади.

18. Описать около данной окружности ромбъ даннаго периметра или данной площади.

19. Даны: окружность діаметра AB и касательная въ точкѣ B. Провести изъ точки A сѣкущую, которая встрѣтила бы окружность и касательную соотвѣтственно въ такихъ точкахъ M и N, для которыхъ сумма квадратовъ длинъ AM и MN равнялась бы $4k^2$.—Изслѣдованіе.

20. Данъ треугольникъ ABC. Провести прямую, параллельную сторонѣ BC, такимъ образомъ, чтобы отсѣченный треугольникъ и образованная трапеція произвели бы, при вращеніи даннаго треугольника около BC, равные объемы.

21. Даны три точки A, B, C на одной и той же прямой. Найти на этой прямой такую точку M, для которой сумма квадратовъ разстояній MA, MB, MC равнялась бы k^2.

22. Данъ прямоугольный треугольникъ ABC. Найти на гипотенузѣ, между точками B и C, такую точку M, для которой сумма квадратовъ ея разстояній отъ трехъ вершинъ треугольника равнялась бы k^2. — Изслѣдованіе.

23. Даны окружность и два взаимно перпендикулярные діаметра AB и CD. Провести сѣкущую CMN, которая встрѣтила бы діаметръ и окружность соотвѣтственно въ такихъ точкахъ M и N, для которыхъ отрѣзокъ MN имѣлъ бы данную длину m.—Изслѣдованіе.

24. Дана полуокружность діаметра AB. Требуется провести такую хорду MN, параллельную діаметру AB, для которой сумма квадратовъ AM и MN равнялась бы k^2.—Изслѣдованіе.

25. Данъ прямой уголъ, описанный около окружности. Провести къ окружности такую касательную, которая, вмѣстѣ со сторонами угла, образовала бы треугольникъ данной площади. Изслѣдованіе.

26. Дана полуокружность діаметра AB. Найти на ней такую точку M, для которой сумма квадратовъ AM и MP равнялась бы k^2, причемъ P есть проэкція на діаметрѣ точки N, представляющей конецъ хорды MN, проведенной параллельно AB.—Изслѣдованіе.

27. Даны двѣ параллельныхъ прямыхъ и точка A, расположенная между этими прямыми. Построить треугольникъ AMN, прямоугольный въ M, котораго вершины M и N лежали бы соотвѣтственно на данныхъ прямыхъ и котораго площадь равнялась бы k^2.—Изслѣдованіе.

28. Даны гипотенузы a прямоугольника треугольника и сумма m его катетовъ и высоты. Вычислить стороны этого треугольника.—Изслѣдованіе.

29. Даны периметръ прямоугольнаго треугольника и его высота. Вычислить катеты.—Изслѣдованіе.

30. Данъ равносторонній треугольникъ. Требуется черезъ средину D стороны BC провести такую сѣкущую, чтобы сумма площадей треугольниковъ DMB и NDC равнялась площади ABC, причемъ точки M и N суть точки, въ которыхъ искомая сѣкущая встрѣчаетъ соотвѣтственно направленія AB и AC.

31. Даны: окружность діаметра AB; точка C этого діаметра, представляющая средину радіуса AO, и касательная BX. Требуется черезъ точку C провести сѣкущую, встрѣчающую окружность и касательную соотвѣтственно въ такихъ точкахъ M и N, для которыхъ разность квадратовъ CN и CM равняется k^2.—Изслѣдованіе.

32. Даны: окружность діаметра AB и на этомъ діаметрѣ точка D на разстояніи отъ центра, равномъ a. Требуется черезъ эту точку провести такую сѣкущую DMN, чтобы хорда MN наблюдалась изъ средины радіуса OA подъ прямымъ угломъ.—Изслѣдованіе.

33. Даны окружность радіуса R и хорда AB, стягивающая треть окружности. Найти на кривой точку M, для которой сумма $(MA + MB)$ имѣла бы данное значеніе m.—Изслѣдованіе.

34. Двѣ окружности пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, причемъ A есть одна изъ ихъ общихъ точекъ. Провести черезъ эту точку такую сѣкущую MAN, для которой сумма квадратовъ хордъ MA и NA равнялась бы $4k^2$.—Изслѣдованіе.

35. Даны: окружность діаметра AB и касательныя AX и BY. Провести такую касательную, встрѣчающую данныя касательныя соотвѣтственно въ точкахъ M и N, чтобы объемъ, произведенный вращеніемъ трапеціи $AMNB$ около AB, былъ равенъ объему шара даннаго радіуса a.—Изслѣдованіе.

36. Черезъ точку A, общую двумъ окружностямъ, пересѣкающимся подъ прямымъ угломъ, провести такую сѣкущую MAN, чтобы произведеніе $(AM \,.\, AN)$ хордъ равнялось k^2.—Изслѣдованіе.

37. Даны окружность діаметра AB и точка C этого діамерта на разстояніи отъ центра, равномъ a. Провести прямую CMN, встрѣчающую окружность въ такихъ точкахъ M и N, для которыхъ разность между CM^2 и CN^2 равнялась бы k^2.—Изслѣдованіе.

38. Дана окружность діаметра AB. Опредѣлить на ней такую точку M, чтобы разность длинъ AP и MP равнялась данной величинѣ, причемъ P есть проэкція точки M на діаметрѣ AB.—Изслѣдованіе.

39. Дана полуокружность діаметра AB. Провести хорду MN параллельно AB такимъ образомъ, чтобы сумма длинъ AM и MN равнялась данной длинѣ m.—Изслѣдованіе.

40. Данъ равносторонній треугольникъ ABC, вписанный въ окружность. Требуется провести хорду MN, параллельную BC, такимъ образомъ, чтобы сумма ея отрѣзковъ, заключенныхъ между окружностью и сторонами AB и AC, равнялась данной длинѣ m.—Изслѣдованіе.

КНИГА IV.

Прогрессіи и Логариѳмы.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Прогрессіи.

---

§ I. Ариѳметическія прогрессіи.

542. Опредѣленія. Ариѳметическою *прогрессіею* называется неопредѣленный рядъ чиселъ или выраженій, въ которомъ каждое число равно своему предъидущему, сложенному съ постояннымъ количествомъ. Постоянное количество, которое нужно прибавить къ предъидущему члену прогрессіи для полученія послѣдующаго, называется *разностью* прогрессіи.

Если разность есть число положительное, то прогрессія называется *возрастающею*; въ противномъ же случаѣ прогрессія называется *убывающею*. Члены прогрессіи будемъ означать буквами: u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ... Для обозначенія того, что данныя числа составляютъ ариѳметическую прогрессію, примемъ знакъ $\div$.

Изъ опредѣленія прогрессіи слѣдуетъ, что ряды:

$$\div\ 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ \ldots$$
$$\div\ 48,\ 45,\ 42,\ 39,\ 36,\ \ldots\ldots$$

суть прогрессіи. Первая прогрессія представляетъ прогрессію возрастающую, ибо ея разность, 4, есть число положительное: вторая же, имѣя отрицательную разность, есть прогрессія убывающая.

543. Значеніе какого ни есть члена прогрессіи. Мы можемъ опредѣлить какой ни есть членъ прогрессіи, не выписывая самой прогрессіи. И въ самомъ дѣлѣ, назовемъ разность буквою r.

Изъ понятія о прогрессіи слѣдуетъ:

$$u_2 = u_1 + r,\ u_3 = u_2 + r,\ \ldots,\ u_{n-1} = u_{n-2} + r,\ u_n = u_{n-1} + r.$$

Сложивъ эти равенства почленно, получимъ:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + r(n-1).$$

Вычтя изъ обѣихъ частей этого равенства сумму

$$(u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}),$$

найдемъ:

$$u_n = u_1 + (n-1)r. \qquad (1)$$

Равенство это говоритъ, что *какой ни есть членъ ариѳметической прогрессіи равенъ первому члену, сложенному съ разностію, умноженною на число членовъ, предшествующихъ опредѣляемому*.

544. Слѣдствіе. Формула [1], связывая четыре числа: n, r, u_n, u_1, позволяетъ опредѣлять одно изъ нихъ, если даны остальныя три. Достаточно рѣшить уравненіе относительно искомаго количества. Отсюда слѣдуетъ, что формула [1] рѣшаетъ четыре задачи, формулы которыхъ суть:

$$u_n = u_1 + (n-1)r,\ u_1 = u_n - (n-1)r,\ r = \frac{u_n - u_1}{n-1},\ n = 1 + \frac{u_n - u_1}{r}. \qquad (2)$$

545. Вставленіе среднихъ ариѳметическихъ. Вставить m среднихъ ариѳметическихъ между двумя данными числами a и b, значитъ образовать ариѳметическую прогрессію, крайніе члены которой были бы данныя числа a и b, а промежуточные — искомыя m среднихъ ариѳметическихъ. Для рѣшенія вопроса достаточно опредѣлить разность прогрессіи. И въ самомъ дѣлѣ, прибавивъ эту разность къ первому члену, образуемъ второй; прибавивъ ко второму, образуемъ третій, и т. д. Разность эту опредѣлимъ изъ формулы [1], если примемъ: $u_n = b$, $u_1 = a$, и тогда $n - 1 = m + 1$. Формула дастъ:

$$r = \frac{b-a}{m+1}. \qquad [3]$$

Примѣръ. Вставить 10 среднихъ между 5 и 38.

Разность есть: $r = \frac{38-5}{11} = 3$, и искомая прогрессія такова:

$$\div\ 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38.$$

546. **Задача.** *Опредѣлить условіе, при которомъ три данныхъ числа a, b, c составляютъ часть одной и той же прогрессіи.* Предположимъ, что числа эти расположены по порядку ихъ величины. Числа эти будутъ отдѣлены, въ неизвѣстной прогрессіи, промежуточными членами, которые могутъ быть разсматриваемы, какъ среднія, вставленныя между a и b, b и c. Обозначивъ числа этихъ среднихъ черезъ $(m-1)$ и $(n-1)$, получимъ, для разности прогрессіи, два выраженія: $\frac{b-a}{m}$ и $\frac{c-b}{n}$, которыя должны быть равны.

Итакъ,

$$\frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{n}.$$

Это равенство и выражаетъ искомое условіе; *необходимо, чтобы существовали два цѣлыхъ числа m и n, пропорціональныя разностямъ $(b-a)$ и $(c-b)$.*

Условіе это всегда выполняется, если числа a, b, c суть числа раціональныя: ибо если числа $(b-a)$ и $(c-b)$ суть числа дробныя, то достаточно привести ихъ къ общему знаменателю и взять для m и n ихъ числителей. Умноживъ оба результата на одно и то же какое ни есть цѣлое число, найдемъ другія значенія для m и n; отсюда вытекаетъ, что задача, въ этомъ случаѣ, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

547. **Теорема.** *Если вставимъ между каждыми двумя послѣдовательными членами прогрессіи*

$$\div\ u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n, \ldots$$

одно и то же число m среднихъ ариѳметическихъ, то образуемъ одну новую прогрессію, разность которой равна первоначальной разности, раздѣленной на $(m+1)$.

И въ самомъ дѣлѣ, разности отдѣльныхъ прогрессій будутъ (545):

$$\frac{u_2-u_1}{m+1}, \frac{u_3-u_2}{m+1}, \frac{u_4-u_3}{m+1}, \ldots$$

Всѣ онѣ равны $\frac{r}{m+1}$ (542). Кромѣ того, послѣдній членъ каждой прогрессіи представляетъ первый членъ прогресіи слѣдующей. Можемъ, слѣдовательно, разсматривать всѣ прогрессіи, какъ образующія одну прогрессію.

548) **Теорема.** *Сумма двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи, остановленной на нѣкоторомъ членѣ, есть величина постоянная, равная суммѣ крайнихъ.*

Разсмотримъ прогрессію:

$$\div\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1},\ u_n.$$

Разсмотримъ какой ни есть членъ этой прогрессіи u_s; членъ, равноотстоящій съ нимъ отъ другаго конца прогрессіи, будетъ u_{n-s+1}.

Формула [1] дастъ:

$$u_s = u_1 + r(s-1),\ u_n = u_{n-s+1} + r(s-1).$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ легко найдемъ:

$$u_s + u_{n-s+1} = u_1 + u_n, \text{ ч. и т. д.}$$

549. Сумма членовъ прогрессіи. Обозначимъ буквою S сумму n послѣдовательныхъ членовъ прогрессіи. Имѣемъ:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n.$$

Сумма эта можетъ быть написана такимъ образомъ:

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \ldots + u_3 + u_2 + u_1.$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ:

$$2S = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (u_{n-2} + u_3) + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

Принявъ во вниманіе, что всѣ суммы, помѣщенныя въ скобкахъ, равны между собою (548), причемъ число ихъ равно n, найдемъ:

$$S = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}, \text{ т.-е.} \qquad [5]$$

Сумма членовъ ариѳметической прогрессіи, остановленной на нѣкоторомъ членѣ, равна полусуммѣ крайнихъ, умноженной на число членовъ.

Примѣръ. Сумма 12 членовъ прогрессіи (545) равна $\frac{(5+38)12}{2}$, или 258.

Замѣчаніе. Если намъ извѣстны только первый членъ u_1, разность r и число членовъ n, то, для приложенія предъидущей формулы, мы должны вычислить послѣдній членъ u_n при помощи формулы [1]. Вставивъ его значеніе въ формулу [5], получимъ:

$$S = \frac{[2u_1 + (n-1)r]n}{2}. \qquad [6]$$

550. *Приложенія.* **1°.** Найти сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Они образуютъ прогрессію, разность которой есть 1; отсюда слѣдуетъ, что ихъ сумма равна $S = \frac{n(n+1)}{2}$. Итакъ, *сумма n первыхъ цѣлыхъ чиселъ равна половинѣ произведенія n-аго числа на слѣдующее за нимъ.*

2. Найти сумму n первыхъ нечетныхъ чиселъ: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ Они образуютъ прогрессію, разность которой есть 2, а потому искомая сумма

$$S = \frac{[2 + 2(n-1)]n}{2} = n^2.$$

Итакъ, *сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ равна квадрату n.*

551. **Задачи.** Формулы [1] и [5] представляютъ два соотношенія, связывающія количества u_1, u_n, r, n, S. Соотношенія эти опредѣляютъ два изъ этихъ количествъ, если даны остальныя три. Отсюда вытекаютъ десять задачъ:

1°.	Даны	u_1, u_n, r;	опредѣлить	n, S.
2°.	„	u_1, u_n, n;	„	r, S.
3°.	„	u_1, u_n, S;	„	r, n.
4°.	„	u_1, r, n;	„	u_n, S.
5°.	„	u_1, r, S;	„	u_n, n.
6°.	„	u_1, n, S;	„	u_n, r.
7°.	„	u_n, r, n;	„	u_1, S.
8°.	„	u_n, r, S;	„	u_1, n.
9°.	„	u_n, n, S;	„	u_1, r.
10°.	„	r, n, S;	„	u_1, u_n.

Пятая и восьмая задачи суть задачи второй степени; остальныя же представляютъ задачи первой степени.

§ II. Геометрическія прогрессіи.

552. Опредѣленія. Геометрическою прогрессіею называется рядъ чиселъ или выраженій, изъ которыхъ каждое равно своему предъидущему, умноженному на постоянное число, называемое *знаменателемъ* прогрессіи.

Если модуль знаменателя болѣе единицы, то модули членовъ прогрессіи идутъ, возрастая, и прогрессія называется *возрастающею*; если же модуль знаменателя менѣе единицы, то модули членовъ прогрессіи идутъ, убывая, и прогрессія называется *убывающею*. Для обозначенія того, что числа образуютъ геометрическую прогрессію, употребляютъ знакъ $\div\div$.

Примѣры. Ряды:

$$\div\div\ 4,\quad 12,\ 36,\quad 108,\ \ldots$$
$$\div\div\ 2,\ -6,\ 18,\ -54,\ \ldots$$
$$\div\div\ 10,\quad 5,\ \frac{5}{2},\quad \frac{5}{4},\ \ldots$$
$$\div\div\ 30,\ -10,\ \frac{10}{3},\ -\frac{10}{9},\ \ldots$$

суть геометрическія прогрессіи; первая и вторая — возрастающія, вторая и третья — убывающія; знаменатели ихъ соотвѣтственно суть: $3,\ -3,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$.

Мы будемъ обозначать члены прогрессіи буквами $u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n,\ \ldots$; знаменателя — буквою q.

553. Значеніе какого ни есть члена прогрессіи. Изъ опредѣленія прогрессіи вытекаютъ равенства:

$$u_2 = u_1 q,\ u_3 = u_2 q,\ \ldots,\ u_{n-1} = u_{n-2} q,\ u_n = u_{n-1} q.$$

Перемноживъ эти равенства почленно, получимъ:

$$u_2 u_3\ \ldots\ u_{n-1} u_n = u_1 u_2\ \ldots\ u_{n-1} q^{n-1}$$

Раздѣливъ обѣ части равенства на произведеніе $u_2 u_3 \ldots u_{n-1}$, найдемъ:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \qquad [1]$$

т.-е. *какой ни есть членъ прогрессіи равенъ первому члену, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу членовъ, предшествующихъ опредѣляемому.*

554. Слѣдствіе. Формула [1], представляя соотношеніе между четырьмя числами u_1, u_n, q, n, позволяетъ опредѣлить одно изъ нихъ, если остальныя три извѣстны. Рѣшивъ послѣдовательно уравненіе [1] относительно каждаго изъ четырехъ количествъ, легко найдемъ:

$$u_n = u_1 q^{n-1},\ u_1 = \frac{u_n}{q^{n-1}},\ q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}},\ n = 1 + \frac{\log u_n - \log u_1}{\log q}.$$

Послѣдняя формула предполагаетъ извѣстными основныя свойства логариѳмовъ.

555. Теорема. *Если прогрессія есть прогрессія возрастающая, то модули членовъ ея, возрастая, могутъ сдѣлаться болѣе всякаго даннаго числа.* Теорему эту мы имѣли выше. (Глава седьмая, **160, 6°**).

556. Теорема. *Если прогрессія есть прогрессія убывающая, то модули членовъ ея, убывая, могутъ сдѣлаться сколь угодно малыми.*

Теорема эта уже была доказана (глава седьмая, **160, 7°**).

557. Вставленіе среднихъ геометрическихъ. Вставить m среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами a и b, значитъ образовать геометрическую прогрессію, крайними членами которой были бы числа a и b; промежуточными же—эти m среднихъ.

Для рѣшенія вопроса достаточно найти знаменателя прогрессіи; умноживъ a на знаменателя, получимъ второй членъ прогрессіи; умноживъ второй членъ на знаменателя, образуемъ третій членъ, и такъ далѣе.

Для опредѣленія знаменателя обратимся къ формулѣ [1], принявъ: $u_n = b$, $u_1 = a$, $n - 1 = m + 1$, и тогда

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}. \qquad [2]$$

Примѣръ. Вставить 3 среднихъ между 7 и 112. Знаменатель равенъ

$$\sqrt[4]{\frac{112}{7}} = 2,$$

причемъ прогрессія будетъ: $\div\!\div$ 7, 14, 28, 56, 112.

558. Теорема. *Если вставимъ между каждыми двумя послѣдовательными членами геометрической прогрессіи одно и то же число m среднихъ геометрическихъ, то образуемъ одну прогрессію, знаменатель которой равенъ корню, съ показателемъ $(m+1)$, изъ первоначальнаго знаменателя.*

И въ самомъ дѣлѣ, знаменатели различныхъ отдѣльныхъ прогрессій будутъ:

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\ \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}},\ \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}},\ldots$$

Каждый изъ нихъ равенъ $\sqrt[m+1]{q}$. Послѣдній членъ каждой прогрессіи равенъ первому слѣдующей. Отсюда вытекаетъ, что всѣ прогрессіи образуютъ одну прогрессію.

559. Задача. *Найти условіе, при которомъ три числа a, b, c составляютъ часть одной и той же прогрессіи.* Разсматривая число a, какъ первый членъ, и обозначая черезъ $(m+1)$ и $(n+1)$ неизвѣстныя мѣста членовъ b и c, получимъ:

$$b=aq^m,\ c=aq^n,$$

гдѣ q представляетъ неизвѣстнаго знаменателя.

Возвысивъ уравненія эти соотвѣтственно въ степени n и m, найдемъ:

$$b^n=a^nq^{mn},\ c^m=a^mq^{mn};$$

откуда, по исключенію q,

$$\frac{b^n}{a^n}=\frac{c^m}{a^m},\ \text{или}\ \left(\frac{b}{a}\right)^n=\left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

Равенство это и составляетъ искомое условіе. Оно упростится, если предположимъ, что a, b, c раціональная, ибо, приведя тогда отношенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ къ простѣйшей формѣ и обозначивъ черезъ $\frac{g}{h}$ и $\frac{k}{l}$ равныя имъ неприводимыя дроби, получимъ:

$$\frac{g^n}{h^n}=\frac{k^m}{l^m}.$$

Дроби эти, будучи также неприводимыми, могутъ быть равны только тогда, когда

$$g^n=k^m,\ h^n=l^m.$$

Равенства эти требуютъ: съ одной стороны, чтобы простые множители чиселъ g и k и чиселъ h и l были одинаковы; съ другой, чтобы показатели одного и того же множителя, въ g и k, и въ h и

l, находились въ постоянномъ отношеніи $\frac{m}{n}$. Если условія эти выполнены, то они опредѣляютъ отношеніе $\frac{m}{n}$. Такъ какъ m и n сами по себѣ остаются неопредѣленными, то числа a, b, c могутъ составлять часть безконечнаго множества прогрессій.

560. *Приложеніе. Какія соизмѣримыя числа могутъ составлять часть геометрической прогрессіи, имѣющей членами* 1 *и* 10?

Обозначимъ дробью $\frac{p}{q}$ каждое изъ искомыхъ чиселъ; на основаніи предъидущаго должны имѣть:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = (10)^n, \text{ или } \frac{p^m}{q^m} = 10^n,$$

гдѣ m и n суть числа цѣлыя. Такъ какъ вторая часть есть число цѣлое, то и первая должна быть числомъ цѣлымъ. Принимая во вниманіе, что дробь $\frac{p}{q}$ можетъ разсматриваться, какъ несократимая, заключаемъ, что необходимо $q=1$, и, слѣдовательно, $p^m=10^n$. Для того, чтобы послѣднее равенство имѣло мѣсто, необходимо, чтобы p имѣло видъ $2^\alpha 5^\beta$; необходимо, слѣдовательно, чтобы $2^{\alpha m} . 5^{\beta m} = 2^n . 5^n$ и чтобы, слѣдовательно, $\alpha m = \beta m = n$. Итакъ, необходимо, чтобы $\alpha = \beta = \frac{n}{m}$. Показатели множителей 2 и 5, входящихъ въ p, должны быть равны, или, другими словами, p должно быть степенью 10.

Степени 10 суть, слѣдовательно, единственныя раціональныя числа, которыя могутъ фигурировать въ такой геометрической прогрессіи, членами которой суть 1 и 10.

561. Теорема. *Во всякой геометрической прогрессіи, остановленной на нѣкоторомъ членѣ, произведеніе членовъ, равноотстоящихъ отъ крайнихъ, постоянно и равно произведенію крайнихъ.*

Пусть дана прогрессія:

$$\div\!\div\, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n.$$

Разсмотримъ два члена u_s и u_{n-s+1}, равноотстоящихъ отъ концовъ прогрессіи. Формула [1] даетъ:

$$u_s = u_1 q^{s-1}, \quad u_n = u_{n-s+1} q^{s-1}.$$

Отсюда легко найдемъ, что $u_s . u_{n-s+1} = u_1 u_n$, и т. д.

562. Произведеніе членовъ прогрессіи. Обозначимъ буквою P произведеніе n первыхъ членовъ прогрессіи.

Имѣемъ:

$$P = u_1 u_2 u_3 \ldots u_{n-2} u_{n-1} u_n.$$

Напишемъ его такимъ образомъ:

$$P = u_n u_{n-1} u_{n-2} \ldots u_3 u_2 u_1.$$

Перемноживъ эти равенства почленно, найдемъ:

$$P^2 = (u_1 u_n)(u_2 u_{n-1})(u_3 u_{n-2}) \ldots (u_{n-2} u_3)(u_{n-1} u_2)(u_n u_1).$$

Принимая во вниманіе, что произведенія, помѣщенныя въ скобкахъ, равны между собою, причемъ число ихъ равно n, получимъ:

$$P^2 = (u_1 u_n)^n, \text{ откуда } P = \sqrt{(u_1 u_n)^n}.$$

Итакъ, *произведеніе членовъ прогрессіи равно корню квадратному изъ степени произведенія крайнихъ, показатель которой равенъ числу членовъ.*

563. Сумма членовъ геометрической прогрессіи. Обозначимъ буквою S сумму n членовъ прогресіи:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на знаменателя q, найдемъ:

$$Sq = u_1 q + u_2 q + u_3 q + \ldots + u_{n-2} q + u_{n-1} q + u_n q.$$

Принявъ во вниманіе, что, по опредѣленію прогрессіи,

$$u_1 q = u_2,\ u_2 q = u_3,\ u_3 q = u_4, \ldots,\ u_{n-2} q = u_{n-1},\ u_{n-1} q = u_n,$$

можемъ написать послѣднее равенство такимъ образомъ:

$$Sq = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_n q.$$

Вычтя S изъ Sq, получимъ:

$$Sq - S = u_n q - u_1, \text{ или } S(q-1) = u_n q - u_1,$$

откуда

$$S = \frac{u_n q - u_1}{q-1}. \qquad [4]$$

Замѣчаніе. Если намъ только извѣстны: первый членъ u_1, знаменатель q, число членовъ n, то, пожелавъ воспользоваться предъидущею формулою, должны вычислить послѣдній членъ u_n по формулѣ [1]. Поставивъ его значеніе въ формулу [4], получимъ:

$$S=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1}. \qquad [5]$$

564. Предѣлъ суммы первыхъ n членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи. Напишемъ формулу [4] въ такомъ видѣ:

$$S=\frac{u_1}{1-q}-\frac{u_nq}{1-q}.$$

Если число членовъ прогрессіи будетъ число перемѣнное, неопредѣленно возрастающее, то сумма S будетъ измѣняться, приближаясь къ предѣлу. И въ самомъ дѣлѣ, выраженіе $\frac{u_1}{1-q}$, зависящее только отъ перваго члена и знаменателя, будетъ сохранять одну и ту же величину; что же касается до произведенія $u_n\cdot\frac{q}{1-q}$, состоящаго изъ множителя u_n, неопредѣленно убывающаго (**556**), и постояннаго множителя $\frac{q}{1-q}$, то модуль его будетъ неопредѣленно убывать. Отсюда слѣдуетъ, что модуль разности между постояннымъ числомъ $\frac{u_1}{1-q}$ и перемѣнною суммою S можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, при достаточно большомъ числѣ членовъ, т.-е. постоянное число $\frac{u_1}{1-q}$ есть предѣлъ, къ которому стремится сумма первыхъ n членовъ убывающей геометрической прогрессіи, при неопредѣленномъ возрастаніи числа членовъ. Обозначивъ предѣлъ этотъ буквою s, получимъ:

$$s=\frac{u_1}{1-q}. \qquad [6]$$

Вопросъ этотъ мы уже рѣшали при выясненіи понятія о предѣлѣ (**160, 8°**).

565. Приложеніе. Періодическая десятичная дробь можетъ разсматриваться, какъ убывающая прогрессія. Пусть, напримѣръ, дана періодическая дробь 0,353535...... Можно разсматривать ее, какъ предѣлъ суммы первыхъ n членовъ безконечно убывающей геометрической прогрессіи:

$$\div\!\div\ \frac{35}{100},\ \frac{35}{10000},\ \frac{35}{1000000},\ \ldots,$$

знаменатель которой равенъ $\frac{1}{100}$. Формула [6] опредѣляетъ этотъ предѣлъ, равный $\dfrac{\dfrac{35}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=\dfrac{35}{99}$. Результатъ этотъ получается и въ ариѳметикѣ въ теоріи періодическихъ дробей.

Упражненія.

1. Каковы суть ариѳметическія прогрессіи, въ которыхъ сумма двухъ какихъ ни есть членовъ составляетъ часть прогрессіи?

Отв. Прогрессіи, въ которыхъ первый членъ есть кратное разности.

2. Каковы суть геометрическія прогрессіи, въ которыхъ произведеніе двухъ членовъ составляетъ часть прогрессіи?

Отв. Прогрессіи, въ которыхъ первый членъ есть степень знаменателя.

3. Если въ рядѣ чиселъ каждое изъ чиселъ равно полусуммѣ смежныхъ чиселъ, то числа образуютъ ариѳметическую прогрессію. Если каждое изъ чиселъ есть среднее пропорціональное между смежными, то числа образуютъ геометрическую прогрессію.

4. Въ какой ариѳметической прогрессіи отношеніе суммы n первыхъ членовъ къ суммѣ n слѣдующихъ не зависитъ отъ n?

Отв. Прогрессіи, въ которыхъ разность равна удвоенному первому члену.

5. Составляютъ ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ часть одной и той же прогрессіи, ариѳметической или геометрической?

Отв. Нѣтъ.

6. Если возьмемъ рядъ нечетныхъ чиселъ: 1, 3, 5, 7, . . . и разобьемъ его на группы, изъ которыхъ первая содержитъ одинъ членъ, вторая—два, третья—три, и т. д., то сумма членовъ одной и той же группы представляетъ кубъ.

7. Въ рядѣ 1, 2, 4, 6, 8, 10, . . . сумма n первыхъ членовъ представляетъ нечетное число; прибавивъ къ полученному числу слѣдующія за нимъ $(n-1)$ нечетныхъ чиселъ, образуемъ кубъ.

8. Въ геометрической прогрессіи, состоящей изъ шести членовъ, разность крайнихъ членовъ болѣе упятеренной разности среднихъ членовъ.

9. Образуемъ рядъ членовъ, въ которомъ каждый членъ равенъ полусуммѣ двухъ предъидущихъ. Зная два первыхъ члена a и b этого ряда, найти предѣлъ, къ которому приближаемся, образовывая все большее и большее число членовъ.

Отв. $\dfrac{a+2b}{3}$.

10. Дана какая ни есть линія AB; замѣчаемъ ея середину C, потомъ середину D отрѣзка CB, далѣе середину E отрѣзка DC; потомъ середину F отрѣзка ED, далѣе середину G отрѣзка FE, и такъ далѣе неопредѣленно. Найти предѣльную точку, къ которой приближаются точки C, D, E, F, G.

Отв. Предѣльная точка лежитъ въ концѣ $^1/_3 AB$, считая отъ B.

11. Найти предѣлъ суммы дробей:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots$$

Отв. Предѣлъ равенъ 2.

12. Данъ рядъ чиселъ:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ldots$$

Найти сумму n первыхъ членовъ.

Отв. Сумма равна $\frac{n(n+1)\,(n+2)}{6}$.

13. Въ геометрической прогрессіи, число членовъ которой нечетное, сумма квадратовъ членовъ равна суммѣ членовъ, умноженной на разность между суммою членовъ, занимающихъ нечетныя мѣста, и суммою членовъ, занимающихъ четныя мѣста.

14. Въ какой ариѳметической прогрессіи сумма членовъ всегда равна утроенному квадрату числа этихъ членовъ?

15. Найти n послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ, сумма которыхъ равна n^p.

16. Углы плоскаго выпуклаго многоугольника образуютъ ариѳметическую прогрессію, разность которой равна 4^0, причемъ наибольшій изъ угловъ заключаетъ 172^0. Каково число сторонъ?

17. Опредѣлить p и q въ уравненіи

$$x^4+px^2+q=0$$

такимъ образомъ, чтобы корни уравненія составляли ариѳметическую прогрессію.

18. Показать, что числа a^2, b^2, c^2 образуютъ ариѳметическую прогрессію, если числа

$$\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a}$$

образуютъ, въ свою очередь, ариѳметическую прогрессію.

19. Въ рядѣ послѣдовательныхъ нечетныхъ чиселъ образованы слѣдующія группы:

$$1,\ (3,\ 5),\ (7,\ 9,\ 11),\ (13,\ 15,\ 17,\ 19),\ \ldots,$$

такъ что группа мѣста n заключаетъ n членовъ.
Вычислить сумму чиселъ, образующихъ эту группу.

20. Даны p прогрессій, первые члены которыхъ соотвѣтственно суть:

$$1, 2, 3, \ldots, p,$$

причемъ разности этихъ прогрессій соотвѣтственно таковы:

$$1, 3, 5, \ldots (2p-1).$$

Показать, что

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_p = \frac{np}{2}(np+1),$$

гдѣ буквы $S_1, S_2, \ldots, S_p$ означаютъ соотвѣтственно суммы n первыхъ членовъ каждой изъ прогрессій.

21. Показать, что числа

$$x^2 + xy + y^2,\ x^2 + xz + z^2,\ y^2 + yz + z^2$$

образуютъ ариѳметическую прогрессію, если числа x, y, z образуютъ, въ свою очередь, ариѳметическую прогрессію.

22. Данъ кругъ, котораго радіусъ a; проведены хорда CD, длина которой есть l, и діаметръ AOB, встрѣчающіеся въ точкѣ M; полухорда EC раздѣлена на n равныхъ частей. Требуется: 1) вычислить отрѣзокъ OM діаметра, зная, что ME заключаетъ m дѣленій; 2) вычислить сумму квадратовъ MF, гдѣ MF есть отрѣзокъ перпендикуляра, возставленнаго къ OM, заключенный между точкою M и окружностью, для всѣхъ значеній m отъ 0 до n.

23. Сумма членовъ ариѳметической прогрессіи равна $5a$; сумма обратныхъ имъ чиселъ равна $\frac{1}{b}$.

Найти эту прогрессію (за неизвѣстное примемъ средній членъ и разность прогрессіи).

24. Въ ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ трехъ членовъ, даны сумма членовъ, равная $2a$, и сумма ихъ четвертыхъ степеней, равная b^4. Вычислить средній членъ и разность.

25. Дана поверхность и діагональ прямоугольнаго параллелепипеда. Вычислить его измѣренія, если,

во 1°, они составляютъ ариѳметическую прогрессію,

во 2°, они составляютъ геометрическую прогрессію.

26. Доказать, что если три числа a, b, c составляютъ и прогрессію ариѳметическую, и прогрессію геометрическую, то они равны.

27. Если P представляетъ произведеніе n чиселъ, образующихъ геометрическую прогрессію, если S и S_1 суть соотвѣтственно сумма этихъ чиселъ и сумма имъ обратныхъ, то

$$P^2 = \left(\frac{S}{S_1}\right)^n.$$

28. Вычислить сумму:

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n,$$

гдѣ S_n представляетъ сумму n первыхъ членовъ геометрической прогрессіи.

29. Предѣлы суммъ членовъ геометрической прогрессіи и квадратовъ ихъ соотвѣтственно суть 2 и $\frac{4}{3}$.

Вычислить первый членъ и знаменателя.

30. Найти предѣлъ суммы членовъ ряда:

$$5, -\frac{20}{3}, +\frac{80}{9}, -\frac{320}{27}, \ldots$$

когда число членовъ безпредѣльно возрастаетъ.

31. Данъ рядъ:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots,$$

въ которомъ каждые два рядомъ стоящихъ числа удовлетворяютъ условію:

$$x_n = x_{n-1} + n.$$

Требуется:

1°. Выразить x_n въ n.

2°. Вычислить сумму n первыхъ членовъ.

3°. Найти предѣлъ, къ которому стремится эта сумма, когда n безпредѣльно растетъ.

32. Данъ квадратъ $ABCD$. Беремъ на его сторонахъ соотвѣтственно точки A_1, B_1, C_1, D_1, дающія рядъ равныхъ отношеній:

$$\frac{A_1A}{A_1B} = \frac{A_1B}{B_1B} = \frac{C_1C}{C_1D} = \frac{D_1D}{D_1A} = \frac{m}{n};$$

получается такимъ образомъ новый квадратъ $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$, относительно котораго дѣлаемъ то же построеніе, и т. д.

Спрашивается, къ какому предѣлу стремится сумма площадей построенныхъ квадратовъ?

33. Данъ рядъ чиселъ:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \ldots,$$

знаменатели которыхъ удовлетворяютъ равенству:

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_{n-1} + n}.$$

Требуется:

1°. Выразить $\frac{1}{x_n}$ въ n.

2°. Вычислить сумму n первыхъ членовъ.

3°. Найти предѣлъ, къ которому стремится эта сумма, когда n неопредѣленно возрастаетъ.

34. Данъ треугольникъ; строимъ треугольникъ, стороны котораго суть медіаны перваго треугольника; относительно втораго треугольника дѣлаемъ то же построеніе, и т. д. Къ какому предѣлу стремится сумма площадей этихъ треугольниковъ?

35. Въ выраженіи

$$1-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\alpha^4}-\frac{1}{\alpha^5}+\ldots$$

число α есть число положительное, большее единицы. Спрашивается, къ чему стремится это выраженіе, когда α приближается неопредѣленно къ 1?

36. Въ сферу S, радіуса r, вписанъ кубъ C; въ этотъ кубъ вписана вторая сфера S_1; въ эту сферу S_1 вписанъ кубъ C_1, и такъ далѣе неопредѣленно. Требуется:

1°. Вычислить радіусы сферъ: S_1, S_2, S_3,...

2°. Вычислить выраженія объемовъ сферическихъ слоевъ, заключенныхъ между S и S_1, S_1 и S_2, S_2 и S_3,...

3°. Показать, что предѣлъ суммы всѣхъ этихъ объемовъ равенъ объему сферы S.

37. Найти три числа, которыя составляли бы геометрическую прогрессію, причемъ ихъ сумма и сумма ихъ квадратовъ равнялись бы соотвѣтственно числамъ a и b.

38. S_1 и S_2 соотвѣтственно суть суммы членовъ убывающихъ геометрическихъ прогрессій:

$$S_1=1+q_1+q_1^2+q_1^3+\ldots \quad \text{и} \quad S_2=1+q_2+q_2^2+q_2^3+\ldots$$

Опредѣлить сумму:

$$S_{1,2}=1+q_1q_2+q_1^2q_2^2+\ldots,$$

зная суммы S_1 и S_2, и обобщить.

39. Данъ треугольникъ ABC; возьмемъ на его сторонахъ AB, AC, AB соотвѣтственно такія точки A_1, B_1, C_1, которыя давали бы рядъ равенствъ:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{B_1C}{B_1A}=\frac{C_1A}{C_1B}=k;$$

въ треугольникѣ $A_1B_1C_1$ дѣлаемъ то же построеніе, и т. д.
Вычислить предѣлъ суммы площадей треугольниковъ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, и т. д.

40. Данъ треугольникъ ABC; беремъ на его сторонахъ BC, AC, AB соотвѣтственно такія точки A_1, B_1, C_1, чтобы

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{A_1C}, \quad \beta = \frac{B_1C}{B_1A}, \quad \gamma = \frac{C_1A}{C_1B}.$$

1°. Показать, что площадь S_1 треугольника $A_1B_1C_1$ имѣетъ выраженіемъ:

$$S_1 = S \cdot \frac{1 + \alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

2°. Въ треугольникѣ $A_1B_1C_1$ сдѣлаемъ то же построеніе, и т. д.
Къ какому предѣлу стремится сумма площадей треугольниковъ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ...?

3°. Вывести изъ предъидущаго результата теорему Менелая, дающую необходимое и достаточное условіе, при которомъ точки A_1, B_1, C_1 лежать на одной прямой.

41. Данъ треугольникъ ABC; на его сторонахъ BC, AC, AB беремъ соотвѣтственно такія точки A, B. C, которыя давали бы рядъ равенствъ:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{B'C}{B'A} = \frac{C'A}{C'B} = k;$$

проведемъ прямыя AA', BB', CC', образующія взаимными встрѣчами треугольникъ $A_1B_1C_1$; въ этомъ треугольникѣ дѣлаемъ то же построеніе, и т. д.
Вычислить предѣлъ суммы площадей: $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ...

42. Данъ треугольникъ ABC; беремъ на его сторонахъ BC, AB, AB такія точки A', B', C', чтобы

$$\alpha = \frac{A'B}{A'C}, \quad \beta = \frac{B'C}{B'A}, \quad \gamma = \frac{C'A}{C'B}.$$

Проводимъ прямыя AA', BB', CC', опредѣляющія треугольникъ $A_1B_1C_1$.

1°. Показать, что площадь S_1 треугольникъ $A_1B_1C_1$ имѣетъ выраженіемъ:

$$S_1 = S \cdot \frac{1 - \alpha\beta\gamma}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)}.$$

2°. Сдѣлаемъ въ треугольникѣ $A_1B_1C_1$ то же построеніе, и т. д.
Спрашивается, къ какому предѣлу стремится сумма площадей треугольниковъ $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ...?

3°. Вывести изъ предъидущаго результата теорему Чевы, дающую необходимое и достаточное условіе для того, чтобы прямыя AA', BB', CC' встрѣчались въ одной точкѣ.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Теорія логариѳмовъ.

§ I. Ирраціональные показатели.

566. Ирраціональные показатели. Разсматривая выраженіе a^x, мы предполагали всегда, что показатель x есть число раціональное, и тогда выраженіе это имѣло вполнѣ ясный смыслъ. И въ самомъ дѣлѣ, если число x есть число цѣлое и положительное, то выраженіе представляетъ произведеніе множителей, равныхъ a, причемъ число множителей равно x. Если x есть число цѣлое и отрицательное, то выраженіе представляетъ дробь, числитель которой равенъ единицѣ, причемъ знаменатель представляетъ степень числа a, показатель которой равенъ положительному числу $(-x)$. И наконецъ, если x дробное число вида $\frac{m}{n}$, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Во всемъ нижеслѣдующемъ мы будемъ предполагать, что a есть число положительное, и будемъ разсматривать только вещественныя и положительныя значенія корней.

Намъ остается, для полной общности, опредѣлить выраженіе a^x для тѣхъ случаевъ, когда показатель x есть число ирраціональное, положительное или отрицательное. Для этой цѣли предварительно докажемъ нѣкоторыя предложенія.

567. Теорема I. *Всѣ раціональныя степени положительнаго числа суть числа положительныя.*

Предложеніе это вытекаетъ изъ соглашенія разсматривать только положительныя значенія корней.

568. Теорема II. *Всѣ степени, съ положительнымъ показателемъ, числа, большаго единицы, суть числа, большія единицы: всѣ же степени, съ отрицательнымъ показателемъ, этого числа суть числа, меньшія единицы.*

Заключенія будутъ обратныя для степеней числа, меньшаго единицы.

Положимъ, что a представляетъ число, большее единицы, причемъ $a^{\frac{m}{n}}$ есть степень a съ положительнымъ показателемъ. Имѣемъ, по опредѣленію,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Такъ какъ a болѣе единицы, то и степень a^m, съ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ m, а слѣдовательно и $\sqrt[n]{a^m}$, суть числа, большія единицы.

Равенство же $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ показываетъ, что степени съ отрицательными показателями, будучи обратными степенямъ съ показателями положительными, суть числа, меньшія единицы.

Наконецъ, положивъ, что a представляетъ число, меньшее единицы, мы можемъ представить его въ видѣ $\frac{1}{a_1}$, гдѣ a_1 болѣеединицы, и тогда равенство:

$$a^x = \frac{1}{a_1^x}$$

покажетъ, что значенія x, обращающія знаменателя въ числа, большія единицы, дѣлаютъ a^x числами, меньшими единицы, и взаимно.

569. Теорема III. *Если показатель x принимаетъ возрастающія раціональныя значенія, то выраженіе a^x или все возрастаетъ, или все убываетъ; оно возрастаетъ, когда a болье единицы; убываетъ, если a менье единицы.*

Обозначимъ, въ самомъ дѣлѣ, буквами p и q раціональныя значенія, положительныя или отрицательныя, принимаемыя послѣдовательно буквою x. Имѣемъ:

$$\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}.$$

По условію теоремы, число q болѣе числа p. Отсюда слѣдуетъ, что, при a большемъ единицы, число a^{q-p} будетъ болѣе единицы, и, слѣдовательно, $a^q > a^p$. Если же a менѣе единицы, то и a^{q-p} будетъ менѣе единицы, и тогда $a^q < a^p$. Итакъ, a^x, при переходѣ x отъ p къ q, возрастаетъ, когда $a > 1$, и убываетъ, когда $a < 1$,

570. Теорема IV. *Если въ выраженіи a^α показатель α получаетъ неограниченный рядъ раціональныхъ значеній, имѣющихъ предѣломъ нуль, то выраженіе стремится къ единицѣ.*

1° Положимъ, что *число a болѣе единицы.* Допустимъ, что α стремится къ нулю, принимая значенія, представляемыя формулою $\frac{1}{n}$, гдѣ n цѣлое положительное число, безконечно возрастающее. По формулѣ [5] (**564**), дающей сумму членовъ геометрической прогрессіи, найдемъ:

$$1 + a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{2}{n}} + \ldots + a^{\frac{n-1}{n}} = \frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Такъ какъ каждое изъ слагаемыхъ лѣвой части этого равенства, за исключеніемъ перваго, есть число, большее единицы, то вся лѣвая часть болѣе n, а потому

$$\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} > n.$$

Неравенство это даетъ:

$$Mod\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \frac{a-1}{n};$$

но $\frac{a-1}{n}$, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго даннаго положительнаго числа ε; слѣдовательно, и подавно,

$$Mod\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon.$$

Это неравенство говоритъ, что число 1 есть предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное число $a^{\frac{1}{n}}$, при неопредѣленномъ возрастаніи n.

Допустимъ, что α приближается къ нулю, принимая какія ни есть положительныя раціональныя значенія. Назовемъ буквою n наибольшее цѣлое число, заключенное въ $\frac{1}{\alpha}$; это число будетъ неопредѣленно возрастать при неопредѣленномъ убываніи α.

Принимая во вниманіе, что $n < \frac{1}{\alpha}$, т.-е. $\alpha < \frac{1}{n}$, получимъ неравенства (569):

$$1 < a^{\alpha} < a^{\frac{1}{n}},$$

показывающія, что

$$0 < a^{\alpha} - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Но $a^{\frac{1}{n}} - 1$, по доказанному сейчасъ, стремится къ нулю, при неопредѣленномъ возрастаніи n; слѣдовательно, и подавно, число $a^{\alpha} - 1$ стремится къ нулю при неопредѣленномъ убываніи α, т. е. 1 есть предѣлъ a^{α}.

2°. Положимъ теперь, что $a < 1$. Назовемъ $a = \frac{1}{b}$, гдѣ $b > 1$. Имѣемъ:

$$a^{\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}},\ \ lim(a^{\alpha}) = \frac{1}{lim\,(b^{\alpha})} = \frac{1}{1} = 1.$$

3°. Предположимъ наконецъ, что α стремится къ нулю, принимая значенія отрицательныя. Назовемъ $\alpha = -\beta$, гдѣ β стремится къ нулю, принимая значенія положительныя. Имѣемъ:

$$lim\,(a^{\alpha}) = lim\,(a^{-\beta}) = lim\left(\frac{1}{a^{\beta}}\right) = \frac{1}{lim\,(a^{\beta})} = \frac{1}{1} = 1.$$

571. Опредѣленіе выраженія a^x. Положимъ, что число x есть число ирраціональное, опредѣленное, какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+p},\ \ldots \quad (1)$$

Разсмотримъ рядъ степеней числа a:

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\ \ldots,\ a^{x_n},\ \ldots,\ a^{x_{n+p}},\ \ldots \quad (2)$$

Каждое изъ чиселъ этого ряда имѣетъ для насъ вполнѣ ясный смыслъ, ибо каждое изъ нихъ представляетъ количество съ раціональнымъ показателемъ.

Легко показать, что рядъ (2) стремится къ нѣкоторому предѣлу. Для этой цѣли разсмотримъ выраженіе:

$$Mod\left(a^{x_{n+p}} - a^{x_n}\right) = Mod\left[a^{x_n}\left(a^{x_{n+p}-x_n} - 1\right)\right],$$

или

$$Mod\left(a^{x_{n+p}} - a^{x_n}\right) = a^{x_n}\, Mod\left(a^{x_{n+p} - x_n} - 1\right).$$

Назовемъ буквою k конечное положительное число, большее наибольшаго изъ чиселъ (2); предъидущее равенство дастъ:

$$Mod\left(a^{x_{n+p}} - a^{x_n}\right) < k\, Mod\left(a^{x_{n+p} - x_n} - 1\right). \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Но раціональный показатель $(x_{n+p} - x_n)$ стремится къ нулю, при неопредѣленномъ возрастаніи n и при всякомъ цѣломъ и положительномъ p, ибо рядъ (1), по условію имѣетъ предѣлъ; слѣдовательно (**570**),

$$Mod\left(a^{x_{n+p} - x_n} - 1\right) < \frac{\varepsilon}{k}.$$

На основаніи этого неравенства, неравенство (3) даетъ:

$$Mod\left(a^{x_{n+p}} - a^{x_n}\right) < \varepsilon.$$

Это неравенство говоритъ, что необходимое и достаточное условіе существованія предѣла для ряда (2) удовлетворено, т.-е., другими словами, рядъ (2) стремится къ предѣлу.

Разсмотримъ теперь другой рядъ раціональныхъ чиселъ:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots\ldots\ y_n,\ \ldots\ldots\ y_{n+p},\ \ldots\ldots, \quad (1')$$

имѣющій предѣломъ то же число x. Подобно предъидущему докажемъ, что рядъ:

$$a^{y_1},\ a^{y_2},\ a^{y_3},\ \ldots\ldots,\ a^{y_n},\ \ldots\ldots,\ a^{y_{n+p}},\ \ldots\ldots \quad (2')$$

стремится къ предѣлу.

Покажемъ, что ряды (2) и (2′) стремятся къ одному и тому же предѣлу. Для этой цѣли разсмотримъ равенство:

$$Mod\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) = a^{x_n} \cdot Mod\left(a^{y_n - x_n} - 1\right).$$

Оно даетъ:

$$Mod\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) < k \cdot Mod\left(a^{y_n - x_n} - 1\right).$$

Но раціональный показатель $y_n - x_n$ стремится нулю, при неопредѣленномъ возрастаніи n (**168**); слѣдовательно,

$$Mod\left(a^{y_n - x_n} - 1\right) < \frac{\varepsilon}{k},$$

а потому, и подавно,

$$Mod\left(a^{y_n} - a^{x_n}\right) < \varepsilon.$$

Это неравенство говоритъ, что перемѣнныя числа a^{y_n} и a^{x_n} стремятся къ одному и тому же предѣлу, при неопредѣленномъ возрастаніи n (**170**).

Итакъ, слѣдовательно, рядъ (2) имѣетъ предѣлъ, независящій отъ того закона, по которому рядъ раціональныхъ показателей:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

стремится къ одному и тому же предѣлу x.

Предѣлъ этотъ называется степенью числа a, съ показателемъ x, и обозначается знакоположеніемъ: a^x.

II. Дѣйствія надъ выраженіями вида a^x.

572. Умноженіе. Положимъ, что ирраціональныя числа x и y опредѣлены соотвѣтственно, какъ предѣлы рядовъ раціональныхъ чиселъ:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$
$$y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots,$$

такъ что

$$x = lim(x_n)_{n=\infty}, \quad y = lim(y_n)_{n=\infty}, \quad a^x = lim\left(a^{x_n}\right)_{n=\infty},$$
$$a^y = lim\left(a^{y_n}\right)_{n=\infty}.$$

Имѣемъ:

$$a^x \cdot a^y = lim\left(a^{x_n}\right) \cdot lim\left(a^{y_n}\right) = lim\left(a^{x_n} \cdot a^{y_n}\right) = lim\left(a^{x_n + y_n}\right) =$$
$$= a^{lim(x_n + y_n)} = a^{lim x_n + lim y_n} = a^{x+y},$$

т.-е. при умноженіи степеней, съ ирраціональными показателями, одного и того же числа показатели складываются.

573. Дѣленіе. Имѣемъ:

$$a^x : a^y = lim\left(a^{x_n}\right) : lim\left(a^{y_n}\right) = lim\left(\frac{a^{x_n}}{a^{y_n}}\right) = lim\left(a^{x_n - y_n}\right) =$$

$$= a^{lim(x_n - y_n)} = a^{lim(x_n) - lim(y_n)} = a^{x - y},$$

т.-е. при раздѣленіи степеней, съ ирраціональными показателями, одного и того же числа показатели вычитаются.

574. Обобщенія. Прежде чѣмъ займемся возвышеніемъ въ степень выраженій вида a^x, сдѣлаемъ обобщенія теоремъ II, III и IV. Эти теоремы были доказаны для показателей раціональныхъ. Покажемъ, что онѣ остаются справедливыми и для ирраціональныхъ показателей.

1°. *Если число a есть число, большее единицы, то его степени, съ показателями положительными, суть числа, большія единицы; степени же его, съ показателями отрицательными, суть числа, меньшія единицы. Результаты будутъ обратные, когда число a есть число, меньшее единицы.*

Разсмотримъ положительное ирраціональное число y, какъ предѣлъ ряда возрастающихъ раціональныхъ чиселъ:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

(этотъ рядъ можетъ быть образованъ, напримѣръ, при помощи разложенія y въ непрерывную дробь).

Напишемъ рядъ:

$$a^{y_1}, a^{y_2}, a^{y_3}, \ldots, a^{y_n}, \ldots$$

Рядъ этотъ имѣетъ предѣломъ число a^y, и предѣлъ этотъ, если $a > (<) 1$, представляетъ число, большее (меньшее) единицы, ибо нашъ рядъ представляетъ возрастающій (убывающій) рядъ чиселъ, изъ которыхъ каждое есть число, большее (меньшее) единицы.

Совершенно подобнымъ же образомъ докажемъ и ту часть теоремы, которая относится къ отрицательнымъ показателямъ.

2°. *Если число a есть число, большее (меньшее) единицы, то степени его возрастаютъ (убываютъ) съ возрастаніемъ показателя.*

Положимъ, что число a есть число, большее (меньшее) единицы, и пусть $p > q$, гдѣ p и q суть числа раціональныя или ирраціональныя.

Имѣемъ:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q},$$

но $p-q>0$; слѣдовательно, a^{p-q} будетъ болѣе (менѣе) единицы, а потому

$$a^p > (<) a^q, \text{ ч. и т. д.}$$

3°. *Если въ выраженіи a^α показатель α стремится къ нулю, принимая значенія раціональныя или ирраціональныя, то само выраженіе стремится къ единицѣ.*

Предположимъ, что показатель α есть число положительное, и назовемъ наибольшее цѣлое число, заключенное въ $\frac{1}{\alpha}$, буквою n, такъ что

$$\frac{1}{\alpha} > n, \text{ откуда } 1 > \alpha n, \ \alpha < \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что (2°)

$$Mod(a^\alpha - 1) < Mod\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right);$$

но, при неопредѣленномъ убываніи α, число n неопредѣленно возрастаетъ; слѣдовательно,

$$Mod\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) < \varepsilon,$$

а потому, и подавно,

$$Mod(a^\alpha - 1) < \varepsilon, \text{ ч. и т. д.}$$

Если показатель α есть число отрицательное, то, положивъ $\alpha = -\beta$, найдемъ:

$$lim\, a^\alpha = lim\, \frac{1}{a^\beta} = \frac{1}{lim\,(a^\beta)} = 1.$$

4. *Если число x, раціональное или ирраціональное, есть предѣлъ ряда чиселъ:*

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

раціональныхъ или ирраціональныхъ, то a^x есть предѣлъ ряда чиселъ:

$$a^{x_1},\ a^{x_2},\ \ldots,\ a^{x_n},\ \ldots,$$

И въ самомъ дѣлѣ,

$$Mod\left(a^{x}-a^{x_n}\right)=Mod\, a^{x}\left(1-a^{x_n-x}\right)=a^{x}Mod\left(1-a^{x_n-x}\right);$$

но, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod\left(1-a^{x_n-x}\right)<\frac{\varepsilon}{a^x};$$

слѣдовательно,

$$Mod\left(a^{x}-a^{x_n}\right)<\varepsilon, \text{ ч. и т. д.}$$

575. Возвышеніе въ степень. Разсмотримъ слѣдующихъ два случая:

1°. Возьмемъ раціональное число k; получимъ:

$$\left(a^{x}\right)^{k}=\left[lim\left(a^{x_n}\right)\right]^{k}=lim\left[\left(a^{x_n}\right)\right]^{k}=lim\left(a^{kx_n}\right)=a^{lim(kx_n)}=a^{xk} \quad . \quad . \quad (1)$$

2°. Взявъ же ирраціональное число y и разсмотрѣвъ его, какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$y_1,\ y_2,\ .\ .\ .\ ,\ y_n,\ .\ .\ .\ ,$$

найдемъ:

$$\left(a^{x}\right)^{y}=lim\left[\left(a^{x}\right)^{y_n}\right]=lim\left(a^{xy_n}\right)=a^{lim(xy_n)}=a^{xy} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Результаты (1) и (2) говорятъ намъ что *для возвышенія выраженія a^x въ степень, показатель которой y есть число раціональное или ирраціональное, достаточно умножить показателя x на показателя y.*

576. Извлеченіе корня. Разсмотримъ два случая.

1. Возьмемъ раціональное число k; получимъ:

$$\sqrt[k]{a^{x}}=lim\sqrt[k]{a^{x_n}}=lim\left(a^{\frac{x_n}{k}}\right)=a^{lim\left(\frac{x_n}{k}\right)}=a^{\frac{lim(x_n)}{k}}=a^{\frac{x}{k}} \quad . \quad . \quad (3)$$

2. Возьмемъ ирраціональное число y, разсмотрѣвъ его, какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$y_1,\ y_2,\ .\ .\ .\ ,\ y_n,\ .\ .\ .\ ,$$

и примемъ, въ видѣ опредѣленія, слѣдующее равенство:

$$\sqrt[y]{a^x} = lim\sqrt[y_n]{a^x}.$$

Оно дастъ:

$$\sqrt[y]{a^x} = lim\left(\sqrt[y_n]{a^x}\right) = lim\left(a^{\frac{x}{y_n}}\right) = a^{lim\left(\frac{x}{y_n}\right)} = a^{\frac{x}{lim(y_n)}} = a^{\frac{x}{y}} \quad . \quad . \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) говорятъ, что *для извлеченія корня, показатель котораго y есть число раціональное или ирраціональное, изъ выраженія a^x достаточно раздѣлить показателя x на показателя y.*

Полученные результаты показываютъ намъ, что дѣйствія надъ количествами съ показателями ирраціональными производятся по тѣмъ же правиламъ, по какимъ они производятся надъ количествами съ показателя раціональными.

§ III. Опредѣленіе логариѳма.

577. Сдѣлавъ предъидущія обобщенія, докажемъ слѣдующую замѣчательную теорему.

Теорема. *Если положительное число N заключено между двумя числами a^p и a^q, гдѣ $p < q$, то существуетъ такое значеніе r, и только одно, заключенное между p и q, для котораго*

$$a^r = N.$$

Разсмотримъ разность:

$$a^x - N$$

и назовемъ ее, для сокращенія, черезъ Δ_x, такъ что

$$\Delta_x = a^x - N. \qquad (1)$$

По условію теоремы, числа:

$$\Delta_p = a^p - N \quad \text{и} \quad \Delta_q = a^q - N$$

суть числа противоположныхъ знаковъ. Предположимъ, что

$$\Delta_p < 0 \quad \text{и} \quad \Delta_q > 0.$$

Разбивъ промежутокъ (a, b) на десять равныхъ промежутковъ:

$$a, \underbrace{\quad}_{1} a+\frac{b-a}{10}, \underbrace{\quad}_{2} a+2\cdot\frac{b-a}{10}, \underbrace{\quad}_{3} a+3\cdot\frac{b-a}{10}, \ldots, a+9\cdot\frac{b-a}{10}, \underbrace{\quad}_{10} b, \quad (2)$$

будемъ подставлять въ выраженіе Δ_x, вмѣсто буквы x, послѣдовательно каждое изъ одинадцати чиселъ ряда (2), представляющихъ границы означенныхъ промежутковъ. Если какой-нибудь изъ результатовъ подстановки будетъ равенъ нулю, то теорема доказана, ибо, назвавъ буквою r то число ряда (2), которое, послѣ подстановки, обратило выраженіе Δ_x въ нуль, получимъ:

$$a^r - N = 0, \quad \text{откуда} \quad a^r = N.$$

Но положимъ, что ни одинъ изъ результатовъ не равенъ нулю. Назвавъ первое изъ чиселъ ряда (2), для котораго результатъ подстановки есть положительное число, буквою q_1 (этимъ числомъ можетъ быть и число q), и обозначивъ предъидущее число буквою p_1, найдемъ:

$$\Delta_{p_1} < 0, \quad \Delta_{q_1} > 0, \quad q_1 - p_1 = \frac{q-p}{10}.$$

Разсуждая относительно промежутка (p_1, q_1) совершенно такимъ же образомъ, какимъ разсуждали относительно промежутка (p, q), мы или получимъ такое число, которое, будучи подставлено, вмѣсто буквы x, въ выраженіе (1), обратитъ его въ нуль, и тогда теорема будетъ доказана, или придемъ къ новому промежутку (p_2, q_2), для котораго:

$$\Delta_{p_2} < 0, \quad \Delta_{q_2} > 0, \quad p_2 - q_2 = \frac{p_1 - q_1}{10} = \frac{p-q}{10^2}.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ, мы или встрѣтимъ число, обращающее Δ_x въ нуль, и тогда теорема будетъ имѣть мѣсто, или образуемъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$p, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$
$$q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots,$$

обладающихъ слѣдующими свойствами:

1) Числа перваго ряда, оставаясь менѣе q, идутъ, не убывая, т.-е. первый рядъ стремится къ предѣлу.

2) Числа втораго ряда, оставаясь болѣе p, идутъ, не возрастая, т.-е. второй рядъ стремится къ предѣлу.

3) Оба ряда стремятся къ одному и тому же предѣлу, ибо разность $p_n - q_n$, равная $\frac{p-q}{10^n}$, стремится къ нулю. Назовемъ этотъ предѣлъ буквою r.

Образуемъ теперь слѣдующіе ряды:

$$\Delta_p,\ \Delta_{p_1},\ \Delta_{p_2},\ \ldots,\ \Delta_{p_n},\ \ldots \qquad (3)$$

$$\Delta_q,\ \Delta_{q_1},\ \Delta_{q_2},\ \ldots,\ \Delta_{q_n},\ \ldots \qquad (4)$$

Легко видѣть, что каждый изъ нихъ стремится къ предѣлу, равному

$$\Delta_r = a^r - N.$$

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ разности:

$$\Omega = \Delta_r - \Delta_{p_n} = \left(a^r - N\right) - \left(a^{p_n} - N\right) = a^r - a^{p_n},$$

$$\Omega_1 = \Delta_r - \Delta_{q_n} = \left(a^r - N\right) - \left(a^{q_n} - N\right) = a^r - a^{q_n};$$

отсюда

$$\Omega = a^{p_n}\left(a^{r-p_n} - 1\right),\ \ \Omega_1 = a^r\left(1 - a^{q_n - r}\right).$$

Эти равенства говорятъ, что Ω и Ω_1 стремятся къ нулю, т.-е. Δ_r представляетъ общій предѣлъ чиселъ Δ_{p_n} и Δ_{q_n}.

Но всѣ числа ряда (3) отрицательны; слѣдовательно, ихъ предѣлъ отрицателенъ или нуль, т.-е.

$$\Delta_r \leqslant 0;$$

всѣ же числа ряда (4) положительны; слѣдовательно, ихъ предѣлъ положителенъ или нуль, т.-е.

$$\Delta_r \geqslant 0.$$

Отсюда вытекаетъ, что $\Delta_r = 0$, т.-е.

$$a^r - N = 0,\quad a^r = N, \text{ ч. и т. д.}$$

578. Опредѣленіе логариѳма. *Логариѳмомъ положительнаго числа b, при положительномъ основаніи a, называется показатель степени,* *раціональный или ирраціональный, въ которую нужно возвысить основаніе a для полученія даннаго числа b.*

580. Теорема. *Всякое положительное число b, при положительномъ основаніи a, не равномъ единицѣ, имѣетъ логариѳмъ, и только одинъ.*

И въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ выраженіе a^x.

Положимъ сперва, что основаніе $a > 1$. Принимая во вниманіе, что

$$a^{-\infty} = 0, \; a^0 = 1, \; a^{\infty} = \infty,$$

находимъ, на основаніи предъидущей теоремы, что 1) всякому числу b, заключенному между 0 и 1, т. е. заключенному между $a^{-\infty}$ и a^0, отвѣчаетъ такое число r, и только одно, заключенное между $-\infty$ и 0, при которомъ

$$a^r = b,$$

причемъ это число r и есть, по опредѣленію, логариѳмъ числа b, и что 2) всякому числу b, заключенному между 1 и ∞, т. е. заключенному между a^0 и a^{∞}, отвѣчаетъ такое число r, и только одно, заключенное между 0 и ∞, при которомъ

$$a^r = b,$$

причемъ это число r и есть, по опредѣленію, логариѳмъ числа b. Положимъ теперь, что основаніе $a < 1$. Принимая во вниманіе, что

$$a^{-\infty} = \infty, \; a^0 = 1, \; a^{\infty} = 0,$$

находимъ, на основаніи предъидущей теоремы, при помощи разсужденій, подобныхъ предъидущимъ, что всякое число b, заключенное между 1 и ∞, имѣетъ логариѳмъ r, и только одинъ, заключенный между $-\infty$ и 0, и что всякое число b, заключенное между 1 и 0, имѣетъ логариѳмъ r, и только одинъ, заключенный между 0 и ∞. Теорема доказана. Итакъ,

Если основаніе логариѳмовъ есть число, большее единицы, то всякое число, меньшее (большее) единицы, имѣетъ отрицательный (положительный) логариѳмъ, и только одинъ. Если же основаніе есть число, меньшее единицы, то результаты будутъ обратные.

581. Логариѳмъ числа b, при основаніи a, означается знакомъ $log_a b$, такъ что, напримѣръ,

$$2 = \log_4 16, \quad \frac{1}{3} = \log_8 2, \; -2 = \log_5 \frac{1}{25}, \; -\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}} 2 .$$

Предъидущая теорема даетъ:

1) если $a > 1$ и $1 \leqslant b \leqslant \infty$, то $\quad 0 \leqslant \log_a b \leqslant \infty$;
2) если $a > 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$, то $-\infty \leqslant \log_a b \leqslant 0$;
3) если $a < 1$ и $1 \leqslant b \leqslant \infty$, то $\quad 0 \geqslant \log_a b \geqslant -\infty$;
4) если $a < 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$, то $\quad \infty \geqslant \log_a b \geqslant 0$.

582. Совокупность логариѳмовъ всѣхъ положительныхъ чиселъ, при одномъ и томъ же основанiи a, образуетъ такъ называемую *систему логариѳмовъ*.

Очевидно, что, *въ какой ни есть системѣ логариѳмовъ, логариѳмъ единицы равенъ нулю и логариѳмъ основанія равенъ единицѣ.*

IV. Общія свойства логариѳмовъ.

Логариѳмы одной и той же системы имѣютъ замѣчательныя свойства, которыя мы и докажемъ.

583. Теорема I. *Логариѳмъ произведенія нѣсколькихъ чиселъ равенъ суммѣ логариѳмовъ этихъ чиселъ.*

Обозначимъ буквами x_1, x_2, ..., x_n соотвѣтственно логариѳмы чиселъ a_1, a_2, ..., a_n при основанiи a. Имѣемъ (**579**):

$$a^{x_1} = a_1,\ a^{x_2} = a_2,\ a^{x_3} = a_3,\ \ldots,\ a^{x_n} = a_n.$$

Перемноживъ эти равенства почленно, получимъ (**573**):

$$a^{x_1+x_2+\ldots+x_n} = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Равенство это говоритъ, что

$$\log(a_1 a_2 \ldots a_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n.$$

584. Теорема II. *Логариѳмъ частнаго двухъ чиселъ равенъ разности логариѳмовъ этихъ чиселъ.*

Обозначимъ буквами x и y соотвѣтственно логариѳмы чиселъ b и c. Имѣемъ (**579**):

$$a^x = b, \quad a^y = c.$$

Раздѣливъ равенства эти почленно, получимъ (**573**):

$$a^{x-y} = \frac{b}{c}.$$

Равенство это говоритъ, что

$$\log\frac{b}{c} = x - y = \log b - \log c.$$

585. Теорема III. *Логариѳмъ степени числа, съ какимъ ни есть показателемъ, равенъ произведенію показателя степени на логариѳмъ числа.*

Обозначимъ буквою x логариѳмъ b. Имѣемъ:

$$a^x = b.$$

Возвысивъ обѣ части этого равенства въ n-овую степень, найдемъ (**576**):

$$a^{nx} = b^n.$$

Равенство это даетъ:

$$\log(b^n) = nx = n \cdot \log b.$$

586. Слѣдствіе. *Логариѳмъ корня равенъ логариѳму подкореннаго количества, раздѣленному на показателя корня.*

Имѣемъ, въ самомъ дѣлѣ,

$$\log \sqrt[n]{b} = \log \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log b = \frac{\log b}{n}.$$

587. Предъидущія теоремы могутъ быть формулированы такимъ образомъ:

$$m_1 \log x_1 + m_2 \log x_2 + \ldots + m_n \log x_n = \log z,$$

гдѣ число z связано съ числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ слѣдующею простою алгебрическою зависимостью:

$$z = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}.$$

При помощи предъидущихъ теоремъ мы можемъ, зная логариѳмы нѣсколькихъ данныхъ чиселъ, найти логариѳмы чиселъ, равныхъ: произведенію степеней данныхъ чиселъ; частному отъ раздѣленія степеней этихъ чиселъ; корню изъ частнаго, полученнаго отъ раздѣленія степеней этихъ чиселъ, и т. д.

Примѣры. **1°**. Зная $\log 2$, опредѣлить логариѳмы: 8, $\frac{1}{64}$, $\sqrt{32}$, и т. д. Имѣемъ:

$$\log 8 = \log(2^3) = 3\log 2,\ \log \frac{1}{64} = \log \frac{1}{2^5} = \log 1 - 5\log 2 = -5\log 2,$$

$$\log \sqrt{32} = \log \sqrt{2^5} = \frac{5}{2} \log 2.$$

2. $\log \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}} = \frac{1}{3}(2\log a + \log b - 2\log c).$

3. $\log \sqrt[3]{a^3 - b^3} = \log \sqrt[3]{(a-b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{1}{3}[\log(a-b) +$
$+ \log(a^2+ab+b^2)].$

* § V. Логариөмы, разсматриваемые, какъ члены прогрессіи.

588. Другое опредѣленіе логариөмовъ. Разсмотримъ геометрическую прогрессію:

$$\div\div 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,\ q^n,\ q^{n+1},\ \ldots$$

начинающуюся съ единицы.

Назовемъ логариөмъ числа q, при какомъ-нибудь основаніи, буквою x. Логариөмы различныхъ членовъ этой прогрессіи, при томъ же основаніи, соотвѣтственно будутъ:

$$0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ \ldots,\ nx,\ (n+1)x,\ \ldots$$

Итакъ, *если числа образуютъ геометрическую прогрессію, начинающуюся съ единицы, то логариөмы ихъ* (**579**) *образуютъ ариөметическую прогрессію, начинающуюся съ нуля.* Вставимъ теперь нѣкоторое число k среднихъ между каждыми двумя послѣдовательными членами обѣихъ прогрессій. Говорятъ, что *числа, введенныя въ ариөметическую прогрессію, суть логариөмы соотвѣтствующихъ чиселъ, введенныхъ въ геометрическую прогресссію.* Покажемъ, въ самомъ дѣлѣ, что слѣдствія, вытекающія изъ этого опредѣленія, согласуются съ тѣми, которыя мы дали выше (**578**). И въ самомъ дѣлѣ, вставивъ k среднихъ между членами q^n и q^{n+1} прогрессіи геометрической и k среднихъ между соотвѣтствующими членами nx и $(n+1)x$ прогрессіи ариөметической, мы образуемъ новыя прогрессіи, знаменатели которыхъ соотвѣтственно суть:

$$\sqrt[k+1]{q},\quad \frac{x}{q+1}.$$

Числа, занимающія p-овыя мѣста, за членами nx и q^n, въ прогрессіяхъ ариөметической и геометрической, соотвѣтственно суть:

$$nx+p\cdot\frac{x}{k+1},\quad q^n\cdot\left(\sqrt[k+1]{q}\right)^p.$$

Но

$$q^n\cdot\left(\sqrt[k+1]{q}\right)^p=q^{n+\frac{p}{k+1}},$$

$$nx+p\cdot\frac{x}{k+1}=x\left(n+\frac{p}{k+1}\right).$$

Такъ какъ x есть логариөмъ q, то второе изъ этихъ чиселъ представляетъ логариөмъ перваго (**585**).

Итакъ, *вставивъ одно и то же число среднихъ между каждыми двумя послѣдовательными членами обѣихъ прогрессій, введемъ въ ариѳметическую прогрессію логариѳмы соотвѣтствующихъ чиселъ, введенныхъ въ прогрессію геометрическую.*

589. Взаимно. Мы видѣли, что система логариѳмовъ, опредѣленныхъ, какъ показатели степеней, можетъ всегда вытекать изъ разсматриванія двухъ, приличнымъ образомъ выбранныхъ, прогрессій. Можно показать взаимно, что *система логариѳмовъ, опредѣленная двумя какими ни есть прогрессіями, удовлетворяетъ опредѣленію, данному въ* **(579)**.

Разсмотримъ двѣ прогрессіи:

$$\begin{cases} 1,\ q,\ q^2, \ldots,\ q^n, \ldots \\ 0,\ \delta,\ 2\delta, \ldots,\ n\delta, \ldots, \end{cases}$$

одну—геометрическую, начинающуюся съ единицы, другую—ариѳметическую, начинающуюся съ нуля. Назовемъ члены ариѳметической прогрессіи *логариѳмами* соотвѣтствующихъ членовъ прогрессіи геометрической.

Положимъ:

$$q^n = \beta, \quad n\delta = \gamma,$$

причемъ γ есть логариѳмъ β. Изъ втораго равенства находимъ: $n = \frac{\gamma}{\delta}$; подставивъ значеніе это въ равенство первое, получимъ:

$$q^{\frac{\gamma}{\delta}} = \beta, \quad \text{или} \quad (q^{\frac{1}{\delta}})^\gamma = \beta.$$

Равенство это говоритъ намъ, что γ есть показатель степени, въ которую нужно возвысить постоянное число $(q^{\frac{1}{\delta}})$ для того, чтобы получить β. Отсюда слѣдуетъ, что γ есть логариѳмъ β, взятый въ системѣ, основаніе которой равно $q^{\frac{1}{\delta}}$.

§ VI. Различныя системы логариѳмовъ.

590. Переходъ отъ одной системы логариѳмовъ къ другой. Положительное число a, не равное единицѣ, которое, будучи возвышаемо во всевозможныя степени, образовываетъ всевозможныя положительныя числа, мы назвали *основаніемъ* разсматриваемой системы логариѳмовъ. Измѣняя основаніе мы измѣняемъ логариѳмъ числа, за исключеніемъ логариѳма единицы. Легко показать, однако, что *отношеніе между логариѳмами одного и того же числа остается постояннымъ. Оно называется модулемъ новой системы относительно старой.*

Возьмемъ два какихъ-нибудь основанія: a и α. Разсмотримъ число b и назовемъ его логариѳмы въ двухъ системахъ соотвѣтственно буквами x и x_1. Получимъ:

$$[1] \qquad a^{x}=b. \qquad \alpha^{x_1}=b. \qquad [2]$$

Возьмемъ логариѳмы обѣихъ частей равенства [1] въ системѣ, основаніе которой равно α. Найдемъ:

$$x\log_\alpha a=\log_\alpha b. \qquad [3]$$

Принимая же во вниманіе, что x представляетъ $\log b$ въ системѣ, основаніе которой равно a, найдемъ изъ равенства [3]:

$$\log_a b=\log_\alpha b\cdot\frac{1}{\log_\alpha a}.$$

Итакъ, *отношеніе логариѳмовъ числа b въ системахъ, основанія которыхъ соотвѣтственно суть α и a, есть постоянное число, равное* $\log_\alpha a$.

Мы могли бы взять логариѳмы обѣихъ частей равенства [2], дѣйствуя въ системѣ, основаніе которой равно a, и получили бы:

$$x_1\log_a\alpha=\log_a b,$$

или, принимая во вниманіе, что x_1 представляетъ $\log b$ при основаніи α,

$$\log_\alpha b=\log_a b\cdot\frac{1}{\log_a\alpha},$$

т.-е. *отношеніе логариѳмовъ числа b, взятыхъ соотвѣтственно въ системахъ, основанія которыхъ суть α и a, равно* $\frac{1}{\log_a\alpha}$. Выше мы нашли для этого отношенія число $\log_\alpha a$. Для того, чтобы результаты эти совмѣщались, необходимо:

$$\log_\alpha a=\frac{1}{\log_a\alpha}.$$

Это равенство можемъ получить, положивъ:

$$\log_a \alpha = y, \quad \log_\alpha a = z;$$

откуда, по опредѣленію,

$$a^y = \alpha, \quad \alpha^z = a.$$

Внося во второе уравненіе значеніе α, получаемое изъ перваго, будемъ имѣть:

$$a^{yz} = a, \text{ откуда } yz = 1.$$

*** 591. Натуральные логариѳмы.** Разсмотримъ двѣ прогрессіи:

$$\begin{array}{l} \div\!\div 1,\ 1+\alpha,\ (1+\alpha)^2,\ (1+\alpha)^3,\ \ldots,\ (1+\alpha)^m,\ \ldots \\ \div 1,\quad \beta\ ,\quad 2\beta\ ,\quad 3\beta\ \ldots,\quad m\beta\ \ldots, \end{array}$$

одну—геометрическую, начинающуюся съ единицы, другую—ариѳметическую, начинающуюся съ нуля.

Числа нижней прогрессіи будутъ логариѳмы соотвѣтствующихъ чиселъ верхней прогрессіи. Положимъ, что α представляетъ безконечно малое число, тогда и β будетъ безконечно мало. Основаніе разсматриваемой системы логариѳмовъ будетъ слѣдующее (588):

$$lim\ \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}\right]_{\alpha=0} = lim\ \left\{\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{ lim\ \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right\}_{\alpha=0}^{lim\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{\alpha=0}}.$$

Самая простая и естественная система логариѳмовъ будетъ, очевидно, та, при которой $lim\ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{\alpha=0} = 1$. Для подобной системы логариѳмовъ основаніемъ служитъ *предѣлъ, къ которому стремится выраженіе* $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ *въ то время, какъ* α *стремится къ нулю.* Мы покажемъ сейчасъ, что предѣлъ этотъ существуетъ и не зависитъ отъ того закона, по которому α стремится къ нулю.

*** 592. Предѣлъ выраженія** $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Положимъ въ этомъ выраженіи $\alpha = \frac{1}{n}$. Выраженіе приметъ форму $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. При стремленіи α

къ нулю, число n будетъ неопредѣленно возрастать. Итакъ, докажемъ, что выраженіе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, при неопредѣленномъ возрастаніи n, по какому ни есть закону, стремится къ конечному и опредѣленному предѣлу.

Разсмотримъ отдѣльно нѣсколько случаевъ:

1°. *n возрастаетъ, принимая цѣлыя и положительныя значенія.*

Возьмемъ два неограниченныхъ ряда чиселъ:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \ldots [1],$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^3, \left(1+\frac{1}{3}\right)^4, \ldots, \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ldots [2].$$

Докажемъ, что рядъ [1] есть рядъ возрастающій и рядъ [2] есть рядъ убывающій. Разсмотримъ, для этой цѣли, тождество

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}.$$

Допустивъ, что $a>b$, получимъ, на основаніи этого тождества,

$$n\cdot a^{n-1}>\frac{a^n-b^n}{a-b}>n\cdot b^{n-1}. \qquad [\alpha]$$

Мы можемъ положить здѣсь, что $a=1+\frac{1}{n-1}$ и $b=1+\frac{1}{n}$, ибо тогда, дѣйствительно, $a>b$. Тождество [α] дастъ намъ:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}>\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right](n-1)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}. \ [\beta]$$

Разобьемъ неравенство [β] на два неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}>\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right](n-1), \qquad [\gamma]$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right](n-1)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}. \qquad [\delta]$$

Разсмотримъ сперва неравенство [γ]. Оно даетъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n-1)>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n(n-1)-\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Вынося, въ правой части этого неравенства, множителя

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

за скобки и сократив все неравенство на $(n-1)$, найдемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Неравенство это говоритъ намъ, что числа ряда [1] возрастаютъ. Обратимся теперь къ неравенству [6].

Раздѣливъ обѣ части его на $(n-1)$ и перенеся, затѣмъ, нѣкоторые члены изъ одной части неравенства въ другую, найдемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Вынося, въ правой части, множителя $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ за скобки, найдемъ:

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[1+\frac{n}{(n-1)(n+1)}\right].$$

Принявъ во вниманіе, что $\frac{n}{n^2-1} > \left(\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\right)$, мы можемъ, не нарушая неравенства, замѣнить $\frac{n}{n^2-1}$ меньшимъ числомъ $\frac{1}{n}$, и тогда

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), \text{ или } \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Неравенство это говоритъ намъ, что числа ряда [2] убываютъ. Принимая же во вниманіе, что первое изъ чиселъ этого ряда равно 4, заключаемъ, что каждое изъ чиселъ ряда [2] менѣе 4. Разсматривая теперь два соотвѣтствующихъ члена нашихъ рядовъ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

непосредственно видимъ, что первый членъ менѣе втораго, а слѣдовательно, и подавно, менѣе 4.

Итакъ, *числа ряда* [1], *возрастая, остаются менѣе* 4. *Отсюда заключаемъ, что числа этого ряда стремятся къ предѣлу* (**171**).

Докажемъ, что числа ряда [3] стремятся къ тому же предѣлу. Для этой цѣли достаточно будетъ показать, что разности между соотвѣтственными членами обоихъ рядовъ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми (**170**).

Разсмотримъ разность:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Она, вслѣдствіе того, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ менѣе четырехъ, причемъ дробь $\frac{1}{n}$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою, представляетъ безконечно малое число.

Итакъ, *числа рядовъ* [1] *и* [2] *стремятся къ одному общему предѣлу, меньшему четырехъ.*

Предѣлъ этотъ обозначается въ математикѣ буквою e и служитъ основаніемъ натуральныхъ логариѳмовъ.

2°. *n возрастаетъ, принимая какія ни есть положительныя значенія.* Всякое значеніе, принимаемое n, очевидно, заключено между двумя цѣлыми числами p и $p+1$, рядомъ стоящими, т.-е. $p<n<p+1$, причемъ p, съ возрастаніемъ n, возрастаетъ. Напишемъ неравенства:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p}.$$

Они могутъ написаться такимъ образомъ:

$$\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p}\cdot\left(1+\frac{1}{p}\right)>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}>\frac{\left(1+\frac{1}{p+1}\right)^{p+1}}{1+\frac{1}{p+1}}.$$

Крайнія выраженія, по доказанному сейчасъ, стремятся къ e, ибо числа $\left(1+\frac{1}{p}\right)$ и $\left(1+\frac{1}{p+1}\right)$ стремятся къ единицѣ. На основаніи этого заключаемъ, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится, съ возрастаніемъ n, къ числу e

3°. *n возрастаетъ, принимая какія ни есть отрицательныя значенія.* Обозначимъ $n=-\mu$, гдѣ μ возрастаетъ, принимая значенія положительныя.

Имѣемъ тождественно:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right).$$

Принимая во вниманіе, что, по доказанному, $\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}$ стремится къ e, причемъ $1+\frac{1}{\mu-1}$ стремится къ единицѣ, заключаемъ, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ e.

Итакъ, *выраженіе* $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, *при неопредѣленномъ возрастаніи* n, *стремится къ конечному и опредѣленному предѣлу* e.

*** 593. Отличіе одной системы логариѳмовъ отъ другой.** Мы видѣли (**591**), что, написавъ всѣ числа, большія единицы, какъ члены геометрической прогрессіи:

$$\div\!\div\ 1,\ (1+\alpha),\ (1+\alpha)^2,\ \ldots,\ (1+\alpha)^m,\ \ldots,$$

гдѣ α есть безконечно малое число, мы получимъ, для логариѳмовъ этихъ чиселъ, ариѳметическую прогрессію:

$$\div\ 0,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^m,\ \ldots,$$

гдѣ β будетъ также безконечно малымъ числомъ.

Ясно, что одна система логариѳмовъ будетъ отличаться отъ другой тѣмъ закономъ, по которому β стремится къ нулю въ то время, какъ α стремится къ нулю, или, другими словами, тѣмъ предѣломъ, къ которому стремится отношеніе $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Самая естественная система будетъ та, при которой предѣлъ этого отношенія равенъ единицѣ, и тогда основаніе системы есть предѣлъ выраженія $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, при стремленіи α къ нулю, равный числу e. Всѣ же остальныя основанія могутъ быть выражены формулою:

$$x = e^{lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{\alpha=0}}.$$

Возьмемъ какое-нибудь число A, и пусть

$$\log_x A = y,\quad \log_e A = z.$$

Имѣемъ: $x^y = A$, $e^z = A$; отсюда $x^y = e^z$. Замѣняя здѣсь x его значеніемъ, найдемъ:

$$e^{y\,\cdot\,lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = e^z,$$

откуда

$$y\,\cdot\,lim\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = z,$$

или же

$$y = z\,\cdot\,lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\,. = z\,\cdot\,\frac{1}{\log_e x}.$$

Мы видимъ, слѣдовательно, что $lim\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, характеризующій систему, есть тотъ множитель, на котораго нужно умножить натуральный логариѳмъ числа для того, чтобы получить логариѳмъ того же числа въ разсматриваемой системѣ.

Мы назвали этого множителя *модулемъ* (**590**) разсматриваемой системы. Можемъ сказать, что натуральная система логариѳмовъ есть такая система, модуль которой равенъ единицѣ.

*** 594. Логариѳмы Непера.** Изобрѣтатель логариѳмовъ Неперъ (1550—1617) разсматривалъ логариѳмы, какъ члены ариѳметической прогрессіи, но логариѳмы Непера не суть показатели степеней одного и того же основанія. Логариѳмы Непера связаны съ логариѳмами натуральными слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$\log_N u = 10^7 \,.\, \log_e \frac{10^7}{u}.$$

Соотношеніе это говоритъ намъ, что логариѳмы Непера убываютъ съ возрастаніемъ числа. Мы здѣсь не можемъ останавливаться на этомъ вопросѣ. Желающимъ ознакомиться съ нимъ рекомендуемъ сочиненіе:

Günther. Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1876.

595. Логариѳмы обыкновенные. Натуральные логариѳмы неудобны при численныхъ вычисленіяхъ. При этихъ вычисленіяхъ употребляются логариѳмы, основаніемъ которыхъ служитъ 10. Логариѳмы эти называются *обыкновенными.* Мы объяснимъ теперь употребленіе этихъ логариѳмовъ и ихъ приложенія.

§ VII. Обыкновенные логариѳмы.

596. Обыкновенные логариѳмы. Логариѳмы, основаніемъ которыхъ служитъ число 10, называются *обыкновенными* или *Бриговыми.*

Въ этой системѣ *логариѳмъ всякой степени десяти равенъ показателю степени, ибо*

$$\log 10^m = m \log 10 = m.$$

Логариѳмы всѣхъ чиселъ, не представляющихъ изъ себя степеней десяти съ раціональными показателями, суть числа ирраціональныя.

597. Характеристика и мантисса. Представимъ себѣ, что всѣ числа, логариѳмы которыхъ ищутся, и всѣ логариѳмы выражены десятичными дробями. Нѣкоторыя изъ тѣхъ и другихъ дробей будутъ конечными, нѣкоторыя—безконечными періодическими и, наконецъ, нѣкоторыя — безконечными непеpіодическими.

Разсмотримъ два случая.

1°. *Данное число A есть число, большее единицы.* Мы знаемъ, что подобное число имѣетъ положительный логариѳмъ (**580**). Положимъ, что число A таково, что

$$10^m \leqslant A < 10^{m+1},$$

т.-е. положимъ, что цѣлая часть числа A состоитъ изъ $(m+1)$ цифръ. Логариѳмъ этого числа назовемъ буквою y. Онъ удовлетворяетъ, слѣдовательно, такому условію:

$$m \leqslant y < (m+1).$$

Неравенства эти говорятъ намъ, что цѣлая часть логариѳма состоитъ изъ m цифръ. Цѣлая часть логариѳма называется его *характеристикою*; дробная же часть, представленная въ видѣ десятичной дроби, конечной или же безконечной, называется *мантиссою*.

Предъидущій результатъ показываетъ, что *характеристика логариѳма числа, большаго единицы, равна числу цифръ въ цѣлой части числа, уменьшенному единицею.*

Примѣры. $\log 1000 = 4{,}0000000.$

$$\log \sqrt{1000} = 1{,}50000000.$$
$$\log \sqrt[3]{100} = 0{,}66666666\ \ldots$$
$$\log 372{,}5 = 2,\ \ldots$$
$$\log \sqrt[3]{612} = 0,\ \ldots$$
$$\log \frac{159}{5} = \log 31{,}8 = 1,\ \ldots$$

Здѣсь точки, поставленныя послѣ запятой, замѣняютъ неизвѣстные десятичные знаки мантиссы.

2°. *Данное число A есть число, меньшее единицы.* Подобное число имѣетъ отрицательный логариѳмъ (**580**). Положимъ, что число A удовлетворяетъ условію:

$$10^{-(m+1)} \leqslant A < 10^{-m}.$$

(Напримѣръ, если $A = 0{,}01$, то оно удовлетворяетъ неравенству:

$10^{-2}=0{,}01<10^{-1}$; если $A=0{,}0376$, то оно удовлетворяетъ неравенству: $10^{-2}<0{,}0376<10^{-1}$).

Въ подобномъ числѣ A, изображенномъ въ видѣ десятичной дроби, число нулей, помѣщенныхъ передъ значущими цифрами, равно $(m+1)$.

Назовемъ логариѳмъ числа A буквою y. Онъ удовлетворяетъ слѣдующимъ неравенствамъ:

$$-(m+1)\leqslant y<-m,$$

т.-е. y равенъ отрицательному цѣлому числу $-(m+1)$, сложенному съ нѣкоторымъ положительнымъ числомъ, меньшимъ единицы.

Отрицательное цѣлое число называется *характеристикою* логариѳма; положительное же число, меньшее единицы, будучи представлено въ видѣ десятичной дроби, конечной или безконечной, называется *мантиссою.* Предъидущій результатъ говоритъ намъ, *что логариѳмы чиселъ, меньшихъ единицы и изображенныхъ въ видѣ десятичныхъ дробей, состоятъ изъ отрицательной характеристики и положительной мантиссы. Модуль* (**19**) *характеристики равенъ числу нулей, помѣщенныхъ передъ значущими цифрами разсматриваемаго числа.* Пишутъ обыкновенно такимъ образомъ:

$$\log A=-(m+1)+0,\ \ldots\ =\overline{(m+1)},\ \ldots$$

Примѣры. $\log 0{,}01=\overline{2}{,}00000000.$

$$\log\sqrt[2]{0{,}00001}=\overline{3}{,}50000000.$$

Въ этомъ примѣрѣ логариѳмъ равенъ $-\frac{5}{2}=-2{,}5=\overline{3}{,}5.$

$$\log\sqrt{0{,}236}=\log(0{,}4\ \ldots)=\overline{1},\ \ldots$$

598. Замѣчаніе. Изложенное выше показываетъ намъ, что обыкновенные логариѳмы чиселъ, изображенныхъ десятичными дробями, имѣютъ то преимущество передъ логариѳмами другой системы, что мы можемъ легко опредѣлить *логариѳмъ числа, съ точностью до единицы, съ избыткомъ и съ недостаткомъ.*

599. Свойство характеристики. Характеристика логариѳма обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ: *отъ умноженія числа на степень десяти, съ показателемъ цѣлымъ, положительнымъ или же отрицательнымъ, мантисса логариѳма не измѣняется, причемъ характеристика увеличивается или же уменьшается на модуль* (**19**) *показателя этой степени десяти.*

И въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$\log A = p, \ldots,$$

гдѣ p представляетъ характеристику логариѳма.

Получимъ (**583**):

$$\log(A \cdot 10^m) = \log A + m \log 10 = p, \ldots + m = (p+m), \ldots$$
$$\log(A \cdot 10^{-m}) = \log A - m \log 10 = p, \ldots - m = (p-m), \ldots$$

Доказанное свойство приводитъ нахожденіе логариѳма конечной десятичной дроби къ нахожденію логариѳма цѣлаго числа, полученнаго послѣ откидыванія запятой въ данной дроби. И въ самомъ дѣлѣ, это откидываніе запятой равносильно умноженію дроби на нѣкоторую степень десяти; мы же знаемъ, что, отъ подобнаго умноженія, мантисса не измѣняется; для насъ-же и важна мантисса, ибо характеристика узнается непосредственно.

600. Построеніе таблицъ. Въ таблицахъ помѣщаются только логариѳмы цѣлыхъ чиселъ. Такъ какъ, вообще, всѣ эти логариѳмы ирраціональны, то мантиссы ихъ вычисляются только съ извѣстнымъ приближеніемъ; ограничиваются вообще, при самыхъ тонкихъ вычисленіяхъ, семью или восемью первыми десятичными знаками. Опредѣленіе, данное нами въ (**588**), позволяетъ найти приближенное значеніе логариѳма числа. И въ самомъ дѣлѣ, вставивъ въ геометрическую прогрессію достаточное число среднихъ, мы опредѣлимъ два послѣдовательныхъ члена геометрической прогрессіи, заключающихъ данное число. Логариѳмы этихъ чиселъ представятъ приближенныя значенія логариѳма даннаго числа.

Мы могли бы также вычислить логариѳмъ числа съ желаемымъ приближеніемъ, разложивъ его въ непрерывную дробь.

Всѣ эти способы слишкомъ длинны и трудны. Впослѣдствіи мы дадимъ болѣе быстрыя методы для вычисленія логариѳмовъ.

Примѣръ. Опредѣлить логариѳмъ 1855. Такъ какъ число 1855 заключено между 1000 и 10000, то логариѳмъ его заключенъ между 3 и 4. Вставивъ одно среднее между 1000 и 10000 въ геометрическую прогрессію и одно среднее между 3 и 4 въ ариѳметическую прогрессію, найдемъ:

$$a = \sqrt{1000 \cdot 10000} = 3162{,}27766$$

для перваго средняго и 3,5 для втораго. Итакъ,

$$3{,}5 = \log a = \log 3162{,}27766.$$

Такъ какъ 1855 заключено между 1000 и a, то логариѳмъ его заключенъ между 3 и 3,5. Вставивъ среднее между 1000 и a въ прогрессію геометрическую и среднее между 3 и 3,5 въ прогрессію ариѳметическую, найдемъ: для перваго $b=\sqrt{1000a}=1778,2794$ и для втораго $\frac{3+3,5}{2}=3,25$. Итакъ,

$$3,25=\log b=\log 1778,2794.$$

Такъ какъ 1855 заключено между a и b, то логариѳмъ его заключенъ между 3,25 и 3,5.

Вставивъ два новыхъ среднихъ, найдемъ, обозначивъ первое буквою c,

$$3,375=\log\sqrt{ab}=\log 2371,3737=\log c.$$

Новое дѣйствіе даетъ:

$$3,3125=\log\sqrt{bc}=\log 2053,5250=\log d.$$

Продолжая вычисленія, образуемъ слѣдующую таблицу:

$$\begin{aligned}
3,5&=\log a &&=\log 3162,27756\\
3,25&=\log\sqrt{1000a}&&=\log b=\log 1778,2974,\\
3,375&=\log\sqrt{ab}&&=\log c=\log 2371,3737,\\
3,3125&=\log\sqrt{bc}&&=\log d=\log 2053,5250,\\
3,28125&=\log\sqrt{bd}&&=\log e=\log 1910,95294,\\
3,265625&=\log\sqrt{be}&&=\log f=\log 1843,42296,\\
3,2734375&=\log\sqrt{ef}&&=\log g=\log 1876,8843,\\
3,26953125&=\log\sqrt{fg}&&=\log h=\log 1860,0784,\\
3,26767811&=\log\sqrt{fh}&&=\log i=\log 1851,7321,\\
3,36855469&=\log\sqrt{hi}&&=\log k=\log 1855,9005,\\
3,26806641&=\log\sqrt{ik}&&=\log l=\log 1853,8151,\\
3,26831065&=\log\sqrt{kl}&&=\log m=\log 1854,8575,\\
3,26843262&=\log\sqrt{km}&&=\log n=\log 1855,3789.
\end{aligned}$$

Сравнивъ, съ одной стороны, n и m и, съ другой стороны, k и m, найдемъ:

$$\begin{array}{rlrl}
n= & 1855,3789 & k= & 1855,9005\\
m= & 1854,8575 & m= & 1854,8575\\
\hline
\text{откуда: } n-m= & 0,5214, & k-m= & 1,0430.
\end{array}$$

Мы видимъ, что $(n-m)$ равно почти что половинѣ $(k-m)$.

Сравнивъ, въ то же время, съ одной стороны, $\log n$ и $\log m$ и, съ другой, $\log k$ и $\log m$, получимъ:

$$\begin{array}{rlrl}
\log n= & 3,26843262, & \log k= & 3,26855469,\\
\log m= & 3,26831055, & \log m= & 3,26831055,\\
\hline
\text{откуда: } \log n-\log m= & 0,00012207, & \log k-\log m= & 0,00024414.
\end{array}$$

Мы видимъ, что $(\log n - \log m)$ равенъ половинѣ $(\log k - \log m)$.

Итакъ, разности между числами относятся между собою, какъ разности между ихъ логариѳмами.

Допустивъ эту пропорціональность, мы найдемъ непосредственно логариѳмъ 1855. Разсуждаемъ такимъ образомъ: если разности между числами n и m, равной 0,5214, отвѣчаетъ разность ихъ логариѳмовъ, равная 12207 единицамъ восьмаго порядка, то какова разность x между логариѳмами чиселъ 1855 и 1854,8575, имѣющихъ разностью 0,1425? Найдемъ:

$$x = \frac{12207 . 1425}{5214} = 3336 \text{ единицамъ 8-го порядка.}$$

Прибавивъ число это къ логариѳму m, получимъ

$$\log 1855 = 3{,}26834391.$$

601. Употребленіе логариѳмическихъ таблицъ. Доказанныя выше свойства логариѳмовъ показываютъ, что *умноженіе* нѣсколькихъ множителей можетъ быть замѣнено *сложеніемъ* ихъ логариѳмовъ; *дѣленіе—вычитаніемъ* двухъ логариѳмовъ; *образованіе степени—умноженіемъ* логариѳма числа на показателя; и, наконецъ, *извлеченіе корня—дѣленіемъ* логариѳма числа на показателя корня.

Для того, чтобы можно было пользоваться этими упрощеніями, необходимо имѣть таблицы логариѳмовъ и умѣть находить логариѳмъ даннаго числа и число, соотвѣтствующее данному логариѳму.

Для объясненія употребленія логариѳмическихъ таблицъ мы возьмемъ *Логариѳмическія и Тригонометрическія таблицы Веги, обработанныя Бремикеромъ.*

Въ таблицѣ 1-й находятся всѣ числа отъ 1 до 100000 съ ихъ логариѳмами, вычисленными *съ точностью до* $\frac{1}{10000000}$ *съ недостаткомъ или съ избыткомъ.* Для удобства помѣщены сперва трехзначныя числа съ ихъ логариѳмами. Впрочемъ, въ этомъ нѣтъ надобности, ибо тѣ же числа и логариѳмы встрѣчаются далѣе.

Задача I. *Найти логариѳмъ даннаго числа.*

Въ таблицахъ помѣщены только мантиссы, ибо характеристики опредѣляются непосредственно безъ помощи таблицъ. Могутъ встрѣтиться слѣдующіе случаи.

1°. *Въ данномъ числѣ не болѣе 3 цифръ.* Мантисса логариѳма этого числа помѣщена на одной изъ первыхъ 5 страницъ. Въ столбцѣ N находимъ число и рядомъ съ нимъ, въ горизонтальномъ направленіи, въ столбцѣ Log, мантиссу логариѳма этого числа.

Примѣры. $\log 72{,}3 = 1{,}8591383$; $\log 0{,}00392 = \overline{3}{,}5932861$.

При нахожденіи этихъ логариѳмовъ мы откидываемъ запятыя и ищемъ логариѳмы чиселъ 723 и 392, ибо, вслѣдствіе этого откидыванія, мантиссы не измѣняются; характеристики же опредѣляются непосредственно.

2°. *Данное число состоитъ изъ четырехъ цифръ.* Положимъ, что данное число равно 0,7998. Отбрасываемъ запятую и разсматриваемъ число 7998. На страницѣ 145 въ столбцѣ N мы находимъ это число. Идя по горизонтальному направленію отъ этого числа, мы, въ первомъ вертикальномъ столбцѣ, въ заголовкѣ котораго помѣщенъ 0, встрѣчаемъ число 9814; число это представляетъ четыре послѣднія цифры мантиссы; первыя же три мы находимъ въ этомъ же вертикальномъ столбцѣ, идя вверхъ до встрѣчи съ первымъ числомъ изъ семи знаковъ; первыя три цифры этого числа и суть первыя три цифры нашей мантиссы.

Примѣры. $\log 0{,}7998 = \overline{1},\ 9029814$; $\log 32{,}61 = 1,\ 5135508$.

3°. *Данное число состоитъ изъ пяти цифръ.* Положимъ, что дано число 32,695. Отбрасываемъ запятую и разсматриваемъ число 32695. Для нахожденія мантиссы логариѳма отбрасываемъ послѣднюю цифру 5 и ищемъ въ столбцѣ N число 3269. Оно помѣщено на 51 страницѣ. Идемъ теперь, по горизонтальному направленію, отъ этого числа до вертикальнаго столбца, въ заголовкѣ котораго помѣщена отброшенная нами цифра 5. Встрѣчаемъ число 4813, представляющее четыре послѣднія цифры мантиссы. Для нахожденія первыхъ трехъ цифръ возвращаемся назадъ до вертикальнаго столбца, въ заголовкѣ котораго 0, и идемъ по этому столбцу вверхъ до перваго числа, изображеннаго семью цифрами; первыя три цифры этого числа и суть первыя три цифры нашей мантиссы.

Итакъ, $\log 32{,}695 = 1{,}5144813$.

Возьмемъ еще примѣръ. Дано число 38999000. Отбрасываемъ нули и разсматриваемъ число 38999. Откидываемъ пятую цифру 9 и на страницѣ 63 въ столбцѣ N находимъ число 3899; идемъ, по горизонтальному направленію, до столбца, въ заголовкѣ котораго помѣщена откинутая нами цифра 9, и встрѣчаемъ число 0535, представляющее четыре послѣднія цифры мантиссы; мы замѣчаемъ, что надъ цифрою 0 помѣщена черточка; это показываетъ, что для нахожденія первыхъ трехъ цифръ мантиссы мы должны возвратиться назадъ къ столбцу 0 и идти по этому столбцу не вверхъ, а внизъ до числа, изображеннаго семью знаками. Первые три знака и будутъ первыя три цифры мантиссы.

Итакъ, $\log 38999000 = 7{,}5910535$.

4°. *Число состоитъ болѣе чѣмъ изъ пяти цифръ.* Нахожденіе мантиссы логариѳма этого числа основано на слѣдующемъ свойствѣ, которое мы здѣсь принимаемъ безъ доказательства: *если данныя числа болѣе* 10000, *причемъ разности между ними не превышаютъ единицы, то, безъ чувствительной ошибки, мы можемъ принять, что разности между числами относятся между собою, какъ разности между ихъ логариѳмами.* Обозначивъ буквами a, b, c три числа, удовлетворяющія этимъ условіямъ, получимъ пропорцію:

$$\frac{\log c - \log a}{\log b - \log a} = \frac{c-a}{b-a}, \text{ или же } \frac{\text{ман.} \log c - \text{ман.} \log a}{\text{ман.} \log b - \text{ман.} \log a} = \frac{c-a}{b-a}.$$

Возьмемъ число 672,398999. Для нахожденія мантиссы переносимъ запятую на столько знаковъ, чтобы въ цѣлой части образовалось пятизначное число, въ данномъ случаѣ 67239,8999. Назовемъ:

$$\log 67239{,}8999 = x.$$

Находимъ въ таблицахъ логариѳмы чиселъ: 67239 и слѣдующаго 67240; получимъ:

$$\log 67239 = 4{,}8276212,$$
$$\log 67240 = 4{,}8276277.$$

Найдемъ разность между искомымъ логариѳмомъ x и ближайшимъ меньшимъ, помѣщеннымъ въ таблицахъ, т.-е. между 4,8276212. Обозначимъ разность эту буквою Δ.

Числа: (67239,8999), 67239 и 67240 болѣе 10000, причемъ разности между ними не превышаютъ единицы; слѣдовательно, мы можемъ писать пропорцію:

$$\frac{\Delta}{65^{\text{д.м}}} = \frac{0{,}8999}{1}, \text{ откуда } \Delta = 65^{\text{д.м}} \cdot 0{,}8999 = 58^{\text{д.м}},6045.$$

Такъ какъ мы ограничиваемся только семью десятичными знаками, то въ полученномъ значеніи для Δ откидываемъ число послѣ запятой, представляющее совокупность стамиліонныхъ и болѣе мелкихъ долей, соблюдая всегда такое правило: если откидываемая часть менѣе 5 стамилліонныхъ, то мы просто откидываемъ ее; если же она болѣе или равна 5 стамилліоннымъ, то, откидывая ее, прибавляемъ къ къ цифрѣ остающихся десяти милліонныхъ единицу.

Въ нашемъ случаѣ беремъ $\Delta = 59^{\text{д.м}}$. Для нахожденія искомой мантиссы прибавляемъ къ мантиссѣ ближайшаго меньшаго логариѳма, т.-е. къ 8276212, найденное Δ.

Итакъ, $\log 672{,}398999 = 2{,}8276212 + 59^{\text{д.м}} = 2{,}8276271$.

Получаемъ такое правило: *для подъисканія логариѳма числа, состоящаго болѣе чѣмъ изъ пяти цифръ, беремъ число, образованное первыми пятью цифрами, находимъ въ таблицахъ мантиссу его логариѳма и выписываемъ ее: Умножаемъ разность между мантиссою, помѣщенною рядомъ съ выписанною мантиссою въ слѣдующемъ вертикальномъ столбцѣ, и выписанною мантиссою на число, образованное цифрами, слѣдующими за пятою цифрою даннаго числа; въ полученномъ произведеніи отдѣляемъ отъ правой руки къ лѣвой запятою столько десятичныхъ знаковъ, сколько цифръ числа слѣдуютъ за пятою цифрою; откидываемъ всѣ цифры, стоящія направо отъ запятой, прибавляя къ послѣдней цифрѣ остающагося числа единицу, если первая откидываемая цифра не менѣе 5 и не прибавляя ничего, если эта цифра менѣе 5. Полученное число подписываемъ подъ выписанною мантиссою отъ правой руки къ лѣвой и складываемъ. Сумма представитъ мантиссу искомаго логариѳма. Характеристика опредѣляется непосредственно.*

Умноженіе $65^{\text{д.м.}}$ на 0,8999 мы можемъ произвести послѣдовательно, умножая $65^{\text{д.м.}}$ на цифры 8, 9, 9 и 9. Произведенія эти уже вычислены въ табличкѣ, помѣщенной подъ 65 въ послѣднемъ вертикальномъ столбцѣ, въ заголовкѣ котораго стоятъ буквы P. P. (partes proportionales). Множители 8, 9, 9, 9 находятся въ лѣвомъ столбцѣ таблички, произведенія — въ правомъ. Противъ 8 помѣщено произведеніе 65 на 8, приведенное къ десятымъ долямъ, т.-е. 52,0; противъ 9 находится произведеніе 65 на 9, приведенное къ десятымъ долямъ, т.-е. 58,5; мы должны привести произведеніе это къ сотымъ долямъ, т.-е. взять 5,85, ибо множитель 9 выражаетъ въ нашемъ случаѣ сотыя доли, и т. д.

Вычисленія располагаются слѣдующимъ образомъ:

Число.		Мантисса логариѳма.
67239	. . . .	8276212
8	. . . .	520
9	. . . .	585
9	. . . .	585
9	. . . . . .	585
Log 672,39899		= 2,8276269

Мы видимъ здѣсь, что 8-я цифра даннаго числа, т.-е. 9, увеличиваетъ мантиссу только на 0,0000000585, а потому имѣетъ весьма малое на нее вліяніе. Если же въ данномъ числѣ болѣе 8 значущихъ цифръ, то 9-я и слѣдующія за ней цифры совсѣмъ не имѣютъ вліянія на мантиссу, и потому на нихъ мы можемъ не обращать вниманія при нахожденіи мантиссы.

Задача II. *По данному логариѳму найти соотвѣтствующее число.* Различимъ два случая.

1°. *Мантисса даннаго логариѳма помѣщена въ таблицахъ.* Въ этомъ случаѣ, въ столбцѣ N мы находимъ соотвѣтствующее этой мантиссѣ число. Принявъ затѣмъ во вниманіе данную характеристику, мы находимъ искомое число (**597**).

Примѣры. 1°. Найти число, соотвѣтствующее логариѳму 7,8913256. Обращаемъ сперва вниманіе на первыя три цифры мантиссы 891; онѣ всегда помѣщены въ вертикальномъ столбцѣ, въ заголовкѣ котораго стоитъ 0. Находимъ ихъ на стр. 141. Ищемъ теперь четыре послѣднія цифры 3256; находимъ ихъ въ столбцѣ 2; соотвѣтствующее число равно 77862. Характеристика даннаго логариѳма равна 7, а потому искомое число равно 77862000.

2°. Найти число, соотвѣтствующее логариѳму $\overline{3},9030194$. Первыя три цифры мантиссы помѣщены на стр. 145. Послѣднія четыре находятся въ столбцѣ 7. Число, отвѣчающее данной мантиссѣ, есть 79987. Искомое число равно 0,0079987.

2°. *Мантисса даннаго логариѳма не помѣщена въ таблицахъ.* Если данная мантисса не помѣщена въ таблицахъ, то, для полученія числа, соотвѣтствующаго этой мантиссѣ, находимъ мантиссы, ближайшую меньшую и ближайшую большую къ данной, помѣщенныя въ таблицахъ. Числа, соотвѣтствующія этимъ мантиссамъ, заключаютъ данное число, которое находится затѣмъ при помощи допущенной пропорціи.

Примѣръ. Найти число x, логариѳмъ котораго равенъ $\overline{2},8870282$. Ищемъ число y, логариѳмъ котораго равенъ 4,8870282. Итакъ,

$$\log y = 4{,}8870282.$$

Находимъ въ таблицахъ ближайшую меньшую и ближайшую большую мантиссы, что даетъ:

$$\log 77095 = 4{,}8870262,$$
$$\log 77096 = 4{,}8870318.$$

Найдемъ разность Δ между числомъ y и числомъ 77095, при помощи пропорціи:

$$\frac{\Delta}{1} = \frac{20^{\text{л.м.}}}{56^{\text{л.м.}}}, \text{ или } \Delta = \frac{20}{56} = 0{,}35.$$

Мы не вычисляемъ тысячныхъ и т. д. долей, ибо онѣ будутъ невѣрны.

Число $y = 77095 + 0{,}35 = 77095{,}35$. Искомое число x будетъ равно 0,07709535.

Итакъ, поступаемъ по слѣдующему правилу: *находимъ мантиссу, ближайшую меньшую къ данной, и соотвѣтствующее ей число, которое и выписываемъ. Дѣлимъ разность между данною мантиссою и ближайшею меньшею къ данной на разность между мантиссами, ближайшими большею и меньшею къ данной, ограничиваясь двумя десятичными знаками частнаго; эти два знака приписываемъ справа къ выписанному числу и потомъ уже, сообразуясь съ характеристикою, ставимъ запятую.* Превращеніе Δ въ десятичную дробь можетъ быть совершено при помощи таблички $P.\ P.$

Въ правомъ столбцѣ ищемъ число, ближайшее меньшее къ 20; оно равно 16,8; цифра 3, помѣщенная противъ, представляетъ цифру десятыхъ Δ; вычитаемъ изъ 20 число 16,8; разность равна 3,2. Ближайшее меньшее число, соотвѣтствующее этой разности, равно числу 2,85; цифра 5, помѣщенная противъ, представляетъ цифру сотыхъ разности Δ.

Вычисленіе располагается такимъ образомъ:

Мантисса логариѳма.		Число.
8870282		
8870262	. . . .	77095
20	. . . .	35.

$$\overline{2},8870282 = \log 0{,}07709535.$$

602. Правила вычисленій при дѣйствіяхъ, совершаемыхъ надъ логариѳмами. Дополненія. Логариѳмъ долженъ быть разсматриваемъ, какъ двучленъ формы $(a + b)$, въ которомъ a представляетъ характеристику, положительную или отрицательную, и b мантиссу, выраженную десятичными знаками.

При **сложеніи** логариѳмовъ мы складываемъ мантиссу и характеристики.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r} 2,\ 7396452 \\ \overline{3},\ 6854386 \\ \overline{2},\ 6734895 \\ \hline \overline{1},\ 0985733 \end{array}$$

При **вычитаніи** различаемъ два случая:

1°. *Вычитаемый логариѳмъ имѣетъ положительную характеристику*. Поступаемъ такимъ образомъ: вмѣсто того, чтобы вычитать его непосредственно изъ уменьшаемаго, мы вычитаемъ его въ умѣ изъ такой степени десяти, чтобы разность была положительною. Разность эта называется *дополненіемъ* логариѳма до десяти, ста и т. д. Полученную разность прикладываемъ къ уменьшаемому. Сумма эта будетъ болѣе искомой разности на ту степень десяти, изъ которой вычитали вычитаемое. Для полученія истинной разности должны вычесть изъ характеристики полученной суммы эту степень десяти.

Примѣръ. Нужно вычесть 2,7854831 изъ $\overline{3},5236729$.

Поступаемъ такимъ образомъ:

$$\overline{3},5236729 - 2,7854831 = \overline{3},52356729 + (10 - 2,7854831) - 10 =$$
$$= \overline{3},5236729 + 7,2145169 - 10 = \overline{6},7381898.$$

2°. *Вычитаемый логариѳмъ имѣетъ отрицательную характеристику*. Разсматривая логариѳмъ этотъ, какъ двучленъ, мы при вычитаніи мѣняемъ знаки у характеристики и мантиссы; отсюда слѣдуетъ, что вычитаніе подобнаго логариѳма приводится къ прибавленію разности между его характеристикою и мантиссою.

Примѣръ. Нужно вычесть $\overline{2},7854831$ изъ $\overline{2},7865382$.

Поступаемъ такимъ образомъ:

$$2,7865382 - (\overline{2},7854831) = 2,7865382 - (0,7854831 - 2) = 2.7865382 +$$
$$+ (2 - 0,7854831) = 2,7865382 + 1,2145169 = 4,0010551.$$

Всѣ эти преобразованія удобны потому, что, при нихъ, всѣ вычитанія совершаются въ умѣ.

При **умноженіи** логариѳма съ отрицательною характеристикою на цѣлое число мы умножаемъ отдѣльно характеристику и мантиссу на множителя и потомъ уже дѣлаемъ приведеніе.

Примѣръ.

$$\begin{array}{r} \overline{3},89367386 \\ 24. \\ \hline 357469544 \\ 178734772 \\ \hline 21,44817264 \\ -72 \\ \hline \end{array}$$

Произведеніе равно $\overline{51},44817264.$

При **дѣленіи** логариѳма съ отрицательною характеристикою на цѣлое число различаемъ два случая:

1°. *Характеристика дѣлится на это число.* Разсматривая логариѳмъ, какъ биномъ, мы дѣлимъ характеристику и мантиссу отдѣльно на дѣлителя. Характеристика частнаго будетъ равна характеристикѣ дѣлимаго, раздѣленной на дѣлителя; мантисса частнаго будетъ равна мантиссѣ дѣлимаго, раздѣленной на дѣлителя.

Примѣръ.

$$\begin{array}{l|l} \overline{12},7328642 & 6 \\ \cline{2-2} & \overline{2},1221430. \end{array}$$

2°. *Характеристика не дѣлится на это число.* Для того, чтобы частное имѣло цѣлую форму, прибавляемъ къ характеристикѣ и мантиссѣ такое цѣлое число, чтобы измѣненная характеристика дѣлилась на дѣлителя.

Примѣръ. Требуется раздѣлить $\overline{13},2672958$ на 5. Поступаемъ такимъ образомъ:

$$\overline{13},2672958:5=(0,2672958-13):5=(2,2672958-15):5=0,4534591-3=$$
$$=\overline{3},4534591.$$

Всѣ эти преобразованія должны совершаться въ умѣ, причемъ дѣйствіе располагается такимъ образомъ:

$$\begin{array}{l|l} \overline{13},2672958 & 5 \\ \cline{2-2} & \overline{3},4534591. \end{array}$$

§ VIII. Примѣры логариѳмическихъ вычисленій.

603. Средство производить умноженіе, дѣленіе и т. д. Если искомое число представляетъ результатъ умноженій, дѣленій, возвышеній въ степени и извлеченій корней, которые должны быть выполнены надъ данными числами, то, для опредѣленія его значенія, мы находимъ значеніе его логариѳма, получаемое при помощи болѣе простыхъ дѣйствій. Найдя логариѳмъ, опредѣляемъ соотвѣтствующее число.

Примѣры. 1°. Вычислить выраженіе:

$$x=\left[\frac{(369,785)^3\sqrt[5]{\dfrac{3,2}{0,17}}}{\sqrt{\left(\dfrac{62,37958}{0,37}\right)^3\cdot\left(\dfrac{0,12}{\sqrt[3]{62,7}}\right)^5}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Найдемъ логариѳмъ этого выраженія, пользуясь извѣстными свойствами логариѳмовъ. При логариѳмированіи намъ придется вычитать три логариѳма: $\frac{1}{5}\log 0{,}17$, $\frac{3}{2}\log 62{,}37958$ и $5\log 0{,}12$. Замѣтимъ, что первый и третій логариѳмы имѣютъ отрицательныя характеристики; мы знаемъ уже (**602**), что вычитаніе ихъ приводится къ прибавленію разностей между ихъ характеристиками и мантиссами. Второй логариѳмъ есть логариѳмъ съ положительною характеристикою, а потому мы беремъ его дополненіе, которое и прибавляемъ.

Логариѳмируемъ x и находимъ:

$$\log x = \frac{1}{3}\Big[3\log 369{,}785 + \frac{1}{5}\log 3{,}2 - \frac{1}{5}\log 0{,}17 + \text{доп. } \frac{3}{2}\log 62{,}37958 + \\ + \frac{3}{2}\log 0{,}37 - 5\log 0{,}12 + \frac{5}{3}\log 62{,}7\Big].$$

Отдѣльно подъискиваемъ слѣдующія значенія:

$$\begin{aligned}
3\log 369{,}785 &= 7{,}7038479\\
\frac{1}{5}\log 3{,}2 &= 0{,}1010300\\
-\frac{1}{5}\log 0{,}17 &= 0{,}1539102\\
\text{доп. } \frac{3}{2}\log 62{,}37958 &= 7{,}3074513-10\\
\frac{3}{2}\log 0{,}37 &= \bar{1}{,}3523025\\
-5\log 0{,}12 &= 4{,}6040940\\
\frac{5}{3}\log 62{,}7 &= 2{,}9954458\\
\hline
&\ 12{,}2180817\\
\log x &= 4{,}0726939.
\end{aligned}$$

Найдя $\log x$, подъискиваемъ соотвѣтствующее число и получаемъ: $x = 11822{,}07$.

2°. Вычислить выраженіе $x = \sqrt[3]{-\frac{2}{37}}$. Искомое число x есть число отрицательное, не имѣющее логариѳма. Мы вычисляемъ сперва

$$-x = \sqrt[3]{\frac{2}{37}},$$

и потомъ уже, найдя $(-x)$, опредѣляемъ x.

3°. Вычислить выраженіе $x = \sqrt{\frac{\sqrt{3}-\sqrt[3]{7}}{6}}$. Для вычисленія этого выраженія мы должны опредѣлить сперва $\sqrt{3}$, потомъ $\sqrt[3]{7}$, составить затѣмъ разность $\sqrt{3}-\sqrt[3]{7}$, и поступать далѣе такимъ же образомъ, какимъ поступали въ примѣрѣ 1°.

604. Замѣчаніе. Семизначные логариѳмы, помѣщенные въ таблицахъ, суть логариѳмы приблизительные, отличающіеся отъ истинныхъ менѣе, чѣмъ на 0,00000005. Отъ сложенія большаго числа логариѳмовъ или ихъ дополненій, или отъ умноженія логариѳмовъ на большія числа, погрѣшности могутъ увеличиться до того, что послѣднія цифры семизначной мантиссы, найденной для логариѳма искомаго числа, могутъ быть невѣрны. Положимъ, что нужно найти $x=(1{,}0001)^{10000}$. Имѣемъ: $\log x = 0{,}4340000$. Въ мантиссѣ этой только три цифры вѣрны; остальныя же 0000 невѣрны, ибо ошибка въ табличномъ логариѳмѣ, $\log(1{,}0001)$, умножилась на 10000. Заключаемъ отсюда, что для x мы имѣемъ право взять только три цифры, а именно: $x=2{,}72$, и то послѣдняя цифра сомнительна.

605. Вычисленіе логариѳма числа въ какой ни есть системѣ. Таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ, вычисленныя для основанія 10, позволяютъ вычислить логариѳмъ числа въ какой ни есть системѣ. Положимъ, что нужно вычислить логариѳмъ числа 7698 въ системѣ, основаніе которой равно 12. Находимъ обыкновенные логариѳмы:

$$\log 7698 = 3{,}8863779,\ \log 12 = 1{,}07918125,$$

и, при помощи этихъ логариѳмовъ, получаемъ (**590**):

$$x = 3{,}8863779 \cdot \frac{1}{1{,}07918125} = 3{,}60122815.$$

§ IX. Рѣшеніе показательныхъ уравненій.

606. Опредѣленіе. *Показательнымъ уравненіемъ* называется уравненіе формы:

$$a^x = b,$$

въ которомъ a и b суть данныя положительныя числа. Рѣшить это уравненіе, значитъ найти значеніе буквы x, ему удовлетворяющее.

607. Рѣшеніе уравненія $a^x = b$. Для нахожденія значенія буквы x достаточно взять логариѳмы обѣихъ частей уравненія. Получимъ:

$$x \log a = \log b, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

Основаніе системы, въ которой вычислены логариѳмы, произвольно. Обстоятельство это не имѣетъ, однако, вліянія на результатъ, ибо мы видѣли (**590**), что, при переходѣ отъ одной системы къ другой, всѣ логариѳмы умножаются на одно и то же число, вслѣдствіе чего отношеніе $\frac{\log b}{\log a}$ не измѣняется.

608. Рѣшеніе уравненія $a^{b^x}=c$. Уравненіе это, въ которомъ a, b, c суть данныя положительныя числа, рѣшается предъидущею методою. И въ самомъ дѣлѣ, взявъ логариѳмы обѣихъ частей, получимъ:

$$b^x=\frac{\log c}{\log a}.$$

Для того, чтобы рѣшеніе существовало, необходимо, чтобы знаки $\log c$ и $\log a$ были одинаковы; предположивъ, что количества эти положительныя (въ противномъ случаѣ мѣняемъ знаки у числителя и знаменателя), и взявъ, второй разъ, логариѳмы обѣихъ частей предъидущаго равенства, найдемъ:

$$x=\frac{\log\log c-\log\log a}{\log b}.$$

Упражненія.

1. Опредѣлить $\log 144$ при основаніи, равномъ $2\sqrt{3}$. **Отв.** 4.

2. Опредѣлить характеристики логариѳмовъ чиселъ: 7, 5, $\frac{1}{3}$, 3125, 1230 и 0,0123, взятыхъ въ системахъ, основанія которыхъ соотвѣтственно суть: 2, 3, 5, 5, 10 и 10.

Отв. 2. 1, —1, 5, 3, —2.

3. Зная $\log 2=0{,}3010300$ и $\log 3=0{,}4771213$, найти логариѳмы чиселъ: 0,05; 5,4; 0,006; 36, 27 и 16.

Отв. $\overline{2},698970$; 0,732393; $\overline{3},778151$; и т. д.

4. Зная $\log 648=2{,}8115701$ и $\log 864=2{,}93651374$, найти $\log 3$ и $\log 5$.

5. Зная $\log 2$, найти $\log\sqrt{1{,}25}$, $\log 0{,}0025$, $\log\sqrt[3]{0{,}0125}$.

Отв. $\frac{1}{2}(\log 10-3\log 2)$, и т. д.

6. Зная $\log 2$ и $\log 3$, найти $\log 1080$ и $\log(0{,}0025)^{\frac{1}{9}}$.

7. Зная $\log 2=0{,}3010300$ и $\log 7=0{,}845098$ при основаніи 10, опредѣлить $\log 98$ при основаніи 10 и $\log\left(\frac{4}{343}\right)^{\frac{1}{2}}$ при основаніи 1000.

8. Если $y=e^{\frac{1}{1-\log x}}$ и $z=e^{\frac{1}{1-\log y}}$, то $x=e^{\frac{1}{1-\log z}}$.

9. Опредѣлить знаменателя q геометрической прогрессіи, состоящей изъ 11 членовъ, первый и послѣдній члены которой равны 10 и 100. Опредѣлить сумму S членовъ этой прогрессіи.

Отв. $q=1{,}258925$; $S=447{,}5910$.

10. Опредѣлить основаніе x системы логариѳмовъ, въ которой 6 представляетъ логариѳмъ 729. Отв. $x=3$.

11. Каковы раціональныя основанія, въ которыхъ логариѳмъ 20 раціоналенъ?

Отв. 20^p, гдѣ p цѣлое число.

12. Опредѣлить основаніе x, при которомъ данное цѣлое число a равно своему логариѳму.

Отв. $x=\sqrt[a]{a}$.

13. Вычислить выраженія: $x=\frac{(\sqrt[5]{3226727})^6}{(\sqrt[7]{10732872})^4}$ и $y=\frac{(\sqrt[12]{0{,}0000782567})^{25}}{(\sqrt[16]{0{,}000389672})^{30}}$.

Отв. $x=6208{,}157$; $y=0{,}006875045$.

14. Вычислить выраженіе: $x=\frac{\sqrt[4]{(b^2-a^2)^6 . c^2}}{\sqrt[3]{a+d\sqrt{e}}}$, въ которомъ $a=4{,}528627$;

$b=21{,}72857$; $c=\frac{30}{59}$; $d=0{,}00875$; $e=4839$.

Отв. $x=3966{,}30$.

15. Вычислить выраженіе: $x=\frac{\sqrt[3]{a^2+b\sqrt{c}}}{10\sqrt[4]{d-ae^2}}$, въ которомъ $a=27{,}35825$;

$b=3{,}2782$; $c=\frac{52}{79}$; $d=38{,}54$; $e=0{,}003528$.

Отв. $x=0{,}3648341$.

16. Рѣшить систему уравненій: $x^2+y^2=a^2$, $\log x+\log y=\frac{m}{n}$.

17. Рѣшить систему уравненій: $x^4+y^4=a^4$, $\log x+\log y=\frac{p}{q}$.

18. Рѣшить систему: $x^y=y^x$, $x^p=y^q$.

Отв. $x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}}$, $y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}$.

19. Рѣшить систему: $x^y=y^x$, $p^x=q^y$.

Отв. $x=\left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log q}{\log p-\log q}}$, $y=\left(\frac{\log p}{\log q}\right)^{\frac{\log p}{\log p-\log q}}$.

20. Рѣшить уравненіе: $(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=\frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$.

Отв. $x=\frac{\log(a-b)}{\log(a+b)}$, если $a>b$, и $x=\frac{\log(b-a)}{\log(b+a)}$, если $a<b$.

21. Рѣшить уравненіе: $5^{x+1}+5^{x-2}-5^{x-3}+5^{x-4}=4739$.

Отв. $x=4+\dfrac{\log\ 4739-\log 3146}{\log\ 5}$.

22. Рѣшить уравненіе: $3^{x^2-4x+5}=1200$.

Отв. $x=2\pm\sqrt{\dfrac{\log\ 400}{\log\ 3}}$.

23. Рѣшить уравненіе: $7^{2x}-6.7^x+5=0$.

Отв. $7^x=1,\ 7^x=5$.

24. Рѣшить уравненіе: $a^1a^3a^5\ \ldots\ a^{2x-1}=n$.

Отв. $x=\sqrt{\dfrac{\log\ n}{\log\ a}}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Сложные проценты и срочныя уплаты.

I. Сложные проценты.

609. Опредѣленіе. Капиталъ, помѣщенный въ банкъ, приноситъ, въ продолженіи нѣкотораго времени, прибыль, называемую *процентами.* Условною платою называется прибыль, приносимая 100 фр. въ продолженіи одного года. Обыкновенно проценты берутся въ концѣ каждаго года. Можно было бы, вмѣсто того, чтобы брать проценты въ тотъ моментъ, когда наступитъ срокъ, присоединять ихъ къ капиталу; капиталъ будетъ, вслѣдствіе этого, возрастать, и проценты будутъ становиться все болѣе и болѣе. Говорятъ тогда, что капиталъ помѣщенъ по *сложнымъ процентамъ.*

Обозначимъ: помѣщенный капиталъ буквою C; капиталъ, увеличенный сложными процентами, буквою A; время обращенія капитала (выраженное въ годахъ) буквою n; прибыль, приносимую 1 франкомъ въ продолженіи одного года, буквою r. Буква r представляетъ сотую часть условной платы.

610. Общая формула сложныхъ процентовъ. Такъ какъ 1 фр. къ концу перваго года обращается въ $(1+r)$, то капиталъ C, къ концу этого времени, обратится въ $C(1+r)$.

Этотъ капиталъ, положенный въ началѣ втораго года на одинъ годъ, обратится къ концу этого года въ $C(1+r)(1+r)$, т.-е. въ $C(1+r)^2$.

Эта новая сумма, будучи помѣщена въ началѣ третьяго года на одинъ годъ, обратится къ концу этого года въ $C(1+r)^3$. И вообще, помѣщенная сумма, умножаясь каждый годъ на $(1+r)$, обратится послѣ n лѣтъ въ

$$A = C(1+r)^n. \qquad [1]$$

Формула эта представляетъ формулу сложныхъ процентовъ.

611. Случай, когда время обращенія капитала заключаетъ дробь года. Если время обращенія состоитъ изъ n лѣтъ и k дней, то мы вычисляемъ сперва, во что обратится капиталъ C, по прошествіи n лѣтъ, по формулѣ [1]. Замѣчая потомъ, что 1 фр. приноситъ $\frac{kr}{t}$ въ k дней, по простымъ процентамъ (t означаетъ число дней въ году), заключаемъ, что 1 фр. обратится, послѣ этого времени, въ $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, и, слѣдовательно, A обратится въ $A\left(1+\frac{kr}{t}\right)$. Обозначивъ буквою A' искомый капиталъ и замѣнивъ A его значеніемъ [1], получимъ:

$$A' = C\left(1+r\right)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right). \qquad [2]$$

612. Обобщеніе формулы [1]. Соглашенія, сдѣланныя нами относительно показателей отрицательныхъ и дробныхъ, позволяютъ обобщить формулу [1].

1°. Пусть n есть дробь, равная $\frac{p}{q}$. *Положимъ, что принципъ сложныхъ процентовъ распространенъ на дроби года.* Назовемъ буквою x прибыль, приносимую 1 фр. въ продолженіи $\frac{1}{q}$ года.

1 фр. обратится по прошествіи $\frac{1}{q}$ года въ $(1+x)$; какая ни есть сумма, помѣщенная на это время, умножится на $(1+x)$. Если, слѣдовательно, мы помѣстимъ 1 фр. на $\frac{q}{q}$ года, т.-е. на цѣлый годъ, то онъ умножится q разъ на $(1+x)$, т.-е. умножится на $(1+x)^q$. Принимая же во вниманіе, что 1 фр. къ концу года обращается въ $(1+r)$, найдемъ:

$$(1+x)^q = 1+r, \text{ откуда } (1+x) = (1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Очевидно, что 1 франкъ, помѣщенный на $\frac{p}{q}$ года, умножится на $(1+x)^p$, т.-е. на $(1+r)^{\frac{p}{q}}$, и, слѣдовательно, какая ни есть сумма C обратится въ $C(1+r)^{\frac{p}{q}}$, что и представляетъ обобщенную формулу [1].

2°. Пусть n представляетъ отрицательное число.

Поставимъ вопросъ такимъ образомъ:

Въ данный моментъ сумма равна C; она была помѣщена на неопредѣленное время; чему равнялась она n лѣтъ тому назадъ? Обозначивъ буквою A неизвѣстное значеніе, получимъ, на основаніи предъидущаго,

$$C = A(1+r)^n, \text{ откуда } A = C(1+r)^{-n}.$$

Формула эта представляетъ обобщенную формулу [1].

613. Задачи. Формулы [1] и [2] служатъ для рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ, требующихъ употребленія логариѳмовъ.

1°. *Во что обратится данная сумма C, помѣщенная, по данной условной платѣ, на данное время?* Беремъ формулу [1], или же формулу [2], смотря по тому, состоитъ ли время изъ цѣлаго числа лѣтъ, или же заключаетъ въ себѣ еще k дней.

Примѣръ. Еслибы одинъ сантимъ былъ помѣщенъ въ началѣ христіанской *эры по пяти процентовъ со ста, то во что обратился бы онъ къ началу 1863 года.*

Здѣсь $C=0{,}01$, $r=0{,}05$, $n=1862$. Формула [1] даетъ:

$$\log A = 37{,}3234475;$$

откуда

$$A = 21059472\,.\,10^{30} \text{ (приблизительно).}$$

Число состоитъ изъ 38 цифръ.

2°. *Какая сумма должна быть помѣщена, по даннымъ процентамъ, для того, чтобы она, въ продолженіи даннаго времени, обратилась въ опредѣленную сумму A?* Беремъ, смотря по обстоятельствамъ, одну изъ формулъ:

$$[3] \qquad C=\frac{A}{(1+r)^n}, \quad C=\frac{A}{\left(1+r\right)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right)}. \qquad [4]$$

Примѣръ. Какая сумма, будучи отдана въ ростъ по 5 процентовъ на 33 года, обратится въ 7220

Здѣсь $A=7220$, $r=0{,}05$, $n=33$. Формула [3] даетъ: $\log C = 3{,}15929033$, откуда $C=1443{,}08$.

3°. *Данный капиталъ C, будучи отданъ въ ростъ на опредѣленное время, обращается къ концу этого времени въ A. Опредѣлить условную плату.*

Если время представляетъ цѣлое число лѣтъ, то формула [1] даетъ:

$$(1+r)=\sqrt[n]{\frac{A}{C}}. \qquad [5]$$

Если же время состоитъ изъ n лѣтъ и k дней, то вопросъ рѣшается при помощи уравненія [2], которое, будучи уравненіемъ $(n+1)$-й степени относительно r, принадлежитъ Высшей Алгебрѣ.

Можно, однако, вычислить приблизительное значеніе условной платы. И въ самомъ дѣлѣ, формула [2] показываетъ, что капиталъ A увеличивается вмѣстѣ съ условною платою и вмѣстѣ съ нею уменьшается. Давъ буквѣ r произвольное значеніе r_1 и вычисливъ, при помощи логариѳмовъ, значеніе второй части, мы найдемъ значеніе A_1, большее A, если r_1 слишкомъ велико, и меньшее A_1, если r_1 слишкомъ мало. Сравнивъ найденное значеніе A_1 съ даннымъ A, мы узнаемъ, больше или меньше искомой условной платы найденное значеніе r_1. Выбравъ теперь другое значеніе для r, большее r_1, если r_1 меньше условной платы, и меньшее r_1, если r_1 больше условной платы, произведемъ новое исчисленіе и новое сравненіе. Нѣсколько опытовъ опредѣлятъ границы, между которыми должно заключаться r; границы эти позволятъ скоро опредѣлить приближенное значеніе r.

Примѣръ. Сумма въ 28895 фр., будучи помѣщена на 73 года, обратилась въ 250000 фр. Какова условная плата? Здѣсь $C=28895$, $A=250000$, $n=73$. Формула [5] даетъ: $\log(1+r)=0{,}01283722$, откуда $1+r=1{,}03000$, т.-е. капиталъ отданъ въ ростъ по 3 процента.

4°. *На какое время должно помѣстить данный капиталъ C, при данной условной платѣ, для того, чтобы онъ обратился въ опредѣленную сумму A?* Такъ какъ мы не знаемъ, представляетъ ли искомый промежутокъ времени цѣлое число лѣтъ, или же заключаетъ также и дни, то мы не имѣемъ права взять формулу [1], найденную для того случая, когда n цѣлое. Возьмемъ однако, ее, и тогда

$$(1+r)^n = \frac{A}{C};$$

откуда, взявъ логариѳмы обѣихъ частей и раздѣливъ обѣ части полученнаго равенства на $\log(1+r)$, найдемъ:

$$n = \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}. \qquad [6]$$

Если правая часть представитъ цѣлое число, то это число будетъ искомое число лѣтъ, ибо формула [6] вытекаетъ изъ формулы [1]. Если же частное не будетъ цѣлымъ, то должны будемъ заключить, что искомый промежутокъ времени не представляетъ цѣлаго числа лѣтъ. Можно показать однако, что *цѣлая часть частнаго равна наибольшему числу лѣтъ, заключенному въ искомомъ промежуткѣ времени.* Обозначивъ, въ самомъ дѣлѣ, черезъ p и $(p+1)$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, заключающихъ дробь [6], получимъ: $p < \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} < p+1$, откуда выведемъ: $p\log(1+r) < \log A - \log C < (p+1)\log(1+r)$, или $\log(1+r)^p < \log\frac{A}{C} < \log(1+r)^{p+1}$. Переходя отсюда къ числамъ, получимъ: $(1+r)^p < \frac{A}{C} < (1+r)^{p+1}$, или $C(1+r)^p < A < C(1+r)^{p+1}$ [7]; эти неравенства доказываютъ выраженную теорему. Для опредѣленія числа k дней, дополняющихъ искомое время, замѣтимъ, что формула [2], которую должно приложить въ этомъ случаѣ, дастъ, по замѣнѣ n на p,

$$\log A = \log C + p\log(1+r) + \log\left(1+\frac{kr}{t}\right),$$

откуда

$$\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)}.$$

Принявъ во вниманіе, что p есть наибольшее цѣлое число, заключенное въ $\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}$, и обозначивъ буквою R остатокъ отъ дѣленія числителя на знаменателя, можемъ написать предъидущее равенство такимъ образомъ:

$$p + \frac{R}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)};$$

откуда, слѣдовательно,

$$\log\left(1+\frac{kr}{t}\right) = R. \qquad (8)$$

Зная логариѳмъ числа $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, опредѣлимъ самое число, а слѣдовательно, и k.

Примѣръ. На какое время должно помѣстить капиталъ въ 7700 фр. по 4 процента для того, чтобы онъ обратился въ 42850 фр.? Здѣсь $C=7700$, $A=42850$, $r=0{,}04$.

Получаемъ: $\log A-\log C=0{,}7454601$, $\log(1+r)=0{,}0170333$.

Отсюда слѣдуетъ, что $n=43$ годамъ, причемъ $R=0{,}0130282$.

Формула [8] даетъ: $\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)=0{,}0130282$, откуда $1+\frac{kr}{t}=1{,}030453$, и, слѣдовательно, $k=278$.

Итакъ, искомое время равно 43 годамъ 278 днямъ.

§ II. Срочныя уплаты.

614. Опредѣленіе. Нѣкто занимаетъ сумму C на n лѣтъ по условной платѣ r съ одного франка. Для погашенія долга уплачивается, въ концѣ каждаго года, опредѣленная сумма a, вычисленная такимъ образомъ, что послѣ n платежей, равныхъ a, погашается капиталъ и наросшіе на него сложные проценты. Сумма a, уплачиваемая ежегодно, называется *срочною уплатою.*

615. Общая формула срочныхъ уплатъ. Найдемъ формулу, связывающую капиталъ C, срочную уплату a, условную плату r и продолжительность платежа n.

Должникъ, получая сегодня сумму C, будетъ долженъ къ концу перваго года $C(1+r)$; долгъ этотъ, вслѣдствіе уплаты суммы a, приведется къ $C(1+r)-a$ и къ концу втораго года обратится въ $[C(1+r)-a](1+r)=$ $=C(1+r)^2-a(1+r)$; сумма эта, вслѣдствіе уплаты a, приводится къ $C(1+r)^2-a(1+r)-a$. Къ концу третьяго года эта сумма, вслѣдствіе наростанія процентовъ и вслѣдствіе уплаты a, обращается въ

$$C(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a.$$

Продолжая разсуждать подобнымъ же образомъ, придемъ къ заключенію, что къ концу n-аго года весь долгъ приводится къ

$$C(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-\ldots-a(1+r)-a.$$

По условію вопроса долгъ къ концу этой эпохи долженъ быть равенъ нулю, т.-е. предъидущее выраженіе должно быть равно нулю, такъ что получимъ:

$$C(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\ldots+a(1+r)+a.$$

Правая часть представляетъ сумму членовъ геометрической прогрессіи, первый членъ которой и знаменатель соотвѣтственно суть a и $(1+r)$. Прилагая формулу [5] (**563**), найдемъ:

$$C(1+r)^n=\frac{a(1+r)^n-a}{r}, \qquad [1]$$

или, уничтожая знаменателя r,

$$a[(1+r)^n-1]=Cr(1+r)^n.$$

Такова общая формула срочныхъ уплатъ.

616. Задачи. Формула [1] служитъ для рѣшенія четырехъ различныхъ задачъ:

1°. *Какова должна быть срочная уплата для того, чтобы долгъ C и сложные проценты были погашены въ n лѣтъ, при условной платѣ r съ одного франка?*

Формула [1] даетъ:

$$a=\frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}. \qquad [2]$$

При приложеніяхъ этой формулы должны вычислить сперва, при помощи логариѳмовъ, $(1+r)^n$, вычесть потомъ 1, что опредѣлитъ знаменателя; далѣе, при помощи формулы:

$$\log a=\log Cr+n\log(1+r)-\log[(1+r)^n-1],$$

вычисляемъ $\log a$ и, слѣдовательно, a.

Примѣръ. *Какою срочною уплатою погашается долгъ въ 34600 фр. въ 51 годъ, при условной платѣ 4 со ста?*

Здѣсь $C=36400$, $n=51$, $r=0{,}04$. Вычисляемъ сперва $(1+r)^n=7{,}390950$ и потомъ, по формулѣ [2], $\log a=3{,}2042710$, откуда $a=1600,\ 556$.

2°. *Какую сумму C можно погасить въ n лѣтъ при срочной уплатѣ, равной a, и при условной платѣ, равной r съ одного франка?*

Формула [1] даетъ:

$$C=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r(1+r)^n}. \qquad [3]$$

Примѣръ. *Какую сумму C можно занять, чтобы быть въ состояніи погасить ее въ 37 лѣтъ, срочною уплатою въ 825 фр., при условной платѣ $4^1/_2$ со ста?*

Здѣсь $a=825$, $n=37$, $r=0{,}045$. Вычисляемъ $(1+r)^n=5{,}09686$ и потомъ, по формулѣ [3], находимъ $\log C=4{,}1683900$, откуда $C=14736{,}35$.

3°. *Опредѣлить промежутокъ времени, въ продолженіи котораго можно погасить сумму C срочными уплатами, равными a, при условной платѣ r.*

Рѣшая уравненіе [1] относительно $(1+r)^n$, получимъ:

$$(1+r)^n=\frac{a}{a-Cr},$$

откуда

$$n=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)}.$$

Задача возможна только тогда, когда $(a-Cr)$ положительно, ибо отрицательныя числа не имѣютъ вещественныхъ логариѳмовъ. Обстоятельство это можно видѣть à priori. И въ самомъ дѣлѣ, если a менѣе Cr, то срочная уплата менѣе простыхъ процентовъ, приносимыхъ капиталомъ C, ибо формула Cr именно и представляетъ простые проценты съ капитала C. Ясно, что, при такой срочной уплатѣ, не можетъ имѣть мѣста погашеніе долга.

Если формула [4] дастъ для n цѣлое число, то это число и рѣшаетъ вопросъ. Если же дѣленіе точно не выполняется, то задача невозможна.

Можемъ однако показать слѣдующее: *если буквы* p *и* $(p+1)$ *означаютъ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, заключающихъ формулу* [4], *то* p *срочныхъ уплатъ не погашаютъ долга, между тѣмъ какъ* $(p+1)$ *уплатъ погашаютъ долгъ съ избыткомъ.*

И въ самомъ дѣлѣ, неравенства:

$$p < \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)} < p + 1$$

даютъ:

$$p \log(1+r) < \log a - \log(a - Cr) < (p+1)\log(1+r),$$

или

$$\log(1+r)^p < \log\frac{a}{a - Cr} < \log(1+r)^{p+1},$$

и, слѣдовательно,

$$(1+r)^p < \frac{a}{a - Cr} < (1+r)^{p+1}.$$

Уничтожая положительнаго знаменателя, получимъ:

$$(a - Cr)(1+r)^p < a < (a - Cr)(1+r)^{p+1},$$

откуда легко найдемъ:

$$\frac{a[(1+r)^p - 1]}{r} < C(1+r)^p, \qquad \frac{a[(1+r)^{p+1} - 1]}{r} > C(1+r)^{p+1}.$$

Эти два неравенства доказываютъ выраженное предложеніе.

Итакъ, всегда прилагаемъ формулу [4]; она опредѣлитъ число p срочныхъ уплатъ; если получится остатокъ, то вычисляемъ разность

$$C(1+r)^p - \frac{a[(1+r)^p - 1]}{r},$$

представляющую долгъ къ началу $(p+1)$-аго года, платежъ котораго совершается особымъ соглашеніемъ.

Примѣръ. *Въ продолженіи какого промежутка времени погасится сумма въ* 260000 *фр. срочными уплатами, равными* 10000 *фр., при условной платѣ* $3\frac{1}{4}$ *со ста?* Здѣсь

$$a = 10000,\ C = 260000,\ r = 0{,}0325.$$

Формула [4] даетъ:

$$n = \frac{0{,}8096683}{0{,}0138901} = 58\ ,\ldots$$

Итакъ, должно внести 58 срочныхъ уплатъ, по 10000 каждая. Сумма не погасится вполнѣ. Для опредѣленія остатка вычисляемъ, съ одной стороны, во что должна была бы обратиться сумма C къ концу 58 лѣтъ, т.-е. вычисляемъ $s = 260000 . (1{,}0325)^{58} = 1661869$; находимъ, съ другой стороны, сумму, выплаченную 58 срочными уплатами, т.-е.

$$p = \frac{10000 . [(1{,}0325)^{58} - 1]}{0{,}0325} = 1659017.$$

Остатокъ $(s - p) = 2852$ фр.

4°. *Сумма C со сложными процентами должна быть уплачена въ продолженіи n лѣтъ при помощи срочныхъ уплатъ, равныхъ a. Опредѣлить условную плату.*

Формула [1] представляетъ уравненіе $(n+1)$-ой степени относительно r. Уравненіе это принадлежитъ, вообще, Высшей Алгебрѣ.

Мы можемъ, однако, придти быстро къ приближенному значенію r, основываясь на слѣдующемъ замѣчаніи.

При данныхъ C и a число n срочныхъ уплатъ увеличивается или же уменьшается, когда условная плата r также увеличивается или же уменьшается.

И въ самомъ дѣлѣ, долгъ $C(1+r) - a$, къ концу перваго года, будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе r.

Подобное обстоятельство имѣетъ мѣсто для конца каждаго года, ибо къ концу года предъидущій долгъ умножается на $(1+r)$ и уменьшается потомъ на постоянное количество a. Отсюда слѣдуетъ, что если долгъ погашается n срочными уплатами при условной платѣ r, то онъ не погасится ими при увеличенной условной платѣ.

Замѣтивъ все это, представимъ формулу [1] въ видѣ:

$$n = \frac{\log a - \log (a - Cr)}{\log (1+r)}, \tag{4}$$

гдѣ r есть искомая величина.

Зададимъ буквѣ r произвольное значеніе r_1. Если это значеніе менѣе искомаго, то соотвѣтствующее значеніе n_1 дроби (4) будетъ менѣе даннаго значенія n, и наоборотъ. Итакъ, сравнивъ n_1 съ n, мы узнаемъ, слишкомъ ли велико взятое нами r_1 или оно слишкомъ мало. Сдѣлавъ нѣсколько испытаній, быстро получимъ достаточно приближенное значеніе r.

Примѣръ. *Сумма* 35000 *фр. со сложными процентами погашается* 52 *срочными уплатами, по* 1600 *фр. каждая. Опредѣлить условную плату.*

Полагаемъ, въ формулѣ (4), $r = 0{,}04$. Она даетъ: $n = \dfrac{0{,}9030900}{0{,}0170333} = 53, \ldots$ Мы получили число, большее 52; отсюда заключаемъ, что назначенная условная плата, равная 4 со ста, слишкомъ велика.

Предполагаемъ $r = 0{,}035$. Формула [4] даетъ: $n = \dfrac{0{,}6300887}{0{,}0149403} = 42, \ldots$ Число это хотя и менѣе даннаго, но болѣе отличается отъ него, чѣмъ найденное выше значеніе $n = 53, \ldots$

Отсюда заключаемъ, что условная плата ближе къ 4, чѣмъ къ $3^1/_2$.

Полагаемъ, слѣдовательно, $r=0{,}039$ и опредѣляемъ $n=\dfrac{0{,}8330521}{0{,}0166155}=50,..$; это значеніе менѣе даннаго, слѣдовательно условная плата выше 3,9.

Полагаемъ $r=0{,}0395$. Опредѣляемъ: $n=\dfrac{0{,}8666607}{0{,}0168245}=51$. Условная плата выше 3,95. Она заключена, слѣдовательно, между 3,95 и 4. Итакъ, условная плата опредѣлена съ точностью до 0,05. Мы могли бы легко найти и большее приближеніе.

617. Случай непрерывной ренты. Значеніе срочной уплаты a, назначаемой для погашенія долга C въ данное время n, уменьшается съ увеличеніемъ n. И въ самомъ дѣлѣ, формула [2] можетъ написаться:

$$a=\frac{Cr}{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}.$$

Видимъ, что, съ увеличеніемъ n, дробь $\dfrac{1}{(1+r)^n}$ уменьшается; знаменатель увеличивается, и значеніе a становится менѣе. Если, слѣдовательно, эпоха погашенія неопредѣленно отдаляется, т.-е. если n неопредѣленно возрастаетъ, то значеніе a, всегда большее Cr, ибо знаменатель всегда менѣе единицы, уменьшается, стремясь къ предѣлу Cr, равному простымъ процентамъ съ занятой суммы. Этотъ предѣльный случай называется случаемъ непрерывной ренты.

Упражненія.

1. Капиталъ въ 8500 франковъ помѣщенъ по $4^1/_2$ со ста; во что обратится онъ къ концу 41 года? **Отв.** 51663 ф., 86.

2. Народонаселеніе въ 200000 душъ увеличивается ежегодно на $1^1/_4$ процента со ста; во что обратится оно въ продолженіи столѣтія? **Отв.** 692681.

3. Во сколько времени капиталъ въ 3500 франковъ, отданный въ ростъ по 5 со ста, обратится въ сумму, равную той, въ какую обращается капиталъ въ 4300 франковъ, отданный въ ростъ по 4 со ста, въ продолженіи 18 лѣтъ? **Отв.** 18 лѣтъ и 75 дней.

4. Два капитала помѣщены по сложнымъ процентамъ; одинъ въ 38000 франковъ, по $4^1/_4$ со ста; другой въ 99398 франковъ, по $3^1/_2$ со ста; опредѣлить, черезъ сколько времени они достигнутъ одной и той же суммы? **Отв.** Черезъ 100 лѣтъ.

5. Какова дѣйствительная стоимость годовой ренты въ 1500 франковъ, уплачиваемой въ продолженіи 36 лѣтъ, по 5 со ста, причемъ первый платежъ совершается черезъ годъ?

Отв. Формула $A=\dfrac{1500\,.\,[(1{,}05)^{36}-1]}{(1{,}05)^{36}\,.\,0{,}05}=24820{,}32.$

6. Долгъ въ 25000 фр., по 4 со ста, долженъ быть уплаченъ 7 равными годовыми взносами. Чему равна срочная уплата? **Отв.** 4165,16.

7. Какова срочная уплата, при помощи которой погашается долгъ въ 36000 фр. въ 48 лѣтъ, по $3\frac{3}{4}$ со ста? **Отв.** 1628,14.

8 Хотятъ купить ренту въ 3000 франковъ за 91650 франковъ. На сколько лѣтъ, по 3 со ста, должна быть выпущена рента? **Отв.** На 84 года.

9. Какова дѣйствительная стоимость, при условной платѣ 5 со 100, 24 срочныхъ уплатъ, возрастающихъ въ геометрической прогрессіи, изъ которыхъ первая уплата, уплачиваемая черезъ годъ, равна 1000 франкамъ, причемъ знаменатель q равенъ $\frac{11}{10}$? Вычислить стоимость послѣдней уплаты.

Отв. Формула есть: $\frac{a}{1+r}\cdot\frac{\left(\frac{q}{1+r}\right)^n-1}{\frac{q}{1+r}-1}$, въ которой $a=1000, q=\frac{11}{10}$, $r=0{,}05$, $n=24$.
Мы найдемъ $S=50817,41$, причемъ послѣдняя срочная уплата равна 8954, 30.

10. Работникъ вноситъ, въ началѣ каждой недѣли, сумму a въ сберегательную кассу въ продолженіи n послѣдовательныхъ лѣтъ. Проценты пріобщаются къ капиталу въ концѣ каждаго года. Какова стоимость M его книжки, при условной платѣ r съ одного рубля?

Отв. $M=a\left(52+\frac{53r}{2}\right)\cdot\frac{(1+r)^n-1}{r}$.

11. Особа вноситъ въ банкъ сумму v въ началѣ каждаго года, въ продолженіи n послѣдовательныхъ лѣтъ. Опредѣлить, какую сумму a должна получать эта особа въ началѣ каждаго года, въ продолженіи $2n$ слѣдующихъ лѣтъ, для того, чтобы вполнѣ возвратить свои вклады?

Отв. $a=\frac{v(1+r)^{2n}}{(1+r)^n+1}$.

12. При предъидущихъ условіяхъ, каково должно быть число n для того, чтобы сумма a была, по меньшей мѣрѣ, равна суммѣ r, умноженной на k?

Отв. Найдемъ условіе: $(1+r)^n \geqslant \frac{k+\sqrt{k(k+4)}}{2}$, откуда найдемъ низшую границу для n.

* КНИГА V.

Ряды.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Сходимость рядовъ.

618. Опредѣленія. Положимъ, что имѣемъ неограниченный *рядъ* количествъ:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots, \qquad [1]$$

вещественныхъ или мнимыхъ, слѣдующихъ другъ за другомъ по нѣкоторому опредѣленному закону. Количества эти называются *членами* ряда. Членъ u_{n+1} называется *общимъ* членомъ ряда; значеніе его зависитъ отъ значенія n; давая n послѣдовательно значенія : 0, 1, 2, 3, . . . , n, будемъ получать послѣдовательно каждый изъ членовъ ряда.

Разсмотримъ *перемѣнное* число

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$

представляющее сумму n первыхъ членовъ ряда [1], и положимъ, что цѣлое и положительное число n *безгранично возрастаетъ*.

Могутъ встрѣтиться слѣдующіе два случая:

1^0. Перемѣнное число s_n не стремится ни къ какому предѣлу. Подобное обстоятельство имѣетъ, напримѣръ, мѣсто для рядовъ:

$$1, -1, +1, -1, \ldots,$$
$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \ldots.$$

2^0. Перемѣнное число s_n стремится къ предѣлу s. Случай этотъ имѣетъ, напримѣръ, мѣсто для прогрессіи:

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots,$$

въ которой $Mod(q) < 1$. Для нея сумма s_n имѣетъ предѣломъ число $\frac{a}{1-q}$.

Если имѣетъ мѣсто второй случай, т. е. *если перемѣнное число s_n стремится къ предѣлу при неограниченномъ возрастаніи n, то рядъ* (1) *называется сходящимся, причемъ самый предѣлъ называется суммою ряда* (1) *и разсматривается, какъ число, опредѣляемое этимъ рядомъ.*

Если же перемѣнное число s_n не стремится къ предѣлу, то рядъ (1) *называется расходящимся.*

619. Необходимое и достаточное условіе сходимости ряда. *Для того, чтобы рядъ чиселъ:*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, u_{n+p}, \ldots, \qquad [1]$$

вещественныхъ или мнимыхъ, былъ сходящійся, необходимо и достаточно, чтобы

$$Mod\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) \qquad [2]$$

стремился къ нулю, при неограниченномъ возрастаніи n, при всякомъ цѣломъ и положительномъ p.

И въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы рядъ (1) былъ сходящійся, необходимо и достаточно, по опредѣленію, чтобы перемѣнное число s_n стремилось къ предѣлу, а для этого необходимо и достаточно, чтобы (**457**)

$$Mod\,(s_{n+p} - s_n) = Mod\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p})$$

стремился къ нулю при неограниченномъ возрастаніи n и при всякомъ цѣломъ и положительномъ p; ч. и. т. д.

620. Замѣчаніе 1. *Для того, чтобы рядъ былъ сходящійся, необходимо, чтобы модуль общаго члена u_{n+1} стремился къ нулю, при неограниченномъ возрастаніи n.* И въ самомъ дѣлѣ, выраженіе (2), при $p=1$, обращается въ u_{n+1}.

Это *необходимое* условіе сходимости ряда не есть условіе *достаточное*, ибо рядъ (1) только тогда сходящійся, когда выраженіе (2) стремится къ нулю *при всякомъ p*.

Примѣръ. Покажемъ на примѣрѣ, что одного стремленія u_{n+1} къ нулю, при неограниченномъ возрастаніи n, недостаточно для сходимости ряда (1).

Разсмотримъ рядъ:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \ldots,$$

въ которомъ общій членъ $\frac{1}{n+1}$ стремится къ нулю, при безграничномъ возрастаніи n, и составимъ для него сумму (2):

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p}.$$

Неравенство это говоритъ, что сумма, помѣщенная въ его лѣвой части, не стремится къ нулю, при неограниченномъ возрастаніи n, *при всякомъ p*, ибо число p можно взять, при всякомъ n, столь большимъ, что дробь $\frac{p}{n+p}$ будетъ сколь угодно близка къ единицѣ; положивъ, напримѣръ, $p=nq$, найдемъ:

$$\frac{p}{n+p}=\frac{q}{q+1},$$

что, при достаточно большомъ q, сколь угодно близко къ единицѣ.

Итакъ, для даннаго ряда необходимое и достаточное условіе сходимости не удовлетворяется.

621. Замѣчаніе 2. *Если члены расходящагося ряда суть числа вещественныя и положительныя, то сумма s_n безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ n.*

И въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ сумма s_n возрастаетъ вмѣстѣ съ n, и, слѣдовательно, еслибы она не возрастала безгранично, то она стремилась бы къ предѣлу **(171)**, и тогда рядъ, по опредѣленію, былъ бы рядомъ сходящимся.

Предыдущій рядъ служитъ **примѣромъ** на это замѣчаніе, ибо, написавъ сумму s_n такимъ образомъ:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

и принявъ во вниманіе, что каждое число, помѣщенное въ скобкахъ, превышаетъ $\frac{1}{2}$, увидимъ, что s_n безгранично возрастаетъ вмѣстѣ съ n.

622. Теорема. *Если рядъ*

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots, \qquad [3]$$

члены котораго суть модули соотвѣтственныхъ членовъ ряда:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots, \qquad [1]$$

есть рядъ сходящійся, то и рядъ (1) *есть рядъ сходящійся.*

Теорема эта вытекаетъ непосредственно изъ слѣдующаго неравенства (**447**):

$$Mod\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) \leqslant U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}\,. (a)$$

И въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ рядъ (3) есть, по условію, рядъ сходящійся, то

$$Mod\,(U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}) = U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p}$$

стремится къ нулю, при безграничномъ возрастаніи n и при всякомъ p: отсюда, при помощи неравенства (a), заключаемъ, что и

$$Mod\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p})$$

также стремится къ нулю при безграничномъ возрастаніи n и при всякомъ p, т. е. рядъ (1) есть рядъ сходящійся.

Обратное предложеніе будетъ, вообще, несправедливо, т.-е. рядъ (3) можетъ быть расходящимся при сходимости ряда (1).

Примѣромъ несправедливости обратнаго предложенія можетъ служить рядъ:

$$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5}, \ \ldots,$$

для котораго рядъ (3) есть, какъ видѣли, рядъ расходящійся.

Покажемъ, что предложенный рядъ есть рядъ сходящійся. И въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ, для даннаго ряда,

$$Mod\,(u_{n+1}+u_{n+2}+\ .\ .\ .\ .+u_{n+p})=$$
$$Mod\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\ .\ .+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right]. \quad (b)$$

Если p есть число четное, равное $2q$, то

$$Mod\,(u_{n+1}+u_{n+2}+\ .\ .\ .+u_{n+p})=\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ .\ .+\left(\frac{1}{n+2q-1}-\frac{1}{n+2q}\right)\right];$$

если же p есть число нечетное, равное $(2q-1)$, то

$$Mod\,(u_{n+1}+u_{n+2}+\ .\ .\ .+u_{n+p})=\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\ .\ .+\left(\frac{1}{n+2q-3}-\frac{1}{n+2q-2}\right)+\frac{1}{n+2q-1}\right].$$

Написавъ правыя части этихъ равенствъ соотвѣтственно въ видахъ:

$$\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\ .\ .\ .\ .-\frac{1}{n+2q}$$

и

$$\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\ .\ .\ .\ .-\left(\frac{1}{n+2q-2}-\frac{1}{n+2q-1}\right),$$

увидимъ, что

$$Mod\,(u_{n+1}+u_{n+2}+\ .\ .\ .+u_{n+p})<\frac{1}{n+1}.$$

Неравенство это убѣждаетъ насъ въ сходимости предложеннаго ряда.

623. Ряды абсолютно сходящіеся. Сходящійся рядъ:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ .\ .\ .\ ,\ u_n,\ .\ .\ .$$

называется *рядомъ абсолютно сходящимся*, если рядъ

$$U_1,\ U_2,\ .\ .\ ,\ U_n,\ .\ .\ .\ ,$$

составленный изъ модулей членовъ даннаго ряда, есть также рядъ сходящійся. Въ противоположномъ же случаѣ данный сходящійся рядъ называется рядомъ *неабсолютно сходящимся.* Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что разсмотрѣнный нами рядъ:

$$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ . \ . \ .$$

представляетъ рядъ *неабсолютно сходящійся.*

624. Признакъ абсолютной сходимости рядовъ. Найденное выше (**619**) необходимое и достаточное условіе сходимости ряда:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \ldots$$

приводитъ вопросъ о сходимости ряда къ вопросу о стремленіи къ нулю выраженія:

$$Mod\,(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n),$$

при безграничномъ возрастаніи n.

Это приведеніе одного вопроса къ другому позволитъ найти признакъ, по которому, во многихъ случаяхъ, можно будетъ судить не только о сходимости ряда, но даже объ абсолютной сходимости его.

Теорема. *Если, для даннаго ряда:*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$$

модуль отношенія

$$\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть менѣе одного и того же числа, меньшаго единицы, то данный рядъ есть рядъ абсолютно сходящійся. Если же модуль этого отношенія, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть болѣе единицы или равнымъ ей, то рядъ есть рядъ расходящійся.

1°. Докажемъ сперва первую часть теоремы. Предположимъ, слѣдовательно, что $Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, при каждомъ изъ значеній буквы n, превосходящихъ нѣкоторое цѣлое и положительное число k, представляетъ число, меньшее нѣкотораго положительнаго числа q, меньшаго единицы.

Предположеніе это даетъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$Mod\,\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < q, \ldots, Mod\,\frac{u_{n+1}}{u_n} < q, \ldots, Mod\,\frac{u_{n+p}}{u_{n+p-1}} < q,$$

дающихъ неравенства:

$$U_{k+1}=U_{k+1},\ U_{k+2}<qU_{k+1},\ U_{k+3}<q^2U_{k+1},\ \ldots$$
$$U_n\leqslant q^{n-k-1}U_{k+1}, U_{n+1}<q^{n-k}U_{k+1},\ \ldots,$$
$$U_{n+p}<q^{n+p-k-1}U_{k+1}, \qquad (i$$

гдѣ $n\geqslant k+1$.

Отсюда получаемъ:

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}<q^{n-k}U_{k+1}(1+q+\ldots+q^{p-1}).$$

Но, принимая во вниманіе, что, при $q<1$, имѣетъ мѣсто неравенство (**564**, **171**)

$$1+q+q^2+\ldots+q^{p-1}<\frac{1}{1-q},$$

найдемъ:

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}<\frac{U_{k+1}}{1-q}\cdot q^{n-k}. \qquad (a)$$

Замѣтивъ далѣе, что, при безграничномъ возрастаніи n, число q^{n-k} становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго даннаго положительнаго числа (**160**, **7°**), получимъ:

$$q^{n-k}<\frac{\varepsilon(1-q)}{U_{k+1}},$$

начиная съ нѣкотораго n, при всякомъ заданномъ числѣ ε. При помощи этого неравенства неравенство (a) напишется такимъ образомъ:

$$U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots+U_{n+p}<\varepsilon$$

и покажетъ, что рядъ

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots$$

есть рядъ сходящійся, т. е. покажетъ, что данный рядъ есть рядъ абсолютно сходящійся, ч. и. т. д.

2°. Доказательство второй части теоремы весьма просто. И въ самомъ дѣлѣ, если модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть равнымъ единицѣ, или болѣе ея, то модули членовъ предложеннаго ряда будутъ или возрастать, или оставаться равными, и, слѣдовательно, $Mod(u_{n+1})$ не будетъ неопредѣленно убывать, т. е. необходимое условіе сходимости ряда не будетъ выполнено.

625. Замѣчаніе. Если модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть только менѣе единицы, но не продолжаетъ быть менѣе одного и того же числа, меньшаго единицы, то, *à priori*, о сходимости и расходимости ряда ничего сказать не можемъ.

И въ самомъ дѣлѣ, напримѣръ, и для ряда расходящагося (**620**):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

и для ряда сходящагося (**622**):

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, становясь и продолжая быть менѣе единицы, не продолжаетъ, однако, быть менѣе одного и того же числа, меньшаго единицы, ибо для обоихъ рядовъ этотъ модуль принимаетъ рядъ значеній:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots,$$

возрастающихъ, имѣющихъ предѣломъ число 1.

626. Границы для модуля ошибки. Доказательство предыдущаго признака позволяетъ опредѣлить высшую границу модуля ошибки, которую сдѣлаемъ, если возьмемъ вмѣсто суммы s ряда сумму первыхъ k членовъ его, гдѣ k есть число, имѣющее свойство, по которому модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, при всякомъ цѣломъ и положительномъ n, большемъ k, представляетъ число, меньшее одного и того же числа, меньшаго единицы.

И въ самомъ дѣлѣ, назвавъ эту ошибку буквою Δ, получимъ:

$$\Delta = s - s_k = lim\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n)_{n=\infty} -$$
$$-(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k),$$

или же

$$\Delta = s - s_k = lim\,(u_{k+1} + \ldots + u_n)_{n=\infty};$$

равенство это дастъ:

$$Mod\,\Delta = Mod\,[lim(u_{k+1} + \ldots + u_n)_{n=\infty}] = lim[Mod(u_{k+1} + \ldots + u_n)]_{n=\infty}. \quad (b)$$

Но неравенства (i) даютъ:

$$Mod(u_{k+1}+\ldots+u_n)<U_{k+1}+U_{k+2}+\ldots+U_n<$$
$$<U_{k+1}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-k-1}),$$

гдѣ n есть производимое цѣлое число, большее k.

Вслѣдствіе этого неравенства равенство (b) даетъ:

$$Mod\,\Delta<lim[U_{k+1}(1+q+q^2+\ldots+q^{n-k-1}],$$

или **(564, 171)**

$$0<Mod\,\Delta<\frac{U_{k+1}}{1-q}. \qquad (A)$$

Неравенства (A) и даютъ низшую и высшую границы для модуля погрѣшности Δ.

627. Примѣръ первый. Возьмемъ рядъ:

$$1,\ \mu x,\ \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2,\ \ldots,\ \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1.2.3\ldots(k-1)}x^{k-1},\ \ldots,$$
$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1},\ \ldots,$$

въ которомъ число μ есть какое угодно вещественное число, причемъ число x есть число, вещественное или мнимое, модуль котораго менѣе единицы. Назовемъ число μ — *параметромъ*, число x — *аргументомъ*.

Если параметръ μ есть число цѣлое и положительное, то разсматриваемый рядъ будетъ содержать конечное число членовъ, равное $(\mu+1)$.

Изслѣдуемъ сходимость ряда. Для этой цѣли составимъ модуль отношенія $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ **(624)**; имѣемъ:

$$Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Mod\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)n}x^n:\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)}x^{n-1}\right]=$$
$$=Mod\left(\frac{\mu-n+1}{n}x\right)=Mod\frac{n-(\mu+1)}{n}\cdot Mod\,x.$$

Для всякаго n, большаго $(\mu+1)$, число

$$n-(\mu+1)$$

есть число положительное, а потому

$$Mod\frac{n-(\mu+1)}{n}=\frac{n-(\mu+1)}{n},$$

и, слѣдовательно, для этихъ значеній буквы n получимъ:

$$Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\frac{n-(\mu+1)}{n}.Mod\ x. \qquad (a)$$

Но, начиная съ нѣкотораго n, будетъ удовлетворяться неравенство:

$$\frac{n-(\mu+1)}{n}.\ Mod\ x<q\ , \qquad (b)$$

гдѣ число q представляетъ число, удовлетворяющее неравенству:

$$Mod\,(x)<q<1.$$

И въ самомъ дѣлѣ, для удовлетворенія неравенству (b) стоитъ только взять:

$$n>-\frac{(\mu+1)\,Mod(x)}{q-Mod(x)}. \qquad (c)$$

Итакъ, слѣдовательно,

$$Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right),$$

начиная съ нѣкотораго n, становится и продолжаетъ быть менѣе одного и того же числа q, меньшаго единицы, т. е. изслѣдуемый рядъ есть рядъ абсолютно сходящійся, или, что то же, *сумма*

$$s_n=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2+\ldots.+\frac{\mu(\mu-1)\ldots.(\mu-n+2)}{1.2.3\ldots.(n-1)}x^{n-1} \qquad (d)$$

первыхъ n членовъ ряда и сумма ихъ модулей стремятся къ предѣламъ, при неограниченномъ возрастаніи n, при всякомъ вещественномъ μ, для такихъ значеній x, модули которыхъ суть числа, меньшія единицы.

Если же $Mod(x)>1$, то, начиная съ нѣкотораго n, будемъ имѣть неравенство:

$$\frac{n-(\mu+1)}{n}.\ Mod(x)>1\ ,$$

которому удовлетворимъ, если возьмемъ:

$$n>\frac{(\mu+1\ Mod(x)}{Mod(x)-1}.$$

Эти неравенства говорятъ, что, при $Mod(x)>1$, нашъ рядъ есть рядъ расходящійся, и, слѣдовательно, сумма (d) не стремится къ предѣлу.

628. Замѣчаніе. Если $Mod(\mu) < 1$, причемъ число q взято равнымъ $Mod(x)$, то неравенство (b), которое можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$\frac{(n-1)-\mu}{(n-1)+1} \cdot Mod\, x < Mod\, x, \tag{e}$$

удовлетворяется при $n \geqslant 2$.

629. Границы модуля ошибки. Найдемъ границы модуля ошибки Δ, которую сдѣлаемъ, взявъ, для суммы

$$s = lim\,(s_n)_{n=\infty}$$

предложеннаго ряда сумму:

$$s_k = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+2)}{1.2.3\ldots(k-1)}x^{k-1}$$

первыхъ k членовъ его, гдѣ $k \geqslant (n-1)$, причемъ цѣлое и положительное число n есть число, большее $(\mu+1)$ и удовлетворяющее неравенству (c) **(627)**.

Границы эти опредѣляются неравенствами (A) **(626)**, которыя, въ разсматриваемомъ случаѣ, обращаются въ слѣдующія:

$$0 < Mod\,\Delta < \frac{Mod\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k\right]}{1-q}. \tag{f}$$

630. Замѣчаніе 1. *Остановимся особенно на случаѣ, когда* $Mod(\mu) < 1$. Принявъ $q = Mod(x)$, мы можемъ въ неравенствѣ (f) предполагать $k \geqslant 1$ **(628)**, причемъ самыя неравенства обратятся въ слѣдующія:

$$0 < Mod\,\Delta < \frac{Mod\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k\right]}{1-Mod(x)}. \tag{g}$$

Неравенства эти могутъ быть преобразованы въ болѣе простыя. Разсмотримъ для этой цѣли два случая:

1°. Положимъ, что $0 < \mu < 1$. Если $k > 1$, т.-е. $k \geqslant 2$, то

$$Mod\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}x^k\right] = \frac{\mu(1-\mu)(2-\mu)\ldots[(k-1)-\mu]}{1.2.3\ldots(k-1)k}(Mod\,x)^k,$$

гдѣ

$$\frac{1-\mu}{1}\cdot\frac{2-\mu}{2}\cdot\cdot\cdot\frac{(k-1)-\mu}{k-1}<1,$$

и неравенства (g) преобразовываются въ слѣдующія:

$$0<Mod\,\Delta<\frac{\mu\,(Mod\,x)^k}{k(1-Mod\,x)}, \qquad [h]$$

или, подавно, въ слѣдующія:

$$0<Mod\,\Delta<\frac{\mu\,(Mod\,x)^k}{1-Mod\,x}. \qquad [k]$$

Если-же $k=1$, то неравенства (g) преобразовываются въ неравенства (k) непосредственно.

2°. Положимъ, что $0>\mu>-1$. Принимая во вниманіе, что, при $k\geqslant 1$,

$$Mod\left[\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}\,x^k\right]=Mod(\mu)\,.\,\frac{(1-\mu)(2-\mu)\ldots(k-1-\mu)}{2\;.\;3\;\ldots\;.\;k}\,(Mod\,x)^k$$

и что

$$\frac{1-\mu}{2}\cdot\frac{2-\mu}{3}\cdot\cdot\cdot\frac{k-1-\mu}{k}<1,$$

преобразуемъ неравенства (g) въ слѣдующія:

$$0<Mod\,\Delta<\frac{Mod\,(\mu).(Mod\,x)^k}{1-Mod\,x}. \qquad [l]$$

Неравенства (l) и (k) говорятъ намъ:
Если $-1<\mu<1$, *то*

$$0<Mod\,(s-s_k)<\frac{Mod(\mu).(Mod\,x)^k}{1-Mod\,x}, \qquad [m]$$

гдѣ k *представляетъ какое ни есть цѣлое, положительное число, за исключеніемъ нуля.*

631. Замѣчаніе 2. Положивъ въ неравенствахъ (m) $k=1$ и принявъ во вниманіе, что $s_1=1$, найдемъ:

$$0<Mod<(s-1)<\frac{Mod\,(\mu)\,(Mod\;x)}{1-Mod\;x}. \qquad (n)$$

Предположимъ, что $Mod\,(\mu)$ есть перемѣнное число, стремящееся къ предѣлу, равному нулю. Неравенства (n), удовлетворяющіяся при каждомъ изъ значеній перемѣннаго числа μ, заключенныхъ въ границахъ -1 и $+1$, показываютъ, что *число* s, *представляющее, при перемѣнномъ параметрѣ* μ, *число перемѣнное, стремится къ предѣлу, равному числу 1, при стремленіи перемѣннаго параметра* μ *къ предѣлу, равному также числу* 1.

Результатъ этотъ будетъ намъ нуженъ впослѣдствіи.

632. Примѣръ второй. Разсмотримъ слѣдующій рядъ:

$$1\,,\,x\,,\,\frac{x^2}{1.2}\,,\,\frac{x^3}{1.2.3}\,,\,\ldots\,,\,\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,,\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\,,\,\ldots\,,$$

въ которомъ число x есть число, вещественное или мнимое, имѣющее какой угодно модуль. Изслѣдуемъ сходимость ряда. Для этой цѣли разсмотримъ:

$$Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=Mod\left[\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}:\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]=\frac{Mod\,x}{n}.$$

Но очевидно, что, начиная съ нѣкотораго, достаточно большаго, значенія для n, при всякомъ $Mod\,(x)$, будемъ имѣть

$$\frac{Mod\,(x)}{n}<q,$$

гдѣ q есть нѣкоторое число, меньшее единицы, а потому, начиная съ нѣкотораго, достаточно большаго, значенія для n, получимъ:

$$Mod\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)<q.$$

Это неравенство говоритъ, что *предложенный рядъ есть рядъ абсолютно сходящійся*, или, что то же, *сумма*

$$s_n=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

первыхъ n *членовъ ряда и сумма ихъ модулей стремятся къ предѣламъ, при неограниченномъ возрастаніи* n *и при всякомъ значеніи* x, *какъ вещественномъ, такъ и мнимомъ.*

633. Границы модуля ошибки. Найдемъ границы модуля ошибки Δ, которую сдѣлаемъ, взявъ, для суммы

$$s=lim\,(s_n)_{n=\infty}$$

предложеннаго ряда, сумму

$$s_k=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)},$$

гдѣ k есть цѣлое и положительное число, при которомъ $\frac{Mod(x)}{k+1}$ представляетъ число, меньшее единицы. Обозначимъ это число буквою q. Назвавъ модули членовъ нашего ряда соотвѣтственно буквами U_1, U_2, U_3, . . . и обозначивъ ошибку буквою Δ, получимъ:

$$Mod\,\Delta < [lim\,(U_{k+1} + U_{k+2} + U_{k+3} + \ldots)]_{n=\infty}.$$

Но

$$U_{k+1} = U_{k+1},\; U_{k+2} = q\,U_{k+1},\; U_{k+3} < q^2 U_{k+1}, \ldots,$$

а потому

$$Mod\,\Delta < lim\,[U_{k+1}(1 + q + q^2 + \ldots)]_{n=\infty},$$

или, наконецъ,

$$0 < Mod\,\Delta < \frac{U_{k+1}}{1-q}.$$

Замѣнивъ здѣсь

$$U_{k+1} = \frac{(Mod\,x)^k}{1.2.3\ldots k},\; q = \frac{Mod(x)}{k+1},$$

получимъ

$$0 < Mod\,\Delta < \frac{(Mod\,x)^k}{1.2.3\ldots k\left(1 - \frac{Mod(x)}{k+1}\right)}. \qquad [p]$$

634. Замѣчаніе 1. Положимъ, что $x = 1$, т.-е. разсмотримъ рядъ:

$$1,\, 1,\, \frac{1}{1.2},\, \frac{1}{1.2.3},\, \ldots,\, \frac{1}{1.2.3\ldots n},\, \ldots,$$

и тогда, взявъ для суммы s ряда, напримѣръ, число:

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)},$$

сдѣлаемъ ошибку Δ, заключенную въ границахъ:

$$0 < \Delta < \frac{1}{1.2.3\ldots k}\left(1 + \frac{1}{k}\right). \qquad [q]$$

635. Замѣчаніе 2. Если $Mod(x)$ достаточно малъ, то можно принять $k = 1$, и тогда, на основаніи неравенства (p), получимъ:

$$0 < Mod\,(s-1) < \frac{Mod\,(x)}{1 - \frac{Mod(x)}{2}}, \qquad [r]$$

т. е., если Mod (x) *представляетъ перемѣнное число, стремящееся къ нулю, то число s будетъ числомъ перемѣннымъ, стремящимся,* какъ показываютъ неравенства (r), *къ предѣлу, равному единицѣ.* Результатъ этотъ будетъ нуженъ намъ впослѣдствіи.

636. Теорема умноженія рядовъ. *Если каждый изъ рядовъ:*

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots (1)$$
$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_n,\ \ldots\ldots (2)$$

есть рядъ абсолютно сходящійся, то рядъ

$$u_1v_1,\ (u_1v_2+v_1u_2),\ (u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1),\ \ldots,$$
$$(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_{n-1}v_2+u_nv_1),\ \ldots \qquad (3)$$

есть рядъ абсолютно сходящійся, имѣющій суммою произведеніе суммъ данныхъ рядовъ. Обозначимъ:

1) модули членовъ ряда (1) соотвѣтственно буквами:

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n,\ \ldots;$$

2) модули членовъ ряда (2) соотвѣтственно буквами:

$$V_1,\ V_2,\ \ldots,\ V_n,\ \ldots;$$

3) члены ряда (3) соотвѣтственно буквами: $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n,\ \ldots;$
4) модули ихъ соотвѣтственно буквами: $W_1,\ W_2,\ \ldots,\ W_n,\ \ldots.$
Возьмемъ:

$$s_a=u_1+u_2+\ldots+u_a\ ,\quad S_a=U_1+U_2+\ldots+U_a,$$
$$t_b=v_1+v_2+\ldots+v_b\ ,\quad T_b=V_1+V_2+\ldots+V_b,$$
$$\sigma_n=w_1+w_2+\ldots+w_n\ ,\quad \Sigma_n=W_1+W_2+\ldots+W_n,$$

причемъ положимъ, что, при n четномъ, $a=\frac{n}{2}$ и $b=\frac{n}{2}$, и, при n нечетномъ, $a=\frac{n+1}{2}$ и $b=\frac{n-1}{2}$. Очевидно, что, при безграничномъ возрастаніи n, числа a и b также безгранично возрастаютъ.

По условію теоремы каждое изъ перемѣнныхъ чиселъ s_a, S_a, t_b, T_b стремится къ предѣлу, при безграничномъ возрастаніи n, причемъ каждая изъ суммъ:

$$U_{a+1}+U_{a+2}+\ldots+U_{a+p}\ .\ V_{b+1}+V_{b+2}+\ldots+V_{b+p}$$

стремится къ нулю, при безграничномъ возрастаніи n и при всякомъ p.
Назовемъ:

$$s=lim\,(s_a)_{n=\infty},\ t=lim\,(t_b)_{n=\infty},\ S=lim\,(S_a)_{n=\infty},\ T=lim\,(T_b)_{n=\infty}.$$

Требуется доказать, что

$$st = lim(\sigma_n)_{n=\infty}$$

и что Σ_n стремится къ предѣлу, при безграничномъ возрастаніи n.

Принявъ во вниманіе, что наибольшая сумма значковъ у буквъ u и v въ слагаемыхъ w, составляющихъ сумму σ_n, равна $(n+1)$, получимъ:

$$\begin{array}{l|l}
\sigma_n = u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_1 v_3 + \ldots + u_1 v_{b-1} + u_1 v_b & + u_1 v_{b+1} + \ldots + u_1 v_{n-1} + u_1 v_n \\
\quad + u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_2 v_3 + \ldots + u_2 v_{b-1} + u_2 v_b & + u_2 v_{b+1} + \ldots + u_2 v_{n-1} \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad \underline{+ u_a v_1 + u_a v_2 + u_a v_3 + \ldots + u_a v_{b-1} + u_a v_b} & + u_a v_{b+1} \\
\quad + u_{a+1} v_1 + u_{a+1} v_2 + u_{a+1} v_3 + \ldots + u_{a+1} v_{b-1} + u_{a+1} v_b & \\
\quad + u_{a+2} v_1 + u_{a+2} v_2 + u_{a+2} v_3 + \ldots + u_{a+2} v_{b-1} & \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \\
\quad + u_{n-2} v_1 + u_{n-2} v_2 + u_{n-2} v_3 & \\
\quad + u_{n-1} v_1 + u_{n-1} v_2 & \\
\quad + u_n v_1 &
\end{array}$$

и, слѣдовательно,

$$\sigma_n - s_a t_b = u_1 (v_{b+1} + \ldots + v_n) + u_2 (v_{b+1} + \ldots + v_{n-1}) + \ldots + u_a v_{b+1} +$$
$$+ v_1 (u_{a+1} + \ldots + u_n) + v_2 (u_{a+1} + \ldots + u_{n-1}) + \ldots + v_b u_{a+1}.$$

Назвавъ буквою R наибольшій изъ модулей суммъ, помѣщенныхъ въ скобкахъ первой строчки, и назвавъ буквою ρ наибольшій изъ модулей суммъ, помѣщенныхъ въ скобкахъ второй строчки, найдемъ:

$$Mod(\sigma_n - s_a t_b) < (U_1 + U_2 + \ldots + U_a) R + (V_1 + V_2 + \ldots + V_b) \rho,$$

или, что то же,

$$Mod(\sigma_n - s_a t_b) < S_a R + T_b \rho;$$

откуда, подавно,

$$Mod(\sigma_n - s_a t_b) < SR + T\rho.$$

Но, по условіямъ теоремы, каждое изъ чиселъ R и ρ стремится къ нулю, при безграничномъ возрастаніи n; слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго одного и того же n,

$$R < \frac{\varepsilon}{4S}, \ \rho < \frac{\varepsilon}{4T};$$

а потому, начиная съ нѣкотораго n, будемъ имѣть постоянно:

$$Mod\,(\sigma_n - s_a t_b) < \frac{\varepsilon}{2},\ Mod\,(st - s_a t_b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Принявъ теперь во вниманіе, что

$$Mod(\sigma_n - st) = Mod\,[(\sigma_n - s_a t_b) - (st - s_a t_b)] < Mod\,(\sigma_n - s_a t_b) + \\ + Mod\,(st - s_a t_b) < \varepsilon,$$

заключаемъ, что $Mod\,(\sigma_n - st)$ стремится къ нулю, а слѣдовательно стремится къ нулю и разность $\sigma_n - st$, т.-е.

$$st = lim\,(\sigma_n)_{n=\infty},\ \text{ч. и т. д.}$$

Докажемъ теперь абсолютную сходимость ряда (3). Разсужденія наши показываютъ, что рядъ

$$C_1 = U_1 V_1,\ C_2 = (U_1 V_2 + V_1 U_2),\ C_3 = (U_1 V_3 + U_2 V_2 + U_3 V_1),\ \ldots$$

имѣетъ суммою произведеніе ST; слѣдовательно, есть рядъ сходящійся, а потому

$$lim\,(C_{n+1} + C_{n+2} + \ldots + C_{n+p})_{n=\infty} = 0.$$

Но $W_n < C_n$; слѣдовательно, и подавно,

$$lim\,(W_{n+1} + W_{n+2} + \ldots + W_{n+p})_{n=\infty} = 0,$$

т.-е. рядъ

$$W_1,\ W_2\ \ldots,\ W_n,\ \ldots$$

есть рядъ сходящійся, а потому рядъ

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n,\ \ldots$$

есть рядъ абсолютно сходящійся, *ч. и т. д.*

637. Замѣчаніе. Если каждый изъ данныхъ сходящихся рядовъ не есть рядъ абсолютно сходящійся, то теорема можетъ не существовать. Возьмемъ, въ самомъ дѣлѣ, два ряда:

$$1, -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{4}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ldots$$
$$1, -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{4}},\ \frac{1}{\sqrt{5}},\ \ldots,$$

сходящихся не абсолютно.

Образуемъ рядъ:

$$1, -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), -$$
$$-\left(\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right), \ldots,$$

общій членъ котораго равенъ:

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\frac{1}{\sqrt{3(n-2)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Этотъ общій членъ въ n разъ болѣе наименьшаго изъ своихъ членовъ, т.-е. болѣе $\sqrt{\dfrac{n}{\frac{n}{2}(n+1)}}$, когда n четное, и болѣе $\dfrac{n}{\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^1}=\dfrac{2n}{n+1}$, когда n нечетное. Въ обоихъ случаяхъ общій членъ ряда болѣе единицы, и, слѣдовательно, полученный рядъ не только не имѣетъ суммою произведеніе суммъ данныхъ рядовъ, но даже представляетъ рядъ расходящійся.

638. Знакоперемѣнные ряды. Разсмотримъ рядъ, члены котораго суть числа вещественныя, причемъ знаки этихъ членовъ чередуются, т.-е. члены эти попеременно положительные и отрицательные. Такой рядъ называется *знакоперемѣннымъ*. Относительно подобнаго ряда докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Для того, чтобы знакоперемѣнный рядъ*

$$u_1, -u_2, u_3, -u_4, \ldots, \pm u_n, \mp u_{n+1}, \ldots$$

былъ сходящійся, необходимо и достаточно, чтобы $Mod\,(u_n)$ *стремился къ нулю, при безграничномъ возрастаніи* n.

Условіе это *необходимо* для всякаго ряда (**620**).

Докажемъ, что условіе это и достаточно для разсматриваемаго ряда. Для этой цѣли достаточно показать, что

$$Mod\,(\pm u_n \mp u_{n+1} \pm u_{n+2} \mp \ldots \pm u_{n+p}) =$$
$$= Mod\,(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots \pm u_{n+p})$$

стремится къ нулю, при безграничномъ возрастаніи n и при всякомъ p.

Если p четное, то, на основаніи условія теоремы, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots + u_{n+p}) = (u_n - u_{n+1}) +$$
$$+ (u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots + u_{n+p} = u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - \ldots -$$
$$- (u_{n+p-1} - u_{n+p}).$$

Равенство это говоритъ, что, начиная съ нѣкотораго n,

$$0 < Mod(u_n - u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) < u_n. \qquad [a]$$

Если-же p нечетное, то, опять на основаніи условія теоремы, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \ldots - u_{n+p}) = (u_n - u_{n+1}) + \ldots +$$
$$+ (u_{n+p-1} - u_{n+p}) = u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - \ldots - (u_{n+p-2} - u_{n+p-1}) - u_{n+n},$$

и, слѣдовательно, начиная съ нѣкотораго n,

$$0 < Mod(u_n - u_{n+1} + \ldots - u_{n+q}) < u_n. \qquad [b]$$

Неравенства (a) и (b) говорятъ, что

$$Mod(\pm u_n \mp u_{n+1} \pm u_{n+2} \mp \ldots \pm u_{n+p}),$$

начиная съ нѣкотораго n, при всякомъ p, становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго даннаго числа, ибо $Mod(u_n)$ стремится къ нулю, т.-е. говорятъ, что данный рядъ есть рядъ сходящійся.

639. Замѣчаніе. Положимъ, что члены нашего ряда убываютъ, начиная съ перваго, или, другими словами, разсмотримъ нашъ рядъ съ того положительнаго члена, начиная съ котораго члены идутъ, убывая.

Разсмотримъ три ряда:

$$u_1,\ u_1 - u_2,\ u_1 - u_2 + u_3,\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4,\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5, \ldots \quad (1)$$
$$u_1,\qquad u_1 - u_2 + u_3,\qquad , u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5, \ldots \quad (2)$$
$$u_1 - u_2,\qquad u_1 - u_2 + u_3 - u_4,\qquad , \ldots \quad (3)$$

Предѣлъ, къ которому стремится рядъ (1), есть сумма разсматриваемаго ряда. Очевидно, что каждый изъ этихъ рядовъ стремится къ одному предѣлу. Но замѣтимъ, что рядъ (2) есть рядъ убывающій, ибо его члены положительные и суть:

$$u_1,\ u_1-(u_2-u_3), u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5),\ \ldots;$$

рядъ же (3) есть рядъ возрастающій, ибо его члены соотвѣтственно суть:

$$(u_1-u_2),\ (u_1-u_2)+(u_3-u_4),\ \ldots,$$

причемъ каждый членъ ряда (2) болѣе каждаго изъ членовъ ряда (3).

Отсюда слѣдуетъ, что если отнесемъ каждый изъ членовъ рядовъ (2) и (3) къ одной и той же единицѣ мѣры; отложимъ, на неопредѣленной прямой, начиная отъ нѣкоторой точки 0, длины:

$$0s_1,\ 0s_3,\ 0s_5,\ \ldots,$$

равныя соотвѣтственно членамъ ряда (2), и длины:

$$0s_2,\ 0s_4,\ 0s_6,\ \ldots,$$

равныя соотвѣтственно членамъ ряда (3), то точки $s_1, s_3, s_5, \ldots$, подвигаясь влѣво, займутъ одну область прямой; точки $s_2, s_4, s_6, \ldots$, подвигаясь вправо, займутъ другую область прямой; эти двѣ области будутъ отдѣляться нѣкоторою, такъ сказать, *демаркаціонною* точкою M, причемъ длина OM представитъ *сумму* разсматриваемаго ряда.

640. Границы ошибки. Возьмемъ рядъ

$$u_1, -u_2, u_3, \ldots\ldots$$

Найдемъ границы ошибки, которую сдѣлаемъ, взявъ, вмѣсто суммы s ряда, сумму нѣкотораго числа его членовъ. Разсмотримъ два случая. Положимъ, что мы *беремъ, вмѣсто* s, *сумму*

$$s_{i-1}=u_1-u_2+u_3-\ldots+u_{i-2}-u_{i-1},$$

въ которой послѣднее слагаемое есть отрицательный членъ ряда. Назовемъ ошибку буквою Δ, такъ что

$$\begin{aligned}\Delta=s-s_{i-1}&=\lim(u_i-u_{i+1}+u_{i+2}-u_{i+3}+\ldots)_{n=\infty}=\\&=\lim[(u_i-u_{i+1})+(u_{i+2}-u_{i+3})+\ldots]_{n=\infty}=\\&+\lim[u_i-(u_{i+1}-u_{i+2})-(u_{i+3}-u_{i+4})-\ldots]_{n=\infty}.\end{aligned}$$

Равенства эти говорятъ, что *ошибка будетъ положительною, при-*

чемъ модуль ея будетъ менѣе u_i, т.-е. менѣе числа, слѣдующаго за послѣднимъ слагаемымъ взятой, вмѣсто s, суммы.

Положимъ теперь, что мы *беремъ, вмѣсто s, сумму*

$$s_{i-1} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{i-2} + u_{i-1},$$

въ которой послѣднее слагаемое есть положительный членъ ряда.

Имѣемъ:

$$\Delta = s - s_{i-1} = lim(-u_i + u_{i+1} - u_{i+2} + u_{i+3} + \ldots)_{n=\infty} =$$
$$= - lim[(u_i - u_{i+1}) + (u_{i+2} - u_{i-3}) + \ldots)]_{n=\infty} =$$
$$= - lim[u_i - (u_{i+1} - u_{i+2}) - (u_{i+3} - u_{i+4}) - \ldots]_{n=\infty}.$$

Равенства эти говорятъ, что *ошибка будетъ отрицательная, причемъ модуль ея, опять таки, будетъ менѣе u_i, т.-е. менѣе числа, слѣдующаго за послѣднимъ слагаемымъ взятой, вмѣсто s, суммы.*

Итакъ, *ошибка будетъ имѣть всегда знакъ, одинаковый со знакомъ члена, слѣдующаго за тѣмъ, на которомъ остановились, и модуль ея будетъ менѣе этого члена.*

Упражненія.

Изслѣдовать сходимость и расходимость рядовъ:

1. $\frac{a}{m+p} + \frac{a^2}{m+2p} + \frac{a^3}{m+3p} + \ldots$

Расходящійся при $a > 1$ и сходящійся при $a < 1$. При $a = 1$ рядъ расходящійся. Въ этомъ убѣдимся, положивъ $m = kp$ и сравнивъ съ рядомъ: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

2. $\frac{1}{x(x+a)} + \frac{1}{(x+2a)\ (x+3a)} + \frac{1}{(x+4a)\ (x+5a)} + \ldots$

Рядъ, будучи равенъ $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+2a} - \ldots\right)$, есть рядъ сходящійся.

3. $\frac{3}{2}x + \frac{5x^2}{5} + \frac{7x^3}{10} + \frac{9x^4}{17} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2+1}x^n + \ldots$

Расходящійся при $x > 1$; сходящійся при $x < 1$. При $x = 1$ общій членъ $\frac{2n+1}{n^2+1}$ болѣе $\frac{1}{n}$; рядъ расходящійся.

4. $\frac{m+p}{a} + \frac{m+2p}{a^2} + \frac{m+3p}{a^3} + \ldots$

Сходящійся при $a > 1$, расходящійся при $a < 1$. При $a = 1$ рядъ очевидно расходящійся.

5. $(a+1)^2+(a+2)^2\,x+(a+3)^2\,x^2+\ldots$

Расходящійся при $x>1$, сходящійся при $x<1$. При $x=1$ рядъ очевидно расходящійся.

6. $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots$

Результатъ одинаковъ съ результатомъ упражненія (5).

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{4}}+\ldots$

Рядъ, будучи болѣе $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+4}+\ldots$, есть рядъ расходящіяся.

8. $\frac{x}{1+x^3}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^5}+\ldots$

Расходящійся при $x>1$, сходящійся при $x<1$. При $x=1$ очевидно расходящійся.

9. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\ldots$

10. $1^p+2^px+3^px^2+\ldots$

Расходящійся при $x>1$, сходящійся при $x<1$.

11. Въ рядѣ $u_0+u_1+u_2+\ldots$ члены идутъ, убывая. Доказать, что этотъ рядъ и рядъ:

$$u_0+2u_1+2^2u_3+2^3u_7+2^4u_{15}+\ldots$$

суть ряды вмѣстѣ сходящіеся и вмѣстѣ расходящіеся.

12. Доказать, что рядъ

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}+\frac{3}{4^n}+\ldots$$

сходящійся при $n>2$ и расходящійся при $n<2$. (на основаніи упражненія 11).

13. Если рядъ $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ есть рядъ сходящійся (знаки членовъ какіе угодно), то и рядъ $E_0u_0+E_1u_1+\ldots+E_nu_n\ldots$, гдѣ E_0, E_1, E_2, ... суть убывающія положительныя числа, есть рядъ сходящійся.

14. Показать, что рядъ

$$\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}+\ldots$$

есть рядъ сходящійся и что его сумма равна $\frac{1}{4}$.

15. Показать, что рядъ

$$1+\frac{1}{2(\log 2)^\alpha}+\frac{3}{3(\log 3)^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n(\log n)^\alpha}+\ldots$$

есть рядъ сходящійся при $\alpha>1$ и расходящійся при $\alpha\leqslant 1$ (на основаніи упражненія 11).

16. Показать, что рядъ

$$\frac{1}{2\log 2(\log\log 2)^{\alpha}}+\frac{1}{3\log 3(\log\log 3)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n\log n(\log\log n)^{\alpha}}+\ldots$$

есть рядъ сходящійся при $\alpha > 1$ и расходящійся при $\alpha \leqslant 1$ (на основаніи упражненія **11**).

17. Показать, что ряды

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$
$$au_a+a^2u_{a^2}+a^3u_{a^3}+\ldots+a^nu_{a^n}+\ldots$$

суть вмѣстѣ ряды сходящіеся и расходящіеся.

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Биномъ Ньютона для всякаго показателя.

---

§ 1. Биномъ Ньютона для цѣлаго и положительнаго показателя.

641. Произведеніе μ биномовъ вида $(1+x)$. Разсмотримъ произведеніе:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ .\ .\ .\ (1+x_\mu)$$

μ биномовъ, гдѣ $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\mu$ суть какія ни есть комплексныя числа, вещественныя или мнимыя.

Докажемъ, что произведеніе это тождественно полиному:

$$1+s_1+s_2+\ .\ .\ .+s_n+\ .\ .\ .+s_{\mu-2}+s_{\mu-1}+s_\mu,$$

въ которомъ буквы $s_1, s_2 \ldots, s_n, \ldots, s_{\mu-2}, s_{\mu-1}, s_\mu$ означаютъ соотвѣтственно суммы сочетаній порядковъ 1-го, 2-го, 3-го..., $n^{\text{аго}}$, ..., $(\mu-2)^{\text{аго}}$, $(\mu-1)^{\text{аго}}$, $\mu^{\text{аго}}$ изъ μ элементовъ:

$$x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ x_\mu.$$

Для доказательства справедливости тождества:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_\mu)=1+s_1+s_2+\ldots s_n+\ldots+s_{\mu-2}+s_{\mu-1}+s_\mu \quad (1),$$

предположимъ, что оно имѣетъ мѣсто для нѣкотораго значенія μ, и докажемъ, что оно будетъ имѣть мѣсто для значенія $(\mu+1)$, т.-е. докажемъ, при существованіи тождества (1), существованіе тождества:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_\mu)(1+x_{\mu+1})=$$
$$1+\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_n+\dots+\sigma_{\mu-1}+\sigma_\mu+\sigma_{\mu+1}, \qquad (2)$$

въ которомъ буквы $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots, \sigma_{\mu-1}, \sigma_\mu, \sigma_{\mu+1}$ означаютъ соотвѣтственно суммы сочетаній порядковъ $1^{го}, 2^{го}, \dots, n^{го}, \dots, (\mu-1)^{го}$, $\mu^{го}$, $(\mu+1)^{го}$ изъ элементовъ:

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}.$$

Для этой цѣли умножимъ обѣ части предполагаемаго тождества (1) на биномъ $(1+x_{\mu+1})$; умноженіе дастъ:

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_\mu)(1+x_{\mu+1})=1+(s_1+x_{\mu+1})+$$
$$+(s_2+s_1x_{\mu+1})+\dots+(s_n+s_{n-1}x_{\mu+1})+\dots+(s_{\mu-1}+$$
$$+s_{\mu-2}x_{\mu+1})+(s_\mu+s_{\mu-1}x_{\mu+1})+s_\mu x_{\mu+1}.$$

Но очевидно, что

$$s_1+x_{\mu+1}=\sigma_1,\quad s_2+s_1x_{\mu+1}=\sigma_2,\ \dots,\ s_n+s_{n-1}x_{n+1}=\sigma_n,\ \dots,$$
$$s_{\mu-1}+s_{\mu-1}x_{\mu+1}=\sigma_{\mu-1},\quad s_\mu+s_{\mu-1}x_{\mu+1}=\sigma_\mu,\quad s_\mu x_{\mu+1}=\sigma_{\mu+1},$$

а потому

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_\mu)(1+x_{\mu+1})=1+\sigma_1+\sigma_2+\dots+$$
$$+\sigma_n+\dots+\sigma_{\mu-1}+\sigma_\mu+\sigma_{\mu+1},$$

что мы и хотѣли показать.

Принимая теперь во вниманіе, что тождество (1) имѣетъ мѣсто для $\mu=2$, (это повѣряется непосредственно), заключаемъ, на основаніи тождества (2), что тождество (1) имѣетъ мѣсто для $\mu=3$, а отсюда, на основаніи тождества (2), заключаемъ, что тождество (1) имѣетъ мѣсто и для $\mu=4$, и т. д., т.-е. заключаемъ, что тождество (1) имѣетъ мѣсто для всякаго цѣлаго и положительнаго μ.

642. Биномъ Ньютона. При помощи тождества (1) мы можемъ представить выраженіе $(1+x)^\mu$, гдѣ μ есть цѣлое и положительное число, въ видѣ многочлена, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ x.

И въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ числа сочетаній изъ μ элементовъ порядковъ:

$$1^{\text{-го}},\ 2^{\text{-го}},\ 3^{\text{-го}},\ \ldots,\ n^{\text{-го}},\ \ldots,\ (\mu-2)^{\text{-го}},\ (\mu-1)^{\text{-го}},\ \mu^{\text{-го}}$$

соотвѣтственно символами:

$$(\mu)_1,\ (\mu)_2,\ (\mu)_3,\ \ldots,\ (\mu)_n,\ \ldots,\ (\mu)_{\mu-2},\ (\mu)_{\mu-1},\ (\mu)_\mu,$$

возьмемъ тождество (1) и положимъ въ немъ:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_\mu = x;$$

вслѣдствіе этого положенія лѣвая часть тождества обратится въ $(1+x)^\mu$; что же касается до суммъ, помѣщенныхъ въ правой части, то онѣ обращаются въ слѣдующія:

$$\begin{array}{llllll}
s_1 & = x + x + \ldots + x & = x & .(\mu)_1 & = (\mu)_1 & .x, \\
s_2 & = x^2 + x^2 + \ldots + x^2 & = x^2 & .(\mu)_2 & = (\mu)_2 & .x^2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_n & = x^n + x^n + \ldots + x^n & = x^n & .(\mu)_n & = (\mu)_n & .x^n, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
s_{\mu-2} & = x^{\mu-2} + x^{\mu-2} + \ldots + x^{\mu-2} & = x^{\mu-2} & .(\mu)_{\mu-2} & = (\mu)_{\mu-2} & .x^{\mu-2}, \\
s_{\mu-1} & = x^{\mu-1} + x^{\mu-1} + \ldots + x^{\mu-1} & = x^{\mu-1} & .(\mu)_{\mu-1} & = (\mu)_{\mu-1} & .x^{\mu-1}, \\
s_\mu & = x^\mu & = x^\mu & .(\mu)_\mu & = (\mu)_\mu & .x^\mu,
\end{array}$$

и тождество (1) преобразуется, наконецъ, въ такое:

$$\begin{aligned}(1+x)^\mu = 1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \ldots + (\mu)_n x^n + \ldots + \\ + (\mu)_{\mu-2} x^{\mu-2} + (\mu)_{\mu-1} x^{\mu-1} + (\mu)_\mu x^\mu.\end{aligned} \qquad (3)$$

Замѣняя символъ $(\mu)_n$ его значеніемъ (**332**):

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ \ldots\ (\mu-n+1)}{1.2.3\ \ldots\ n}$$

и принимая во вниманіе, что (**334**)

$$(\mu)_k = (\mu)_{\mu-k},$$

послѣдній членъ имѣетъ знакъ $(+)$, при четномъ μ, и знакъ $(-)$, при μ нечетномъ.

648. Замѣчаніе VI. Сдѣлавъ въ формулѣ [5] $a=1$, $b=1$, найдемъ:

$$2^{\mu}=1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}+\ \ldots\ +\frac{\mu}{1}+1,$$

т.-е. *сумма коэффиціентовъ разложенія равна* 2^{μ}.

Коэффиціенты разложенія называются *биноміальными.*

649. Замѣчаніе VII. Положивъ въ формулѣ (7) $a=1$, $b=-1$, получимъ:

$$0=1-\frac{\mu}{1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}-\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

т.-е. *сумма биноміальныхъ коэффиціентовъ четныхъ мѣстъ равна суммѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ мѣстъ нечетныхъ.*

650. Замѣчательныя соотношенія между биноміальными коэффиціентами. Разсмотримъ биноміальные коэффиціенты:

$$(\mu)_n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2.3\ldots n},\qquad (\nu)_m=\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-m+1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Если μ и ν суть числа цѣлыя и положительныя, то коэффиціенты эти представляютъ соотвѣтственно числа сочетаній порядковъ n и m изъ μ и ν элементовъ и фигурируютъ въ разложеніи биномовъ $(1+x)^{\mu}$ и $(1+x)^{\nu}$ въ многочлены, расположенные по степенямъ x.

Предположимъ теперь, что, въ разсматриваемыхъ выраженіяхъ $(\mu)_n$ и $(\nu)_m$, числа μ и ν суть какія ни есть числа, вещественныя или мнимыя, и докажемъ слѣдующее замѣчательное соотношеніе между этими выраженіями:

$$(\mu)_0(\nu)_n+(\mu)_1(\nu)_{n-1}+(\mu)_2(\nu)_{n-2}+\ldots+(\mu)_k(\nu)_{n-k}+\ldots(\mu)_{n-2}(\nu)_2+$$
$$+(\mu)_{n-1}(\nu)_1+(\mu)_n(\nu)_0=(\mu+\nu)_n, \qquad (1)$$

гдѣ n представляетъ какое ни есть цѣлое и положительное число, и гдѣ $(\mu)_0$ и $(\nu)_0$ суть символы, представляющіе число 1. Для доказательства справедливости соотношенія (1) предположимъ, что оно справедливо для нѣкотораго n, и покажемъ, что оно будетъ имѣть мѣсто для $(n+1)$, т.-е. покажемъ, что, при существованіи соотношенія (1), имѣетъ мѣсто и такое соотношеніе:

$$(\mu)_0(\nu)_{n+1}+(\mu)_1(\nu)_n+(\mu)_2(\nu)_{n-1}+\ldots+(\mu)_{n-1}(\nu)_2+$$
$$+(\mu)_n(\nu)_1+(\mu)_{n+1}(\nu)_0=(\mu+\nu)_{n+1}. \qquad (2)$$

Для этой цѣли замѣтимъ, что

$$(m)_{n+1} = (m)_n \cdot \frac{m-n}{n+1}; \tag{a}$$

равенство это дастъ:

$$(\mu+\nu)_{n+1} = (\mu+\nu)_n \cdot \frac{\mu+\nu-n}{n+1}; \tag{b}$$

оно дастъ также, сперва—по замѣнѣ n черезъ $(n-k)$ и m черезъ μ, и потомъ—по замѣнѣ m черезъ ν и n черезъ k, соотвѣтственно слѣдующія два равенства:

$$(\mu)_{n-k} \cdot (\mu - n + k) = (\mu)_{n-k+1} \cdot (n-k+1), \tag{c}$$

$$(\nu)_k \cdot (\nu - k) = (\nu)_{k+1} \cdot (k+1). \tag{d}$$

Внося теперь въ равенство (b) значеніе $(\mu+\nu)_n$ изъ предполагаемаго равенства (1); замѣтивъ, что лѣвая часть равенства (1) представляетъ сумму членовъ вида $(\nu)_k\,(\mu)_{n-k}$, для всѣхъ значеній значка k отъ 0 до n, и означивъ эту сумму знакомъ: $\sum\limits_{k=0}^{k=n}$, получимъ:

$$(\mu+\nu)_{n+1} = \frac{\mu+\nu-n}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_k \cdot (\mu)_{n-k}\right] = \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k} \cdot \frac{\mu+\nu-n}{n+1}\right].$$

Принимая во вниманіе, что

$$\frac{\mu+\nu-n}{n+1} = \frac{\mu+k-n}{n+1} + \frac{\nu-k}{n+1},$$

можемъ написать:

$$(\mu+\nu)_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k} \cdot \frac{\mu+k-n}{n+1}\right] + \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k} \cdot \frac{\nu-k}{n+1}\right].$$

Равенство это, при помощи равенствъ (c) и (d), можетъ написаться такимъ образомъ:

$$(\mu+\nu)_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k+1} \cdot \frac{n-k+1}{n+1}\right] + \sum_{k=0}^{k=n}\left[(\nu)_{k+1}(\mu)_{n-k} \cdot \frac{k+1}{n+1}\right].$$

Выдѣляя теперь изъ первой суммы слагаемое, соотвѣтствующее

$k=0$, и изъ второй суммы—слагаемое, соотвѣтствующее $k=n$, получимъ:

$$(\mu+\nu)_{n+1}=(\nu)_0(\mu)_{n+1}+\sum_{k=1}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k+1}\cdot\frac{n-k+1}{n+1}\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[(\nu)_{k+1}(\mu)_{n-k}\cdot\frac{k+1}{n+1}\right]+(\nu)_{n+1}(\mu)_0;$$

но

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}\left[(\nu)_{k+1}(\mu)_{n-k}\cdot\frac{k+1}{n+1}\right]=\sum_{k=1}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k+1}\cdot\frac{k}{n+1}\right],$$

а потому

$$(\mu+\nu)_{n+1}=(\nu)_0(\mu)_{n+1}+\sum_{k=1}^{k=n}\left[(\nu)_k(\mu)_{n-k+1}\right]+(\nu)_{n+1}(\mu)_0=$$
$$=(\nu)_0(\mu)_{n+1}+(\nu)_1(\mu)_n+(\nu)_2(\mu)_{n-1}+\ldots(\nu)_{n-1}(\mu)_2+(\nu)_n(\mu)_1+(\mu)_0(\nu)_{n+1},$$

т.-е. получили равенство (2).

Но равенство (1) непосредственно повѣряется при $n=2$, ибо

$$(\nu)_0\ (\mu)_2+(\nu)_1\ (\mu)_1+(\nu)_2\ (\mu)_0=\frac{\mu(\mu-1)}{1-2}+\mu\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 1}=$$
$$=\frac{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}{1\cdot 2}=(\mu+\nu)_2;$$

слѣдовательно, на основаніи равенства (2), можемъ утверждать, что равенство (1) имѣетъ мѣсто для $n=3$, а отсюда, на основаніи равенства (2), заключаемъ, что равенство (1) имѣетъ мѣсто и для $n=4$, и т. д., т.-е. заключаемъ, что равенство (1) имѣетъ мѣсто для всякаго цѣлаго и положительнаго n и для всякихъ значеній буквъ μ и ν, какъ вещественныхъ, такъ и мнимыхъ.

§ II. Биноміальная теорема.

651. Разсмотримъ рядъ

$$1,\ (\mu)_1x,\ (\mu)_2x^2,\ \ldots,\ (\mu)_{k-1}x^{k-1},\ \ldots,\ (\mu)_{n-1}x^{n-1},\ \ldots \qquad (1)$$

Если число μ есть число цѣлое и положительное, то число членовъ ряда есть число конечное, равное $(\mu+1)$, причемъ сумма этихъ членовъ равна $(1+x)^\mu$ (**642**). Если-же число μ не есть число цѣлое и положительное, то число членовъ ряда будетъ безгранично. Мы изучали этотъ рядъ (**627**), при условіяхъ, что μ есть число вещественное и что $Mod\,(x)$ менѣе единицы, и нашли, что рядъ есть рядъ абсолютно сходящійся. Обозначимъ:

$$\varphi(\mu, x) = lim\,[1 + (\mu)_1 x + (\mu)_2 x^2 + \ldots + (\mu)_{n-1} x^{n-1}]_{n=\infty}.$$

Согласно съ этимъ обозначеніемъ получимъ:

$$\varphi(\nu, x) = lim\,[1 + (\nu)_1 x + (\nu)_2 x^2 + \ldots (\nu)_{n-1} x^{n-1}]_{n=\infty},$$
$$\varphi(\mu+\nu, x) = lim\,[1 + (\mu+\nu)_1 x + (\mu+\nu)_2 x^2 + \ldots + (\mu+\nu)_{n-1} x^{n-1}]_{n=\infty}.$$

652. Относительно выраженія $\varphi(\mu, x)$ можемъ доказать слѣдующую теорему.

Теорема. *Выраженія*:

$$\varphi(\mu, x),\ \varphi(\nu, x),\ \varphi(\mu+\nu, x)$$

удовлетворяютъ слѣдующему равенству:

$$\varphi(\mu, x)\,.\,\varphi(\nu, x) = \varphi(\mu+\nu, x). \qquad (A)$$

И въ самомъ дѣлѣ, прилагая къ абсолютно сходящимся рядамъ, суммы которыхъ соотвѣтственно суть $\varphi(\mu, x)$ и $\varphi(\nu, x)$, теорему умноженія рядовъ (**636**), получимъ:

$$\varphi(\mu, x)\,.\,\varphi(\nu, x) = lim\{1 + [(\mu)_1 + (\nu)_1]x +$$
$$+ [(\mu)_2 + (\mu)_1(\nu)_1 + (\nu)_2]\,x^2 + \ldots + [(\mu)_{n-1} + (\mu)_{n-2}(\nu)_1 +$$
$$+ \ldots + (\mu)_1(\nu)_{n-2} + (\nu)_{n-1})]x^{n-1}\}_{n=\infty}.$$

Но мы видѣли (**650**), что

$$(\mu)_k + (\mu)_{k-1}(\nu)_1 + \ldots + (\mu)_1(\nu)_{k-1} + (\nu)_k = (\mu+\nu)_k;$$

слѣдовательно, предъидущее равенство можетъ написаться такимъ образомъ:

$$\varphi(\mu, x).\,\varphi(\nu, x) = lim[1 + (\mu+\nu)_1 x + (\mu+\nu)_2 x^2 + \ldots (\mu+\nu)_{n-1} x^{n-1}]_{n=\infty} =$$
$$= \varphi(\mu+\nu, x),\ \text{ч. и т. д.}$$

653. Равенство (A) можетъ быть обобщено, очевидно, такимъ образомъ:

$$\varphi(\mu_1, x)\,.\,\varphi(\mu_2, x)\ \ldots\ \varphi(\mu_p, x) = \varphi(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p, x). \qquad (B)$$

654. Доказавъ предъидущую теорему, докажемъ теперь теорему, которую назовемъ *биноміальною*.

Теорема. *Если число* μ *есть число вещественное, причемъ* $Mod(x) < 1$, *то сумма ряда:*

$$1,\ (\mu)_1 x,\ (\mu)_2 x^2,\ \ldots,\ (\mu)_{n-1} x^{n-1},$$

или, что то же, $\varphi(\mu, x)$ *равняется одному изъ значеній выраженія* $(1+x)^\mu$.

Теорема эта, въ случаѣ μ цѣлаго и положительнаго, имѣетъ мѣсто при всякомъ x (**642**).

Для доказательства нашей теоремы разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

Случай 1. *Число* μ *есть положительное, раціональное число* $\frac{r}{s}$, *гдѣ* r *и* s *суть цѣлыя и положительныя числа.*

Сдѣлавъ въ равенствѣ (B):

$$p = s,\ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p = \frac{r}{s},$$

получимъ:

$$\varphi\left(\frac{r}{s},\ x\right)^s = \varphi(r, x) = (1+x)^r,$$

т.-е.

$$\varphi\left(\frac{r}{s},\ x\right) = (1+x)^{\frac{r}{s}}.$$

Замѣнивъ здѣсь дробь $\frac{r}{s}$ буквою μ, получимъ:

$$\varphi(\mu,\ x) = (1+x)^\mu,$$

гдѣ правая часть представляетъ одно изъ значеній выраженія $(1+x)^\mu$. Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Случай 2. *Число* μ *есть отрицательное раціональное число.*

Положивъ, въ равенствѣ (A), $\nu = -\mu$, гдѣ $(-\mu)$ есть положительное раціональное число, и принявъ во вниманіе, что $\varphi(0, x) = 1$, найдемъ:

$$\varphi(\mu,\ x) \cdot \varphi(-\mu,\ x) = \varphi(0,\ x) = 1,$$

откуда

$$\varphi(\mu,\ x) = \frac{1}{\varphi(-\mu,\ x)} = \frac{1}{(1+x)^{-\mu}} = (1+x)^\mu.$$

Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Случай 3. *Число μ равно какому ни есть ирраціональному числу* Разсмотримъ число μ, какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots,$$

такъ что

$$Mod(\mu - r_n)$$

есть безконечно малое число.

Тождество (A) дастъ:

$$\varphi(\mu, x) = \varphi(r_n, x) \cdot \varphi(\mu - r_n, x),$$

откуда

$$\frac{\varphi(\mu, x)}{\varphi(r_n, x)} = \varphi(\mu - r_n, x).$$

Но мы видѣли (**635**), что

$$lim[\varphi(\mu - r_n, x)]_{n=\infty} = 1;$$

слѣдовательно,

$$\varphi(\mu, x) = lim[\varphi(r_n, x)]_{n=\infty} = lim[(1+x)^{r_n}]_{n=\infty} = (1+x)^{lim(r_n)_{n=\infty}} =$$

$$= (1+x)^{\mu}, \text{ ч. и т. д.}$$

Итакъ, *теорема доказана вполнѣ.*

655. Замѣчаніе. Остается еще сдѣлать замѣчаніе относительно того изъ значеній выраженія $(1+x)^{\mu}$, которое представляетъ значеніе нашего предѣла. Въ случаѣ вещественнаго аргумента вопросъ рѣшается просто при помощи тождества:

$$\varphi(\mu, x) = \varphi\left(\frac{\mu}{2}, x\right)^2,$$

которое говоритъ, что *число* $\varphi(\mu, x)$, *при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ аргумента, представляетъ число вещественное и положительное*, а потому изъ всѣхъ значеній выраженія $(1+x)^{\mu}$ должно быть принято вещественное и положительное, которое единственно. Въ случаѣ же мнимаго аргумента вопросъ усложняется, и мы его не трактуемъ.

При указанномъ ограниченіи мы можемъ, слѣдовательно, писать для всѣхъ вещественныхъ значеній x, модуль которыхъ менѣе единицы, слѣдующее равенство:

$$(1+x)^{\mu}=1+(\mu)_1 x+(\mu)_2 x^2+\ldots+(\mu)_n x^n+\ldots$$

656. Если $Mod\,a < Mod\,b$, то мы можемъ въ предъидущей формулѣ замѣнить букву x числомъ $\frac{a}{b}$, и тогда легко получимъ:

$$(a+b)^{\mu}=b^{\mu}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\mu}=b^{\mu}+(\mu)_1 b^{\mu-1}a+(\mu)_2 b^{\mu-2}a^2+\ldots+(\mu)_n b^{\mu-n}a^n+\ldots(E)$$

Если-же $Mod\,a > Mod\,b$, то мы можемъ въ формулѣ (D) замѣнить букву x числомъ $\frac{b}{a}$, и тогда найдемъ:

$$(a+b)^{\mu}=a^{\mu}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\mu}=a^{\mu}+(\mu)_1 a^{\mu-1}b+$$
$$+(\mu)_2 a^{\mu-2}b^2+\ldots+(\mu)_n a^{\mu-n}b^n+\ldots(F)$$

657. Приближенное вычисленіе корней. Доказанная выше биноміальная теорема позволяетъ вычислять корни съ какою угодно степенью точности. Дадимъ нѣсколько примѣровъ.

1°. *Вычислить* $\sqrt[3]{5}$. Имѣемъ:

$$6\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5\,.\,216}=\sqrt[3]{1080}=10\sqrt[3]{1+\frac{8}{100}}=10\left(1+\frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{3}};$$

отсюда, принимая во вниманіе, что $\frac{8}{100}$ менѣе единицы, получимъ **(655)**:

$$\sqrt[3]{5}=\frac{10}{6}\,lim\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\cdot\left(\frac{8}{100}\right)^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+2\right)}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{8}{100}\right)^{n-1}\right]_{n=\infty},$$

или, что то же,

$$\sqrt[3]{5}=\frac{10}{6}\,lim\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{1.2}\left(\frac{8}{100}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{1.2.3}\left(\frac{8}{100}\right)^3-\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}}{1.2.3.4}\left(\frac{8}{100}\right)^4+\ldots\right]_{n=\infty}.$$

Остановимся на членѣ $\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{1.2.3}\left(\dfrac{8}{100}\right)^3$, откинувъ всѣ остальные и означивъ модуль ошибки буквою Δ. Принимая во вниманіе, что рядъ, помѣщенный въ скобкахъ, есть рядъ знакоперемѣнный, причемъ первый изъ откинутыхъ членовъ имѣетъ знакъ отрицательный, заключаемъ (**640**), что ошибка будетъ отрицательная, съ модулемъ, меньшимъ откинутаго числа; отсюда слѣдуетъ, что, написавъ

$$\sqrt[3]{5}=\frac{10}{6}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{1.2}\left(\frac{8}{100}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{1.2.3}\left(\frac{8}{100}\right)^3-\Delta\right],$$

получимъ:

$$\Delta<\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}}{1.2.3.4}\left(\frac{8}{100}\right)^4.$$

Напишемъ неравенства:

$$\begin{array}{rcl}
1{,}00000\ 000 = & 1 & = 1{,}00000\ 000\\
0{,}02666\ 666 < & \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{100} & < 0{,}02666\ 667\\
-0{,}00071\ 112 < & -\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{1.2}\left(\dfrac{8}{100}\right)^2 & < -0{,}00071\ 111\\
0{,}00003\ 160 < & \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}}{1.2.3}\left(\dfrac{8}{100}\right)^3 & < 0{,}00003\ 161\\
-0{,}00000\ 168 < & -\Delta & < 0.
\end{array}$$

Сложивъ эти неравенства по частямъ и умноживъ каждую изъ суммъ на $\frac{10}{6}$, найдемъ:

$$1{,}70997\ 57<\sqrt[3]{5}<1{,}70997\ 87;$$

откуда, подавно,

$$1{,}70997<\sqrt[3]{5}<1{,}70998.$$

Неравенства эти говорятъ, что *числа 1, 70997 и 1, 70998 представляютъ значенія* $\sqrt[3]{5}$, *съ точностью до* $\frac{1}{100000}$, *съ недостаткомъ и съ избыткомъ*. Положивъ

$$\sqrt[3]{5}=1{,}70998,$$

сдѣлаемъ отрицательную ошибку, модуль которой будетъ менѣе числа $\frac{1}{2.10^5}$, ибо

$$1{,}70998 - \sqrt[3]{5} < 1{,}70998 - 1{,}7099757 < 0{,}000005, \text{ т.-е. } < \frac{1}{2 \cdot 10^5}.$$

2°. *Вычислить* $\sqrt[5]{33}$. Имѣемъ:

$$\sqrt[5]{33} = (32+1)^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\left(1+\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}},$$

или

$$\sqrt[5]{33} = 2lim\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{33}\right)^3 - \ldots\right]_{n=\infty}.$$

Рядъ, помѣщенный въ скобкахъ, есть рядъ знакоперемѣнный, и потому написавъ

$$\sqrt[5]{33} = 2\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} - \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{32}\right)^2 + \Delta\right],$$

получимъ:

$$\Delta < \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{32}\right)^3.$$

Имѣемъ:

$$\begin{array}{rcccl} 1{,}00000\ 0000 & = & 1 & = & 1{,}00000\ 0000 \\ 0{,}00625\ 0000 & = & \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{32} & = & 0{,}00625\ 0000 \\ -\,0{,}00007\ 8125 & = & -\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{32}\right)^2 & = & -\,0{,}00007\ 8125 \\ 0{,}00000\ 0000 & < & \Delta & < & 0{,}00000\ 147\ ; \end{array}$$

отсюда, по сложеніи и умноженіи каждой суммы на 2, получимъ:

$$2{,}01234\ 3750 < \sqrt[5]{33} < 2{,}01234\ 6690;$$

откуда, подавно,

$$2{,}01234 < \sqrt[5]{33} < 2{,}01235,$$

т.-е. числа 2, 01234 и 2,01235 суть значенія $\sqrt[5]{33}$, съ точностью до $\frac{1}{10^5}$, съ недостаткомъ и съ избыткомъ.

3°. *Вычислить* $\sqrt[5]{31}$. Имѣемъ:

$$\sqrt[5]{31}=(32-1)^{\frac{1}{5}}=2\left(1-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}=$$

$$=2\,lim\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{32}\right)^2-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}}{1\,.\,2\,.\,3}\left(\frac{1}{32}\right)^3-\ldots\right]_{n=\infty}.$$

Написавъ:

$$\sqrt[5]{31}=2\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{32}\right)^2-\Delta\right],$$

получимъ [**630**, (*h*)]:

$$0<\Delta<\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^3}{3\left(1-\frac{1}{32}\right)}.$$

Имѣемъ:

$$\begin{array}{lcl}
1{,}00000 & = \quad 1 & = \quad 1{,}00000\\
-\,0{,}00625 & =-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32} & =-\,0{,}00625\\
-\,0{,}00007\ 8125 & =-\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{1\,.\,2}\left(\frac{1}{32}\right)^2 & =-\,0{,}00007\ 8125\\
-\,0{,}00000\ 2100 & <-\quad\Delta & < \quad 0;
\end{array}$$

отсюда, по сложеніи и умноженіи каждой суммы на 2, получимъ:

$$1{,}98733\ 9550<\sqrt[5]{31}<1{,}98734\ 3750;$$

откуда, подавно,

$$1{,}9873<\sqrt[5]{31}<1{,}9874.$$

Принявъ $\sqrt[5]{31}=1{,}9873$, сдѣлаемъ положительную ошибку, меньшую числа $\frac{1}{2.10^4}$.

Упражненія.

1. Найти 5-ый членъ разложеніи $(a^2-b^2)^{12}$.

2. Найти 2001-ый членъ разложенія $\left(a^{\frac{3}{10}}+x^{\frac{3}{10}}\right)^{2002}$.

3. Найти 6-ой членъ разложенія $\left(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)^{10}$.

4. Написать разложеніе $\left(5-\frac{x}{6}\right)^6$.

5. Расположить $\left[a+\sqrt{a^2-1}\right]^6+\left[a-\sqrt{a^2-1}\right]^6$ по степенямъ a.

6. Найти коэффиціентъ при y въ разложеніи $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$.

7. Если A и B означаютъ соотвѣтственно сумму нечетныхъ членовъ и сумму четныхъ членовъ разложенія $(x+a)^n$, то $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$.

8. Показать, что разность между коэффиціентами при x^{r+1} и x^r въ разложеніи $(1+x)^{n+1}$ равна разности между коэффиціентами при x^{r+1} и x^{r-1} въ разложеніи $(1+x)^n$.

9. Показать, что средній членъ разложенія $(1+x)^{2n}$ равенъ

$$\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{1.2.3.\ldots.n}\,2^n x^n.$$

10. Найти биномъ, разложеніе котораго имѣло бы послѣдовательными членами: 2916, 4860, 4320, 2160. **Отв.** $(3+2)^6$.

11. Найти коэффиціентъ при x^r въ разложеніи $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$.

12. Написать коэффиціентъ пdи x^{2r-1} въ разложеніи $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

13. Найти r-овый членъ отъ начала, r-овый членъ отъ конца и оба среднихъ члена разложенія $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

14. Если $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$ представляютъ члены разложенія $(a+x)^n$, то

$$(t_0-t_2+t_4-\ldots)^2+(t_1-t_3+t_5-\ldots)^2=(a^2+x^2)^n.$$

Отв. На основаніи тождества:

$$(x^2+a^2)^n=(x+ai)^n(x-ai)^n=(A+Bi)(A-Bi)=A^2+B^2,$$

гдѣ i мнимый знакъ.

15. Показать, что коэффиціентъ при $a^\alpha\ \beta\ c^\gamma$ въ разложеніи $(a+b+c)^m$ равняется

$$\frac{1.2.3.\ldots.m}{1.2.3\ldots\alpha.\ 1.2.3\ldots\beta.\ 1.2.3\ldots\gamma}.$$

16. Показать, что общій членъ разложенія:

$$(u_1+u_2+u_3+\ldots+u_p)^m$$

есть

$$\frac{1.2.3.\ldots.m}{1.2.3\ldots\alpha_1.1.2.3\ldots\alpha_2.\ldots1.2.3\ldots.\alpha_p}.\ u_1^{\alpha_1}\,u_2^{\alpha_2}\ldots u_p^{\alpha_p},$$

причемъ все разложеніе состоитъ изъ членовъ, аналогичныхъ общему и соотвѣтствующихъ всѣмъ значеніямъ буквъ: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, сумма которыхъ равна p.

17. Найти коэффиціентъ при x въ разложеніи $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$.

18. Найти коэффиціенты при x^5, x^4, x^{14}, x^8, $ab^2c^3d^4$ соотвѣтственно въ разложеніяхъ $(2-3x-4x^2)^5$, $(2-5x-7x^2)^5$, $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$, $(1-2x+3x^2-4x^3)^4$, $(a-b+c-d)^{10}$.

19. Найти число x членовъ разложенія $(a+b+c)^m$ и число y членовъ разложенія $(a+b+c+d)^m$.

20. Показать, что если S_m означаетъ сумму m-овыхъ степеней членовъ ариѳметической прогрессіи:

$$\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p,$$

то

$$a_{p+1}^{m+1} = a_1^{m+1} + (m+1)rS_m + \frac{(m+1)m}{1.2} r^2 S_{m-1} + \ldots + pr^{m+1}.$$

21. Найти сумму квадратовъ и сумму кубовъ n первыхъ чиселъ.

22. Повѣрить справедливость формулы:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4} -$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6} + \ldots$$

$$+(-1)^p \frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p} + \ldots,$$

предположивъ, что она, будучи справедливою для нѣкотораго значенія n, будетъ справедлива и для непосредственно высшаго значенія n.

23. Доказать формулу:

$$1.2.3\ldots m = (m+1)^m - m.m^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m -$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m + \ldots$$

способомъ, аналогичнымъ предъидущему.

24. Найти наибольшій членъ разложенія $(x+a)^m$.

Отв. Онъ равенъ $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} a^p x^{m-p}$,

гдѣ $p = E\dfrac{(m+1)a}{x+a}$.

25. Найти сумму квадратовъ биноміальныхъ коэффиціентовъ.

Отв. Она равна коэффиціенту при $a^m x^m$ въ разложеніи $(x+a)^{2m}$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

Ряды для вычисленія логариѳмовъ.

658. Въ этой главѣ мы дадимъ способы вычислять логариѳмы чиселъ съ какою угодно степенью точности. Въ нижеслѣдующемъ будемъ понимать подъ буквою x вещественное число.

659. Лемма I. *Предѣлъ логариѳма перемѣннаго числа равенъ логариѳму предѣла этого числа.*

Положимъ, что перемѣнное число x_n, принимая положительныя значенія:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1}$$

стремится къ предѣлу x; предѣлъ этотъ будетъ положительнымъ **(167)**.

Составимъ рядъ:

$$\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n, \ldots \tag{2}$$

и докажемъ, что рядъ этотъ стремится къ предѣлу, равному $\log x$.

И въ самомъ дѣлѣ, назовемъ:

$$\log x = y, \log x_n = y_n;$$

отсюда, означивъ основаніе логариѳмовъ буквою A, получимъ:

$$x = A^y, \; x_n = A^{y_n},$$

что дастъ:

$$x - x_n = A^y - A^{y_n} = A^y \left(1 - A^{y_n - y}\right).$$

Но, по условію, начиная съ нѣкотораго n,

$$Mod(x - x_n) < A^y \varepsilon,$$

гдѣ ε какое угодно положительное число; слѣдовательно,

$$Mod\left[A^y\left(1 - A^{y_n - y}\right)\right] < A^y \varepsilon.$$

Неравенство это даетъ:

$$Mod\left(1 - A^{y_n - y}\right) < \varepsilon$$

и показываетъ, что

$$lim\left(A^{y_n - y}\right) = 1.$$

Равенство это говоритъ, что показатель $(y_n - y)$ стремится къ предѣлу, и предѣлъ этотъ равенъ нулю. Итакъ,

$$lim\,(y_n - y)_{n=\infty} = 0, \text{ т.-е. } y = lim\,(y_n)_{n=\infty}, \text{ или}$$

$$\log\left[lim\,(x_n)_{n=\infty}\right] = lim\,\left[\log x_n\right]_{n=\infty}, \text{ ч. и т. д.}$$

660. Лемма II. *Если число μ стремится къ нулю, по какому ни есть закону, то число*

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}$$

стремится къ предѣлу, равному натуральному логариѳму числа $1 + x$.

Положимъ, что

$$(1 + x)^\mu = 1 + \alpha,$$

гдѣ α есть перемѣнное число, стремящееся, вмѣстѣ съ μ, къ нулю. Взявъ натуральные логариѳмы обѣихъ частей этого равенства въ предположеніи, что, при отрицательномъ x, модуль его менѣе числа **1**, получимъ:

$$\mu \log(1 + x) = \log(1 + \alpha), \text{ откуда } \mu = \frac{\log(1+\alpha)}{\log(1+x)}.$$

На основаніи этого равенства мы можемъ написать:

$$lim\left[\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu}\right]_{\mu=0} = lim\left[\frac{\alpha \log(1+x)}{\log(1+\alpha)}\right]_{\alpha=0} =$$

$$= \log(1 + x)\, lim\left[\frac{1}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]_{\alpha=0}.$$

Но принимая во вниманіе, что (**659, 592**)

$$lim\left[\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha=0} = \log\left[lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]_{\alpha=0} = \log e = 1,$$

получимъ

$$lim\left[\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu}\right]_{\mu=0} = \log(1+x), \text{ ч. и т. д.} \qquad (1)$$

Перемѣнивъ въ этомъ равенствѣ букву x на $(-x)$, найдемъ:

$$lim\left[\frac{(1-x)^{\mu}-1}{\mu}\right]_{\mu=0} = \log(1-x). \qquad (2)$$

661. Теорема. *Если модуль числа x есть число, меньшее единицы, то* $\log(1+x)$ *есть предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное число*

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

при неопредѣленномъ возрастаніи n.

Разсмотримъ сумму (**627**):

$$\sigma_k = 1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots + \mu_{k-1} x^{k-1}$$

и положимъ, что μ есть число, модуль котораго менѣе 1. Мы имѣли (**630**), что

$$Mod\left[(1+x)^{\mu} - \sigma_k\right] < \frac{Mod(\mu)\,(Mod\,x)^k}{k(1-Mod\,x)}.$$

Неравенство это дастъ:

$$Mod\left[\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu} - \frac{\sigma_k - 1}{\mu}\right] < \frac{(Mod\,x)^k}{k\,(1-Mod\,x)}. \qquad (3)$$

Положимъ теперь, что число μ стремится къ нулю, причемъ x и k остаются неизмѣнными. Мы видѣли (**660**), что число

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{\mu}$$

приближается къ предѣлу, равному $\log(1+x)$. Посмотримъ, къ какому предѣлу стремится число $\frac{\sigma_k - 1}{\mu}$?

Безъ особаго затрудненія найдемъ:

$$\frac{\sigma_k - 1}{\mu} = x - (1-\mu)\frac{x^2}{2} + (1-\mu)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{k-2}(1-\mu)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\mu}{k-2}\right)\frac{x^{k-1}}{k-1}.$$

Принявъ во вниманіе, что, при стремленіи μ къ нулю, каждый изъ множителей:

$$1-\mu,\ 1-\frac{\mu}{2},\ \ldots,\ 1-\frac{\mu}{k-2},$$

при постоянномъ k, стремится къ нулю, получимъ:

$$lim\left(\frac{\sigma_k - 1}{\mu}\right)_{\mu=0} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k-2}\frac{x^{k-1}}{k-1}.$$

Неравенство (3), имѣя мѣсто при всякомъ μ, модуль котораго менѣе 1, будетъ имѣть, слѣдовательно, мѣсто и въ предѣлѣ **(167)**, такъ что

$$Mod\left[\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k-2}\frac{x^{k-1}}{k-1}\right)\right] <$$
$$< \frac{(Mod\,x)^k}{k(1-Mod\,x)}. \qquad (4)$$

Положимъ теперь, что число k есть перемѣнное число, неопредѣленно возрастающее.

При этомъ предположеніи правая часть неравенства стремится къ нулю **(160, 7°)**, и, слѣдовательно,

$$\log(1+x) = lim\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_{n=\infty}, \qquad (5)$$

ч. и т. д.

Если въ равенствѣ (5) сдѣлаемъ x равнымъ $(-x)$, то найдемъ:

$$\log(1-x) = lim\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n}\right]_{n=\infty}. \qquad (6)$$

662. Предположивъ въ равенствахъ (5) и (6) число n нечетнымъ и вычтя эти равенства по частямъ, получимъ:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\,lim\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right]_{n=\infty}, \qquad (7)$$

гдѣ n неопредѣленно возрастаетъ, принимая нечетныя значенія.

663. Положимъ, что

$$\frac{1+x}{1-x}=N,$$

гдѣ N есть произвольное положительное число. Равенство это даетъ:

$$x=\frac{N-1}{N+1}.$$

Такъ какъ N есть положительное число, то $\mathrm{Mod}\,(x)$ менѣе числа 1, и, слѣдовательно, въ формулу (7) мы можемъ внести, вмѣсто x, число $\frac{N-1}{N+1}$, что дастъ:

$$\log N = lim\left[2\left(\frac{N-1}{N+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3+\ldots+\frac{2}{n}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^n\right]_{n=\infty}. \quad (8)$$

Формула эта позволяетъ вычислять натуральный логариѳмъ произвольнаго положительнаго числа N съ ошибкою, границы модуля которой могутъ быть указаны.

И въ самомъ дѣлѣ, примемъ

$$\log N = 2\left(\frac{N-1}{N+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3+\ldots+\frac{2}{2l+1}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+1}+\Delta. \quad (9)$$

Если въ правой части равенства отбросимъ Δ, то ошибка, которую при этомъ сдѣлаемъ, выразится числомъ:

$$\Delta=\log N-2\left[\left(\frac{N-1}{N+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2l+1}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+1}\right].$$

Число это, на основанiи равенства (8), представится такимъ образомъ:

$$\Delta = lim\left[\frac{2}{2l+3}\cdot\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+3}+\frac{2}{2l+5}\cdot\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+5}+\ldots\right].$$

Но ясно, что

$$Mod\,\Delta < lim\left[\frac{2}{2l+3}\left(Mod\,\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+3}+\frac{2}{2l+3}\left(Mod\,\frac{N-1}{N+1}\right)^{2l+5}+\ldots\right],$$

или, наконецъ (**564**),

$$Mod\,\Delta < Mod\left[\frac{2(N-1)^{2l+3}}{(2l+3)\,(N+1)^{2l+3}\left[1-\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2\right]}\right]. \quad (10)$$

664. Обозначивъ буквою a вещественное положительное число, большее единицы, и положивъ въ формулахъ (9) и (10)

$$\frac{N-1}{N+1}=\frac{1}{a}, \text{ откуда } N=\frac{a+1}{a-1},$$

найдемъ:

$$\log\frac{a+1}{a-1}=2.\frac{1}{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a^3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{a^5}+\ldots+\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{1}{a^{2l+1}}+\Delta, \quad (9')$$

причемъ положительное число Δ удовлетворитъ неравенству:

$$\Delta<\left[\frac{2}{2l+3}\cdot\frac{1}{a^{2l+1}}\cdot\frac{1}{a^2-1}\right]. \quad (10')$$

Если число $a\geqslant 100$, то, принявъ $l=1$, найдемъ:

$$\log\frac{a+1}{a-1}=2.\frac{1}{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a^3}+\Delta, \quad (11)$$

причемъ положительное число Δ удовлетворяетъ неравенству:

$$\Delta<0,0000000005.$$

Если число $a\geqslant 10000$, то, принявъ $l=0$, найдемъ:

$$\log\frac{a+1}{a-1}=2\ \frac{1}{a}+\Delta, \quad (12)$$

причемъ положительное число Δ удовлетворяетъ неравенству:

$$\Delta<0,0000000000007.$$

665. Мы знаемъ, что, для полученія обыкновеннаго логариѳма числа, достаточно умножить натуральный логариѳмъ этого числа на число M, равное $\frac{1}{\log 10}$ и называемое модулемъ обыкновенной системы логариѳмовъ (**593**). Вычислимъ это число. Для этой цѣли вычислимъ сперва $\log 10$.

Положивъ въ равенствѣ (9′) и въ неравенствѣ (10′) $a=3$ и $l=9$, получимъ:

$$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\ldots+\frac{1}{19}\left(\frac{1}{3}\right)^{19}\right]+\Delta,$$

причемъ

$$\Delta<\frac{1}{2^2.3^{20}.7}.$$

Сдѣлавъ же $a=9$ и $l=4$, найдемъ:

$$\log\frac{10}{8}=2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^9\right]+\Delta_1,$$

причемъ

$$\Delta_1 < \frac{1}{2^3.3^{18}.5.11}.$$

Послѣднія два равенства дадутъ:

$$\log 10 = \left[\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3.3^6} + \frac{2}{5.3^{10}} + \frac{2}{7.3^{14}} + \frac{2}{9.3^{18}}\right] + \Delta_1 +$$
$$+ \left[2 + \frac{2}{3.3^2} + \frac{2}{5.3^4} + \ldots + \frac{2}{19.3^{18}}\right] + 3\Delta.$$

Напишемъ слѣдующія неравенства:

$$\begin{array}{llll c llll}
2, & 00000 & 00000 & 0 & = 2 = & 2, & 00000 & 00000 & 0 \\
0, & 07407 & 40740 & 7 & < \frac{2}{3.3^2} < & 0, & 07407 & 40740 & 8 \\
0, & 00493 & 82716 & 0 & < \frac{2}{5.3^4} < & 0, & 00493 & 82716 & 1 \\
0, & 00039 & 19263 & 1 & < \frac{2}{7.3^6} < & 0, & 00039 & 19263 & 2 \\
0, & 00003 & 38701 & 7 & < \frac{2}{9.3^8} < & 0, & 00003 & 38701 & 8 \\
0, & 00000 & 30791 & 0 & < \frac{2}{11.3^{10}} < & 0, & 00000 & 30791 & 1 \\
0, & 00000 & 02894 & 8 & < \frac{2}{13.3^{12}} < & 0, & 00000 & 02894 & 9 \\
0, & 00000 & 00278 & 7 & < \frac{2}{15.3^{14}} < & 0, & 00000 & 00278 & 8 \\
0, & 00000 & 00027 & 3 & < \frac{2}{17.3^{16}} < & 0, & 00000 & 00027 & 4 \\
0, & 00000 & 00002 & 7 & < \frac{2}{19.3^{18}} < & 0, & 00000 & 00002 & 8 \\
0, & 00000 & 00000 & 0 & < 3\Delta < & 0, & 00000 & 00000 & 4 \\
0, & 22222 & 22222 & 2 & < \frac{2}{3^2} < & 0, & 22222 & 22222 & 3 \\
0, & 00091 & 44947 & 4 & < \frac{2}{3.3^6} < & 0, & 00091 & 44947 & 5 \\
0, & 00000 & 67740 & 3 & < \frac{2}{5.3^{10}} < & 0, & 00000 & 67740 & 4 \\
0, & 00000 & 00597 & 3 & < \frac{2}{7.3^{14}} < & 0, & 00000 & 00597 & 4 \\
0, & 00000 & 00005 & 7 & < \frac{2}{9.3^{18}} < & 0, & 00000 & 00005 & 8 \\
0, & 00000 & 00000 & 0 & < \Delta_1 < & 0, & 00000 & 00000 & 1.
\end{array}$$

Сложивъ эти неравенства по частямъ, получимъ:

$$2,\ 30258\ 50928\ 9 < \log\ 10 < 2,\ 30258\ 50930\ 8,$$

или

$$2,\ 30258509 < \log\ 10 < 2,\ 30258510,$$

т.-е. числа 2,30258509 и 2,30258510 суть натуральные логариѳмы числа 10, съ точностью до 0,00000001, съ недостаткомъ и съ избыткомъ.

Принявъ $\log 10 = 2{,}30258509$, сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{2.10^8}$.

Вычисливъ $\log 10$, опредѣлимъ модуль M. Предъидущія неравенства дадутъ:

$$\frac{1}{2,30258\ 50930\ 8} < M < \frac{1}{2,30258\ 50928\ 9},$$

или

$$0,43429\ \ 44 < M < 0,43429\ \ 45,$$

причемъ число M ближе къ числу 0,43429 45, чѣмъ къ числу 0,43429 44. Болѣе точное вычисленіе дало бы, напримѣръ,

$$0,43429\ \ 44819\ \ 032 < M < 0,43429\ \ 44819\ \ 033.$$

666. Умноживъ обѣ части каждаго изъ равенствъ (9′), (11) и (12) на M и обозначивъ обыкновенный логариѳмъ знакомъ Log, получимъ для всякаго числа a, большаго единицы,

$$\operatorname{Log} \frac{a+1}{a-1} = M\left[2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{1}{a^{2l+1}}\right] + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta < M \cdot \left[\frac{2}{2l+3} \cdot \frac{1}{a^{2l+1}} \cdot \frac{1}{a^2-1}\right].$$

Если число $a \geqslant 100$, то

$$\operatorname{Log} \frac{a+1}{a-1} = M\left[2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^3}\right] + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta < M \cdot 0,\ 00000\ 000005.$$

Если число $a \geqslant 10000$, то

$$\operatorname{Log} \frac{a+1}{a-1} = \frac{2M}{a} + \Delta,$$

гдѣ

$$\Delta < M \cdot 0,\ 000000000007.$$

Положивъ, напримѣръ, въ послѣднемъ равенствѣ $a = 10001$, получимъ:

$$\text{Log}\,10002 = \frac{2M}{100001} + \Delta + 4.$$

Имѣемъ слѣдующія неравенства:

$$4,\ 00000\ 00000\ 000 = \quad 4 \quad = 4,\ 00000\ 00000\ 000$$
$$0,\ 00000\ 00000\ 000 < \quad \Delta \quad < 0,\ 00000\ 00000\ 004$$
$$0,\ 00008\ 68502\ 813 < \frac{2M}{10001} < 0,\ 00008\ 68502\ 814.$$

Сложивъ эти неравенства по частямъ, получимъ:

$$4,\ 00008\ 68502\ 813 < \text{Log}\,10002 < 4,\ 00008\ 68502\ 818;$$

откуда, для семизначнаго логариѳма,

$$4,\ 0000868 < \text{Log}\,10002 < 4,\ 0000869.$$

Принявъ

$$\text{Log}\,10002 = 4,\ 0000869,$$

сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{2.10^7}$. Этотъ результатъ помѣщенъ въ семизначныхъ логариѳмическихъ таблицахъ.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Ряды для вычисленія чиселъ по даннымъ логариѳмамъ.

667. Предѣлъ выраженія $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$. Мы видѣли (**592**), что выраженіе $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, при стремленіи m къ безконечности по какому ни есть закону, стремится къ одному и тому же предѣлу, представляющему основаніе натуральной системы логариѳмовъ и обозначаемому буквою e.

Относительно этого числа e докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Число e равно предѣлу, къ которому стремится сумма*

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

когда цѣлое и положительное число n стремится къ безконечности.

Для доказательства разсмотримъ выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

и, предположивъ число m цѣлымъ и положительнымъ, развернемъ это выраженіе по Биному Ньютона (**642**).

Получимъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2}+\ldots+ \\ +\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{1}{m^n}+R,$$

гдѣ n не превышаетъ числа m и гдѣ R представляетъ сумму остальныхъ $(m-n)$ членовъ.

Предъидущее равенство можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}\right]=R, \qquad (1)$$

гдѣ

$$R=\left[\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{m}\right)}{1.2.3\ldots(n+1)}\right]+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{1.2.3\ldots(n+2)}+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots m}.$$

Очевидно, что R удовлетворяетъ слѣдующимъ неравенствамъ:

$$0<R<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{m-1}},$$

или, подавно, такимъ неравенствамъ (**564**):

$$0<R<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Вслѣдствіе этихъ неравенствъ равенство (1) дастъ:

$$0<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots}{1.2.3}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}\right]<\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (2)$$

Предположимъ, чти число m стремится къ безконечности, при чемъ число n остается, покамѣсть, постояннымъ; тогда перемѣнное число

$$\Omega=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m-\left[1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}\right]$$

будетъ стремиться къ предѣлу:

$$lim\,(\Omega)_{m=\infty}=e-\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right).$$

Принимая теперь во вниманіе, что перемѣнное число Ω, какъ показываютъ неравенства (2), остается постоянно болѣе O и менѣе $\frac{1}{2^{n-1}}$, заключаемъ, что и предѣлъ его есть число положительное, меньшее $\frac{1}{2^{n-1}}$. Итакъ,

$$0<e-\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)<\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (3)$$

Неравенства (3) существуютъ при всякомъ цѣломъ и положительномъ n.

Предположимъ теперь, что число n неопредѣленно возрастаетъ; тогда модуль разности между постояннымъ числомъ e и перемѣннымъ числомъ

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

будучи, какъ показываютъ неравенства (3), менѣе числа $\frac{1}{2^{n-1}}$, становится и продолжаетъ быть менѣе всякаго заданнаго положительнаго числа ε.

Этотъ результатъ говоритъ, что постоянное число e есть предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное число

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

при безграничномъ возрастаніи n, ч. и. т. д.

668. Разсмотримъ рядъ:

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{1.2},\ \ldots,\ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},\ \ldots$$

Мы изучали этотъ рядъ (**632**) и нашли, что онъ абсолютно сходящійся при всякомъ значеніи буквы x, какъ вещественномъ, такъ и мнимомъ.

Обозначимъ:

$$\varphi(x)=lim\left[1+x+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]_{n=\infty}.$$

Согласно съ этимъ обозначенiемъ можемъ писать:

$$\varphi(y)=lim\left[1+y+\frac{y^2}{1.2}+\ldots+\frac{y^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]_{n=\infty},$$

$$\varphi(x+y)=lim\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(x+y)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]_{n=\infty}.$$

669. Относительно выраженiя $\varphi(x)$ мы можемъ доказать слѣдующую теорему.

Теорема. *Выраженiя*

$$\varphi(x),\ \varphi(y)\ \textit{и}\ \varphi(x+y)$$

удовлетворяютъ слѣдующему равенству:

$$\varphi(x).\varphi(y)=\varphi(x+y). \qquad (A)$$

И въ самомъ дѣлѣ, прилагая къ абсолютно сходящимся рядамъ, суммы которыхъ соотвѣтственно суть $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, теорему умноженiя рядовъ (**636**), получимъ:

$$\varphi(x).\varphi(y)=lim\left[1+(x+y)+\frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)\right]_{n=\infty}=$$

$$=lim\left[1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{1.2}+\ldots+\frac{(x+y)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]_{n=\infty},$$

или, что то же,

$$\varphi(x).\varphi(y)=\varphi(x+y),\ \text{ч. и т. д.}$$

670. Равенство (A) можетъ быть обобщено такимъ образомъ:

$$\varphi(x_1).\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_q)=\varphi(x_1+x_2+\ldots+x_q). \qquad (B)$$

671. Доказавъ предъидущую теорему, докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема. *Сумма ряда:*

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{1.2},\ \ldots,\ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},\ \ldots,$$

или, что то же, $\varphi(x)$ *равняется, при вещественномъ значенiи* x, *степени основанiя* e *натуральныхъ логариѳмовъ, показатель которой есть* x, *т.-е. равняется* e^x.

Для доказательства теоремы разсмотримъ нѣсколько случаевъ.

Случай I. *Число x есть число цѣлое и положительное.* Положивъ въ равенствѣ (B):

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 1,\ q = x,$$

найдемъ:

$$[\varphi(1)]^x = \varphi(x).$$

Но

$$\varphi(1) = \lim\left[1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\right]_{n=\infty} = e;$$

слѣдовательно,

$$\varphi(x) = e^x.$$

Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Случай 2. *Число x есть положительное раціональное число $\frac{r}{s}$, гдѣ r и s суть числа цѣлыя и положительныя.* Положивъ въ равенствѣ (B):

$$q = s,\ x_1 = x_2 = \ldots = x_q = \frac{r}{s},$$

получимъ:

$$\left[\varphi\left(\frac{r}{s}\right)\right]^s = \varphi(r) = e^r,$$

откуда

$$\varphi\left(\frac{r}{s}\right) = e^{\frac{r}{s}},\ \text{или, что то же,}\ \varphi(x) = e^x.$$

Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Случай 3. *Число x есть отрицательное раціональное число.* Положивъ, въ равенствѣ (A), $y = -x$, гдѣ $(-x)$ есть отрицательное раціональное число, и принявъ во вниманіе, что $\varphi(0) = 1$, найдемъ:

$$\varphi(x) \cdot \varphi(-x) = \varphi(0) = 1,$$

откуда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varphi(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

Теорема для разсматриваемаго случая доказана.

Случай 4. *Число x равно какому ни есть ирраціональному числу.* Разсмотримъ число x, какъ предѣлъ ряда раціональныхъ чиселъ:

$$x_1,\ x_2,\ .\ .\ .\ ,\ x_n,\ .\ .\ .\ ,$$

такъ что

$$Mod\,(x - x_n)$$

есть безконечно малое число.

Тождество (A) даетъ:

$$\varphi(x) = \varphi(x_n)\,.\,\varphi(x - x_n),$$

откуда

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)} = \varphi(x - x_n).$$

Но мы видѣли (**635**), что $lim[\varphi(x - x_n)]_{n=\infty} = 1$; слѣдовательно,

$$\varphi(x) = lim\left[\varphi(x_n)\right]_{n=\infty} = lim\left(e^{x_n}\right)_{n=\infty} = e^{lim\,(x_n)_{n=\infty}} = e^{x}.$$

Теорема доказана вообще.

672. Итакъ, мы доказали, что, для всякаго вещественнаго значенія буквы x, имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$e^x = lim\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\right)_{n=\infty}.$$

Мы видѣли (**633**), что если примемъ:

$$(1) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ .\ .\ . + \frac{x^{k-1}}{1.2.3\ldots(k-1)} + \Delta,$$

то границы модуля Δ опредѣлятся слѣдующими неравенствами:

$$(2) \qquad 0 < Mod\,\Delta < \frac{[Mod\,(x)]^k}{1.2.3\ldots k\left(1 - \frac{Mod\,(x)}{k+1}\right)}.$$

Равенство (1) и неравенства (2) позволяютъ вычислять число e съ погрѣшностью, размѣры которой могутъ быть указаны.

673. Разсмотримъ какое ни есть положительное число A; обозначивъ его натуральный и обыкновенный логариѳмы соотвѣтственно черезъ $\log A$ и $\mathrm{Log}\, A$, получимъ:

$$A = e^{\log A} = e^{\frac{\mathrm{Log}\, A}{M}}.$$

Внеся въ равенство (1) и въ неравенство (2), вмѣсто буквы x, число $\frac{\mathrm{Log} A}{M}$, найдемъ:

$$(3)\quad A = 1 + \frac{\mathrm{Log} A}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\mathrm{Log} A}{M}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\left(\frac{\mathrm{Log} A}{M}\right)^{k-1} + \Delta,$$

причемъ

$$(4)\qquad 0 < Mod\,\Delta < \frac{\left[\frac{Mod\,(\mathrm{Log}\, A)}{M}\right]^k}{1.2.3\ldots k.\left[1 - \frac{Mod\,(\mathrm{Log}\, A)}{M(k+1)}\right]}.$$

Равенство (3) опредѣляетъ число A по данному его обыкновенному логариѳму, причемъ границы модуля погрѣшности, которую мы сдѣлаемъ, отбросивъ Δ, указываются неравенствами (4).

674. Дадимъ два примѣра вычисленій.

Примѣръ 1. Вычислить e съ точностью до $\frac{1}{2.10^8}$.

Положивъ въ равенствѣ (1) $x = 1$ и $k = 13$, получимъ:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3.4\ldots12} + \Delta,$$

причемъ

$$0 < \Delta < \frac{1}{1.2.3\ldots13\left(1 - \frac{1}{14}\right)};$$

или

$$0 < \Delta < \frac{14}{(1.2.3.4.5.6.7.8.9.10)\,(11.12.13)\,.\,13};$$

откуда, подавно, принимая во вниманіе, что $\frac{14}{12.13} < \frac{1}{10}$,

$$0 < \Delta < \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.10.10.10}$$

Напишемъ слѣдующій рядъ неравенствъ:

$$
\begin{array}{rcl}
2,\ 50000\ 00000 = & 2,\ 5 & = 2,\ 50000\ 00000 \\
0,\ 16666\ 66666 < & \dfrac{1}{1.2.3} & < 0,\ 16666\ 66667 \\
0,\ 04166\ 66666 < & \dfrac{1}{1.2.3.4} & < 0,\ 04166\ 66667 \\
0,\ 00833\ 33333 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5} & < 0,\ 00833\ 33334 \\
0,\ 00138\ 88888 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6} & < 0,\ 00138\ 88889 \\
0,\ 00019\ 84126 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7} & < 0,\ 00019\ 84127 \\
0,\ 00002\ 48015 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} & < 0,\ 00002\ 48016 \\
0,\ 00000\ 27557 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} & < 0,\ 00000\ 27558 \\
0,\ 00000\ 02755 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} & < 0,\ 00000\ 02756 \\
0,\ 00000\ 00250 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} & < 0,\ 00000\ 00251 \\
0,\ 00000\ 00020 < & \dfrac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} & < 0,\ 00000\ 00021 \\
0,\ 00000\ 00000 < & \Delta & < 0,\ 00000\ 00003.
\end{array}
$$

Сложивъ эти равенства по частямъ, получимъ:

$$2,\ 71828\ 18276 < e < 2,\ 71828\ 18289.$$

Принявъ $e = 2,\ 71828\ 183$, сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{2.10^8}$.

Примѣръ II. Дано:

$$0,\ 00014071 < \operatorname{Log} A < 0,\ 00014072.$$

Требуется опредѣлить число A съ погрѣшностью, границы которой были бы указаны.

Взявъ въ формулахъ (3) и (4) $k = 3$, что можно сдѣлать, ибо $\frac{\operatorname{Log} A}{4M}$ будетъ менѣе 1, получимъ:

$$A = 1 + \frac{\operatorname{Log} A}{M} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\operatorname{Log} A}{M}\right)^2 + \Delta,$$

причемъ

$$0 < \Delta < \frac{\left(\frac{\operatorname{Log} A}{M}\right)^3}{1.2.3\left(1-\frac{\operatorname{Log} A}{4M}\right)}.$$

Припомнивъ, что (**665**)

$$2,30258509 < \log 10 < 2,30258510,$$

напишемъ слѣдующія неравенства:

$$\begin{aligned}
1,00000\,000 &= \quad 1 \quad = 1,00000\,000\\
0,00032\,399 &< \frac{\operatorname{Log} A}{M} < 0,00032\,401\\
0,00000\,005 &< \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Log} A}{M}\right)^2 < 0,00000\,006\\
0,00000\,000 &< \quad \Delta \quad < 0,00000\,00000\,06.
\end{aligned}$$

Сложивъ эти неравенства по частямъ, найдемъ:

$$1,00032\,404 < \quad A \quad < 1,00032\,408.$$

Взявъ $A = 1{,}000324$, сдѣлаемъ ошибку, меньшую $\frac{1}{2.10^6}$.

ВАЖНѢЙШІЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	*Строка:*	*Напечатано:*	*Читай:*
13	33	$a-b=-(b-a)=-d;$	$a-b=-(b-a)=-d;\qquad(1)$
84	3	Если $A=5$	Если $A=25$
94	5	Теорема VI	Теорема V
129	11	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
162	5 и 7	$x_n{}^r,\quad a_n{}^r$	x_n и a_n
622	3	q^{n+k-1}	q^{n-k+1}
624	4	производимое	произвольное
628	5	*также числу* 1	*числу* 0