А. И. ШУГАР

МАТЕМАТИКА В ТРУДОВОЙ ШКОЛЕ II СТУПЕНИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБСЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ, ЛЕСА и ОГОРОДА

ДОПУЩЕНО НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ СЕКЦИЕЙ ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧЕНОГО СОВЕТА

„НОВАЯ МОСКВА"
1925

Красно-Пресненская
типография и словолитня
им. Богуславского
(3-я „Мосполиграф“).

Москва, Малая Грузинская ул.,
Охотничий пер., д. 5/7.

Мосгублит № 17.616.
Тираж № 12.000 экз.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Предлагаемая мною работа „Математика в трудовой школе“ ставит перед собой две главные задачи: 1) найти практический, опытный подход к вопросам математики и 2) тесно связать алгебру, геометрию, тригонометрию и частично физику (механику).

Первая задача вынуждает практическую работу предпослать теории. Отсюда вытекает необходимость в первую очередь ознакомиться с инструментарием, что поможет вести практикум, и с тою практической работой, которая не может вестись одновременно с теорией. Это именно та работа, которая возможна только летом — геодезическая: работа в поле, лесу, огороде. Остальное же, как обследование фабрики, дома, города, доступно и зимой.

Самостоятельность вопроса о геодезических работах в школе позволяет выделить его в особую часть.

Конечно, для решения поставленной задачи предлагаемого материала недостаточно, но некоторые пути к этому намечаются уже и в этой части.

Очень важно предлагаемый план проверить опытно с начала до конца, так как автору по об'ективным условиям удавалось осуществить его только частично.

Сознавая неизбежные во всякой работе промахи, прошу товарищей поделиться замеченными недочетами и внести свои коррективы.

А. Шугар.

ВВЕДЕНИЕ.

Школа ставит своей задачей ввести детей в жизнь, подготовить к ней в самом широком смысле слова. Юноша, выходя из ее стен, должен свободно ориентироваться в окружающей действительности и уметь разобраться в разнообразии явлений и, главное, подойти к ним, исследовать их.

При этом мы всегда приходим к необходимости их количественного, пространственного и временного учета, т.-е., иначе говоря, нам нужно научиться считать и мерить. Как будто проще всего это сделать непосредственно: счесть предметы, измерить в тех или иных единицах длины, площади и т. д. Но на деле выходит иначе. Большею частью о величине известен только ряд данных, и по ним уже приходится судить о ней.

Например, в области пространственных форм на каждом шагу встречаются препятствия, и нужно искать обходные пути для измерения: мерить то, что доступно, и искать связь с тем, что недоступно. Неровности почвы, водные пространства, леса,— все это мешает непосредственному измерению. Является необходимость выделения простейших типичных пространственных форм, исследования их, опытным путем установления математической зависимости между отдельными частями их.

Самой интересной формой зависимости является пропорциональность. Сравнивая величины и находя их отношения, очень часто будем наталкиваться на равенство их, т.-е. обнаруживать пропорциональность величин. Этот замечательный фактор проникает буквально во все стороны количественных и пространственных форм действительности. И им-то математика и пользуется широко для своих целей — посредственного измерения величин, посредственного счета количеств.

Он доминирует везде, правда иногда являясь к нам в замаскированном виде, как в тригонометрии, где масками служат символы sinus, cosinus и т. д., и учащиеся обыкновенно слабо представляют истинную сущность этих символов.

Да и вообще, нужно сказать, этому фактору уделяется доля внимания, мало соответствующая его значению, недостаточно его оттеняют на общем фоне, и потому для учащихся он всегда оказывается трудно преодолимым препятствием.

Итак, мы приходим к необходимости установления пропорциональной зависимости величин.

Нам придется измерять доступные линии, измерять углы между ними.

Измерить линию, это значит — найти отношение ее к линии, принятой за единицу, что дает возможность нанести ее по масштабу на план и сделать необходимые расчеты, связанные с длиною ее.

С углом дело обстоит так, что измеряется даже не самый угол, а дуга окружности, для которой данный угол является центральным. Полученный при этом результат дает возможность помощью транспортира построить угол и средствами тригонометрии или графически решить другие вопросы, связанные с данным углом: определить сторону, площадь и т. д.

Но для достижения той же цели можно избрать и другой путь. В самом деле, данный угол вполне определяется отношением катетов прямоугольного треугольника, к которому он принадлежит, т.-е. tangens'ом. При чем, зная длину катетов, можно как построить самый угол, так и решить путем вычислений и другие вопросы, но только уже не помощью тригонометрии, а алгебраически. Предлагаемые в этой книге инструменты, тангенсометры, дают возможность этого второго способа измерения углов. Для школы это будет иметь большое значение, так как задачи, доступные для решения в старшей группе, могут решаться в младших; кроме того, получается более тесная связь между алгеброй, геометрией и тригонометрией. Правда, неизвестен самый угол, и кроме того tangens растет непропорционально углу, но в конце концов величина угла и не нужна как таковая, а второе неудобство может быть даже выгодно, например, при больших углах tangens растет очень быстро, а следовательно, при малом базисе получается заметное смещение указателя.

Таким образом цель работы в школе, это — научить учащихся разбираться в явлениях окружающей среды, устанавливать связь между сторонами их, а для математики именно пропорциональную и функциональную зависимость главным образом.

Каков же должен быть метод работы? Безусловно, главным образом — исследовательский. Путем наблюдения и опыта необходимо как можно больше набирать материала и, приведя его в систему, обосновывать теоретически.

Отсюда организация работы должна быть такова, чтобы, по возможности, ни одна линия, ни один угол, ни одна фигура или формула не были оторванными от действительности. Если мы чертим линию, то обязательно линейкой и ту, с которой так или иначе имеем дело на практике; если чертим треугольник, то он обязательно должен быть треугольником, подобным тому, который измеряли, наблюдали или строили помощью тех или иных инструментов. На доске его нужно строить обязательно с помощью линейки, циркуля, транспортира, треугольника.

А форма первоначальной работы? Главным образом экскурсия с измерительными инструментами.

Во время экскурсии учащиеся проделывают ряд опытов, решают ряд практических задач; при этом делаются зарисовки, составляется план, подробный протокол, а затем на уроках прорабатывается добытый материал и, если потребуется, то полученные опытно положения обосновываются теоретически, систематизируются.

Можно все отделы и положения математики, по крайней мере в средней школе, построить на практических задачах и соответствующих опытах так, что все чертежи, все предложения будут учащимися мыслиться конкретно.

Математика не будет мертвым языком, изучением грамматических правил которого занималась школа в большинстве случаев до сих пор, а живою речью, которая даст возможность читать увлекательную книгу окружающей действительности.

Возникает вопрос о летней школе, об ее роли в общем годовом плане. Пожалуй, ее следовало бы разбить на две части: осеннюю — август и сентябрь, которая явится подготовительной к зимней, и весеннюю — май, которая округлит, практически еще раз оформит проработанный осенью и зимой материал. В первый период, осенний, необходимо провести ряд экскурсий, своим характером связанных, по крайней мере, с частью годичного, намеченного вперед, плана работы, привести в порядок протоколы, сделать зарисовки, начертить планы проведенных работ.

Зимой весь этот материал прорабатывается, приводится в систему, обосновывается теоретически, а затем весной решается уже цельная более сложная задача, в которой применяются как все знакомые уже практические приемы, так и теоретические знания, например, план большого участка, топографическая с'емка, модель фабричного поселка и т. д.

Каково же должно быть содержание экскурсий, каков годичный план по математике?

Дать детальный план трудно, но вехи наметить можно. В основу удобнее всего положить геометрию, которую легко включить в комплекс как „село“, так и „город“; проще найти практические подходы к ней и легко основать на ней алгебру, которую затем можно прорабатывать на задачах как из геометрии, так и из физики и других источников.

Учащиеся во второй ступени имеют достаточно навыков и развития, чтобы с ними начать решать задачи уже с такими инструментами, как астролябия, тангенсометр и другими, проделав перед каждой задачей соответствующий опыт. Такого характера работа всегда очень заинтересовывает учащихся, делает ее в их глазах особо ценной и заставляет смотреть на нее очень серьезно; в самом деле, они делают то дело, что и взрослые для своих практических целей.

На-ряду с этим нужно знакомить их и с простейшими приемами, не требующими сложных приборов, что даст возможность те же вопросы решать, так сказать, домашними средствами, хотя и с несколько меньшей точностью.

Кроме того, работа с инструментами дает подход к углу, как величине, доступной измерению, и учащимся сразу ясно, какие данные в той или иной задаче имеются для ее решения. В самом деле, пусть начертим план треугольного участка помощью мензулы. Учащиеся не всегда соображают в таком случае, что дано.

Если же измерим, допустим, два угла и сторону и нанесем этот треугольник согласно полученным данным на план, то вопроса, что дано, не будет.

Наметим схематический план прохождения математики. Во второй группе с комплексом „сельское хозяйство“ [1]) нужно научиться измерять участки земли и элементы, из которых они состоят: линии, углы и т. д. непосредственно или посредственно. Здесь мы подойдем к пропорциям и уравнениям 1 степени с одним и двумя неизвестными.

Третья и четвертая группы, более близкие городу, займутся исследованием правильных городских планировок и форм, сложных архитектурных сооружений и фабричногородского хозяйства.

Но так как эту работу можно вести и зимой, уделяя часть времени на экскурсии, то лето целесообразнее все-таки употребить на работу вне города по определению об'емов и поверхностей тел, встречающихся в природе, и на более сложные геодезические работы.

Исходя из этого, зимний материал пришлось бы распределить так: во второй группе — все, касающееся равенства и подобия треугольников и четыреугольников и площади их. В третьей и четвертой — окружность и геометрические тела, а также квадратные уравнения и логарифмы.

Пятую группу следовало бы ознакомить с основами анализа, этого могучего орудия исследования мира.

Конечно, решение ряда предлагаемых здесь задач и знакомство с инструментарием возможно и даже необходимо в последней группе I ступени и первой II ступени, так как к каждой задаче подход опытный, доступный в этих группах, и кроме того подготовительный опытный материал нельзя набрать в течение двух осенних месяцев.

---

[1]) Школа при биостанции Юных Натуралистов и некоторые другие комплекс „сельское хозяйство“ прорабатывают во второй группе, но при обычном планировании материал придется прорабатывать в 1 гр. II ступени.

Необходимо только, чтобы полученный материал фиксировался и сохранялся у каждого учащегося до момента, когда его нужно будет систематизировать.

Для 2 группы необходимо предварительное решение следующих задач:

№ 1. Провешивание прямой линии может быть проделано и в I ступени.

№ 2. Провешивание прямой линии перпендикулярно к данной, при чем 1, 2 и 3 способы могут быть проделаны в I ступени, а остальные — во II.

№ 3. Измерить угол между двумя данными направлениями. 1 и 2 способы годны и для I ступени, остальные — во II.

№ 4. Провешивание между двумя видимыми, но недоступными точками и измерение 1 способом можно проделать в I ступени, 2 же способ — во II.

№ 5. Весной во II ступени.

№ 6. Провешивание прямой линии через овраг и измерение ее по 2 способу возможно и в I ступени, остальные — во II.

№ 7. Определение высоты доступного предмета. Для I ступени 1-й способ. Остальные могут быть проделаны во II ступени и в зимнее время при прохождении подобных треугольников, для чего можно измерять высоту здания школы или даже высоту зала.

№ 9. При экскурсии в деревню с учениками последней группы I ступени можно сделать наблюдение над работой плотников при закладке избы.

№№ 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и маршрутную с'емку из задачи 17а удобно проработать частично весной в апреле и мае месяцах, одновременно делая экскурсии и затем материал прорабатывая в классной обстановке. Более трудные способы остаются для следующих групп.

Для следующих групп остаются задачи 18, 19, 20 — для осени 3 группы и 10, 21 и 22 — для 4 группы.

Предлагаемые задачи решаются на основании опытов, при которых мы получаем числа и, сравнивая их, находим ту или иную зависимость и связь между ними.

Но дело в том, что опыт всегда дает результаты только до известной степени верные, т.-е. мы делаем ошибки, и чем более тщателен опыт, тем меньше ошибка.

Отсюда следует, что заключения, которые мы делаем на основании опыта, это только подозрения о той или иной зависимости, о том или ином свойстве. Это-то обстоятельство и приводит к необходимости теоретического обоснования затронутых вопросов, что, конечно, возможно при систематизировании материала.

Может возникнуть сомнение о возможности верных заключений при наличии данных, имеющих только некоторую точность. Но правильного суждения можно достигнуть, если приучить учащихся оценивать полученные результаты с учетом тех неизбежных ошибок, которые всегда имеют место при опыте, и определить заранее точность, которую дает тот или иной инструмент или прием

ОТДЕЛ I.

ИНСТРУМЕНТАРИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КАБИНЕТА.

§ 1. Эккер.

Инструмент состоит из квадратной дощечки или пересекающихся накрест под прямым углом двух линеек. Эккер располагается горизонтально на штативе или вбитом в землю вертикально коле (рис. 1).

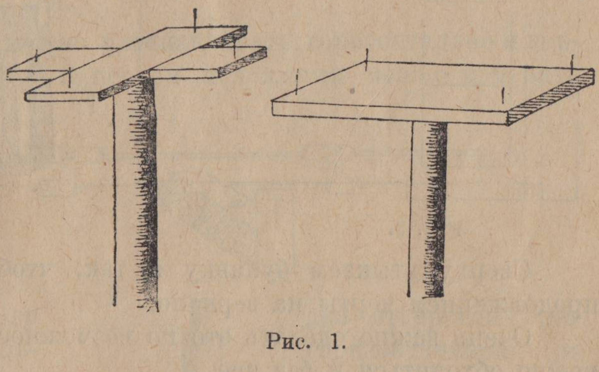


Рис. 1.

На углах дощечки или концах креста втыкаются булавки, определяющие направление перпендикулярных прямых, которые нужно провешить на местности. Останавливаться на способах, как расположить булавки, чтобы получить перпендикулярные направления, нет необходимости,—они разнообразны и просты.

§ 2. Тангенсометры.

Зеркальный тангенсометр. Скрепим под прямым углом две планки, как показано на рисунке 2. На обеих наносятся деления, а еще лучше наклеивается полоска миллиметровой бумаги. Широкая планка снабжается подвижным зеркалом с нанесенной на нем поперечной чертой. Для этого лучше всего снять с обратной стороны узкий слой серебра. Другая линейка снабжается подвижным визирным диоптром с нониусом.

Зеркало можно приспособить следующим образом. Взять кусок жести (можно разрезать хотя бы старую жестянку от консервов и т. д.), вырезать фигуру, указанную на рисунке 3 и, согнув по линиям, указанным пунктиром, и приколотив загнутые края к брусочку п, толщина которого равна толщине линейки, тонкими гвоздями, одеваем отверстие 1 на линейку (рис. 4).

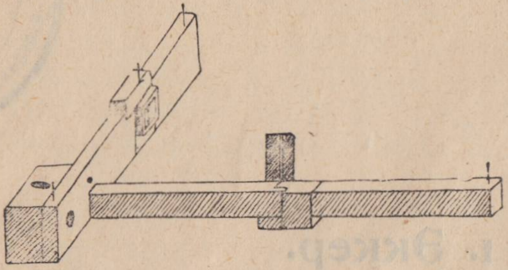


Рис. 2.

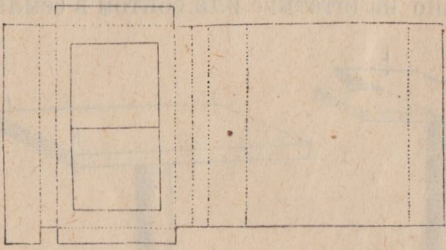


Рис. 3.

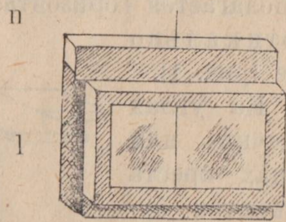


Рис. 4.

Сверху втыкаем булавку *m* так, чтобы она служила продолжением черты на зеркале.

Очень важно сделать это по возможности точнее, хотя можно обходиться и без нее.

Для устройства визирного диоптра из жести вырезывается фигура, указанная на чертеже 5. Согнув по пунктирным линиям и приколотив загнутые концы гвоздями к брусочку, толщина которого равна толщине второй планки, оденем на нее (рис. 6).

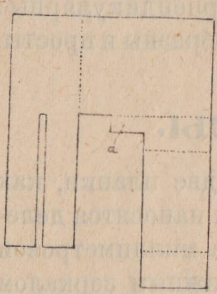


Рис. 5.

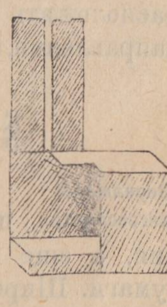


Рис. 6.

Часть *a* служит нониусом, для чего на ней наносим 10 делений, вместе равных 9 mm. Таким образом каждое деление на одну десятую mm меньше 1 mm.

Если при отсчете окажется, что совпадает нулевое деление, то отсчет равен целому числу mm, с которым совпал нуль.

На рис. 7 отсчет равен 301 mm.

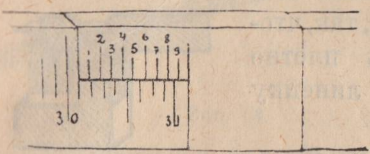


Рис. 7.

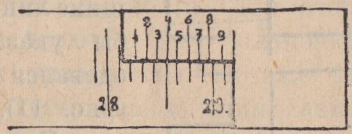
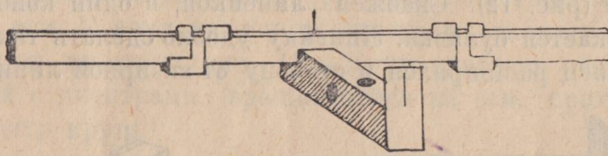


Рис. 8.

А если, например, совпадет 5 деление нониуса с одним из делений шкалы, то кроме целого отсчета, даваемого нулевым делением, нужно прибавить еще 0,5 mm. На рис. 8 отсчет будет 281,5 mm.

Инструмент можно устанавливать горизонтально и вертикально по отвесу. В первом положении можно измерять горизонтальные, а во втором вертикальные углы.



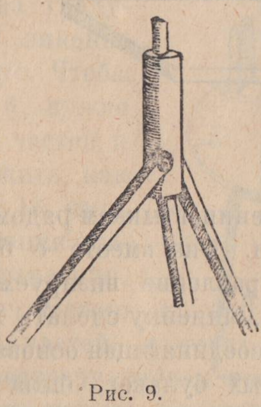


Рис. 9.

Тангенсометр II типа. Этот инструмент состоит из линейки длиною в 1 m., скрепленной серединой с концом бруска длиною в $^1/_2$ m. под прямым углом (рис. 9). В бруске сделаны два отверстия для горизонтальной и вертикальной установок на штативе. К другому концу прикреплен визирный диоптр, вырезанный из куска жести. В линейке над нулем вбит тонкий стержень, и она снабжена двумя подвижными указателями с нониусами. Внутренние нониусы служат для малых углов, наружные — для отсчетов на концах линейки.

Для устройства указателей следует из жести вырезать фигуру, указанную на рисунке 10, и, согнув по линиям, указанным пунктиром, концы приколотить гвоздями к брусочку, толщина которого должна равняться толщине линейки, так, чтобы указатель плотно одевался на линейку (рис. 11).

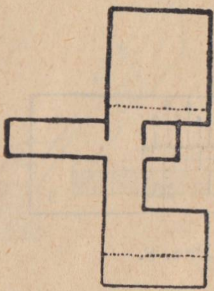


Рис. 10.

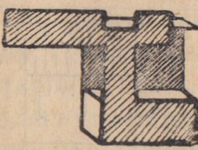


Рис. 11.

Здесь дана упрощенная конструкция тангенсометра, доступная для выполнения силами учащихся. Этот инструмент можно усовершенствовать, снабдив его трубой и т. д.

§ 3. Мензула.

1. Доска в квадратный полметр устанавливается на штативе (рис. 12). Снабжена линейкой, в один конец которой втыкается булавка. Линейку удобно сделать так, чтобы один конец расширялся в сторону от визирной линии. Продолжив ее на расширении, втыкаем рядом булавку так, чтобы она касалась линии. Она вместе с булавкой, воткнутой в мензулу, дает направление визируемой линии (рис. 13).

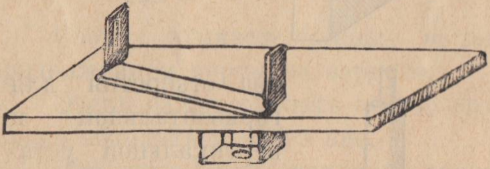


Рис. 12.

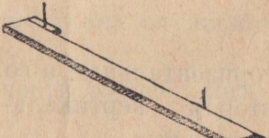


Рис. 13.

Можно, конечно, линейку сделать и по-другому, именно так, чтобы линия, соединяющая основания двух воткнутых в нее ориентировочных булавок, была параллельна краю. Иногда линейку снабжают диоптрами, как у астролябии (рис. 12). Предпочтительно все-таки устраивать линейку так, чтобы прочерчиваемая линия как раз совпадала с визируемой, тогда у учащихся не возникает никакого сомнения относительно верности полученного чертежа.

Не лишнее к мензуле иметь подвижной отвес, называемый мензульной вилкой, помощью которого можно было бы устанавливать любую точку мензулы над соответствующей точкой местности. Для этого скрепляются две планочки, как указано на чертеже 14. Свободные концы один совмещается с точкой на чертеже, а другой, снабженный отвесом, — с соответствующей точкой местности.

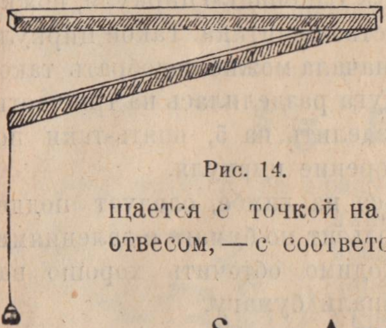


Рис. 14.

§ 4. Астролябия.

Если в распоряжении школы нет астролябии, можно с учащимися сделать модель. Результаты работы будут менее точны, принцип же усвоен будет вполне.

Инструмент состоит из круга, вращающегося на вертикальной оси. К нему на концах одного из диаметров прикрепляются диоптры (рис. 15). Круг снабжен подвижной линейкой с диоптрами, вращающейся на оси, проходящей через центр круга.

Круг делится на градусы, а к подвижной линейке приделывается нониус. Чтобы получить отсчеты в 5′, нужно 11° разделить на 12 частей и нумерацию расположить, как указано на рисунке 16, нуль посередине, и нумерация возрастает в том же направлении, как и на лимбе (круг). Можно 13° разделить на 12 частей, и тогда числа на нониусе будут возрастать навстречу числам лимба.

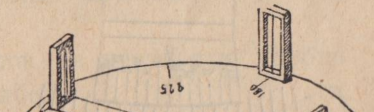


Рис 15.

Для нанесения градусных делений на лимбе следует наклеить кольцеобразную полосу бумаги хорошего сорта и, когда она хорошо просохнет, разделить на градусы. Для этого радиусом данной окружности делим последнюю на шесть равных частей. Каждую из них делим на 4 равных части обычным приемом деления угла пополам. Полученные таким образом дуги содержат по 15 градусов, следовательно, их нужно разделить сначала на три, а затем на пять частей. Это нужно сделать с помощью циркуля, ножки которого перемещаются посредством винтика. Такой циркуль всегда бывает в готовальне. Сначала можно подобрать такое растворение циркуля, чтобы дуга разделилась на три части, а затем уже каждую часть разделить на 5, опять-таки подобрав соответствующее растворение циркуля.

Под линейку, вращающуюся на лимбе, следует подделать в тех местах, где она скользит по бумаге с делениями, пластинки жести. Края необходимо обточить хорошо напильником, чтобы они не царапали бумагу.

Эти пластинки, скользя по бумаге, не стирают ее, что наблюдается, если линейка просто деревянная или, еще хуже, оклеена бумагой.

Помощью того же циркуля подбираются и деления нониуса.

При отсчетах нужно сначала установить целое число градусов, для чего смотрим на черту указателя с нулем.

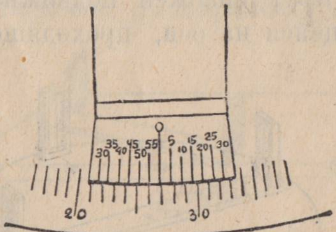


Рис. 16.

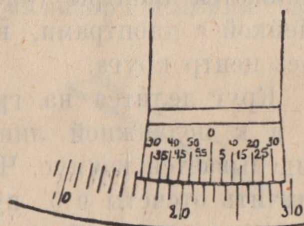


Рис. 17.

Целое число градусов, на которое он отстоит от нуля, и есть искомое. Далее, нужно определить деление нониуса, совпадающее с каким-либо делением лимба. Цифра, стоящая над этим делением нониуса, дает число минут. Если этот угол соответствует измеряемому, то записывают его, а если измеряемый есть смежный с ним, то нужно полученный отсчет вычесть из 180°.

Положение на чертеже 16 дает отсчет 26° 55′, а на чертеже 17 — 22° 35′. Если число градусов целое, то совпадает средняя нулевая черта. При 30′ совпадают крайние черточки одновременно.

Удобно вместо железных гвоздей и жести употреблять медные. В этом случае можно будет на лимбе поместить компас и определять положение направлений относительно меридиана.

§ 5. Бусоль.

Круг делится на градусы и снабжается подвижной линейкой с диоптрами и нониусом, вращающейся на оси, проходящей через центр круга. На этой оси укрепляется неподвижно компас так, чтобы направление севера совпадало с диаметром нулевого деления (рис. 18).

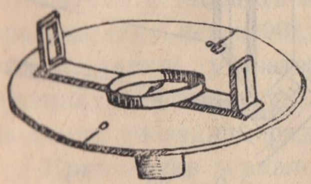


Рис. 18.

Инструмент не должен содержать железных частей, так как они будут влиять на стрелку компаса.

§ 6. Транспортир.

1. Полуокружность с градусными делениями и есть транспортир.

2. Для целей измерения углов на местности удобно пользоваться большим классным транспортиром. Им можно измерять горизонтальные и вертикальные углы.

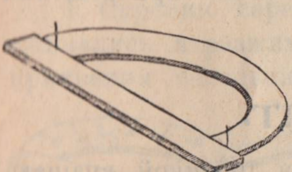


Рис. 19.

Рис. 20.

В первом случае по линии диаметра нужно воткнуть две булавки или приделать диоптры, а во втором — в центре привесить отвес (рис. 19 и 20).

3. Можно один транспортир приспособить более удобно для той и другой цели следующим образом (рис. 21). Приделать к основному диаметру диоптры и подвижную линейку, вращающуюся около оси, проходящей через центр транспортира. К ее подвижному концу приделывается указатель,

на котором наносится черта, и зеркало вертикально под углом 45° к линейке (рис. 22).

Оно поможет провешивать прямые углы. В зеркало укрепляется изогнутый стержень так, чтобы его вертикальная часть при продолжении вниз проходила через начало деления, с которым совпадает черта указателя.

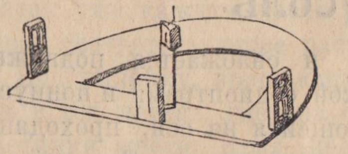


Рис. 21.

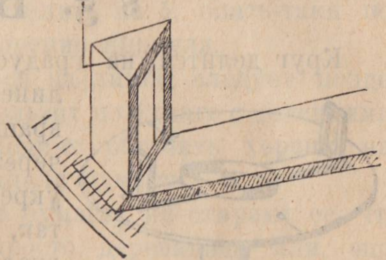


Рис. 22.

Щель визира, черта указателя и стержень должны лежать в одной вертикальной плоскости при положении линейки, перпендикулярном к диаметру, а вертикальная часть стержня при продолжении вниз должна пройти через край транспортира.

Линейку нужно делать как можно более свободно вращающеюся и конец возможно тяжелым, чтобы она могла служить и отвесом. В противоположной точке диаметра, проходящего через 90-градусное деление, приделывается визирный диоптр.

Назначение всех частей будет указано при решении соответствующих задач.

§ 7. Квадрант.

Четверть окружности, снабженная линейкой, вращающейся около оси, проходящей через центр, и есть квадрант. К концу линейки, движущейся по окружности, приделан визирный диоптр. В центре перпендикулярно к радиусу, проходящему через 90° и плоскости квадранта, прикрепляется неподвижно зеркало с вертикальной чертой, проходящей через центр. Сверху в зеркало втыкается булавка,

Рис. 23.

которая должна служить продолжением черты на зеркале (рис. 23). Снизу под линейкой возле диоптра прикрепляется завертка (рис. 24), помощью которой закрепляется линейка в любом положении.

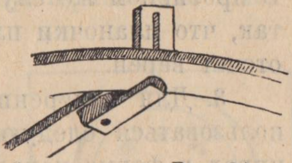


Рис. 24.

К подвижному концу линейки приделывается нониус, устроенный точно так же, как у астролябии, а дуга квадранта делится на градусы.

Чтобы установить зеркало перпендикулярно к радиусу, проходящему через 90°, следует поступить следующим образом. Поставить указатель линейки на 90°, и на линии, соединяющей черту указателя с центром, т.-е., иначе говоря, на выше указанном радиусе, втыкаем булавку.

Приколотив зеркало одним гвоздем так, чтобы черта на зеркале приходилась как раз над центром, через который проходит гвоздь, служащий осью вращения линейки, поворачиваем зеркало настолько, чтобы прорез диоптра, воткнутая булавка и их отражения в зеркале совпадали с чертой на зеркале. После этого зеркало можно приколотить другим гвоздем, при этом стараясь не сместить его.

§ 8. Угломеры для двугранных углов.

1. Скрепим серединами две линейки так, чтобы они сжимались и разжимались, как ножницы. К одной из них прикрепим неподвижно транспортир, совместив центр его с осью вращения линеек. Другая линейка должна свободно скользить по транспортиру.

Рис. 25.

2. Этим угломером можно измерять углы извне. Чтобы измеренный угол был действительно соответствующим двугранному, к линейкам изнутри прикрепляются перпендикулярно плоскости инструмента две коротких планочки (рис. 25). При отсутствии последних инструмент может занять положение не вполне перпендикулярное к ребру измеряемого двугранного угла.

Указанные же планочки покажут на неверность положения, если будут неплотно прилегать к граням угла. В противном же случае, т.-е. если инструмент расположен так, что планочки плотно прилегают к граням, полученный отсчет верен.

3. Для измерения двугранных углов изнутри можно пользоваться следующим инструментом. Скрепить на шарнирах в форме параллелограмма четыре линейки так, чтобы две из них имели продолжением свободные концы. К одной из длинных линеек прикрепляется, как в первом угломере, транспортир. Планочки, перпендикулярные к плоскости инструмента, обеспечивают измерение линейного угла, соответствующего данному двугранному (рис. 26).

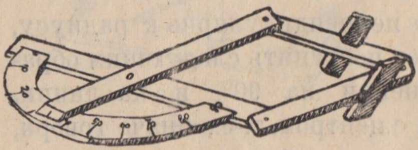


Рис. 26.

Опять-таки необходимо придавать инструменту такое положение, чтобы эти планочки плотно соприкасались с гранями угла, а в противном случае результат измерения будет неверен.

В обоих случаях конец линейки, движущейся по транспортиру, снабжается нониусом, устроенным так же, как у астролябии.

Снизу к подвижной линейке, как у квадранта, не лишнее приделать закрепляющую завертку, которая будет фиксировать найденное положение инструмента.

§ 9. Планшет для маршрутной с'емки.

Вырезать из фанеры круг диаметром около 0,5 m. и, снабдив его линейкой и компасом, получим планшет для маршрутной с'емки (рис. 27).

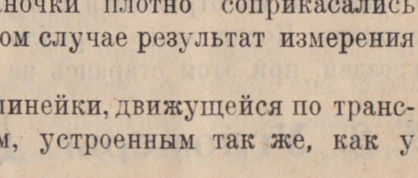


Рис. 27.

К линейке, длина которой должна равняться диаметру планшета, нужно на одном конце прикрепить зеркало с чертой под углом в 45^0 к плоскости линейки, при чем середина зеркала должна совпадать с краем линейки, по которому прочерчивается искомое направление (рис. 28).

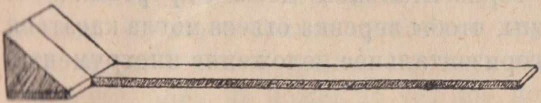


Рис. 28.

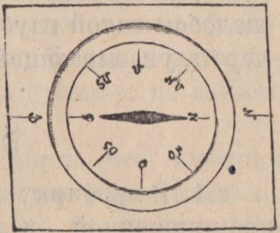


Рис. 29.

Компас удобно приклеивать к листку плотной бумагой — картону или жести, на которой прочертить линию совпадающую с направлением магнитного меридиана (рис. 29).

§ 10. Ватерпас.

Для получения горизонтальной линии употребляется ватерпас. Он состоит из двух планок, из которых короткая прикреплена одним концом под прямым углом к середине длинной и скреплена с нею двумя планками, образующими равнобедренный треугольник. К вершине последнего на веревочке подвешивается грузик (рис. 30). Нужно найти положение отвеса, перпендикулярное к горизонтальной планке. Для этого в землю вбиваются два колышка, по возможности, вершины которых должны быть на горизонтальной линии. На них устанавливается ватерпас и отмечается положение отвеса на горизонтальной планке. Повертываем ватерпас так, чтобы правый конец установился на левом колышке и левый — на правом, и снова отмечаем положение отвеса. Взяв середину между отметками, и будем иметь положение отвеса при горизонтальном положении ватерпаса.

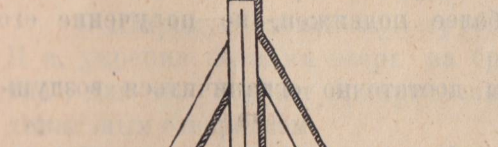


Рис. 30.

Для проверки вбиваем колышки настолько, чтобы отвес занял найденное положение. Повернув его, как прежде, убедимся в правильности, если отвес снова займет прежнее положение [1]). Можно, конечно, установить перпендикулярность отвеса и другими способами, исходя из чисто геометрических соображений.

Для грузика в горизонтальной доске прорезывается желобок такой глубины, чтобы веревка отвеса могла касаться черты, указывающей горизонтальное положение инструмента.

§ II. Уровень.

1. В пробирку налить серного эфира, спирта или воды, прокипяченной и отфильтрованной, закрыть пробкой, оставив внутри пузырек воздуха, и залить сургучом. В настоящее время оставляют пузырек не воздуха, а безвоздушного пространства, которое наполняется парами налитой жидкости.

Этого можно достигнуть следующим образом:

Трубочку, имеющую узкое оттянутое горлышко и наполненную до краев жидкостью, нагревают в песочной ванне. Жидкость расширяется, и часть выльется. После этого запаивают конец, и после остывания жидкость снова сожмется, и получится пузырек безвоздушного пространства.

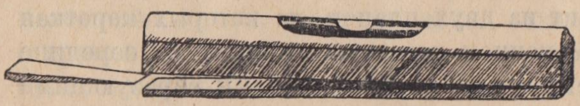


Рис. 31.

Такой пузырек более подвижен, но получение его сравнительно трудно.

Для целей школы достаточно ограничиться воздушным пузырьком.

Приготовленную пробирку с пузырьком вклеим в коробочку такого размера, чтобы пробирка плотно входила до середины. С одной стороны коробочки приклеим бумажкой дощечку одинакового размера с дном коробочки, при чем угол между ними должен увеличиваться и уменьшаться, и дощечка должна иметь форму тупого клина (рис. 31).

Теперь нужно нанести на пробирке две черточки, которых должен касаться пузырек воздуха при горизонтальном положении уровня.

---

1) Так делают крестьяне и плотники.

Нужно подыскать горизонтальную поверхность. Для этого возьмем столик на трех ножках и положим прибор по линии, соединяющей две из них. Пусть пузырек займет некоторое положение. Отметим его черточками и повернем на 180° так, чтобы левый конец занял положение правого, а правый — левого. Пузырек займет некоторое другое положение. Отметим его и возьмем среднее между ними. Будем подкладывать под одну из ножек до тех пор, пока пузырек не займет это среднее положение.

Повернув еще раз уровень, убедимся, что пузырек остается на том же месте, и значит, основание горизонтально, а в противном случае придется проделать то же, что вначале, и сделать еще поправки.

Проделав то же для третьей ножки, установим столик горизонтально.

Теперь вдвигаем между коробочкой и дощечкой тонкий клин до тех пор, пока пузырек не займет середины трубки уровня. Выстрогав новый клинок соответствующей длины и толщины, чтобы он заполнил весь промежуток между коробочкой и дощечкой, вклеим его между ними и весь прибор оклеим бумагой, оставив посередине просвет и отметив черточками положение пузырька.

§ 12. Нивелир.

1. Широкую стеклянную трубку согнем в форме буквы П и, укрепив концами вверх на бруске, поместим на штативе, для чего служит прикрепленный снизу брусок с вертикальным отверстием.

Налитая в трубке вода будет стоять на одинаковом горизонтальном уровне в обоих коленах (рис. 32).

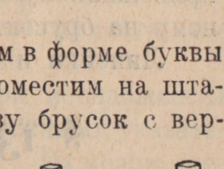


Рис. 32.

2. Сконструируем еще инструмент для той же цели, основанный на принципе тангенсометра второго типа.

К горизонтальному бруску на концах прикрепляются две вертикальные линейки и два визира с горизонтальными щелями. Линейки делятся на mm. Нуль ставится, как в тангенсометре, на середине линейки. Вместо указателей в линейки втыкается по нескольку булавок (рис. 33). Это выгодно сделать по следующей причине. Если, допустим, установим на рейке указатель на целое деление, то указатель на нивелире вообще даст отсчет дробный. Предположим, оценим его с точностью до 0,1 mm. Теперь совместим одну из булавок нивелира с указателем на рейке, расположенным для этого соответствующим образом. Это даст целый отсчет для нивелира и дробный для рейки.

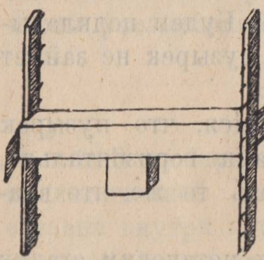


Рис. 33.

Если рейка отстоит от нивелира, предположим, на 25 m., то 1 mm. рейки будет соответствовать 0,01 mm. нивелира. Отсчет на рейке с точностью до 1 mm. сделать легко, можно даже и с точностью до 0,1 mm. Отсчеты же на нивелире с точностью до 0,01 mm. при условии самодельности инструмента совершенно невозможны, не говоря уже об отсчетах в 0,001 mm.

Таким образом на нивелире фиксируем несколько постоянных точек, совмещенных с целыми делениями, а на рейке будем получать соответствующие дробные отсчеты, что даст более точные результаты.

Горизонтальность установки проверяется или по отвесу, привешенному к одной из линеек, или по уровню, помещенному на брусок.

Линейки и брусок достаточно взять не длиннее 25 cm.

§ 13. Диаметрометры.

1. Сделать в середине планки квадратное отверстие так, чтобы входящий в него стержень, разделенный на миллиметры, был перпендикулярен к ней. С одной стороны стержень заостряется, а с другой снабжается треугольной призматической планочкой, прикрепленной перпендикулярно к стержню одним из ребер вперед. Нумерацию деления необходимо сделать дважды, начиная с обоих концов (рис. 34).

Рис. 34.

Этим инструментом можно определять диаметр изнутри круга. При этом заостренный конец служит для определения радиуса сферической поверхности, а конец с поперечной планочкой—для цилиндрической поверхности, при чем выдающаяся вперед грань должна плотно совместиться с *образующей* поверхности.

2. Для измерения извне будет служить следующий инструмент.

Скрепим две линейки в форме циркуля, при чем придаваемое им положение должно фиксироваться зажимным винтом. Внутри на шарнирах прикрепляются две другие планочки так, чтобы получился параллелограмм.

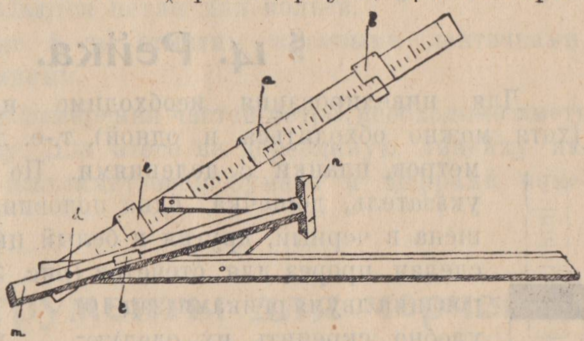


Рис. 35.

Ко внутреннему колену прикрепляются в плоскости инструмента линейка *m* и перпендикулярно треугольная призмочка *n*. На линейке *m* наносятся деления и делается прорез, в который вкладывается указатель *c* с нониусом—для отсчетов на шкале *m* и винт, служащий осью инструмента, головка которого *d* выходит над прорезом (рис. 35).

Одна из линеек делится на миллиметры и снабжается тремя подвижными указателями *a*, *b* и *l*. Их можно сделать, как в тангенсометре, из жести (рис. 36).

Рис. 36.

Нулевое деление касательной линейки можно совместить с осью, скрепляющей обе касательные линейки. Но так как линейки касаются поверхности шара своими внутренними ребрами, а при изменении угла точка пересечения этих касающихся ребер перемещается то удаляясь, то приближаясь к оси вращения, расстояние ее от оси вращения каждый раз нужно определять. Для этого служит указатель *c*. Вдвигая его в угол, пока он не упрется выступом *k*, делаем отсчет. Этот отсчет придется вычесть из отсчета, соответствующего точке касания.

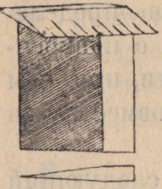


Рис. 37.

Нуль средней линейки должен совпадать с ребром поперечной призмочки *n*.

На рисунке 37 дан указатель *c*. При отсчетах его нужно острой гранью плотно вдвинуть в угол между линейками.

§ 14. Рейка.

Для нивелирования необходимо иметь две рейки (хотя можно обходиться и одной), т.-е. длинные, до трех метров, планки с делениями. По рейке движется указатель, дощечка, одна половина которой выкрашена в черный, другая в белый цвет, а посередине сделан прорез для отсчетов (рис. 38). Для нивелирования двумя рейками (зад. 10) удобно скрепить их следующим образом. В бруске сделать два отверстия под прямым углом такого размера, чтобы рейки плотно входили в них (рис. 40). Получим прямой угол, составленный рейками, при чем стороны могут удлиняться и укорачиваться (рис. 39). К бруску привесить отвес. Можно работать так, чтобы одна рейка все время была вертикальна и другая горизонтальна, либо шагать инструментом, и тогда роли будут меняться.

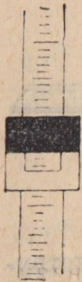


Рис. 38.

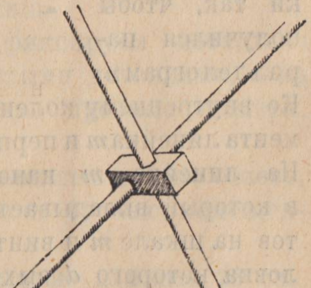


Рис. 39.

Рис. 40.

§ 15. Вспомогательные при геодезических работах инструменты.

1. Вехи. Ровные гладкие колья до 2 m. длиною, снабженные веревочной петлей каждый для нанизывания их на веревку, будут служить вехами. Их необходимо иметь около 15 штук.

2. Бирки. Короткие колышки в полметра длиною тоже с веревочными петлями или стержни из толстой проволоки будут служить для отметок и называются бирками. Их нужно 10 штук.

3. Рулетка, или мерная лента. Рулетка, это — двадцатиметровая лента, которая наматывается на катушку, заключенную в круглый футляр.

4. Ее можно заменить веревкой длиною в 20 m., на конце которой делаются петли для кольев.

Через каждые 5 m. отметим красными ленточками, а через 1 m. — синими.

5. Линейка. Для измерения частей метра необходимо иметь линейку. Для этого на деревянную линейку наклеить полоску миллиметровой бумаги и цифрами пометить деления.

§ 16. Инструменты для черчения плана.

1. Для нанесения на план по масштабу прямых линий необходимо иметь линейку с миллиметровыми делениями, а для кривых — несколько фигурных шаблонов, которые дадут возможность подобрать необходимую кривизну в той или другой из своих частей (рис. 42).

Рис. 42.

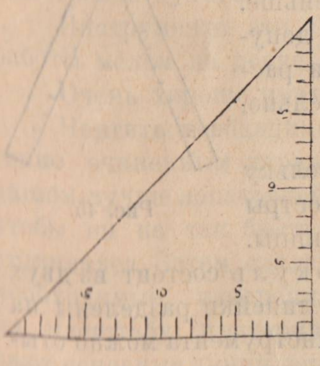


Рис. 41.

2. Углы откладываются по **транспортиру**, если они измерены в градусах, или помощью **треугольника**, катеты которого разделены на миллиметры, если угол измерен одним из тангенсометров (рис. 41).

3. Для черчения окружностей служит **циркуль**. Инструмент состоит из двух стержней, скрепленных на шарнире двумя концами. Свободные концы снабжены один острием,

а другой — карандашом или куском мела, если циркуль большой для черчения на доске. Для фиксирования определенного угла между стержнями служит или зажимная гайка, которая навинчивается на ось вращения, или проволочный стержень, укрепленный неподвижно в середине одной из ножек циркуля и скользящий в отверстии, сделанном тоже на середине другой. Фиксировать растворение циркуля можно клинушком, вводимым в это отверстие. Для мела на один из концов укрепляется трубочка из жести (рис. 43).

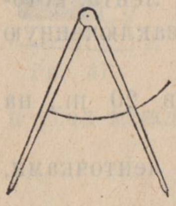


Рис. 43.

4. Большую помощь оказывают делительный циркуль (рис. 44) и пропорциональный циркуль (рис. 45).

Чтобы разделить помощью первого линию, например, на 5 равных частей, нужно винт *a* передвинуть по прорезу настолько, чтобы длинные концы были в 5 раз больше коротких. Растворив циркуль так, чтобы между длинными концами расстояние равнялось измеряемой линии, найдем, что между короткими расстояние будет равно одной пятой его.

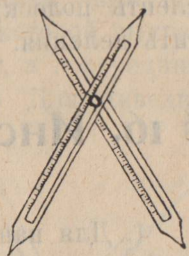


Рис. 44.

Помощью этого циркуля удобно измерять малые величины. Сделаем короткие концы в 10 раз меньше длинных, тогда расстояние между ними будет тоже в 10 раз меньше. Измерив линию короткими концами, допустим, найдем, что между длинными расстояние равно 25,3 mm., следовательно, измеряемая линия равна 2,53 mm.

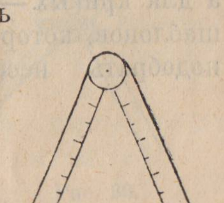


Рис. 45.

Этот результат, конечно, постольку точен, поскольку острия циркуля остры и измеряемая линия имеет резкие границы.

5. Пропорциональный циркуль состоит из двух линеек, скрепленных шарниром. Обе линейки разделены на равное число частей. Помощью этого инструмента можно отыскивать линию, которая находится в данном отношении к известной линии. Пусть нужно найти линию, которая будет относиться к данной, как 5 : 9. Раскроем циркуль настолько, чтобы расстояние между девятыми делениями равнялось

данной линии, тогда расстояние между пятыми будет искомое (рис. 46).

6. Трансверсальный или поперечный масштаб. Линейку с миллиметровыми делениями делим поперек на 10 частей и проводим через точки делений продольные линии, параллельные ребру линейки. Поперек линейки проводим ряд наклонных параллельных линий ab, $a_1\ b_1$, $a_2\ b_2$, $a_3\ b_3$..... (рис., 47). Очевидно, отрезки между линиями ab и, a_1b_1, a_1b_1 и a_2b_2 и т. д. будут равны одному миллиметру, а отрезки между bA и ab, постепенно возрастая, равняться $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ и т. д. mm.

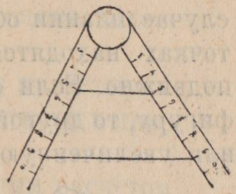


Рис. 46.

Рис. 47.

Пусть некоторая линия, измеренная циркулем, укладывается между точками B и C. Очевидно, она будет равна 1 cm. 4,3 mm. (на черт. 47 сантиметр несколько увеличен).

7. Линейка, треугольник и масштаб могут быть сделаны из картона, на который необходимо наклеить полоски миллиметровой бумаги.

Инструменты эти хорошо иметь большого размера для работы мелом на доске и малого — для работы на бумаге.

Очень хорошо иметь готовальню

Чертить необходимо тонко очиненным карандашом, лучше лопаточкой, чтобы он не так быстро стачивался. Затем, сделав необходимые измерения по масштабу, прочерчивают основные линии черной тушью, а вспомогательные пунктиром — красной.

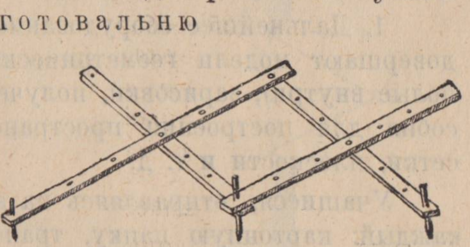


Рис. 48.

8. Пантограф. Прибор служит для черчения на плоскости фигур, подобных данным тоже плоским фигурам.

Он состоит из четырех или шести планок. В первом случае планки образуют параллелограм (рис. 48). В крайних точках находятся карандаши, а средняя укрепляется неподвижно. Если одним из карандашей чертить какую-либо фигуру, то другой вычерчивает такую же, но уменьшенную или увеличенную.

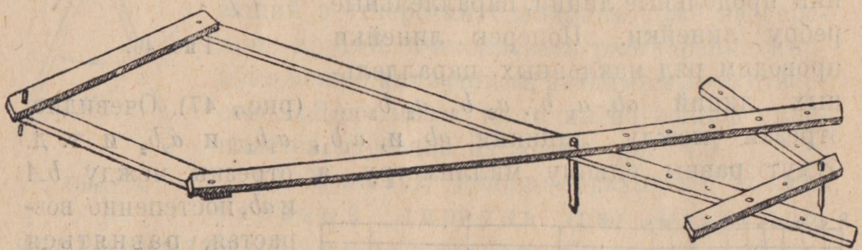


Рис. 49.

Во втором случае имеем два подобных четыреугольника (рис. 49) с неподвижной точкой посередине. Карандаши чертят подобные фигуры. Меняя положение линеек с одним из карандашей, можно получать различные соотношения вычерчиваемых фигур.

Помощью пантографа удобно снимать копии с планов, увеличивая или уменьшая их.

§ 17. Модели геометрических тел и прочее оборудование кабинета.

1. Дальнейшее оборудование математического кабинета довершают модели геометрических тел (лучше жестяные, полые внутри), зарисовки, полученные на экскурсиях, и пособия для построения пространственных форм, палочки, сетки, плоскости и т. д.

Учащиеся, отправляясь на экскурсии, должны иметь каждый: картонную папку, транспортир, линейку с делениями, угольник с делениями, тетрадь, карандаш, циркуль. Не помешает и компас.

Транспортир, линейка и угольник могут быть сделаны из картона или плотной бумаги, при чем к линейке и угольнику приклеиваются полоски миллиметровой бумаги.

Модели геометрических тел могут быть изготовлены самими учащимися из картона, для чего необходимо вырезать развертку каждого тела и склеить.

2. Призма четыреугольная прямая состоит из четырех прямоугольников, составляющих боковые грани, и двух прямоугольников — оснований.

С этим расчетом вырезываем развертку, оставив заштрихованные края для склеивания (рис. 50). Согнув по пунктирным линиям и склеив, получим модель призмы (рис. 51).

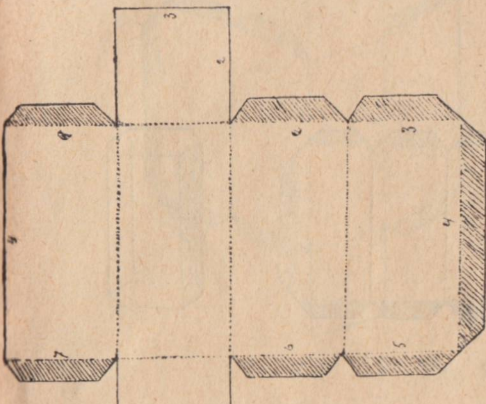


Рис. 50.

Рис. 51.

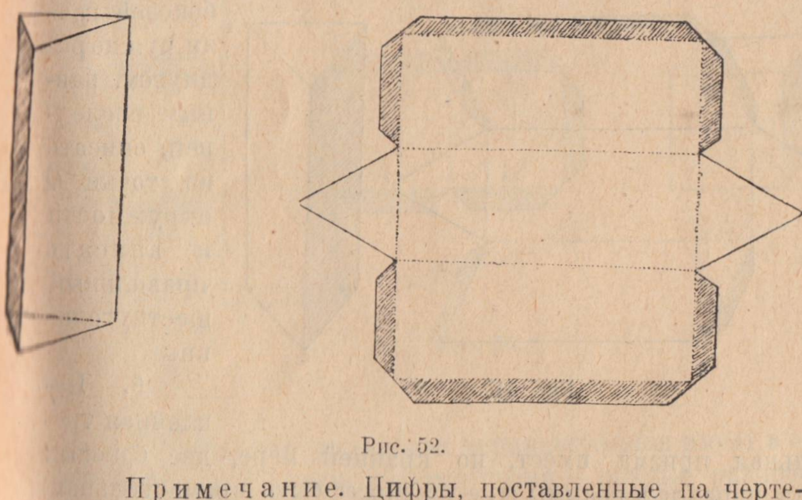


Рис. 52.

Примечание. Цифры, поставленные на чертеже, показывают, какой край с каким нужно склеивать.

3. Треугольная призма имеет три боковых грани — прямоугольники и два основания треугольника. Склеив, как раньше, получим модель (рис. 52).

4. Шестиугольная призма имеет 6 боковых граней прямоугольников и два основания — правильные шести-

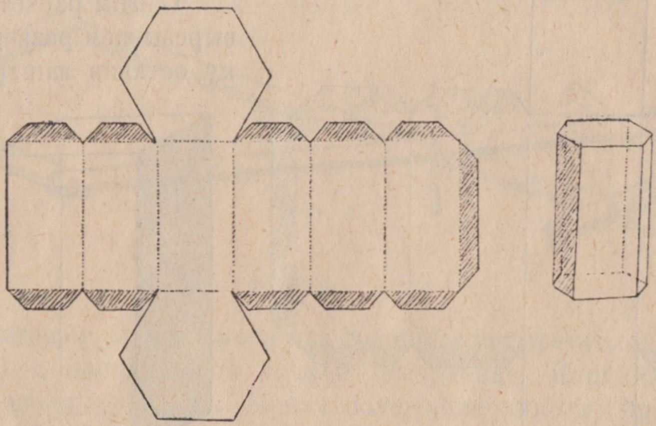


Рис. 53.

угольники (рис. 53). Для получения правильного шестиугольника, сторона которого была бы равна основанию боковой грани, нужно радиусом, равным последней, описать из точки O окружность и вписать правильный шестиугольник.

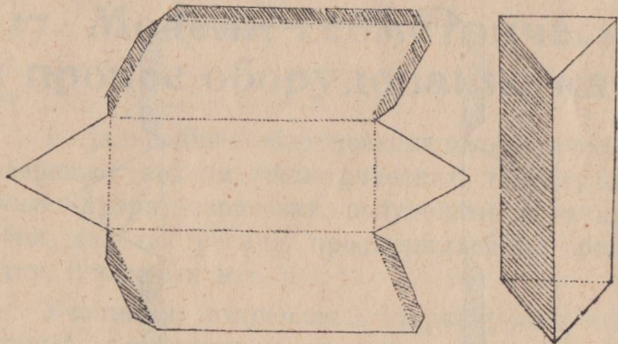


Рис. 54.

5. Наклонная треугольная призма имеет, по крайней мере, две боковых грани параллелограммы (третья может быть прямоугольная) и два равные треугольные основания (рис. 54).

6. Наклонный параллелепипед имеет не менее двух боковых граней параллелограммы, а могут быть и все грани и оба основания параллелограмы (рис. 55).

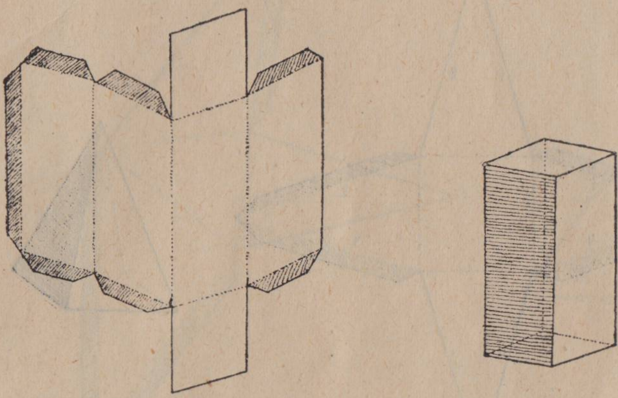


Рис. 55.

7. Куб имеет боковыми сторонами и основаниями равные квадраты (рис. 56).

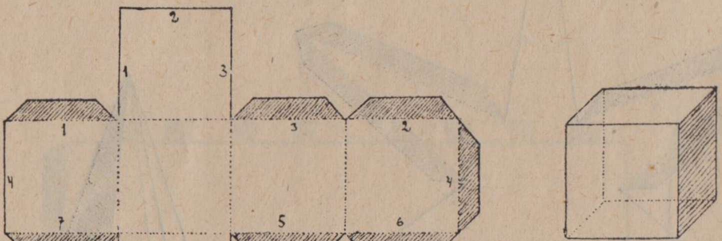


Рис. 56.

8. Пирамида правильная четырехгранная имеет в основании квадрат и четыре боковых грани — равные равнобедренные треугольники (рис. 57).

9. Пирамида правильная, шестигранная имеет в основании правильный шестиугольник, а боковые грани—правильные равнобедренные треугольники (рис. 58).

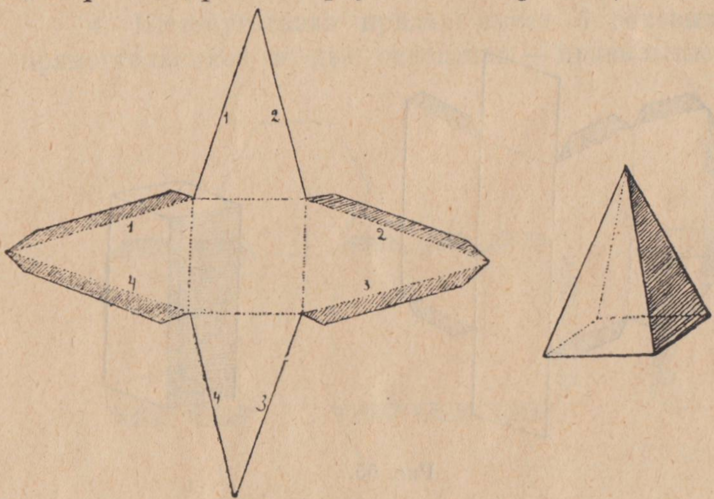


Рис. 57.

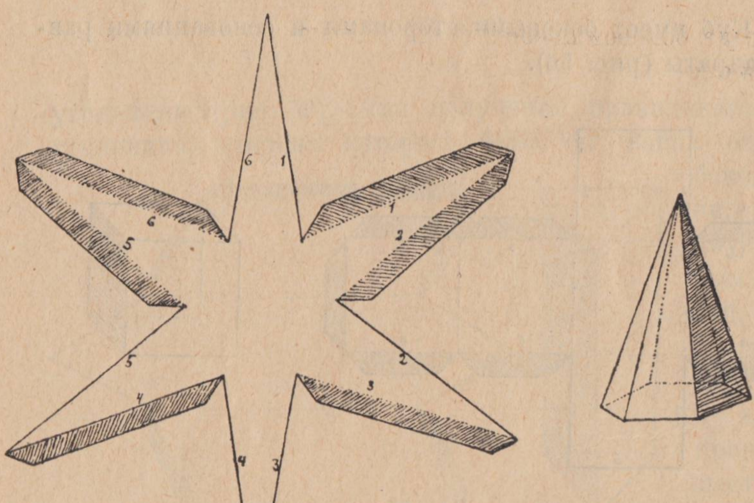


Рис. 58.

10. Пирамида треугольная неправильная имеет в основании, а также и боковые грани—разносторонние треугольники,

при чем необходимо, чтобы у двух рядом расположенных треугольников соседние стороны были равны (рис. 59).

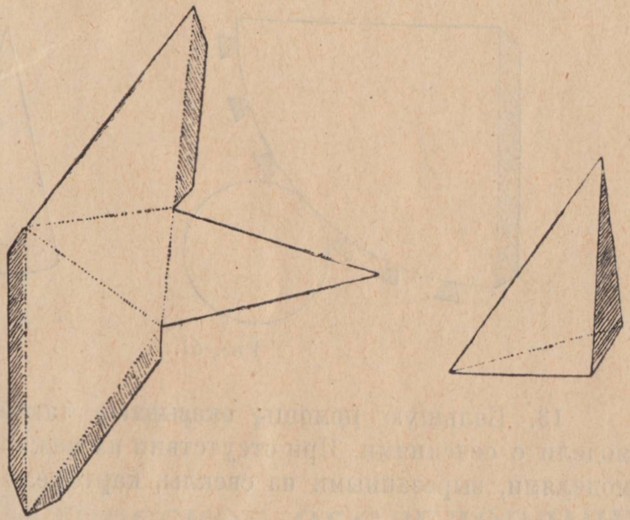


Рис. 59.

11. Цилиндр имеет два основания — окружности и развертка боковой поверхности — прямоугольник, если цилиндр прямой (рис. 60).

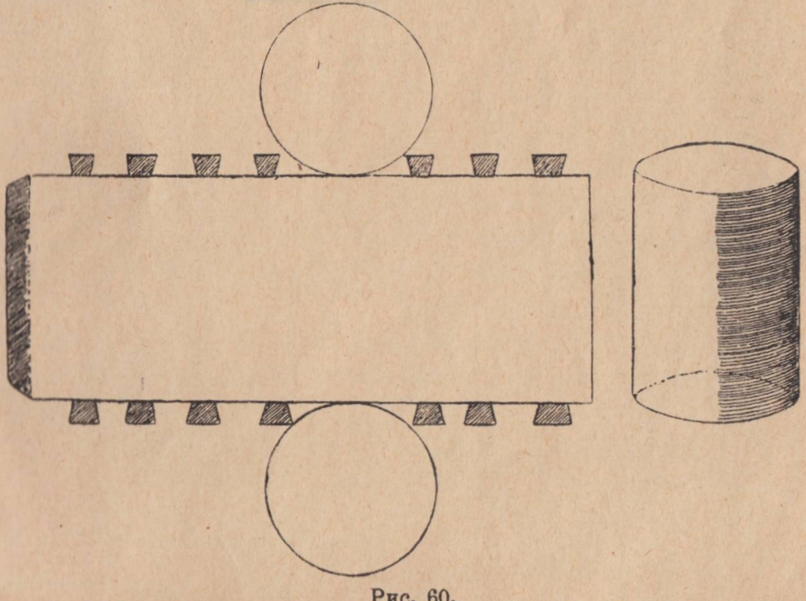


Рис. 60.

12. Конус в основании имеет окружность, а боковая поверхность представляет собой часть круга (рис. 61).

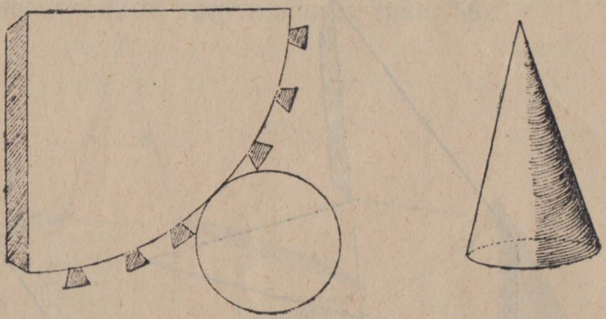


Рис. 61.

13. Большую помощь оказывают также деревянные модели с сечениями. При отсутствии их можно пользоваться моделями, вырезанными из свеклы, картофеля и т. д.

ОТДЕЛ II.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБСЛЕДОВАНИЕ ПОЛЯ, ЛЕСА, ОГОРОДА.

ГЛАВА I.

Провешивание и измерение прямых линий и углов.

Задача 1. *Провешить прямую линию между двумя доступными пунктами, если из каждого из них видим другой.*

Решение. Поставив вехи в каждой из точек, располагаем между ними ряд новых так, чтобы все они прятались друг за друга и скрывали последнюю веху, если смотреть со стороны первой. Линия, на которой они лежат, будет прямая (рис. 62).

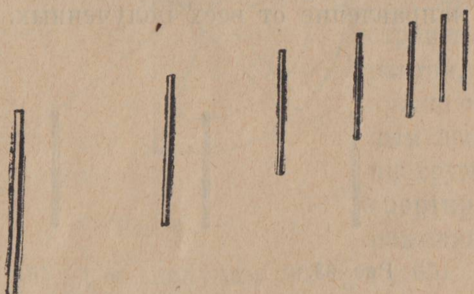


Рис. 62.

Если местность гладкая, то расстояние можно измерить рулеткой или веревкой, приспособленной для этого, при чем каждый раз перед работой необходимо вымерять веревку и записать длину, так как различные условия влажности изменяют ее.

Измерение следует вести следующим образом. Втыкаем кол в начальном пункте и натянув (не сильно) веревку втыкаем другой так, чтобы он приходился на данной прямой. После этого идущий впереди вынимает кол и втыкает одну из десяти находящихся у него бирок.

Вынимает свой кол и первый и оба идут вперед. Первый, дойдя до бирки, вынимает ее и втыкает свой кол, а второй, как и в первый раз, натянув веревку, втыкает свой кол, а затем, выдернув его снова, заменяет биркой, которую снова берет, подойдя к ней, первый. Так доходят до конца линии. Длина линии будет равна длине веревки, умноженной на число бирок, оказавшихся у первого измеряющего, и сложенной с частью веревки, вложившейся в последний раз.

Пусть длина веревки равна 20,05 m., число бирок перешедших к первому, — 7 и последний неполный промежуток — 8,26 m. Длина измеренной линии будет равна

$$x = 20,05 \cdot 7 + 8,26 = 148,61 \text{ m}.$$

Задача 2. *Провешить прямую линию под прямым углом к данной.*

Решение.

1 способ. Став лицом в направлении данной линии, вытянуть руки по швам, затем сразу поднять их вверх до горизонтального положения. Повернув голову влево и вправо, заметить предметы, лежащие на продолжении рук.

Повторив эту операцию несколько раз, можно получить приблизительное направление перпендикуляра к данной линии, взяв среднее направление от всех полученных.

Рис. 63.

2 способ. Помощью эккера. Совмещаем две булавки одной из планок эккера с данным направлением, и ставим вехи в направлении двух других булавок. Полученный угол и будет прямой (рис. 63).

3 способ. Помощью астролябии. Направляем диоптры, прикрепленные к лимбу (кругу), по данной линии и по направлению, указываемому диоптрами алидады (линейки), указатель которой стоит на 90° делений, ставим вехи.

4 способ. Транспортиром (рис. 64). Ставим указатель линейки с зеркалом на 90-градусное деление и расположим транспортир горизонтально на вехе, поставленной в начальной точке, так, чтобы диаметр был направлен приблизительно по направлению данной линии.

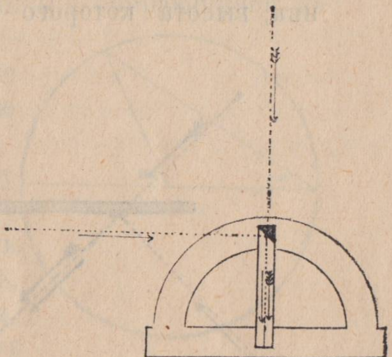


Рис. 64.

Затем, глядя в средний диоптр, поворачиваем инструмент до тех пор, пока изображение вехи или предмета, лежащего на данной линии, не совпадет с чертой на зеркале.

Поставив веху по направлению стержня над чертой, получим прямой угол. В самом деле, зеркало расположено под углом в 45°, а потому угол падения и угол отражения равны по 45°, т.-е. образуют угол в 90°.

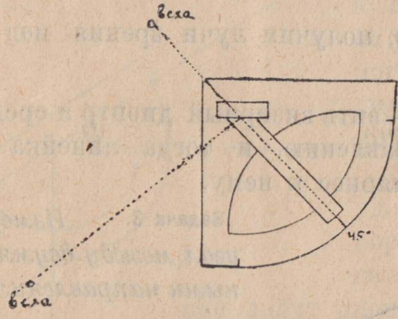


Рис. 65.

Аналогично можно построить прямой угол и квадрантом, при чем указатель нужно совместить с 45-градусным делением и расположить инструмент так же, как и транспортир. Углы падения и отражения будут равны также по 45°, т.-е. получим 90° (рис. 65).

5 способ. Тангенсометром первого типа. Если инструмент на штативе, то одну линейку можно направить по данной линии, а другая даст направление перпендикулярной.

Без штатива поступаем следующим образом. Ставим визир и зеркало на одинаковые деления и, расположив инструмент горизонтально, зеркалом на угловую веху, получим то же построение, что и при транспортире (рис. 66).

6 способ. Тангенсометром второго типа. Поставив указатели на деления 50 cm. совмещаем один из них, глядя в диоптр с одним из направлений, тогда другой даст направление перпендикулярное. В самом деле, лучи зрения вместе с линейкой дадут равнобедренный треугольник, высота которого (брусок) равна половине основания

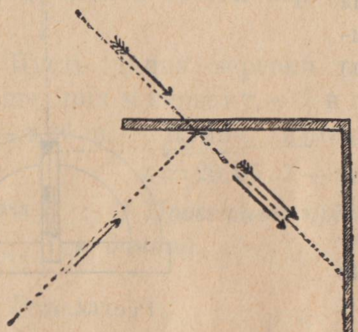


Рис. 66.

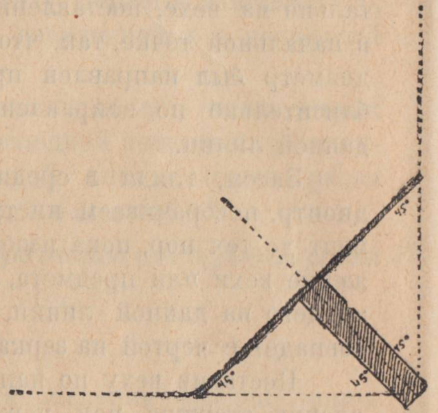


Рис. 67.

(линейка), а следовательно, получим лучи зрения под прямым углом (рис. 67).

Можно и иначе. Направить визирный диоптр и среднюю булавку по данному направлению, и тогда линейка даст направление перпендикулярное к нему.

Задача 3. *Измерить угол между двумя данными направлениями.*

Решение.

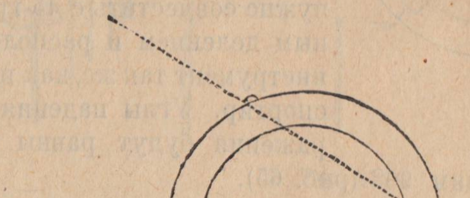


Рис. 68.

1 способ. Астролябией. Направляем диоптры лимба по одному направлению, а диоптры алидады по другому. Указатель даст величину угла.

2 способ. Транспортиром. Совмещаем булавки транспортира, расположенного горизонтально на угловой вехе или просто на уровне глаза, с одним из направлений и, не меняя положения, отмечаем на транспортире пальцем точку, совпадающую с другим направлением (рис. 68).

Пусть мы получим отсчет 64°, опишем полуокружность и отложим дугу в 64° (рис. 69), но так как измеренный нами угол не центральный, а вписанный, опирающийся на ту же дугу, то, построив его и измерив, найдем, что он равен половине центрального или дуги, на которую опирается, т.-е. 32°.

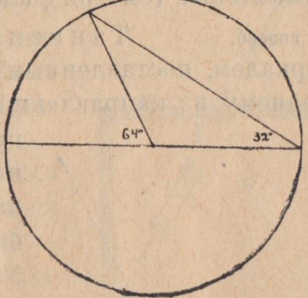


Рис. 69.

Таким образом отсчеты по этому способу нужно делить пополам.

Этим способом можно измерять углы до 45°. Если же угол больше, то его следует или разбить на части и, измерив их, сложить, или измерить дополнительный до 90°, либо сверх 90°. Чтобы измерить вертикальный угол, располагаем транспортир вертикально и направляем булавки диаметра по данной линии, наклонной к горизонту. Ответ покажет на угол 90° больший измеряемого, почему из найденной величины нужно вычесть 90° (рис. 70).

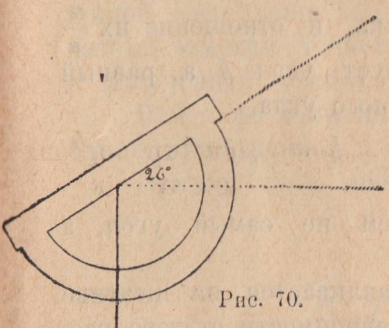


Рис. 70.

В том и другом случае удобнее можно измерять транспортиром с диоптрами и зеркалом. При чем одно направление дадут диоптры, а другое—визирный диоптр и изогнутый стержень, прикрепленный к зеркалу. Положение линейки фиксируется заверткой, прикрепленной снизу, как у квадранта.

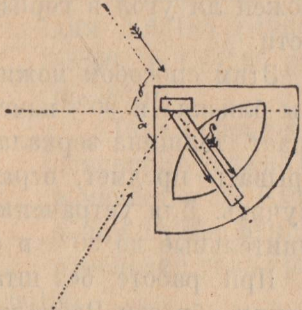


Рис. 71.

3 способ. К в а д р а н т о м. Располагаем инструмент, как в случае измерения прямого угла, и передвигаем линейку с диоптром и самый инструмент до тех пор, пока веха или предмет, расположенный на одном из направлений, не совпадет с чертой на зеркале, а стержень, служащий продолжением последней,—с другим направлением, отмеченным вехой (рис. 71).

Чтобы получить искомый угол, нужно показание указателя удвоить. В самом деле, угол $\alpha = \beta$, как дополнительные к углам падения и отражения, а углы β и γ равны, как вертикальные (смотри далее задачу 4, опыт 1).

4 способ. Тангенсометром 1-го типа. Планку с зеркалом, поставленным на целое деление, устанавливаем по одному из направлений, а затем указателю с диоптром придаем положение, при котором изображение вехи, расположенной на другом направлении, совпадало бы с чертой на зеркале (рис. 72). Угол $\alpha = \beta$, как дополнительные до 90° углов падения и отражения. Пусть отсчеты указателя и зеркала соответственно равны a и $в$. Они служат катетами прямоугольного треугольника, и отношение их $\frac{a}{в}$ характеризует угол β а равный ему α и называется tangens'ом данного угла.

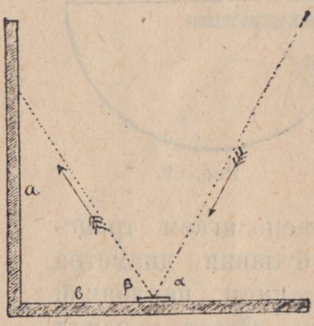


Рис. 72.

$$\frac{a}{в} = \operatorname{tg}\alpha \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (^1)$$

Таким образом мы определяем не самый угол, а tangens его.

При измерении прибор устанавливается на штативе горизонтально или вертикально, в зависимости от того, расположен ли угол в горизонтальной или вертикальной плоскости.

Этим способом можно измерять углы до 90°, при чем углы близкие к 90° измерять неудобно. В первом случае мешает толщина зеркала [1]), во втором мы головой будем закрывать предмет, отражене которого в зеркале нужно получить. Для устранения этого будем измерять углы дополнительные до 90° и большие 90°.

При работе без штатива удобно измерять углы следующим образом. Расположив инструмент горизонтально на

---

1) Для устранения этого удобно брать зеркало, покрытое отражающим слоем серебра сверху. При этом точность отчетов увеличится, так как будет отсутствовать преломление лучей в стекле.

угловой вехе так, чтобы зеркало упиралось на веху, устанавливаем зеркало и указатель в таком положении, чтобы изображение вехи одного направления совмещалось с чертой на зеркале, а веха другого направления — со стерженьком, служащим продолжением черты. Отношение отсчетов даст tangens половины угла (рис. 73).

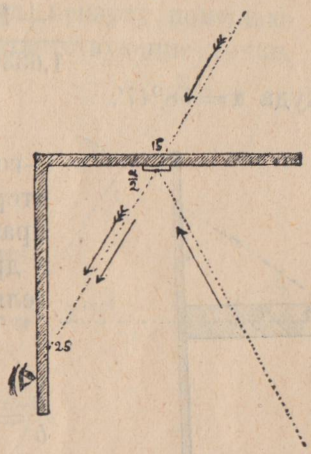


Рис. 73.

Чтобы построить угол по данным тангенсометра, можно пользоваться прямоугольным треугольником с катетами, разделенными на миллиметры. Пусть отсчеты a и b соответственно равны 48,5 cm. и 30 cm. Совместим один из катетов с данной линией так, чтобы 30-е деление совпадало с вершиной угла (рис. 74), и на другом катете отметим точкой 48,5 делений. Соединив вершину с полученной точкой, построим измеренный угол.

Найти же величину угла, зная tangens, можно по таблице, приложенной в конце.

Пример: пусть нашли $a = 327,3$ mm
$b = 200$ mm.

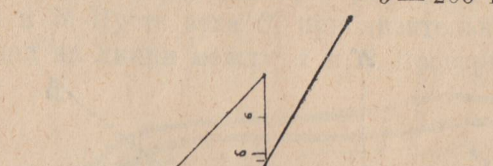


Рис. 74.

Имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{327,3}{200} = 1,6365.$$

В таблице находим 1,63185 равно tg 58°30′, и 1,64256 равно tg 58°40′.

Таким образом при изменении угла на 10′ tg изменяется на 0,01071, а нам нужно отыскать изменение угла при изменении tg на 1,6365 — 1,63185 = 0,00180.

Очевидно

$$10' - 0,01071$$
$$x - 0,00180$$

$$x = \frac{10' \cdot 0,00180}{0,01071} = 17'$$

Таким образом

$$\frac{\begin{array}{l}1{,}63185 = \operatorname{tg}\ 58^\circ\,30' \\ +180 \qquad\quad +17'\end{array}}{1{,}63365 = \operatorname{tg}\ 58^\circ 47' = \operatorname{tg}\alpha},$$

откуда $\alpha = 58^\circ 47'$.

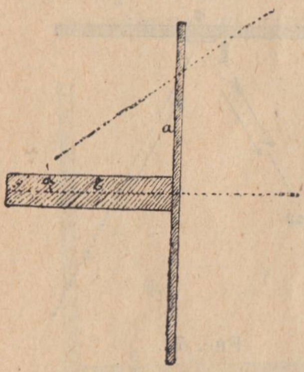


Рис. 75.

5 способ. Тангенсометром 2-го типа. Совмещаем визир и стержень на нуль с одним из направлений, и один из указателей с другим. Получим a — отсчет указателя и b – длину бруска (рис. 75).

Отношение $\frac{a}{b}$ будет tangens угла

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

При углах больших 45° нужно измерять дополнительный до 90° угол, и приращение к 90°, при $\alpha > 90^\circ$.

6 способ. Бусолью. Установив инструмент так, чтобы стрелка северным концом совпадала с 180-градусным делением, определяем угол одного и другого направлений с магнитным меридианом (азимуты) и, сложив или вычтя их, найдем искомый угол.

Пусть, например, направление севера оказалось между направлениями измеряемого угла (рис. 76).

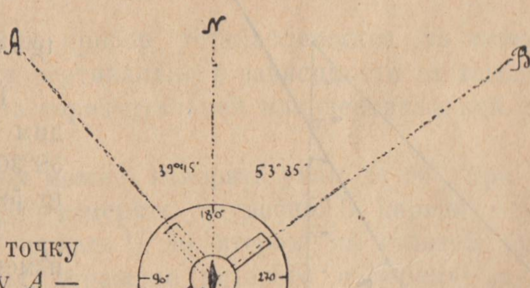


Рис. 76.

Предположим, отсчет направления в точку B — 53°35′ и в точку A — 320°25′. Таким образом один угол равен 53°35′ а другой 360° − 320°25′ = 39°45′.

Искомый угол между направлениями к точкам A и B, очевидно, равен сумме 39°45′ + 53°35′ = 93°30′.

Допустим, направление меридиана лежит вне измеряемого угла AOB. Находим отсчеты указателя 32°55′ и 67°40′.

Чтобы получить искомый угол, очевидно, нужно сделать вычитание $67°40' - 32°55' = 34°45'$ (рис. 77).

7 **способ.** Мензулой. Установив мензулу помощью мензульной вилки, т.-е. совместив соответствующие точки мензулы и местности, втыкаем тонкую булавку в эту точку и, приложив к ней гранью линейку, поворачиваем ее до тех пор, пока воткнутая нами булавка и булавка на линейке не будут лежать на одной прямой с вехой на данной линии. Прочерчиваем карандашом эту прямую и поворачиваем линейку по другому направлению, совмещая с ним обе булавки, и снова прочерчиваем прямую. Полученный угол и будет искомый.

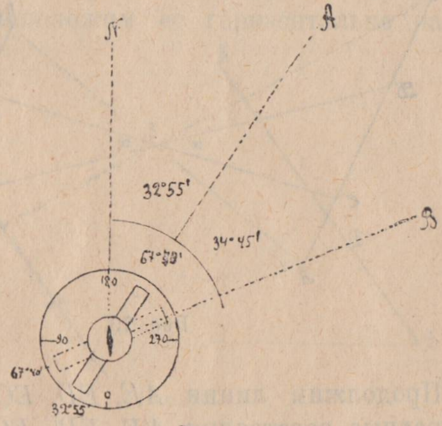


Рис. 77.

Задача 4. *Провешить прямую линию между двумя видимыми точками. Определить длину ее.*

Задача состоит в том, чтобы на части доступной поставить две вехи, лежащие на линии, соединяющей пункты A и B. Пусть веха C_1 приблизительно нам кажется лежащей на линии между A и B. Проверим это предположение.

Рис. 78.

Глядя со стороны C_1 в сторону A, ставим веху D_1. Если C_1 поставлена была верно, то, глядя со стороны D_1, мы должны увидеть ее по направлению B. Допустим, этого нет, тогда переставим ее в точку C_2 и со стороны этой вехи будем смотреть на D_1, которую переставим в D_2 по направлению A. Эту операцию будем повторять до тех пор, пока все четыре вехи A, D, C и B не будут лежать на одной прямой (рис. 78).

Определим длину линии AB.

Опыт 1. На площадке поставим две вехи A и B и между ними две другие C и D (рис. 79).

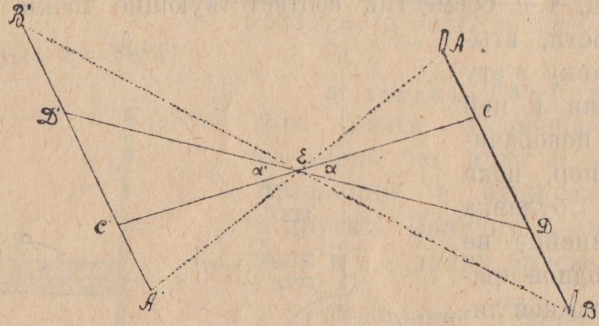


Рис. 79.

Поищем связи данной линии с другими линиями, которые возможно нанести на площадке.

Взятую произвольно точку вне прямой AB соединим с точками A, B, C и D. Продолжим линии AE, ED, EC и EB на соответственно равные расстояния $A'E$, ED', EC' и EB'.

Наблюдение 1. Измерив углы α и α', предположим, найдем $36°35'$ и $36°30'$. Принимая во внимание ошибки, делаемые при измерениях, допускаем

$$\alpha = \alpha'.$$

Эти углы называются вертикальными, которые всегда равны между собой. Найденные равные углы лежат между соответственно равными сторонами треугольников DEC и $D'EC'$. Измерим стороны CD и $C'D'$ и находим

$$CD = C'D' \text{ (приблизительно).}$$

Заключаем, что, если у одного треугольника две стороны и угол между ними соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то и третьи стороны равны.

Наблюдение 2. Продолжив $C'D'$ в обе стороны, найдем, что A' и B' лежат на этой линии. Измерив $A'B'$ и AB получим, что в пределах точности наших построений и измерений $AB = A'B'$.

Наблюдение 3. Замечаем предметы, лежащие у края горизонта на продолжении линий AB и $A'B'$. С той и другой стороны для обеих линий они соответственно почти одни и те же. Такие линии называются параллельными.

Заключаем, что параллельные линии нужно проводить так, чтобы они казались пересекающимися в перспективе.

Опыт 2. Отходим от той же линии AB на некоторое расстояние и становимся лицом к ней так, чтобы поднятые вправо и влево горизонтально руки были направлены в сторону предметов, лежащих на продолжении AB. Возьмем в обе руки линейку и расположим ее горизонтально на уровне глаз. Она приблизительно параллельна искомой линии (рис. 80).

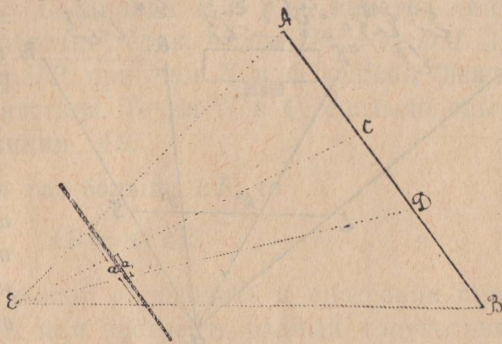


Рис. 80.

Наблюдение. Прямые AB и CD пусть закрываются соответственно отрезками линейки $a = 76$ cm. и $a_1 = 25$ cm. Измерив AB и CD, допустим, найдем $m = 15$ m. и $n = 5$ m. Сравнивая эти величины, заметим, что 76 cm. приблизительно во столько раз больше 25, во сколько 15 больше 5, а потому заключаем:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{a_1}.$$

Если бы m было неизвестно, то

$$m = \frac{n \cdot a}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Более точно эту зависимость найдем, если вместо линейки возьмем тангенсометр 2-го типа и параллельную линию проведем следующим образом. Восстановим к линии AB перпендикуляр MN и затем в точке M перпендикуляр к MN (рис. 81).

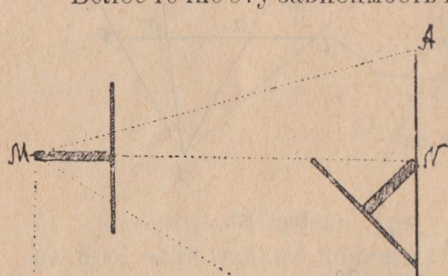


Рис. 81.

На продолжении AB и MK будут лежать одни и те же предметы, следовательно, они параллельны.

Пользуясь результатами этих опытов, легко найти длину искомой линии AB.

Если линия невелика, то пользуемся первым опытом (наблюдение 2), а при большой линии — опытом 2.

Пусть вся линия закрывается отрезком линейки $a = 850$ mm., доступная часть — отрезком $a_1 = 120$ mm. и доступная часть линии $n = 82$ m. В таком случае

$$m = 82 \frac{850}{120} = 580{,}8 \text{ m}.$$

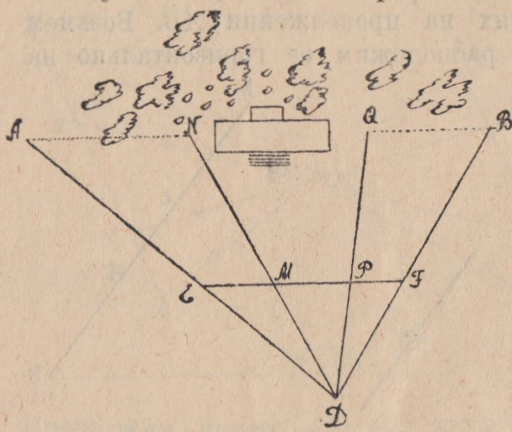


Рис. 82.

Задача 5. *Провешить прямую между двумя точками доступными, но из каждой из них не видна другая. Определить длину.* Предположим, требуется провешить прямую между точками A и B, между которыми находится дом (рис. 82).

Оба пункта доступны, но один со стороны другого не виден.

Опыт 3. На площадке откладываем прямую AB и берем на ней две новые точки N и Q. Соединяем их с произвольной точкой D рядом вех. Измеряем AD и DB. Отмерим DE и DF, допустим, соответственно равные $\frac{1}{4}AD$ и $\frac{1}{4}DB$. Провешим прямую EF и измерим (рис. 83).

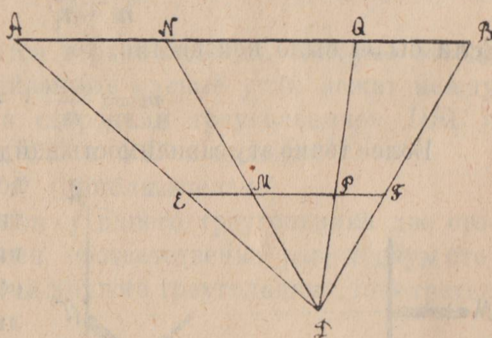


Рис. 83.

Наблюдение. Измеряем DN, DQ, DM, DP и AB и находим при сравнении, что приблизительно:

$$DM = \frac{1}{4}DN$$

$$DP = \frac{1}{4}DQ$$

$$EF = \frac{1}{4}AB.$$

Таким образом для решения задачи крайние пункты A и B нужно соединить с доступной для обоих точкой D (черт. 83), измерить AD и BD и отложить от D по $\frac{1}{n}$ части этих линий DE и DF. Соединяем E и F и, наметив линию DM, продолжаем ее до точки N так, чтобы $DN = n.\ DM$. Наметим также $DQ = n.DP$, при чем N и Q должны лежать по обе стороны препятствия. Точки N и Q, согласно опыту, должны лежать на линии AB.

Так как AB в n раз больше EF, то

$$AB = n\,.\,EE.$$

Расстояние AB можно определить и способами предидущей задачи 4, т.-е. или построить равный треугольник, или помощью тангенсометра.

Задача 6. *Провешить прямую через овраг и определить длину ее.*

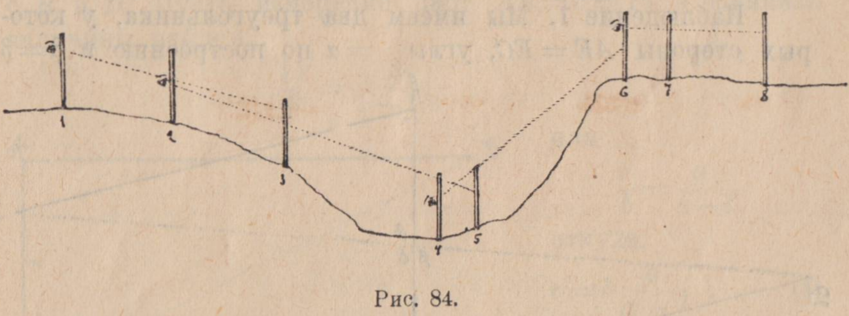


Рис. 84.

Решение. Первые три вехи ставим ориентируясь на 8-ю, если задана конечная точка, или считаемся с другими данными, как направление, данное инструментом, и т. д. 2-я и 3-я дадут положение 4 и 5, которые в свою очередь определят 6 и 7, а последние должны лежать на одной прямой с 8 (рис. 84).

Конечно, это не есть рецепт на все возможные случаи и в каждом отдельном из них нужно приспособляться.

Определение длины.

1 способ. Установив линейку или тангенсометр (рис. 85) 2-го типа, как в опыте 2-м задачи 4, измерим отрезки линейки a_1 и a, закрывающие соответственно части $AB = m$ и $AC = x$ искомой прямой.

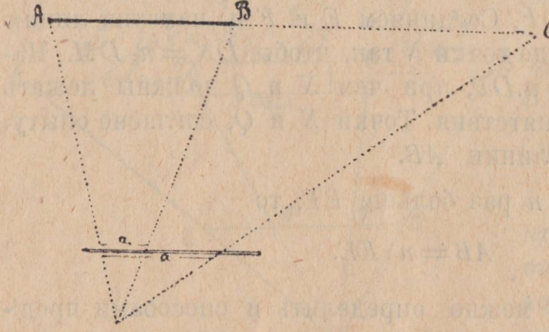


Рис. 85.

На основании того же опыта имеем:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{x}{m},$$

откуда:

$$x = m\frac{a}{a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

2 способ. Опыт 4. На площадке провешиваем прямую AB и из точки A тем или иным способом провешиваем под углом α линию AC, которую измеряем, и отмечаем середину E. Из точки C под тем же углом α провешиваем прямую CD, которую продолжим до точки D, лежащей и на прямой BE (рис. 86).

Наблюдение 1. Мы имеем два треугольника, у которых стороны $AE = EC$, углы $= \alpha$ по построению и $\beta = \beta$

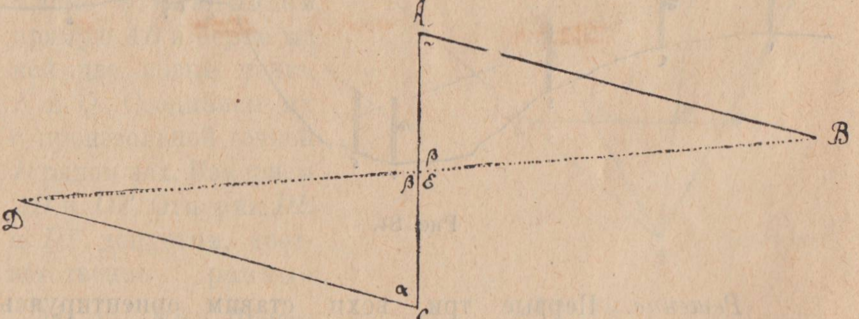


Рис. 86.

как вертикальные (зад. 4, опыт 1). Измеряем и, сравнивая, находим (приблизительно):

$$AB = DC$$
$$DE = BE,$$

т.-е. если у треугольников по два угла и стороны между ними соответственно равны, то и другие соответственные стороны равны.

Наблюдение 2. Линии AB и CD кажутся пересекающимися на самом краю горизонта, т.-е. они параллельны.

Углы α называются накрест-лежащими и оказываются равными.

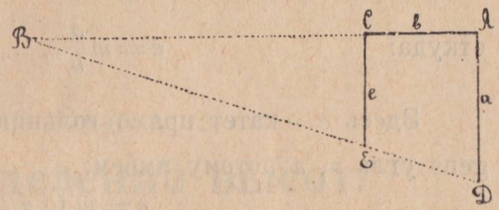


Рис. 87.

Таким образом параллельность линий и равенство указанных углов взаимно обусловливают друг друга. На основании этого опыта вопрос решается просто. Помощью эккера можно также решить вопрос, только угол α в этом случае будет равен 90°, что нисколько не меняет дела.

3 способ. Опыт 5. На площадке наметим прямую AB и, отойдя от нее, помощью того или иного инструмента под прямым углом на расстояние $a=2$ m. поставим в D веху (рис. 87). Пройдя по AB на некоторое расстояние $b=3$ m., в точке C восставим перпендикуляр CE и измерим часть его $e=1,6$ m. до точки E, лежащей на одной прямой с B и D. Пусть измерение даст $AB=c=15$. Сравнивая величины найдем:

$$\frac{15}{3}=\frac{2}{2-1,6}$$

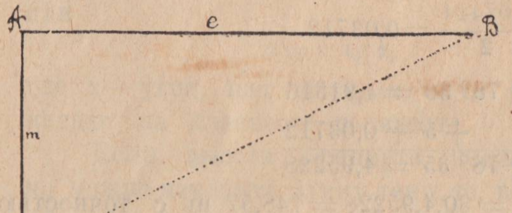


Рис. 88.

или

$$\frac{c}{b}=\frac{a}{a-l},$$

откуда:

$$c=b\frac{a}{a-l} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

4 способ. Опыт 6. На площадке наметим прямую AB и помощью хотя бы зеркального тангенсометра восставим перпендикуляр $AE=m$. Совместив зеркало с точкой E и направив планку по AE, установим указатель с диоптром так, чтобы изображение совпало с чертой на зеркале (рис. 88). Пусть отсчеты указателя и зеркала будут равны соответственно a и b.

Измерив $AB = e$, найдем с известным приближением:

$$\frac{e}{m} = \frac{a}{b},$$

откуда: $$e = m\frac{a}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Здесь e — катет прямоугольника, а отношение $\frac{a}{b}$ — tangens угла α, а потому имеем:

$$e = m \operatorname{tg} \alpha,$$

т.-е. катет равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего угла.

Угол α можно измерить помощью любого угломерного инструмента и tangens найти по прилагаемой в конце таблице.

Пример. Пусть $m = 30$ m.

и $\alpha = 78^\circ 35'$;

имеем $e = 30 . \operatorname{tg} 78^\circ 35'$

по таблице $\operatorname{tg} 78^\circ 30' = 4{,}91516$

отыщем поправку на $5'$

$\operatorname{tg} 78^\circ 40' = 4{,}98940.$

Очевидно при увеличении угла на $10'$ tangens возрос на 0,07424, а при увеличении на $5'$ возрастет на:

$$\frac{0{,}07424}{2} = 0{,}03712.$$

Итак: $$\begin{array}{r} \operatorname{tg} 78^\circ 30' = 4{,}91516 \\ + 5' + 0{,}03712 \\ \hline \operatorname{tg} 78^\circ 35' = 4{,}95228 \end{array}$$

Таким образом $e = 30 . 4{,}95228 = 148{,}57$ m. с точностью до 0,01 m.

На основании указанных опытов можно решать следующие вопросы:

1) измерить ширину реки, озера (опыты 4, 5, 6);

2) длину озера (опыт 1, способ 1, задача 6);

3) расстояние до недоступной точки.

Г Л А В А 2.

Определение высот.

Задача 7. *Определить высоту предмета, расстояние до которого или часть самого предмета можно измерить.*

1 способ. По длине тени.

Пусть требуется измерить высоту телеграфного столба. Ярко светит солнце, и все предметы отбрасывают тени.

Опыт 7. На площадке устанавливаем вертикально две рейки разной длины a и b и одновременно измеряем длину их теней, которые пусть равны соответственно c и e (рис. 89). Из сравнения находим, что

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{e},$$

откуда

$$a=c\frac{b}{e}$$

или

$$a=c.\operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол, под которым лучи солнца падают на плоскость горизонта.

Рис. 89.

Если высота предмета неизвестна, но можно измерить длину тени, то, воткнув произвольной длины кол и измерив длину его тени, можем найти искомую высоту.

Если нужно этим способом определить высоту дерева в лесу, где нельзя найти конец тени данного дерева, то можно поступить следующим образом. Найти такое место, из которого верхушка дерева была бы видна на одной прямой с слабо просвечивающим сквозь листья солнцем. Если качать головой, то можно заметить место положения ее тени. Это и будет конец тени дерева. Зная свой рост, длину собственной тени, которую тут же можно узнать, измерив расстояние от ног до отмеченного колышком места, и длину тени дерева, найдем его высоту.

Предположим, высота человека 1,52 m., длина его тени 1,1 m. и длина тени дерева 6,5 m. Найти высоту.

$$x = \frac{6{,}5 \,.\, 1{,}52}{1{,}1} = 9 \text{ m}.$$

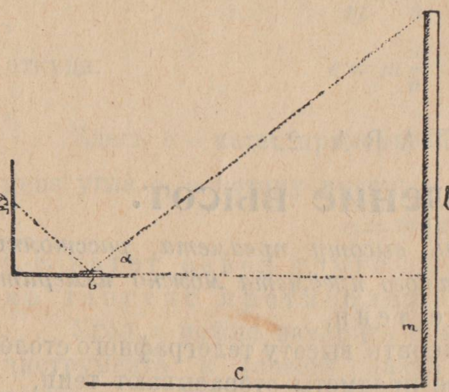


Рис. 90.

2 способ. **Опыт 8.** На горизонтальной площадке установим вертикально столб. На некотором расстоянии расположим тангенсометр 1-го типа так, чтобы изображение вершины столба совпало с чертой зеркала. Пусть отсчеты будут: указателя с диоптром a и зеркала b, и расстояние от инструмента до столба c (рис. 90). Измерим высоту столба и штатива, пусть найдем l и m. Сравнивая найденные величины, найдем, что в пределах точности

$$\frac{a}{b} = \frac{l-m}{c} \quad . \; . \; (7^\circ)$$

откуда

$$l = c\frac{a}{b} + m \quad . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Так как

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ то}$$

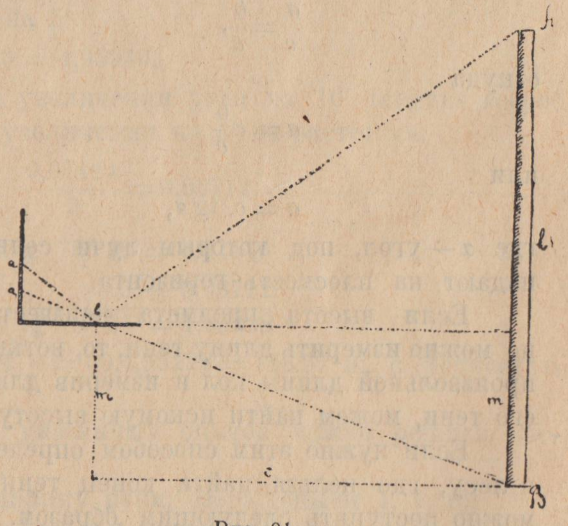


Рис. 91.

$$l = c . \operatorname{tg}\alpha + m \; . \; (8)$$

Опыт 9. Устанавливаем на строго горизонтальной площадке вертикально столб AB и, как в предыдущем опыте, тангенсометр 1-го типа (рис. 91). Пусть также получим:

отсчеты указателя и зеркала a и b, высоту столба и штатива l и m и расстояние от зеркала до столба c. Кроме того, установим визир еще так, чтобы он вместе со стерженьком зеркала и основанием столба был на одной прямой.

Пусть указатель показывает a. Сравнивая полученные величины, найдем:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{a_1},$$

откуда
$$c = m \cdot \frac{b}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Зная расстояние c по предыдущему (форм. 7), получим:

$$l = c \cdot \frac{a}{b} + m.$$

Подставив значение c и преобразовав, найдем:

$$l = m\frac{a}{a_1} + m$$

$$= m\left(\frac{a}{a_1} + 1\right) \ldots (10)$$

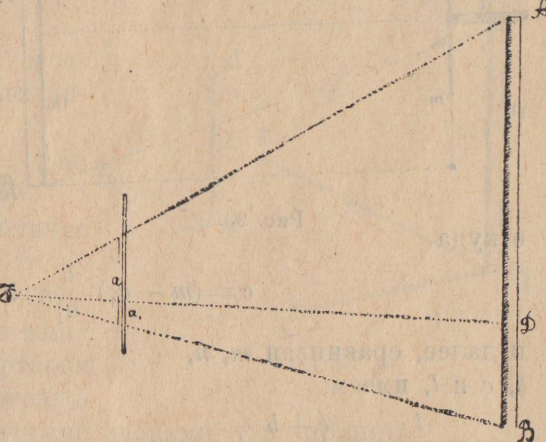


Рис. 92.

Для успешности этого способа нужно, чтобы площадка была действительно горизонтальна и расстояние от основания столба до точки, лежащей на продолжении горизонтальной планки, равнялось высоте штатива.

3 способ. **Опыт 10.** С некоторого расстояния от столба AB, на котором нанесена метка D, определяем, что весь столб закрывается отрезком a вертикально взятой линейке, а часть BD отрезком a_1 (рис. 92). Пусть измерением найдем $AB = m$ и $ДB = n$. Сравнивая, будем иметь

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{a_1},$$

откуда
$$m = n \cdot \frac{a}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ту же задачу более точно можно решить помощью тангенсометра 2-го типа, установив его вертикально. Вместо измерения части предмета, можно измерять расстояние до него.

Опыт 11. На горизонтальной площадке устанавливаем столб и тангенсометр 2-го типа в вертикальном положении (рис. 93). Пусть верхний его указатель дает отсчет a и нижний a_1, длина бруска b, высота штатива до нуля m. Измерим столб и расстояние до него и пусть $AB = l$ и $MB = c$. Сравнивая, найдем

$$\frac{c}{b} = \frac{m - a_1}{a_1},$$

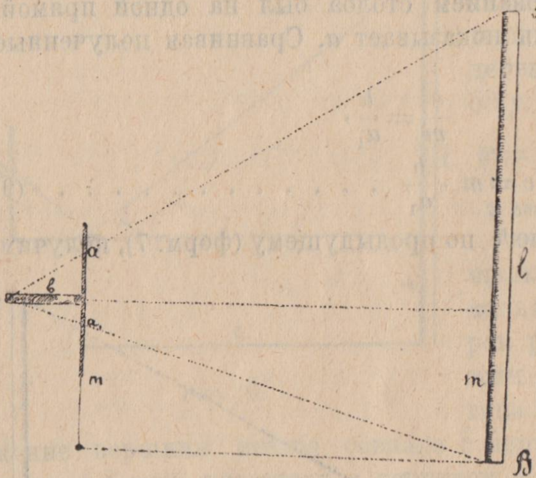


Рис. 93.

откуда

$$c = (m - a_1)\frac{b}{a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

и далее, сравнивая m, n, b, c и l, имеем:

$$\frac{l}{a + a_1} = \frac{c + b}{b},$$

откуда

$$l = \frac{(a + a_1)\;(c + b)}{b}.$$

Подставив значение c и сделав преобразования, получим

$$l = m\left(\frac{a}{a_1} + 1\right).$$

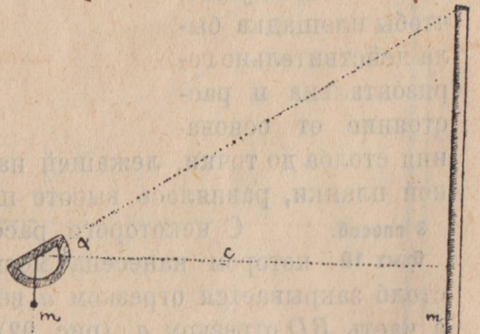


Рис. 94.

Результат получился аналогичный с опытом 9, что и нужно было ожидать.

4 способ. **Опыт 12.** Помощью транспортира измеряем угол α, образованный горизонтальной линией с лучом зрения к вершине столба (рис. 94).

Пусть расстояние от земли до транспортира равно m. Можно, измерив расстояние до столба c, определить высоту, построив схему по масштабу. Для этого проведем линию длиною в c единиц и, восставив на концах перпендикуляры, отложим на них отрезки по m единиц и концы соединим. Затем при точке A построим угол α транспортиром и найдем точку пересечения наклонной стороны этого угла и второго перпендикуляра, который и даст высоту столба.

Можно вычислить и иначе.

Опыт 8 дал формулу.

$$l = c \operatorname{tg} \alpha + m,$$

которая будет иметь место и в данном случае.

Отыскиваем $\operatorname{tg} \alpha$ в табличке и вычисляем l по данной формуле.

Пусть нашли, что $c = 92$ m, $m = 1{,}5$ m. и $\alpha = 32°30'$.

Отыскиваем в табличке и находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 32°30' = 0{,}63707.$$

Так как точность измерения угла транспортиром невелика, то можно ограничиться двумя десятичными знаками, т.-е. принять

$$\operatorname{tg} 32°30' = 0{,}63.$$

Отсюда $e = 92 \,.\, 0{,}63 + 1{,}5 = 59{,}46$ m.

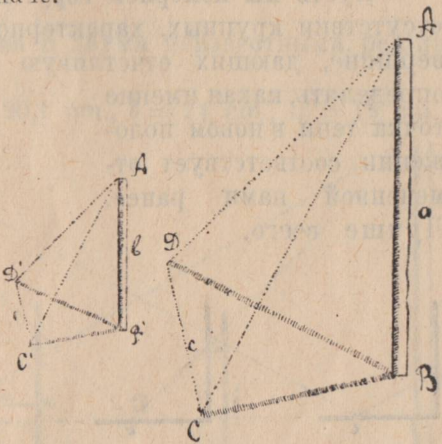


Рис. 95.

Ввиду той же причины ручаться за цифры после запятой не приходится, и для высоты столба достаточно $l = 59$ m.

Задача 8. *Определить высоту горы или предмета, расстояние до которого или часть предмета измерить нельзя.*

Способы предыдущей задачи здесь неприменимы вполне и нужно искать новых зависимостей.

1 способ. Возьмем два столба разной высоты.

Опыт 13. Отметим одновременно колышками концы теней их в точках C и C' (рис. 95). Через некоторое время положение тени изменится, отметим точки D и D', опять в один и тот же момент. Пусть измерением найдем $AB = a$, $A'B' = b$, $DC = c$ и $D'C' = e$.

Сравнивая эти величины, найдем:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{e},$$

откуда $$a = b\,\frac{c}{e} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Таким образом не подходя к предмету можно измерять его в солнечный день без всяких инструментов, кроме палки, которую нужно установить вертикально.

Пусть мы измеряем гору. При перемещении солнца и отсутствии крупных, характерно выдающихся деталей на вершине, дающих отчетливую тень, трудно с точностью определить, какая именно точка тени в новом положении соответствует отмеченной нами ранее. Лучше всего, если это возможно, поставить на высшей точке веху, а в противном случае, заметим какую-либо, хотя бы мелкую, но выдающуюся деталь, хотя бы она и не давала заметной тени. Займем на границе тени такое положение, чтобы эта деталь совмещалась с солнцем, тогда тень головы и будет искомое положение, которое нужно отметить. Проделаем то же в другой раз через некоторое время и найдем другую искомую точку.

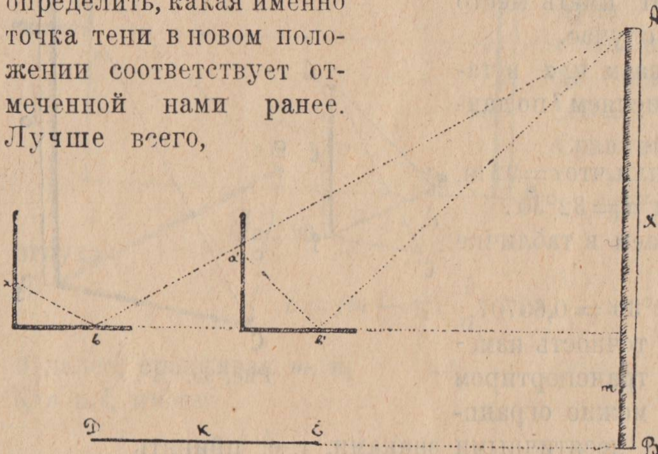


Рис. 96.

Пусть длина палки, поставленной нами вертикально, равна 2 m., тень ее в течение часа сместилась на 55 cm., а тень горы за то же время — на 8 m.

В таком случае высота горы будет равна:

$$x = 8\,\frac{200}{55} = 29{,}1 \text{ m.}$$

3 способ.
Опыт 14.

Пусть на некотором расстоянии от столба AB в точке D установлен тангенсометр 1-го типа и отсчеты указателя и зеркала дают a и b (рис. 96) и в точке E, лежащей на продолжении DB — соответственно a' и b'.

Обозначим высоту столба через x, базис DE через κ и расстояние $BD = y$. На основании опыта 8 имеем:

$$\frac{x - m}{y} = \frac{a}{b}$$

и

$$\frac{x - m}{y - k} = \frac{a'}{b'}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

где m — высота штатива.

Получим два уравнения с двумя неизвестными, решив которые и найдем x и y.

Пусть, например, $a = 20{,}1$ cm., $b = 24$ cm., $a' = 18$ cm., $b' = 12$ cm., $m = 1{,}5$ m. и базис $k = 4$ m.

$$\frac{x - 1{,}5}{y} = \frac{20{,}1}{24}$$

$$\frac{x - 1{,}5}{y - 4} = \frac{18}{12}.$$

Решив эти уравнения, найдем с точностью до 0,1

$$x = 9 \text{ m.},$$

$$y = 9 \text{ m.}$$

Измерив столб и расстояние до него, можно проверить эти решения.

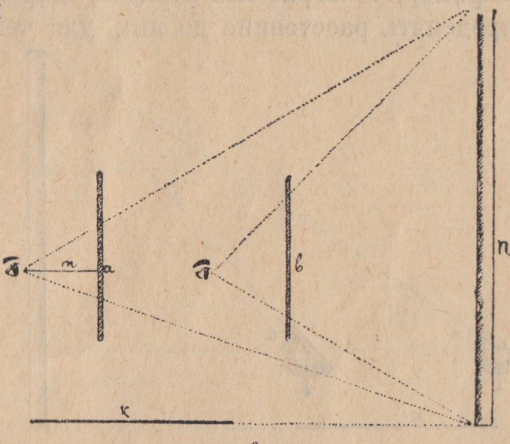


Рис. 97.

3 способ. Опыт 15. Тот же столб с некоторого расстояния закроем линейкой, которую будем держать вертикально. Пусть столб закроется отрезком линейки a. Подойдя на расстояние k (базис), столб уже закроем отрезком b (рис. 97). Измерив расстояние до столба c, найдем из сравнения этих величин зависимость

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{c - k}$$

или

$$\frac{c}{k} = \frac{b}{b - a},$$

откуда

$$c = k\frac{b}{b - a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Пусть длина руки равна m cm. и высота столба — n m., тогда будем иметь

$$\frac{n}{c} = \frac{a}{m}$$

и отсюда $$n = \frac{a \cdot c}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

из (16) и (17) имеем $$n = \frac{k}{m}\left(\frac{ab}{b-a}\right).$$

Таким образом, зная расстояние до предмета, можно найти его высоту и обратно.

Зная наперед высоты предметов, часто встречающихся, например, телеграфных столбов, деревьев и т. д., можно определять расстояние до них, для чего достаточно иметь разделенную на миллиметры линейку или нанести деления на любом предмете, постоянно находящемся у нас: карандаше, обложке записной книжки и т. д.

Более точно эту задачу можно решать помощью тангенсометра 2-го типа этим же самым способом.

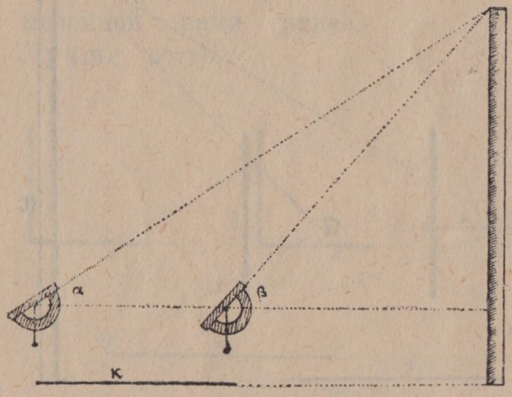


Рис. 98.

4 способ. Опыт 16. Возьмем базис k, как в предыдущем опыте, и определим помощью транспортира или другого более надежного инструмента углы, под которыми виден столб с одного и другого конца базиса. Пусть эти углы будут равны α и β градусов.

Вопрос можно решить графически, построив по масштабу базис и углы α и β. Точка пересечения этих наклонных и будет вершиной столба. Опустив перпендикуляр на продолжение базиса, найдем высоту и расстояние до столба, измерив в том же масштабе. Измерив высоту столба и расстояние до него, найдем приблизительное совпадение этих величин (рис. 98).

Можно знание углов использовать иначе.

В уравнениях 15, опыта 14, $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ и $\frac{a'}{b'} = \operatorname{tg} \beta$.

По углам α и β мы можем найти их тангенсы и воспользоваться теми же уравнениями

$$\frac{x-m}{y} = \operatorname{tg} \alpha$$

и

$$\frac{x-m}{y-k} = \operatorname{tg} \beta,$$

решив которые и найдем x и y.

ГЛАВА 3.

Нивелирование.

Задача 9. *Крестьянин ставит избу. Ему нужно установить столбы фундамента так, чтобы пол был горизонтален и изба прямоугольна.*

Решение. Вбиваем по линии, вдоль которой должна строиться одна из стен, ряд колышков, высота которых приблизительно должна находиться на уровне пола. Ставим на два первых ватерпас и вколачиваем второй настолько, чтобы ватерпас показал горизонтальную линию. То же проделываем со всеми остальными, при чем вколачивать нужно последующие колья, те же, которые уже поставлены по ватерпасу, трогать нельзя. Так доходим до конца линии, которую нужно наметить (рис. 99).

Рис. 99.

Рис. 100.

Восставим на концах перпендикуляры, что можно сделать одним из указанных приемов, а можно и следующими способами.

У веревки намечаем середину, на равных расстояниях от углового колышка по намеченной линии вбиваем два других и к ним привязываем концами веревку (рис. 100).

Взяв за середину, натягиваем ее и вбиваем как раз в точке середины колышек, который и укажет перпендикулярное направление.

То же можно проделать мерной лентой. Возьмем часть в 12 единиц. Привязав свободный конец к колышку,

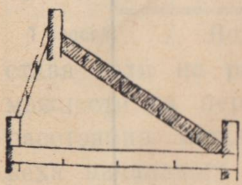


Рис. 101.

отстоящему от углового на 3 единицы, вколотим другой колышек, чтобы образовался треугольник с остальными сторонами в 4 и 5 единиц. Угол, образованный сторонами 3 и 4, будет прямой (рис. 101).

Этот треугольник обладает интересными свойствами. Возведя стороны его в квадрат, т.-е. помножив каждую саму на себя, найдем:

$$25 = 16 + 9,$$

т.-е.

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

Итак, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Эту зависимость можно проверить и на других прямоугольных треугольниках.

Наметив остальные линии помощью ватерпаса, как для первой линии, получим горизонтальный прямоугольник. Если ватерпас, поставленный на первый и самый последний колышек, который окажется рядом с ним, будет горизонтален, следовательно нивелировка проделана верно, в противном случае необходимо внести нужные поправки. Далее, нужно проверить правильность прямоугольника. Для этого измерим веревкой диагонали. Если они равны, следовательно вопрос решен верно.

Задача 10. *Найти профиль горы.*

Для решения вопроса возьмем две рейки, скрепленные, как указано в § 13, или две длинные планки и ватерпас, или уровень. Одна из реек должна быть горизонтальна, а другая вертикальна, что достигается или отвесом, или ватерпасом, который ставим на горизонтальную рейку.

Переносим рейки с места на место, как указано на чертеже 102, и измеряем обе рейки до места пересечения. Эти данные дадут возможность построить профиль и определить высоту горы.

Запись удобно вести на прилагаемом бланке.

№№ пунктов	Горизонтальный отсчет	Вертикальный отсчет	Высота над нулевым пунктом	Расстояние от нулевого пункта	Примечание
	m.	m.	m.	m.	
0—1	1,1	1,7	1,7	1,1	
1—2	1,9	0,5	2,2	3	
2—3	0,65	0,9	3,1	3,65	
3—4	0,9	1,5	4,6	4,55	

Чтобы построить профиль, нужно на горизонтальной линии наметить точки на расстояниях, указанных в четвер-

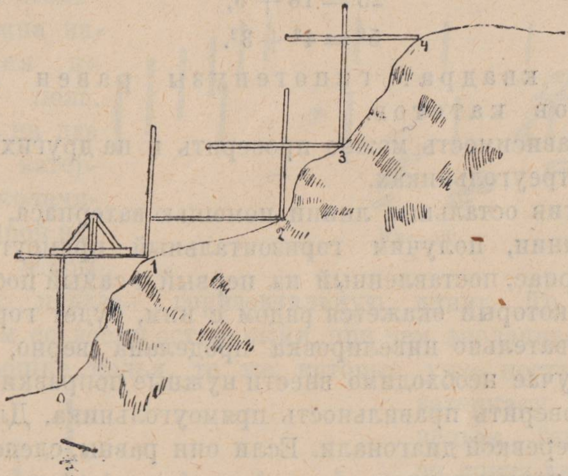


Рис. 102.

том столбце и восставить перпендикуляры, отложив на них в том же масштабе отрезки, указанные в 3 столбце. Соединив концы перпендикуляров, получим профиль (рис. 103).

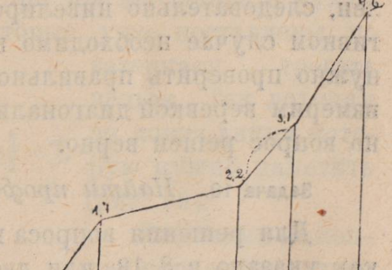


Рис. 103.

Этим способом можно, например, измерять толщину обнаженных слоев почвы, но при этом пункты должны совпадать с границами слоев.

В графе примечаний нужно отмечать название пород слоев.

Задача 11. *Найти профиль местности в данном направлении и определить разность уровней крайних пунктов.*

1 способ. Водяным уровнем. Провешиваем прямую, ставя вехи на расстояниях не больших 40 метров, по возможности на перегибах местности, и тщательно вымеряем расстояния между ними. Вехи перенумеруем, при чем веха начального пункта будет считаться нулевой (№ 0), (рис 104).

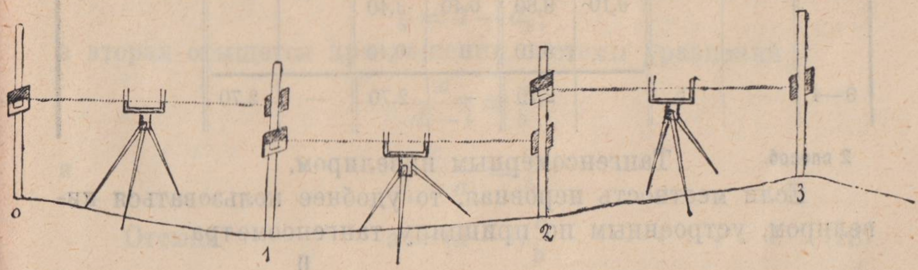


Рис. 104.

Ставим нивелир между 0 и 1 вехами и, глядя вдоль уровней воды в трубках, знаками руководим движением указателя по нулевой рейке, пока она не займет надлежащего положения, т.-е. уровень воды в трубках и граница черной и белой части доски не будут лежать на одной горизонтальной прямой.

Это будет взгляд назад. Взгляд вперед даст положение указателя на той же горизонтальной прямой на рейке № 1. Сделав отсчеты, ставим инструмент между пунктами 1 и 2 и снова отсчитываем вперед и назад. Нужно заметить, что рейки должны устанавливаться вертикально по отвесу. Реек может быть две, но можно обходиться и одной. Запись следует вести на следующем бланке:

..................Месяца........ дня 192......года.................. школа №........ступени..................

Город .... губернии .... местность ....

Установка инструмента между точками	Расстояние		Высота рейки при		От точки до точки		Участок		Примечание
	от точки до точки	от исходной точки (№ 0)	взгляде назад	взгляде вперед	подъем	уклон	повышается	понижается	
	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	
0—1	20	20	1,60	2,60	—	1,00	—	1,00	
1—2	15	35	2,00	1,60	0,40	—	—	0,60	
2—3	20	55	1,00	2,40	—	1,40	—	2,00	
3—4	20	75	1,50	2,20	—	0,70	—	2,70	
			6,10	8,80	0,40	3,40			
				6,10		0,40			
0—4	—	75		2,70	—	2,70	—	2,70	

2 способ. Тангенсомерным нивелиром.

Если местность неровная, то удобнее пользоваться нивелиром, устроенным по принципу тангенсометра.

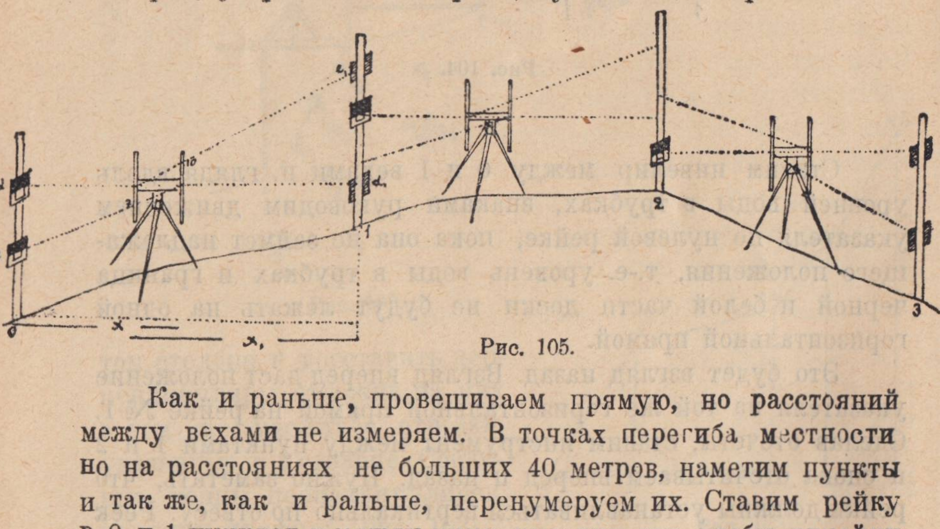


Рис. 105.

Как и раньше, провешиваем прямую, но расстояний между вехами не измеряем. В точках перегиба местности но на расстояниях не больших 40 метров, наметим пункты и так же, как и раньше, перенумеруем их. Ставим рейку в 0 и 1 пунктах и между ними нивелир так, чтобы линейки были вертикальны, что достигаем или уровнем, положенным на брусок, или отвесом (рис. 105).

По рейке в пункте 0 передвигается при взгляде назад указатель, пока диоптр, нулевой штифт на линейке и указатель не будут на одной горизонтальной прямой.

Затем передвигается по рейке другой указатель, пока он не будет на одной прямой с диоптром и одним из штифтов линейки. Пусть отсчеты на рейке будут $d = 1{,}5$ m. и $l = 0{,}8$ m. и на нивелире брусок $a = 25$ cm. и $b = 7$ cm. штифт. Так же отсчитываем вперед. Пусть горизонтальный отсчет рейки $d_1 = 0{,}3$ m. и $l_1 = 1{,}47$ m. дополнительный, которым отсчеты нивелира соответствуют, $a_1 = 25$ cm. и $b_1 = 10$ cm.

Эти результаты дадут возможность рассчитать насколько 1 пункт выше или ниже нулевого, и определить расстояние между рейками по горизонтальной линии.

Очевидно, первая величина будет равна:

$$y = d - d_1,$$

а вторая отыщется при решении системы уравнений

$$\frac{x}{d-l} = \frac{a}{b}$$

и

$$\frac{x_1}{l_1 - d_1} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Отсюда

$$x = (d-l)\frac{a}{b} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

и

$$x_1 = (l_1 - d_1)\frac{a_1}{b_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

Расстояние между 0 и 1 пунктами равно $x + x_1 - a$, так как a участвует два раза, если сложить x и x_1.

Перенося рейку в пункт 2 и нивелир между 1 и 2 пунктами, проделаем то же самое, и т. д.

Запись удобно вести на следующем бланке:

Установка инструмента между точками	Высота рейки при		От точки до точки		Участок		Угловой отсчет при взгляде				Расстояние		Примечание
							назад		вперед				
	взгляде назад	взгляде вперед	под'ем	уклон	повышается	понижается	рейка	нивелир	рейка	нивелир	точки до точки	исходной точки №0	
0–1	m. 1,5	m. 0,3	m. 1,2	m. —	m. 1,2	m. —	m. 0,8	cm. 7,0	m. 1,77	cm. 10,0	m.	m.	

В последние графы пишутся величины, вычисленные по формулам 18 и 19.

Итоги бланка подводятся, как и на предыдущем бланке.

Профиль наносится так же, как и в задаче 10.

ГЛАВА 4.

С'емка плана.

Задача 12. *Снять план треугольного участка и определить его площадь. Доступны измерению две стороны и угол между ними.*

Пусть одна из сторон треугольного участка покрыта лесом, а две другие и угол между ними доступны измерению (рис. 106).

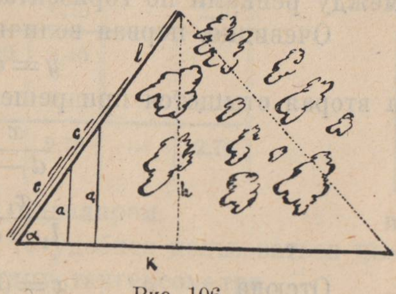


Рис. 106.

Измерив их, предположим, найдем, что стороны равны k и l т, а угол $= \alpha$ (можно найти tangens угла вместо самого угла). Построив по масштабу стороны, пересекающиеся под данным углом, и соединив их концы, получим треугольник, который будет называться подобным данному.

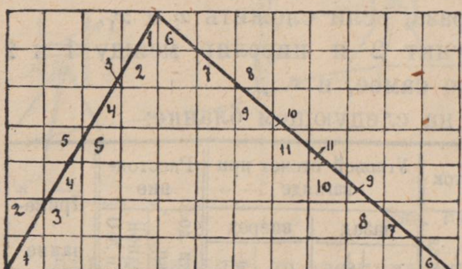


Рис. 107.

Определить его площадь.

1 способ. Чертим его на клетчатой бумаге, принимая клетку за квадратную единицу. Считаем число целых клеток и, прибавив сумму сложенных частей, получим площадь треугольника (рис. 107).

$$S = 31 + 11 = 42.$$

Основание равно 12 ед. и высота 7. Очевидно:

$$42 = \frac{12 \cdot 7}{2},$$

откуда заключаем, что площадь треугольника

$$S=\frac{k\,.\,h}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

где h — высота и k — основание треугольника, т.-е. площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2 способ. Восставим два перпендикуляра a и a_1 и измерим соответствующие им наклонные c и c_1 (рис. 106).

Сравнивая эти величины, найдем, что a во столько раз больше c, во сколько a_1 больше c_1, т.-е. получим пропорцию (с известной точностью)

$$\frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}.$$

Очевидно, что и

$$\frac{h}{l}=\frac{a}{c},$$

т.-е. отношение высоты треугольника к боковой стороне будет таково же.

Из последней пропорции имеем

$$h=l\frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21^0)$$

Зная высоту h и основание k, можно на основании формулы (20) найти площадь

$$S=\frac{k\,.\,h}{2}=\frac{1}{2}k\,.\,l\frac{a}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Величина $\frac{a}{c}$, отношение катета к гипотенузе, называется sinus'ом (синусом) противолежащего угла α и вполне характеризует данный угол

$$\frac{a}{c}=\sin\alpha.$$

Итак, площадь треугольника можно выразить еще следующей формулой:

$$S=\frac{k\,.\,l}{2}\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Эта последняя формула дает возможность определить площадь, измерив тем или иным способом угол α в градусах. В таблице, приложенной в конце, можно отыскать sin этого угла α.

Пример. Пусть дано $k = 125$m., $l = 135{,}6$ m. и $\alpha = 48^0 25'$ По формуле (22)

$$S = \frac{125 \,.\, 135{,}6}{2} \sin 48^0 25'.$$

В таблице (см. приложение 2) находим

$$\sin 48^0 20' = 0{,}74703.$$

Необходимо отыскать поправку для $5'$.

$$\sin 48^0 30' = 0{,}74896.$$

Табличная разность равна 193 стотысячных, т.-е. при увеличении угла на $10'$ sin увеличивается на 193 стотысячных. Спрашивается, на сколько он увеличится при увеличении угла на $5'$

$$10' = 193$$

$$5' = x$$

$$x = \frac{193 \,.\, 5}{10} = 96{,}5 = 97 \text{ стотысячных;}$$

0,5 мы отбросили, но зато усилили предшествующую цифру. Условимся, что если отбрасываемая цифра 5 и большая, то будем усиливать предшествующую цифру, а если меньше 5, то нет.

Введем поправку

$$\begin{array}{r} \sin 48^0 20' = 0{,}74703 \\ +5' = \quad 97 \\ \hline \sin 48^0 25' = 0{,}74800 \end{array}$$

Отсюда

$$S = \frac{125.135{,}6}{2} \,.\, 0{,}748 = 6339{,}3.\ \text{т}^2.$$

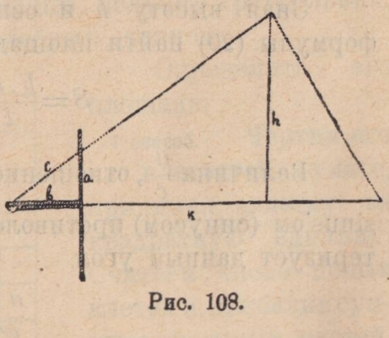


Рис. 108.

3 способ. Измеряем одним из тангенсометров

угол α ($\alpha < 45^0$).

Пусть отсчеты указателя и зеркала равны a и b. На основании задачи 9 можем найти гипотенузу c (рис. 108).

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23^0)$$

откуда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Подставив значение c в формулу (21^0), найдем

$$h=\frac{la}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (23')$$

Из формулы (20) получим площадь

$$S=\frac{kh}{2}=\frac{k \cdot l}{2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{kl}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2\left[1+\frac{b^2}{a^2}\right]}}=$$

$$=\frac{kl}{2}\cdot\frac{a}{a\sqrt{1+\left[\frac{b}{a}\right]^2}}$$

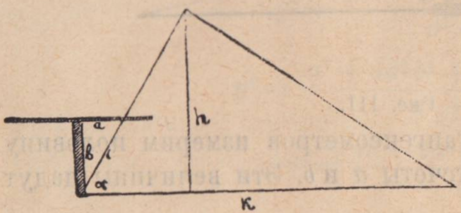


Рис. 109.

И окончательно $S=$

$$=\frac{kl}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{b}{a}\right]^2}} \quad .(24)$$

Отношение $\frac{b}{a}$ называется cotangens угла α и вполне определяет его. Это величина, как видим, обратная tg.

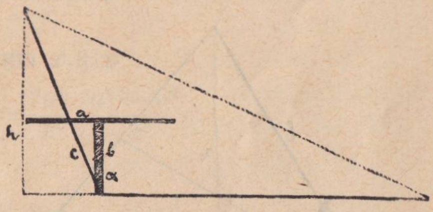


Рис. 110.

Для площади тогда получим такую формулу

$$S=\frac{kl}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \quad . \; . \; . \; (24')$$

Если угол α будет больше 45^0 и меньше 90^0 ($90^0>\alpha>45^0$), то измеряем угол дополнительный до 90^0, восставив предварительно перпендикуляр, при чем в формуле (23) a и b поменяются местами (рис. 109).

То же имеем и при угле α, большем 90^0, но меньшем 135^0 ($90<\alpha<135^0$).

В этом случае измеряем угол $\alpha-90^0$ (рис. 110) и роли a и b также меняются

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{a}{b}.$$

Пусть угол α будет больше 135^0 и меньше 180^0 ($135^0<\alpha<180^0$) (рис. 111). Будем измерять угол, смежный с углом α. В этом случае $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$.

Так как для определения высоты h нужно знать c, зависящее от суммы квадратов a и b, то формула (23) имеет применение во всех случаях, рассмотренных выше. Эти указания имеют отношение к тангенсометрам обоих типов.

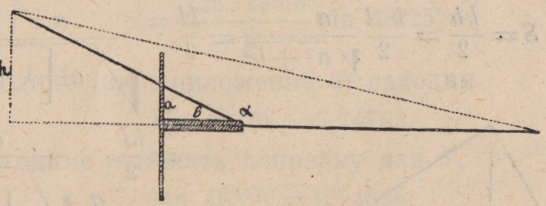


Рис. 111.

Способ 4. Одним из тангенсометров измерим половину угла α. Пусть получили отсчеты a и b. Эти величины дадут tg половины угла α

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25^0)$$

а нужен tg целого угла α (рис. 112).

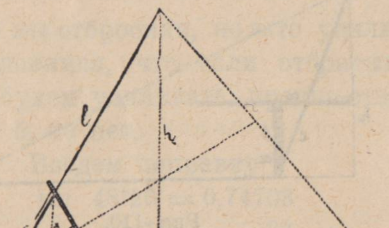


Рис. 112.

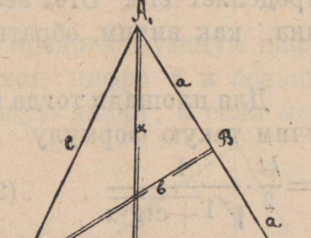


Рис. 113.

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1\ B_1\ C_1$ (рис. 113).

У них угол C общий и кроме того они прямоугольные, а значит, они подобны. У подобных треугольников стороны пропорциональны, а потому находим

$$\frac{b}{c} = \frac{x}{2a},$$

откуда
$$x = \frac{2a \,.\, b}{c}$$

или
$$x = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

если вместо c подставим значение из формулы (23).

Из треугольника AA_1B_1 имеем

$$y^2 = c^2 - x^2.$$

Подставим из формулы (23^0) значение c^2 и x и упростим

$$y^2 = a^2 + b^2 - \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$y^2 = \frac{(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$y^2 = \frac{a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$y^2 = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2+b^2}$$

$$y^2 = \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{c^2}.$$

Извлекая корень, найдем для y

$$y = \frac{a^2-b^2}{c};$$

$\operatorname{tg}\alpha$ равняется отношению x к y

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{2ab}{c} : \frac{a^2-b^2}{c}.$$

Сократив c, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

Для получения h нужно знать отношение $\frac{x}{c}$

$$\frac{x}{c} = \frac{2ab}{c \cdot c} = \frac{2ab}{c^2}$$

и, подставив значение c из формулы (23^0), получим

$$\frac{x}{c} = \frac{2ab}{a^2+b^2} = \sin\alpha$$

По формуле (21^0) $h = l\frac{x}{c} = l\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

Зная основание k и высоту h, найдем площадь

$$S = \frac{kh}{2} = \frac{kl}{2} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

Сократив 2 и взяв b^2 в знаменателе за скобки и сократив по b в числителе и знаменателе, получим

$$S=\frac{kl}{1+\left[\frac{a}{b}\right]^2}\cdot\frac{a}{b} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

или на основании формулы (25⁰)

$$S=\frac{kl}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25')$$

Задача 13. *Снять план треугольного участка и определить площадь его, если доступны измерению одна сторона и прилежащие к ней углы.*

Пусть треугольный участок пересекается рекой так, что измерить можно только одну сторону k и два угла α и β (рис. 114).

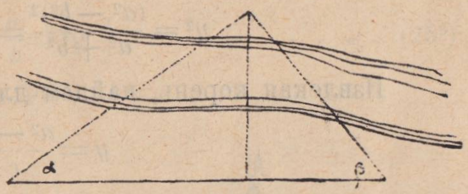


Рис. 114.

По этим данным можно построить в том или ином масштабе подобный ему треугольник.

Определим площадь его.

1 способ. На плане измерим высоту h в данном масштабе и найдем площадь

$$S=\frac{kh}{2}.$$

Пусть, например, измеренная сторона равна 500 m. и углы $\alpha=35^\circ$ и $\beta=50^\circ$.

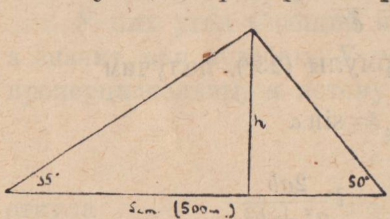


Рис. 115.

Примем 1 cm. за 100 m., т.-е. берем масштаб $\frac{1}{10000}$ и строим треугольник.

Отложим линию в 5 cm. и под углами в 35° и 50° проводим две боковые стороны до пересечения. Опустив из вершины высоту h, измерим ее в сантиметрах.

Находим, что $h = 2{,}25$ cm., что составит

$$2{,}25 . 100 = 225 \text{ m.}$$

Теперь найдем и площадь треугольника

$$S = \frac{500.224}{2} = 56250 \text{ m}^2 \text{ (т.-е. кв. метров).}$$

2 способ. При измерении элементов треугольника на местности, восставим три перпендикуляра a, a_1 и h. Первые два произвольных, но таких, чтобы их можно было измерить, а третий h_1 должен проходить через вершину и служить, следовательно, высотой (рис. 116). Измерим a, a_1, b, b_1, и n. Сравнивая четыре последних, найдем, что a во столько раз больше b, во сколько a_1 больше b_1, т.-е. получим пропорцию

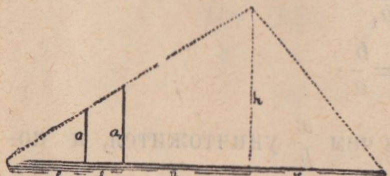


Рис. 116.

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Очевидно и

$$\frac{h}{n} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$h = n\frac{a}{b}.$$

Зная k и определив h, найдем и площадь

$$S = \frac{kh}{2} = \frac{k.n}{2} \cdot \frac{a}{b} \quad . \; . \; . \; . \; (26)$$

Рис. 117.

или так как

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$S = \frac{kn}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (26')$$

3 способ. Помощью одного из тангенсометров определим элементы углов α и β. Пусть для α найдем a и b и для β — a_1 и b_1 (рис. 117).

Построив по масштабу треугольник с найденными углами и основанием, опустим высоту h.

На основании опыта 6 будем иметь два уравнения

$$\frac{x}{h}=\frac{b_1}{a_1}$$

и

$$\frac{k-x}{h}=\frac{b}{a}$$

Определим из них h, для чего сделаем следующее преобразование:

$$\frac{x}{h}=\frac{b_1}{a_1}$$

и

$$\frac{k}{h}-\frac{x}{h}=\frac{b}{a}.$$

Сложим эти пропорции, при чем $\frac{x}{h}$ уничтожится, и получим:

$$\frac{k}{h}=\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1},$$

откуда

$$h=\frac{k}{\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1}} \quad \ldots\ldots\ldots (27^0)$$

Для площади найдем

$$S=\frac{kh}{2}=\frac{k^2}{2\left[\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1}\right]} \quad \ldots\ldots (27)$$

Подставив вместо $\frac{b}{a}=\operatorname{ctg}\alpha$ и $\frac{b_1}{a_1}=\operatorname{ctg}\beta$, получаем

$$S=\frac{kh}{2}=\frac{k^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)} \quad \ldots\ldots (27')$$

Если один из углов, например β, будет тупой, то b_1 будет направлено в противоположную прежнему сторону и потому изменит знак.

Формула (27) примет вид:

$$S=\frac{k}{2\left[\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}\right]}.$$

Таким образом, определив углы α и β каким-либо угломерным инструментом в градусах, можем вычислить площадь по формуле (27′) с помощью таблицы (см. приложение 2).

Пусть, например, $k = 300$ m., $\alpha = 35°28'$ и $\beta = 50°47'$.

Имеем
$$S = \frac{300^2}{\sqrt{\operatorname{ctg} 35°28' + \operatorname{ctg} 50°47'}}$$

Отыскиваем по таблицам ctg 35°28′ и ctg 50°47′, при чем градусы нужно смотреть справа, а минуты снизу.
$\operatorname{ctg} 35°20' = 1{,}41061.$

Табличная разность равна 866 стотысячных при изменении на 10′, значит

$$\begin{array}{r|l} 10' - 866 & \\ 8' - \ x & x = \dfrac{866.8}{10} = 692{,}8 = 693 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \operatorname{ctg}\ 35°20' = & 1{,}41061 \\ +8' & \phantom{1{,}41}693 \\ \hline \operatorname{ctg}\ 35°28' = & 1{,}40368 \end{array}$$

Поправку на 8′ мы вычли из ctg 35°20′, так как в таблице мы можем заметить, что с увеличением угла ctg уменьшается.

Точно так же определяем и ctg 50°47′.

$$\begin{array}{rl} \operatorname{ctg} 50°40' = & 0{,}81946; \\ +7' & \phantom{0{,}8}-340 \\ \hline \operatorname{ctg} 50°47' = & 0{,}81606 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10' - 485 & \\ 7' - x & x = \dfrac{485.7}{10} = 339{,}5 = 340 \end{array}$$

Отыскиваем сумму ctg'ов

$$\begin{array}{r} 1{,}40368 \\ +\,0{,}81606 \\ \hline 2{,}21974 \end{array}$$

и отыскиваем площадь

$$S = \frac{300^2}{2{,}21974} = 40545\ \text{m}^2.$$

4 способ. Измерим tangens'ы половин углов α и β и пусть имеем для α отсчеты a и b и для β — a_1 и b_1, тогда на основании предыдущего (4 случ., задача 12) имеем

$$x = \frac{2\,ab}{c}$$

$$y = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

$$x_1 = \frac{2\,a_1 b_1}{c_1}$$

$$y_1 = \frac{a_1^2 - b_1^2}{c_1}.$$

Подставив в формулу (27) вместо a, b, a_1 и b_1 соответственно x, y, x_1 и y_1, получим

$$S=\frac{k^2}{2\left[\frac{a_2-b_2}{c}:\frac{2ab}{c}+\frac{a_1^2-b_1^2}{c_1}:\frac{2a_1b_1}{c_1}\right]}.$$

Сделаем упрощения в знаменателе, сократив на c

$$2\left[\frac{a^2-b^2}{2ab}+\frac{a_1^2-b_1^2}{2a_1b_1}\right]=2\left[\frac{a^2}{2ab}-\frac{b^2}{2ab}+\frac{a_1^2}{2a_1b_1}-\frac{b_1^2}{2a_1b_1}\right],$$

и сократив каждую дробь в отдельности и все двойки в знаменателях с 2 за скобками, получаем

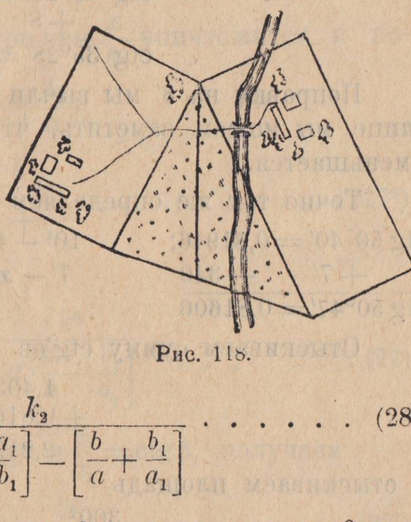


Рис. 118.

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{a_1}{b_1}-\frac{b_1}{a_1}$$

или

$$\left[\frac{a}{b}+\frac{a_1}{b_1}\right]-\left[\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1}\right].$$

Подставив это выражение в знаменатель формулы суммы, получаем

$$S=\frac{k_2}{\left[\frac{a}{b}+\frac{a_1}{b_1}\right]-\left[\frac{b}{a}+\frac{b_1}{a_1}\right]}\quad\ldots\ldots\quad(28)$$

Задача 14. *Между двумя отрубами крестьян находится участок сенокоса, нужно разделить его пропорционально длине межи каждого* (рис. 118).

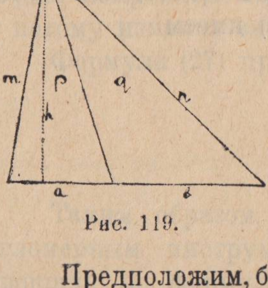


Рис. 119.

Задача сводится к делению основания треугольника на две части, пропорциональные боковым сторонам.

В самом деле, пусть мы разделим треугольник на два, при чем основания их пропорциональны прилежащим боковым сторонам.

Предположим, боковые стороны равны m и n, и прилежащие а ти основания соответственно a и b (рис. 119).

При чем a и b взяты так, что

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

Высота h для обеих частей данного треугольника одна и та же, следовательно, площади их

$$p = \frac{a.h}{2} \text{ и } q = \frac{b.h}{2}.$$

Взяв отношение площадей p и q, найдем

$$p : q = \frac{a.h}{2} : \frac{b.h}{2}$$

и после сокращения получаем

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Измерим части угла α, на которые он разделился. Находим близкие величины и заключаем, что угол α разделился пополам.

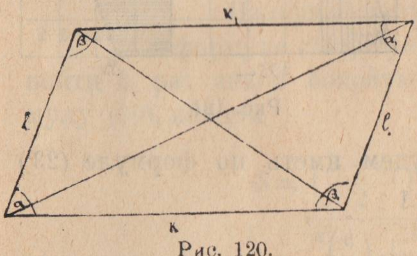


Рис. 120.

Линия, делящая угол пополам, называется *биссектрисой*.

Итак, чтобы разделить треугольник на части, пропорциональные боковым сторонам, нужно провести биссектрису угла, образованного этими сторонами.

Задача 15. *Дан участок в форме параллелограма. Необходимо нанести его на план и определить площадь.*

Опыт 18. Измерим стороны k, l, k_1, l_1 и углы α, β α_1 и β_1 (рис. 120). Сравнивая, видим, что

$$k = k_1 \text{ и } l = l_1$$
$$\alpha = \alpha_1 \text{ и } \beta = \beta_1.$$

На этом основании заключаем, что необходимо измерить две стороны и два угла, и этого вполне достаточно, чтобы построить измеренный параллелограм.

Пусть $l = 10$ m., $k = 15$ m., и углы $\alpha = 70°$ и $\beta = 110°$.

Возьмем масштаб $\frac{1}{400}$, т.-е. 1 сантиметр за 4 m.

Откладываем отрезок, равный 3,75 cm., и проводим под углом в 70° линию и на ней откладываем отрезок в 2,5 cm.

Через конец последнего отрезка проводим линию под углом в 110° и снова откладываем отрезок, равный 3,75 cm. Соединив точки A и B, получим параллелограм (рис. 121).

Определим площадь его.

1 способ. Сосчитаем число клеток, равных квадратному cm. Целых клеток 5, к ним прибавим 3 клетки, составленные из частей, и оставшаяся, дважды заштрихованная, часть тоже приблизительно равна около $\frac{3}{4}$ клетки. Таким образом площадь окажется равной около $8\frac{3}{4}$ cm^2.

Измерим высоту и найдем приблизительно $2\frac{1}{3}$ cm,. Если сравнить величины $S = 8\frac{3}{4}$, $h = 2\frac{1}{3}$ cm. и $k = 3{,}75$ cm., то видим, что

$$8\tfrac{3}{4} = 2\tfrac{1}{3} \cdot 3\tfrac{3}{4},$$

т.-е.

$$S = k.\ h. \quad . \ . \ . \ . \ . \ (29)$$

Площадь параллелограма равна произведению основания на высоту

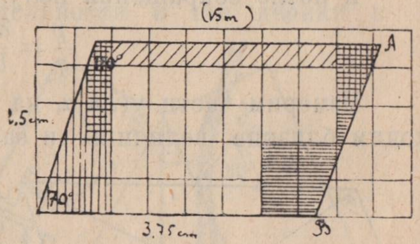


Рис. 121.

2 способ. Измерим угол α одним из тангенсометров. Будем иметь по формуле (23′)

$$h = l \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}},$$

если возьмем a^2 за скобки, вынесем из-под радикала и сократим по a в числителе и знаменателе.

Подставив это значение h в формулу (29), получим

$$S = kl \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (29')$$

Примечание. Измерив части, на которые взаимно делятся диагонали, найдем, что они взаимно делятся пополам. В случае ромба диагонали окажутся перпендикулярными.

Задача 16. *Участок в форме трапеции нанести на план и измерить площадь*

Опыт 16. Измерим оба основания k и k_1, одну из боковых сторон l и два прилежащие к ней угла α и β. По этим данным можно построить по масштабу три стороны и, соединив свободные концы оснований, получить трапецию, подобную измеренной (рис. 122).

Наблюдение 1. Сложив углы α и β, найдем величину, близкую к 180°

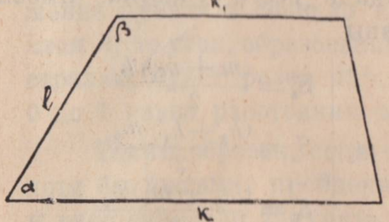


Рис. 122.

$$\alpha + \beta = 180°$$

Найдем площадь трапеции.

1 способ. Опыт 20. На клетчатой бумаге по масштабу строим план трапеции и, сосчитав число целых клеток и сложив части, получим площадь трапеции S. Опустив высоту h и измерив ее, найдем

$$S = \left(\frac{k + k_1}{2}\right) h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

2 способ. Измерим тангенсометром угол α; тогда по формуле (23′), преобразованной в задаче 15, можем найти h, раз знаем боковую сторону l, и, подставив в формулу (30), найдем

$$S = \left(\frac{k + k_1}{2}\right) \frac{l}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (30')$$

Задача 17. *Нанести на план и измерить площадь неправильного многоугольного участка.*

1 способ. Помощью экера. Пусть участок в целом доступен для измерения в любом направлении (рис. 123).

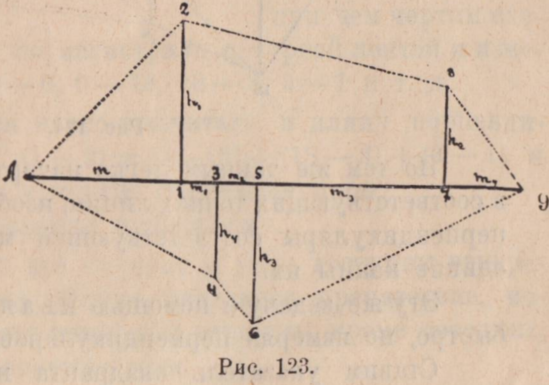


Рис. 123.

Провешиваем главную магистральную линию $A9$ и одним из указанных способов восставляем перпендикуляры h_1, h_2, h_3, h_4, подбирая на магистрали такие пункты, чтобы перпендикуляры прошли через вершины многоугольника, и измеряем расстояния между ними m, m_1, m_2, m_3, m_4. Участок разобьется на ряд прямоугольных треугольников и трапеций, высоты и основания которых известны. Определив их площадь и сложив, найдем площадь всего участка. Имеем 6 фигур, площади которых равны:

$$S_1 = \frac{mh_1}{2} \qquad S_4 = \frac{(m + m_1)\, h_4}{2}$$

$$S_2 = \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)(m_1 + m_2 + m_3) \qquad S_5 = \frac{(h_3 + h_4)\, m_2}{2}$$

$$S_3 = \frac{m_4 . h_3}{2} \qquad S_6 = \frac{(m_3 + m_4)\, h_3}{2}$$

Сложив эти площади, раскрыв скобки и выделив за скобки по частям h_1, h_2, h_3 и h_4, найдем.

$$S = {}^1\!/_2\, [h_1\, (m + m_1 + m_2 + m_3) + h_2\, (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) + h_3\, (m_2 + m_3 + m_4) + h_4\, (m + m_1 + m_2)].$$

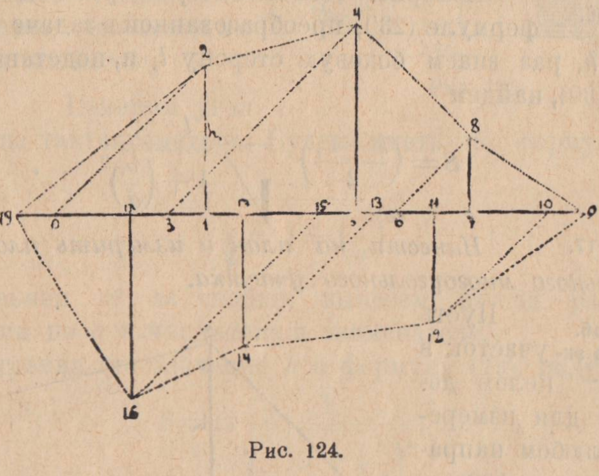


Рис. 124.

По тем же данным легко начертить и план, восставив в соответствующих точках линии, изображающей магистраль, перпендикуляры соответствующей масштабу длины и соединив концы их.

Эту же задачу с помощью **к в а д р а н т а** можно решать быстро, не измеряя перпендикуляров, следующим образом.

Ставим указатель квадранта на $22^0\ 30'$, закрепляем заверткой и, двигаясь по главной магистрали в сторону B, подбираем такую точку 0, чтобы отражение в зеркале пункта 2 совпадало с пунктом 9, видимым непосредственно (рис. 124).

Очевидно угол, который будет образован магистралью с направлением от O к пункту 2, равен $22^\circ 30' . 2 = 45^\circ$. Если теперь поставить указатель квадранта на 45^0 и, двигаясь вперед, подобрать пункт 1 так, чтобы снова изображение пункта 2 совпало с видимым непосредственно пунктом 9, то угол, образованный направлением от 1 к 2 с магистралью, будет равен $45^\circ . 2 = 90^\circ$, а, значит, расстояние от 0 до 1 равно расстоянию от 1 до 2.

Таким образом, если при переходе от 0 до 1 измеряем, хотя бы шагами, пройденное расстояние, то мы уже знаем и расстояние до 2 пункта, т.-е. перпендикуляр h_1.

Точно так же, подобрав точку 3, а затем 5, получим расстояние до 4 и т. д. Пройдя в одну и другую сторону по магистрали, мы уже будем знать перпендикуляры к магистрали для вершин, расположенных по одну и другую стороны магистрали, и расстояния между ними.

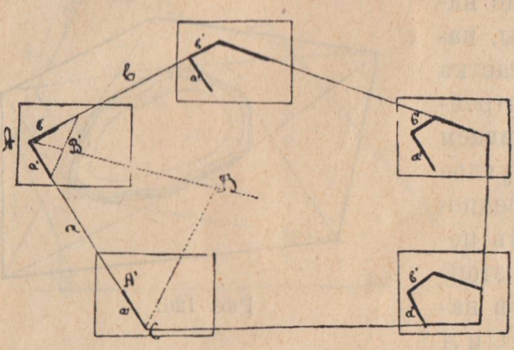


Рис. 125.

При движении от 19 к 9 намечаем пункты 0, 3, 1, 5, 6, 7 и 9, при движении обратно—пункты 10, 11, 13, 15, 17, 18 и 19, при чем чертим схему. Затем проходим по магистрали с мерной лентой и измеряем расстояния: 19 — 0, 0 — 18, 18 — 3, 3 — 1 и т. д.

По этим данным легко высчитать и длину перпендикуляров, например: (1 — 2) = (0 —18) + (18 — 3) + (3 — 1) и также рассчитываем и другие перпендикуляры.

Дальнейшее решается попрежнему.

2 способ. Пусть все стороны и углы доступны измерению, но на участке находится препятствие, мешающее видеть другие стороны и вершины, кроме соседних, например, участок покрыт лесом.

Производим с'емку обходом.

1) С мензулой (рис. 125).

Ставим мензулу на одном из углов и проводим на листе из точки, совмещенной, с помощью мензульной вилки, с данной точкой местности, две линии в направлении сторон данного угла.

Измеряем на местности одну из сторон данного угла, например, сторону a, и откладываем по масштабу отрезок a', равный ей на мензуле. Севмещаем конец его A' с соответствующей точкой A, а самый отрезок a' — по направлению с соответствующей линией местности a, и проводим линию b' в направлении b другой стороны угла A и т. д.

Таким образом обходим кругом, измеряя и откладывая по масштабу стороны и вычерчивая углы. Может получиться некоторая невязка, для уничтожения которой придется или уменьшить или увеличить углы полученной фигуры.

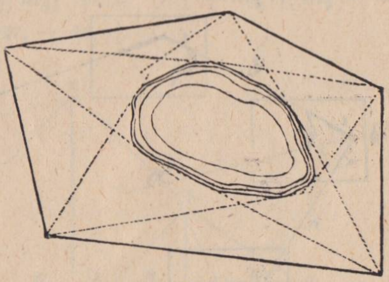


Рис. 126.

Чтобы при обходе нанести на план об'екты, находящиеся внутри участка (например, деревья, постройки и т. д.), прочерчиваем направление из двух углов к данной детали. Предположим нужно получить положение точки B. Для этого прочерчиваем линии в направлении B из точек C и A и получим на мензуле точку пересечения B', которая и будет обозначать положение B.

Такие об'екты, как лес, озеро, можно ограничить, проведя ряд касательных из всех углов.

Например, касательные, проведенные из вершин многоугольника, ограничивают вполне находящееся внутри участка озеро (рис. 126).

Чтобы измерять площадь, нужно разбить полученную фигуру на более простые: прямоугольные треугольники, прямоугольники, трапеции. Вычислив их площади и сложив, найдем площадь всей фигуры.

2) С тангенсометром.

Измеряем все углы и стороны и чертим по масштабу план (рис. 127), строя помощью угольника углы и откладывая соответственные стороны.

Для определения площади опускаем высоты h_1 и h_2 и проводим диагональ n.

Из треугольника h_1, l_1 x_1 имеем

$$\frac{h_1}{x_1}=\frac{a_1}{b_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

и

$$h_1{}^2+x_1{}^2=l_1{}^2$$

одну систему уравнений, из треугольника h_2, l_2, x_2

$$\frac{h_2}{x_2}=\frac{a_2}{b_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31')$$

$$h_2{}^2+x_2{}^2=l_2{}^2,$$

другую систему уравнений и, наконец, из треугольника m, n, l

$$\frac{h}{x}=\frac{a}{b} \quad . \; . \; . \quad (31'')$$

$$h^2+(x+m)^2=n^2$$

третью.

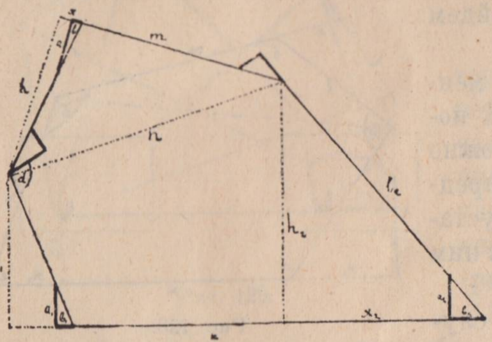


Рис. 127.

Решив эти уравнения, найдем x, h, x_1, h_1, x_2 и h_2.

Площадь участка равна сумме площадей трапеции h_1, n, h_2, треугольника h_2, l_2 x_2, треугольника l, m, n без площади треугольника h_1, x_1, l_1.

Площадь трапеции h_1, n, h_2 $S_1=\frac{h_1+h_2}{2}\;(k-x_2+x_1)$,

где $(k-x_2+x_1)$ есть высота трапеции.

Площадь треугольника h_2, l_2, x_2 $S_2=\frac{x_2 \, . \, h_2}{2}$.

Площадь треугольника l, m, n $S_3=\frac{mh}{2}$.

Площадь треугольника h_1, x_1, l_1 $S_4=\frac{x_1 h_1}{2}$.

Площадь всей фигуры будет равна

$$S=\frac{h_2+h_1}{2}(k-x_2+x_1)+\frac{x_2 h_2}{2}+\frac{mh}{2}-\frac{x_1 h_1}{2}.$$

Раскроем скобки, сделаем приведение подобных членов и снова возьмем h_1, h_2 по частям за скобки и найдем

$$S = {}^1/_2 \left[h_1 (k - x_2) + h_2 (k + x_1) + hm \right].$$

Аналогичную формулу можно получить для каждого отдельного случая.

3) Астролябией или другими угломерными инструментами.

Измеряем все стороны и углы. По этим данным чертим план, что легко сделать, умея строить транспортиром данные углы и откладывать по масштабу линии.

Для определения площади разбиваем фигуру на части, как в предыдущем случае, и, определив с помощью тригонометрии элементы, найдем площади (рис. 128).

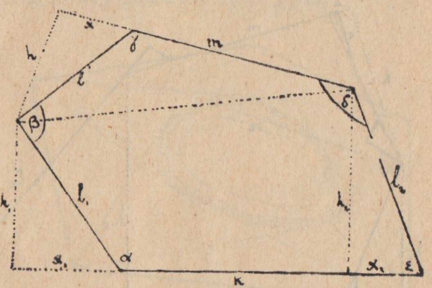


Рис 128.

Так же, как при мензульной с'емке в двух последних случаях можно определять положение предметов внутри участка, устанавливая направление к ним из двух пунктов.

В предыдущих случаях, приступая к с'емке, необходимо набросать предварительно схему участка и пометить номерами основные пункты, из которых при остановках будем делать измерения.

Запись вести можно на, примерно, следующем бланке:

Дата . . . . школа . . . . город . . . .
губерния . . . . уезд . . . . . . группа . . . . .

(бланк для работы с эккером).

Промежутки между пункт.	Число бирок.	Остаток.	Длина линии в сторону.	Длина линии по магистрали	Примечание
		m.	m.		
0—1	2	4,7	—	44,7	
1—2	3	4,0	64,0	—	
1—3	—	16,1	—	16,1	

(бланк для работы с угломерн. инструментами).

Промежутки между пункт.	Число бирок.	Остаток.	Длина линии.	Угол с преды дущ. линией.		Примечание.
		m.	m.			
0—1	2	3,2	43,2	63°25′		

Аналогичные бланки можно комбинировать на различные случаи измерений, при чем при измерении угла тангенсометром величина его будет записываться в графе „угол“ в виде дроби, в числителе которой отсчет указателя, а в знаменатель ставится отсчет зеркала или длина бруска $\left[\frac{a}{b}\right]$.

3 способ. Пусть все вершины участка видимы, но для обхода и непосредственного измерения участок неудобен, вследствие тех или иных препятствий, например, пересечен рекою, озерами и т. д.

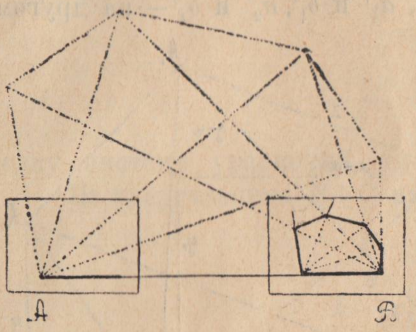


Рис. 129.

Произведем с'емку засечками:

1) Мензулой.

Ставим на всех характерных пунктах, местах перегибов и т. д. вехи или замечаем имеющиеся детали и, приняв одну из наиболее удобных сторон за базис, тщательно измеряем ее (рис. 129). Пусть линия AB и будет базис.

Откладываем по масштабу соответствующий базису отрезок прямой линии на листе, прикрепленном к мензуле, и соответствующие концы базиса и данного отрезка совмещаем, направляя последние по направлению первого.

От этого совмещенного с точкой A конца прочерчиваем с помощью линейки ряд линий к намеченным пунктам.

Затем переносим мензулу в точку B и совмещаем другие концы основной линии мензулы и базиса, совмещая их и по направлению. Проводим снова ряд прямых к тем же пунктам. Соединив затем точки пересечения линий, направленных к одному и тому же пункту, получим подобный измеряемому участку многоугольник.

Необходимо заметить, что когда вторично проводим ряд прямых к намеченным пунктам, то они пересекают целый ряд прямых, проведенных в первый раз. Чтобы не запутаться, пересечение каких линий дает искомый пункт, необходимо и пункты и проводимые к ним прямые перенумеровать и тогда ясно будет, какие именно линии пересечением дают искомый пункт.

Определить площадь участка можно, как и прежде, разбив его на части, измерив по масштабу необходимые элементы и определив площади их.

2) С тангенсометром.

На одном и другом концах базиса K помощью одного из тангенсометров измеряем углы, образованные базисом с направлениями к вершинам многоугольного участка A, A_1, A_2 и т. д. (рис. 130).

Пусть отсчеты будут соответственно a и b, a_1 и b_1, a_2 и b_2, — на одном и a' и b', a_1' и b_1', a_2' и b_2' — на другом конце базиса. Это даст возможность начертить направления и получить положения вершин. Пусть получили многоугольник BAA_1A_2C. Опустив перпендикуляры из точек A, A_1 и A_2, получим две трапеции y, y_1, z и y_1, y_2, $A_1\ A_2$ и два треугольника x, y, AB и y_2, A_2C.

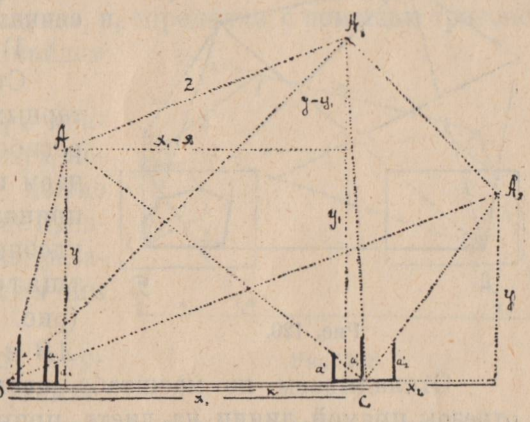


Рис. 130.

Вычислив площади этих фигур, можно определить площадь и всего многоугольника.

Площадь треугольника y_2, A_2C $\quad S_1 = \frac{y_2(x_2 - k)}{2}$.

Площадь треугольника x, y, AB $\quad S_2 = \frac{xy}{2}$

Площадь трапеции y_1, y_2, A_1A_2 $\quad S_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1)$.

Площадь трапеции y, y_1, z $\quad S_4 = \frac{y + y_1}{2}(x_1 - x)$.

Сложив S_2, S_3 и S_4 и вычтя S_1, получим площадь всего многоугольника S.

$$S = \frac{xy}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + \frac{y + y_1}{2}(x_1 - x) - \frac{y_2(x_2 - k)}{2}.$$

Раскрыв скобки, сделав приведение подобных членов и взяв по частям за скобки y, y_1 и y_2, будем иметь

$$S = \frac{1}{2}\left[yx_1 + y_1(x_2 - x) + y_2(k - x_1)\right].$$

Это не есть формула для всех возможных случаев, но в каждом отдельном из них можно по указанному плану находить сначала общее решение, а потом подставить числовые значения входящих величин.

Для определения величин x, y, x_1, y_1, x_2 и y_2 получим из треугольника BAC

$$\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{k - x}{y} = \dfrac{b'}{a'} \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

одну систему уравнений, из которой определим x и y.

Из треугольника BA_1C имеем

$$\begin{array}{l} \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{b_1}{a_1} \\ \dfrac{k - x_1}{y_1} = \dfrac{b'_1}{a'_1} \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32')$$

вторую систему, которая даст x_1 и y_1.

Наконец, из треугольника BA_2C получаем

$$\begin{array}{l} \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{b_2}{a_2} \\ \dfrac{x_2 - k}{y_2} = \dfrac{b'_2}{a'_2} \end{array} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32'')$$

третью систему, из которой найдем x_2 и y_2.

Если бы потребовалось определить длину, например, стороны AA_1, то это можно сделать из треугольника $z\ (x_1 - x), (y_1 - y)$.

$$z^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2,$$

откуда
$$z = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

3. То же можно проделать с любым угломерным инструментом. Измерим углы, образованные базисом с направлениями к пунктам, намеченным нами, и нанесем участок на план.

Разбив его так же, как в предыдущем случае, можем воспользоваться уравнениями (32), (32′) и (32″), в правых частях которых стоят отношения $\frac{b}{a}$, а это как раз ctg углов, нами измеренных.

Найдя соответствующие величины в таблицах, решим, как и в предыдущем случае, задачу.

Задача 17-а. *Определить площадь участка неправильной формы* (рощи, озера и т. д.).

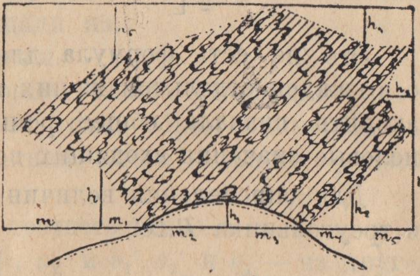


Рис. 131.

Намечаем вокруг участка прямоугольник, четыре стороны которого будут касательными к нему и служить главными магистралями (рис. 131).

В направлении точек перегибов границы восставляем ряд перпендикуляров: h, h_1, h_2... к сторонам описанного прямоугольника и измеряем длины их и расстояния между ними.

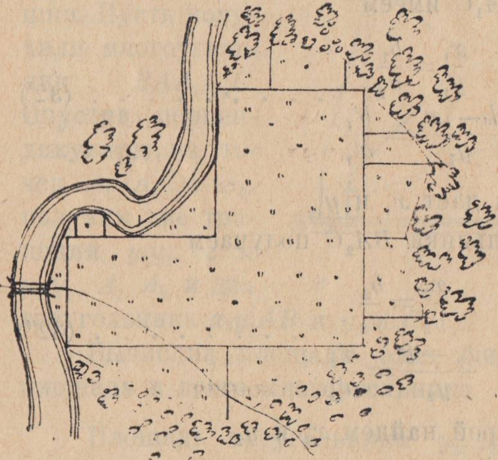


Рис. 132.

Чтобы найти площадь участка, нужно из площади прямоугольника вычесть площади прямоугольных треугольников, трапеций и сегментов, окружающих участок со всех сторон.

Точно так же можно определить и площадь озера. Эту задачу можно решать и способами обхода и засечек.

Если участок доступен изнутри, например, частично окружен лесом и рекой, но внутри находится препятствие (озеро, роща), то магистральные линии проводим внутри и делаем измерение элементов треугольников, трапеций и сегментов, окружающих магистральные линии.

Вычислив площадь основной прямоугольной фигуры, прибавляем к ней площади окружающих фигур (рис. 132).

Маршрутная с'емка.

Во время экскурсий, путешествий и т. д. необходимо бывает зафиксировать местность, по которой мы прошли. При этом особенная точность может и не требоваться, и можно удовлетвориться с'емкой с планшетом.

Прикрепим к планшету кнопками лист бумаги и прочертим на нем несколько параллельных линий, которые мы будем совмещать с магнитным меридианом.

Намечаем на листе точку, которая должна являться пунктом, из которого мы отправляемся, при чем намечаем ее с таким расчетом, чтобы весь путь, который нам предстоит нанести, не вышел из пределов планшета. Рассчитываем примерно масштаб, например 10 шагов берем за mm. если район с'емки небольшой, а в противном случае mm. принимаем за 20, 30... 50 и т. д. шагов, в зависимости от пути, предстоящего впереди (рис. 133).

Пусть приняли за масштаб 20 шагов на 1 mm.

На горизонтально поддерживаемый левой рукой планшет кладем компас рядом с точкой, принятой за пункт отправления, совмещаем линию *NS* компаса с одной из взятых на листе параллельных прямых, поворачиваемся лицом в направлении, по которому собираемся итти, и устанавливаем планшет так, чтобы стрелка совпала с направлением *NS*. При этом компас можно переносить в любое место так, чтобы удобно было наблюдать, но обязательно совмещать *NS* с одной из параллельных прямых.

Вколов в точку отправления булавку, придвигаем к ней линейку и вращаем ее, не изменяя положения планшета, до тех пор, пока изображения в зеркале булавки и предметов, расположенных на изгибе дороги, не совпадут с чертой на зеркале. Прочерчиваем от булавки в направлении дороги линию. Нужно заметить, что с булавкой соприкасать можно любую точку линейки с таким расчетом, чтобы зеркало было на вертикальной линии с глазом.

Дальше, идя до изгиба, намеченного нами, считаем число шагов. Пусть их оказалось 82. Откладываем от начальной точки 4 mm. и снова, наметив впереди новый изгиб дороги, становимся лицом к нему и, расположив планшет, как в первом случае, т.-е. чтобы стрелка совпала с *NS*, снова вкалываем булавку в точку, обозначающую место нашего расположения, и снова ориентируем линейку по направлению нового изгиба и прочерчиваем его.

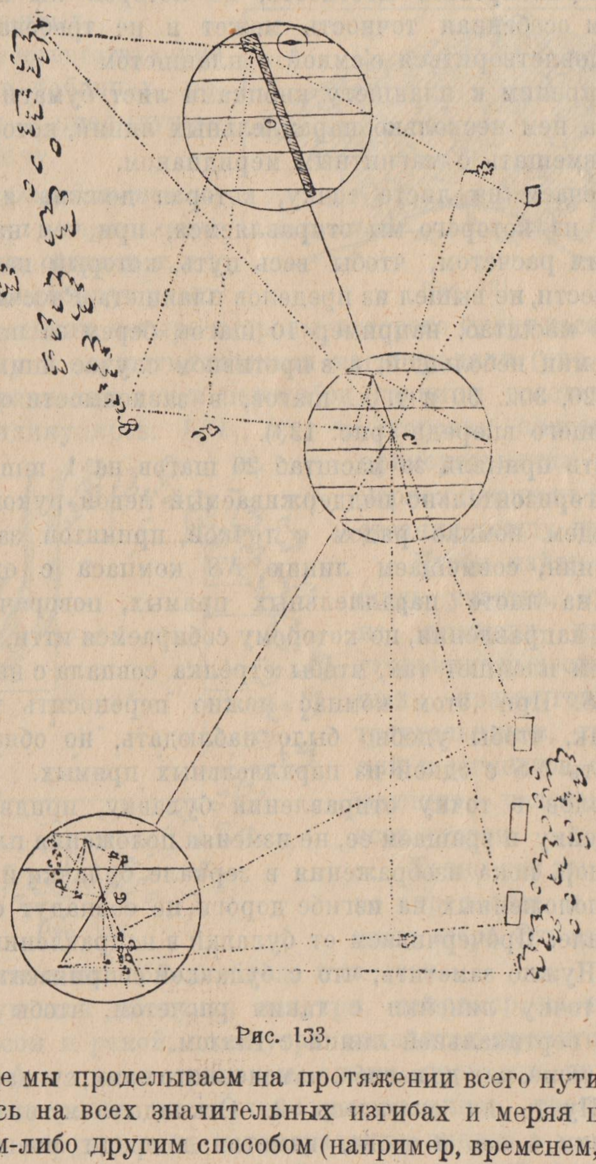


Рис. 133.

То же мы проделываем на протяжении всего пути, останавливаясь на всех значительных изгибах и меряя шагами или каким-либо другим способом (например, временем, затрачиваемым на переход от изгиба к изгибу) расстояние между ними.

Так начертится путь, сделанный нами. Но интересно нанести и подробности, окружающие этот путь: лес, озеро, деревья, постройки и т. д. Это можно сделать способом засечек и касательных, проводимых из разных пунктов, на которых придется останавливаться (задача 17, 2 способ).

Удобно также отмечать направления, когда предметы находятся в створе, т.-е. лежат на одной прямой. Например, угол леса B и дерево C из пункта C' видны по одному направлению, которое и зачерчиваем. Прочерчивая прямые к тем же об'ектам из точки O, получим две точки, которые и будут местом расположения угла леса и дерева.

Если обойти кругом и вернуться обратно другим путем, то может получиться некоторая невязка, которую придется устранить изменением углов.

Подробности, заносимые нами, обозначаются условными знаками помещенными в конце книги.

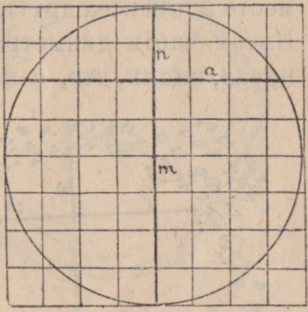


Рис. 134.

Задача 18. *В лесу встречаем почти круглую полянку. Определить ее площадь.*

Опыт 21. Отыскиваем пень и измеряем его окружность и поперечник. Делаем то же с другим, третьим. Ищем пропорциональности. Оказывается, отношение длины окружности к диаметру во всех случаях одно и то же и равно около 3.

Эту величину принято обозначать буквой π.

Пусть длина окружности равна C и радиус R,

тогда $$\frac{C}{2R} = \pi,$$

откуда $$c = 2\pi R.$$

Опыт 22. Начертим окружность и половину ее разделим на квадратики. Сосчитаем целые клеточки и, прибавив сумму сложенных частей, получим после удвоения площадь окружности (рис. 134).

В данном примере диаметр разделен на 8 частей. Полных клеток на четверти окружности 8 и, сложив части, получим около $4^1/_2$. Это даст для всей окружности 50 кв. единиц. Разделив эту величину два раза на 4, получим $\frac{50}{4.4} = 3{,}1$, т.-е. величину π.

Итак, $$\frac{S}{R^2} = \pi,$$

откуда $$S = \pi R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Сделаем еще одно наблюдение.

Возьмем, например, хорду, делящую диаметр на части 2 и 6 единиц и перпендикулярную к нему. Она равна около 7 единиц и диаметром делится пополам, что имеет место и для всех других хорд, перпендикулярных к диаметру. Имеем части диаметра 6 и 2 и половину хорды $3^1/_2$. Сравнивая, видим, что, с некоторым приближением, 6 во столько раз больше $3^1/_2$, во сколько $3^1/_2$ больше 2.

$$\frac{6}{3^1/_2} = \frac{3^1/_2}{2},$$

т.-е. половина перпендикулярной к диаметру хорды есть величина средняя пропорциональная между отрезками диаметра.

Обозначив части диаметра через m и n, а половину хорды через a, получим

$$\frac{m}{a} = \frac{a}{n} \quad \ldots \quad (35)$$

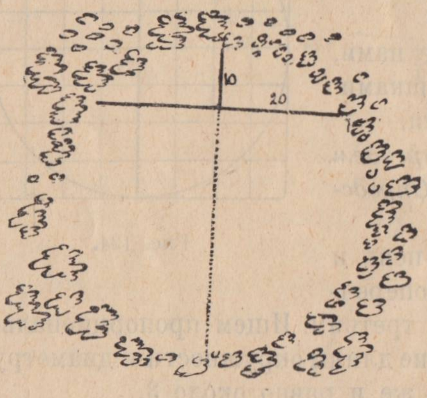


Рис. 135.

Кроме того, заключаем, что линия, проходящая через середину хорды перпендикулярно к ней, есть диаметр, и на середине его лежит центр.

Теперь легко найдем центр данной поляны, определим ее диаметр и площадь (рис. 135).

Пусть длина хорды равна 40 m., а перпендикуляр из середины 10 метров. В таком случае по формуле (35) имеем

$$\frac{2R - 10}{20} = \frac{20}{10},$$

откуда $R = 25$ m., а площадь поляны по формуле (34)

$$S = \pi R^2 = 3{,}14.25^2 = 1962,5 \text{ m}^2.$$

Задача 19. *Измерить поверхность озера, форма которого близка к окружности* (рис. 137).

Опыт 23. На площадке вбиваем колышек, привязываем к нему веревку и другим колышком, привязанным к ее свободному концу, чертим круг. На некотором расстоянии устанавливаем тангенсометр 2-го типа так, чтобы указатели, стоящие на одинаковых делениях, касались контура круга. Тогда очевидно нулевой штифт будет направлен к центру. Поставив в точках касания вехи и измерив касательные, найдем, что они приблизительно равны (рис. 136).

Пусть касательная, вся секущая и внешняя ее часть

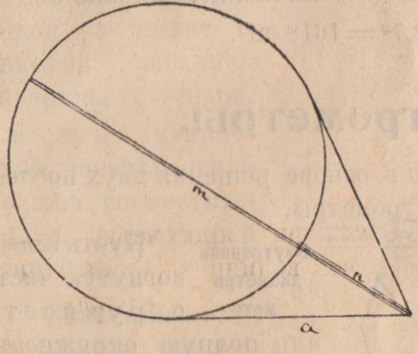


Рис. 136.

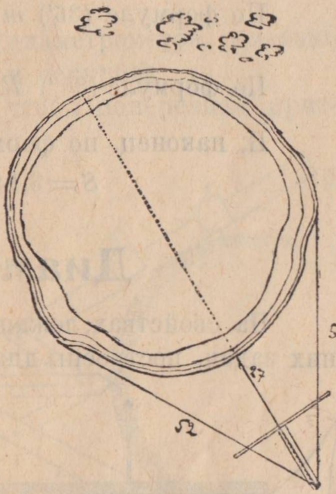


Рис. 137.

соответственно равны a, m и n. Сравнивая эти величины, найдем, что m во столько раз больше a, во сколько a больше n

$$\frac{m}{a}=\frac{a}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

т.-е. касательная есть величина средняя пропорциональная между всей секущей и внешней ее частью.

Из формулы (36) имеем

$$m=\frac{a^2}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36')$$

Секущая состоит из диаметра и внешней части, следовательно

$$m=2R+n,$$

откуда

$$R=\frac{m-n}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36'')$$

Решим задачу.

Пусть одна из касательных равна 50 m., а другая 52 m. и внешняя часть равна 27 m.

В этом случае для касательной возьмем величину среднюю арифметическую найденных измерением величин 50 и 52.

$$n = \frac{50 + 52}{2} = 51 \text{ m.}$$

По формуле (36′) $m = \frac{51^2}{27} = 96{,}4$ m.

По формуле (36″) $R = \frac{96{,}4 - 51}{2} = 22.7$ m.

И, наконец, по формуле (34) вычисляем площадь

$$S = 3{,}14.22{,}7^2 = 1618 \text{ m}^2.$$

Диаметрометры.

На свойствах, лежащих в основе решения двух последних задач, построены диаметрометры.

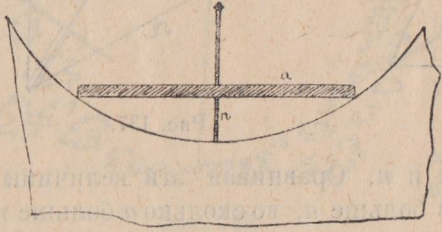


Рис. 138.

Внутренний диаметрометр. Пусть имеем вогнутую часть окружности или полную окружность (рис. 138).

Вкладываем диаметрометр внутрь так, чтобы планка a и стержень n упирались концами в окружность. Предположим, длина части подвижного стержня от окружности до планки равна 9 cm., а половина планки 25 cm.

Тогда стержень будет направлен по диаметру, и другая часть диаметра окажется равной $m = 2R - n$, т.-е $m = 2R - 9$.

По формуле (35)

$$\frac{2R - 9}{25} = \frac{25}{9},$$

откуда $$R = \left(\frac{25^2}{9} + 9\right) : 2 = 39{,}2.$$

Чтобы придать верное положение диаметрометру при измерении радиуса сферической поверхности, нужно выдвинуть стержень на такую длину заостренным концом, чтобы при поворачивании инструмента около планки, как около оси, стержень только касался заостренным концом сферической поверхности, свободно двигаясь вверх и вниз.

В случае цилиндрической поверхности, нужно с образующей совместить поперечную прямолинейную планочку *c* стержня и придвинуть до соприкосновения обоими концами планку *a*.

Внешний диаметрометр. Устройство второго диаметрометра основано на свойстве касательной и секущей.

Располагаем инструмент так, чтобы поперечная призмочка *n* своей серединой, а также и линейки, касались поверхности шара, а в случае конической поверхности *n* должна совместиться с образующей (рис. 139).

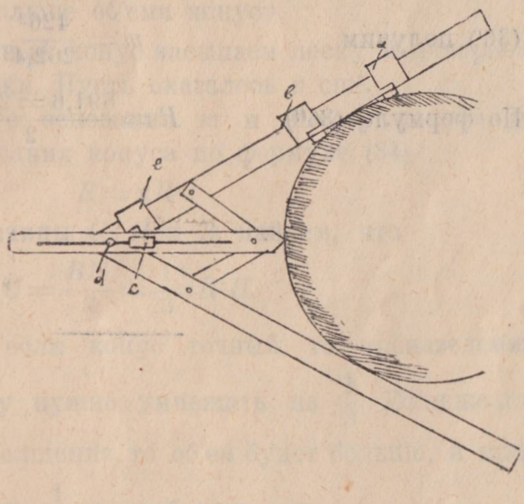


Рис. 139.

Закрепим в этом положении инструмент винтом *d* и подвинем друг к другу указатели *a* и *в*, пока они не упрутся в поверхность шара.

Делаем отсчеты одного и другого, складываем и делим пополам.

$$k = \frac{a + в}{2}.$$

Эта точка и есть точка касания. Этим достигается большая точность отсчета, так как определить на-глаз, какая именно точка касается, трудно.

Если бы при сдвигании и раздвигании линеек точка пересечения внутренних сторон их оставалась неподвижной, то отсчет *k* и дал бы длину касательной, но этого нет;

точка пересечения внутренних краев линейки перемещается то удаляясь, то приближаясь к нулю, совпадающему с осью d, скрепляющей линейку.

Указатель ползунка e даст расстояние от нулевой точки до точки пересечения касательных.

Очевидно касательная будет равна $k - e$.

Пусть отсчеты указателей a, b, c и e будут соответственно равны 492,2 mm. 384,4 mm., 262,4 mm. и 12,3 mm.

Тогда $$k = \frac{492{,}2 + 384{,}4}{2} = 438{,}3.$$

Касательная же $a = 438{,}3 - 12{,}3 = 426$ mm.

Если всю секущую обозначим через m, то по формуле

(36′) получим $$m = \frac{426^2}{262{,}4} = 691{,}6 \text{ mm}.$$

По формуле (36″). $$R = \frac{691{,}6 - 262{,}4}{2} = 214{,}6 \text{ mm}.$$

ГЛАВА 5.

Определение об'емов тел.

Задача 20. *Определить поперечник дерева и его об'ем.*

Форма ствола дерева приближается к конусу. У ели, например, ствол почти точный конус, но у других деревьев середина, у одних в большей, у других в меньшей степени, утолщена, и об'ем больше об'ема конуса.

Опыт 24. В полный конус насыпаем песку и измеряем его помощью мензурки. Пусть оказалось v cm³.

Измерим радиус основания m и высоту конуса n. Тогда площадь основания конуса по формуле (34)

$$R = \pi R^2.$$

Сравнивая величины U, H и B, найдем, что

$$U = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Таким образом если конус точный, то произведение основания на высоту нужно умножить на $\frac{1}{3}$. Если же посередине имеется утолщение, то об'ем будет больше, и придется умножать не на $\frac{1}{3}$, а на большее число

Стржелецкий предложил для определения этого множителя, называемого им видовым числом, следующую формулу:

$$F = \frac{d}{D} \cdot 0{,}707,$$

где F — видовое число, d — диаметр посередине и D — диаметр основания.

Определять видовое число следует на срубленных деревьях, измеряя диаметры основания и середины дерева. F следует определить для возможно большего числа и взять среднюю величину. Это и будет видовым числом для данной местности и данной породы.

Итак, об'ем дерева будет вычисляться по следующей формуле:

$$V = F . B . H = F \pi R^2 H.$$

Таким образом для вычисления об'ема нужно знать площадь основания и высоту.

Вторую величину найдем одним из вышеуказанных приемов, а для определения первой измерим окружность ствола и, предположим, найдем C.

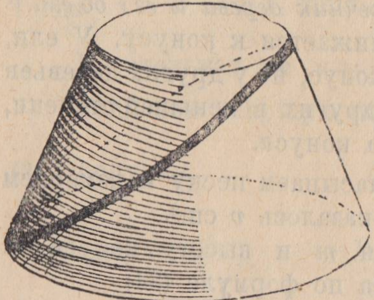


Рис. 140.

Тогда

$$C = 2\pi R,$$

откуда

$$R = \frac{c}{2\pi},$$

а площадь основания

$$B = \pi R^2 = \frac{c^2}{4\pi}.$$

Задача 21. *Определить об'ем и поверхность кургана.*

Курганы обычно имеют форму или полушара, или усеченного конуса (городок).

Опыт 25. Вырежем из картошки усеченный конус и, разрезав его наискось на две части, срежем с боков столько, чтобы получились два полных конуса, у которых основания будут равны — у одного нижнему основанию, у другого — верхнему данного конуса, а высоты — высоте его (рис. 140).

Взвесим конусы a, b и обрезки, полученные при обстругивании. Пусть они весят: $a = 8{,}4g$, $b = 3{,}5g$ и обрезки $c = 5{,}4g$. Сравнивая эти величины, найдем, что приблизительно

$$\frac{8{,}4}{5{,}4} = \frac{5{,}4}{3{,}5},$$

т.-е об'ем обрезков есть величина средняя, пропорциональная между об'емами конусов. Если об'емы конусов соответственно V и v и обрезков V', то

$$\frac{V}{V'} = \frac{V'}{v},$$

откуда $V'^2 = V \,.\, v$ и $V' = \sqrt{V \,.\, v}.$

Сложив эти три найденные об'ема, найдем об'ем усеченного конуса W

$$W = V + v + v' = V + v + \sqrt{V.v}.$$

Подставляя вместо об'емов их выражения через радиусы и высоты, получим

$$W = \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 H + \sqrt{\frac{1}{3}\pi R^2 H \, . \, \frac{1}{3}\pi R^2 H}.$$

Сделав преобразования, найдем, что

$$W = \frac{1}{3}\pi (R^2 + r^2 + Rr) H.$$

Опыт 26. Начертим на бумаге из точки две дуги и вырежем заштрихованную на рисунке час ь. Свернув, мы получим усеченный конус. Определение поверхности сведется к определению площади заштрихованной части рирунка (рис. 141), которая будет называться разверткой конуса. Проведем ряд радиусов, которые разделят развертку на ряд равных фигур, близких к трапециям. Обозначив основание и высоту такой элементарной трапеции через a, a_1 и l_1 получим площадь ее

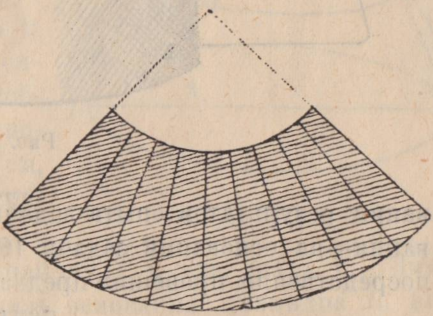


Рис. 141.

$$s = \frac{a + a_1}{2} l.$$

Так как трапеций у нас 9, то чтобы получить площадь развертки, нужно площадь s увеличить в 9 раз

$$S = 9s = \frac{9a + 9a_1}{2} l.$$

$9a$ и $9a_1$ это—длина окружностей нижнего и верхнего оснований p и p_1,

следовательно, $S = \dfrac{p + p_1}{2} l$

Если радиус оснований обозначим через R и r, то получим $S = \pi (R + r) l$, где l—образующая конуса.

Реш. задачи. На основании результатов опытов мы видим, что для определения площади и об'ема конического кургана нужно определить радиусы оснований, образующую и высоту кургана.

Радиус нижнего основания можно определить на осно-

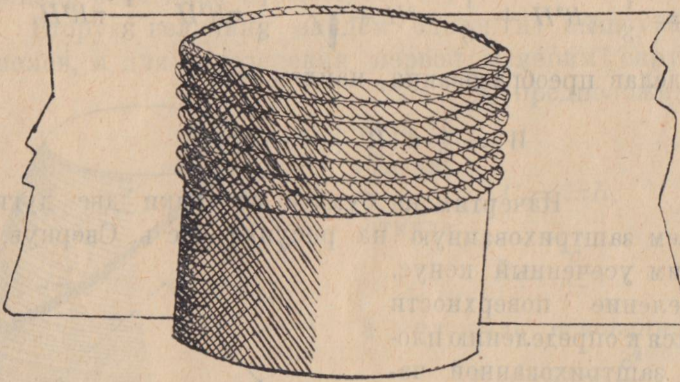


Рис. 142.

вании результатов опыта задачи 19, радиус верхнего основания—на основании задачи 18. Образующую измерим непосредственно, провешив предварительно от основания через центр верхнего основания прямую (геодезическую) линию. Высоту можно определить одним из вышеуказанных способов, для чего удобно поставить на вершине рейку, измерить до вершины рейки, затем вычесть ее длину. Можно определить и по способу нивелирования.

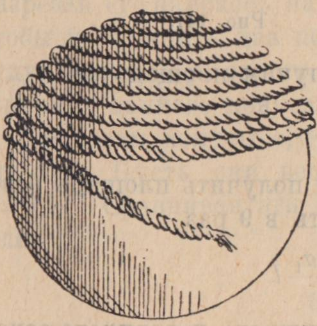


Рис. 143.

Опыт 27. Возьмем шар и цилиндр, имеющие одинаковый радиус, при чем высота цилиндра должна равняться диаметру шара. Найдем поверхности и об'емы этих тел и сравним их.

Укрепив на поверхности шара веревку, будем наматывать ее слой за слоем до экватора (рис. 143) и затем тем же концом обмотаем цилиндр (рис. 142). Половина его покроется ею, откуда заключаем, что поверхность шара равна поверхности цилиндра.

Вырезав прямоугольный кусок бумаги, шириною равный высоте цилиндра и длиною — длине основания его, измерим площадь.

Очевидно, она будет равна произведению основания на высоту $S = a \,.\, h$.

Так как длина основания через радиус будет равна

$$a = 2\pi R$$

и по условию $h = 2R$, то поверхность цилиндра, а следовательно и шара, будет равна

$$S = 4\pi R^2.$$

Определить об'емы. Погружаем поочередно цилиндр и шар в сосуд, доверху наполненный водою или песком, и, собрав отдельно вытесненную воду или песок, определим об'ем, насыпав в мензурку или стакан с делениями.

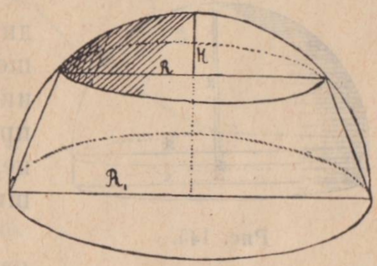


Рис. 144.

Пусть для цилиндра найдем V и для шара V_1. Зная поверхность шара S, площадь основания цилиндра B, высоту H и радиус R, найдем, что

$$V = B \,.\, H = \pi\, R^2 H,$$

$$V_1 = \frac{1}{3} S \,.\, R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Реш. задачи. Итак, в случае, если курган или холм имеет форму полушара, то, измерив радиус основания и высоту, которые в этом случае должны быть равны, об'ем узнаем по формуле.

Если же окажется, что высота меньше радиуса основания (рис. 144), например, $H - R = b$, тогда от об'ема полушара придется отнять об'ем усеченного конуса. Нужно найти радиусы его основания.

Радиусом верхнего основания будет найденный нами R холма, а для отыскания нижнего воспользуемся опытом задачи 18:

$$\frac{2R_1}{R} = \frac{R}{H}, \text{ откуда } R_1 = \frac{R^2}{H}$$

Зная R_1 определим об'ем полушара с этим же радиусом R_1 и вычтем об'ем усеченного конуса RR_1.

Если $H > R$, то к об'ему полушара придется прибавить об'ем цилиндра с основанием радиуса R и высотою $b = R - H$ (рис. 145).

В том и другом случае будет небольшая ошибка, но для практических целей она будет незначительна.

Задача 22. *Определить об'ем и вылепить модель возвышенности неправильной формы.*

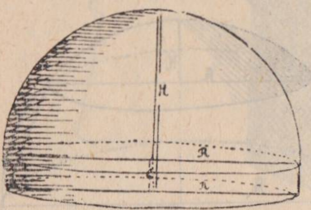


Рис. 145.

Для решения задачи необходимо снять профили данной возвышенности в нескольких направлениях по способу задачи 10 или 11, при чем все направления должны пересекаться в одной точке на вершине.

При этом необходимо знать направления, по которым снимаются профили, и проходить они должны по наиболее характерным для данной возвышенности местам, а именно по более или менее резко выделяющимся ребрам и выемкам, при чем необходимо делать на-ряду с этим и зарисовки как в общем с нескольких пунктов, так и отдельных подробностей.

Пусть имеем несколько профилей и зарисовок.

Выбираем наиболее растянутый (2 и 5) и широкий. Очевидно он будет самым выдающимся ребром (рис. 146).

Взятому куску глины придадим по масштабу профиль, подобный данному.

Для этого полезно пользоваться инструментом, представляющим собой уменьшенную копию скрепленных под прямым углом реек (рис. 39).

Определите расстояние по горизонтальной линии ряда точек профиля от некоторой точки горизонта.

Укрепив инструмент возле куска глины в направлении, принятом для данного профиля (направления предварительно наносим на бумаге, на которую и кладем массу, из которой будем готовить модель), так, чтобы центр приблизительно совпадал с точкой пересечений.

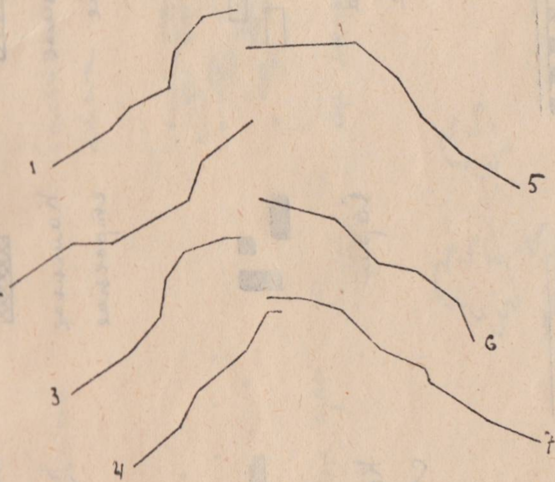


Рис. 146.

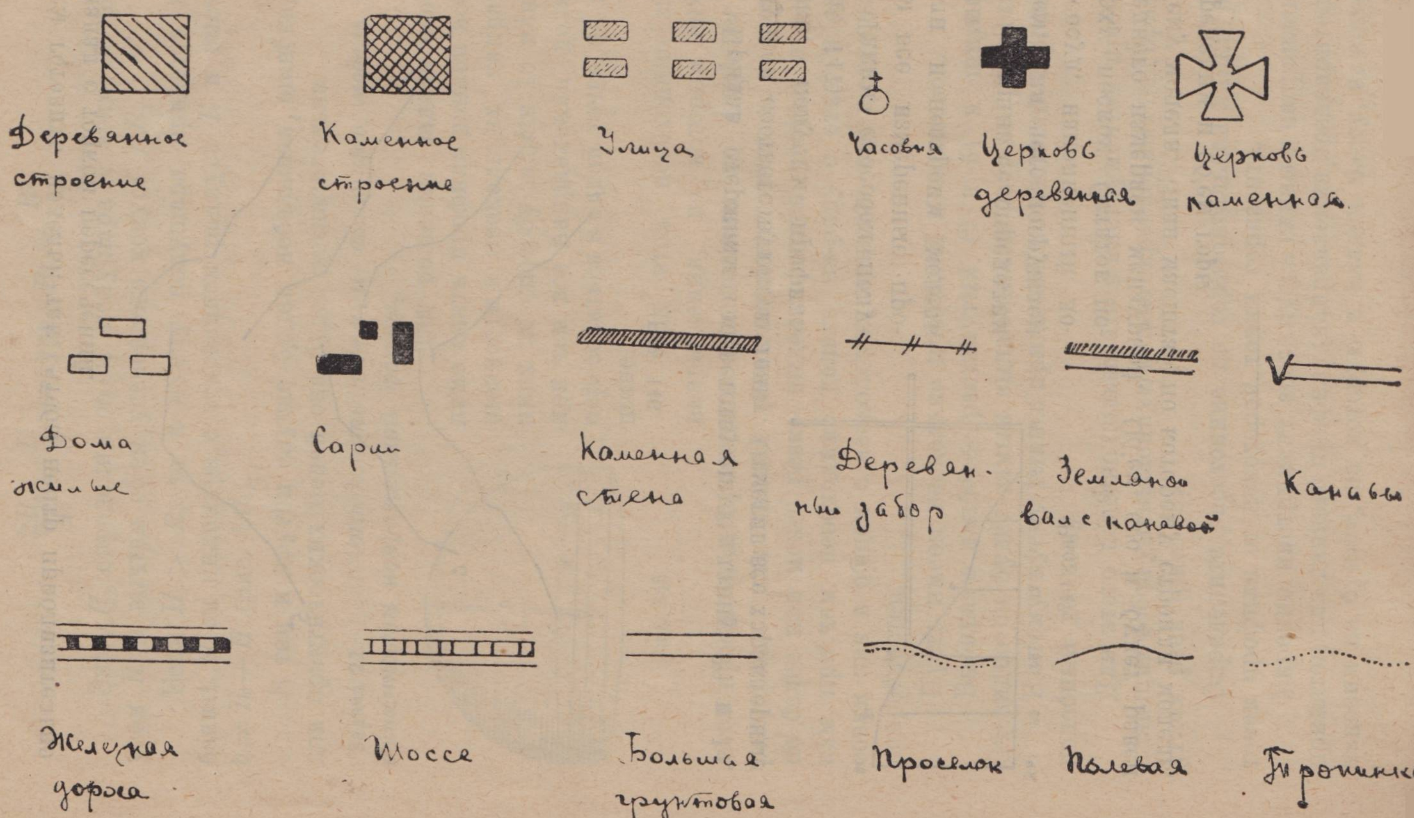
Придаз стержням соответствующую длину 30 и 14, получаем соответствующу точку. Отметив все характерные точки, получим профиль (рис. 147).

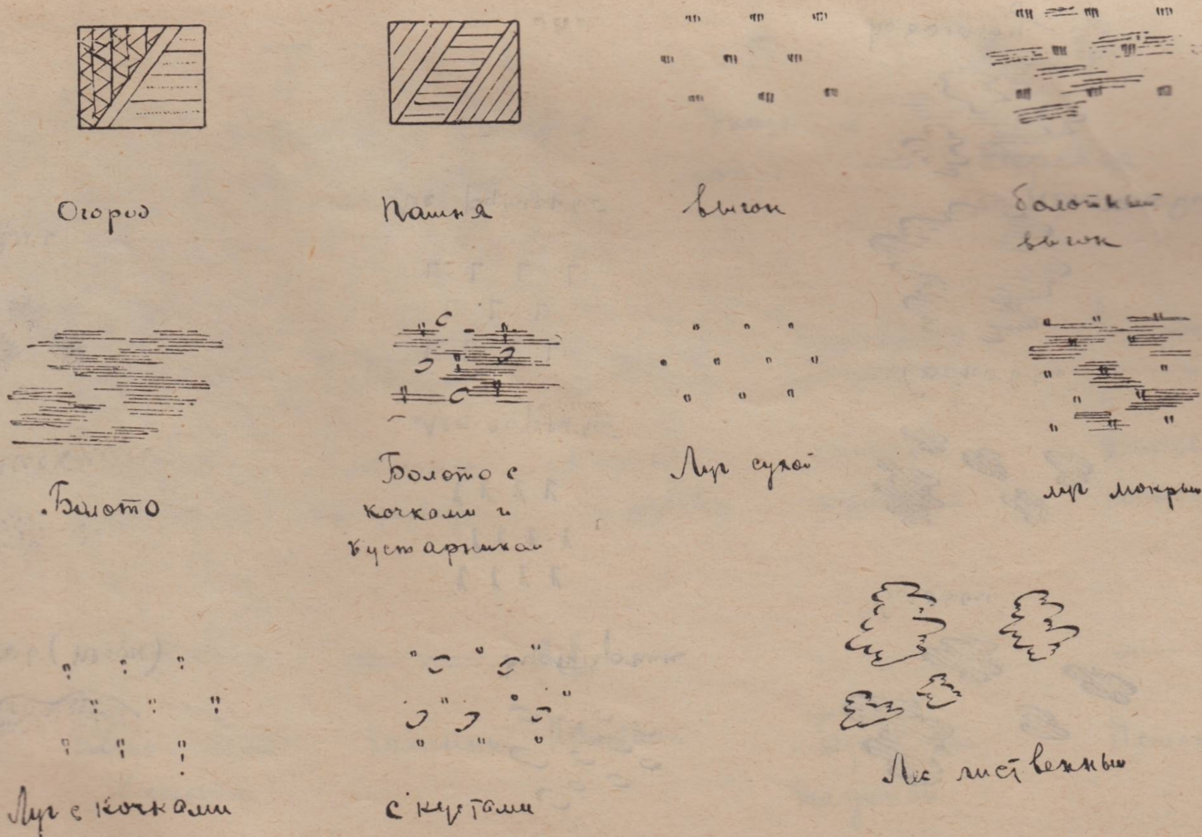
Рис. 147.

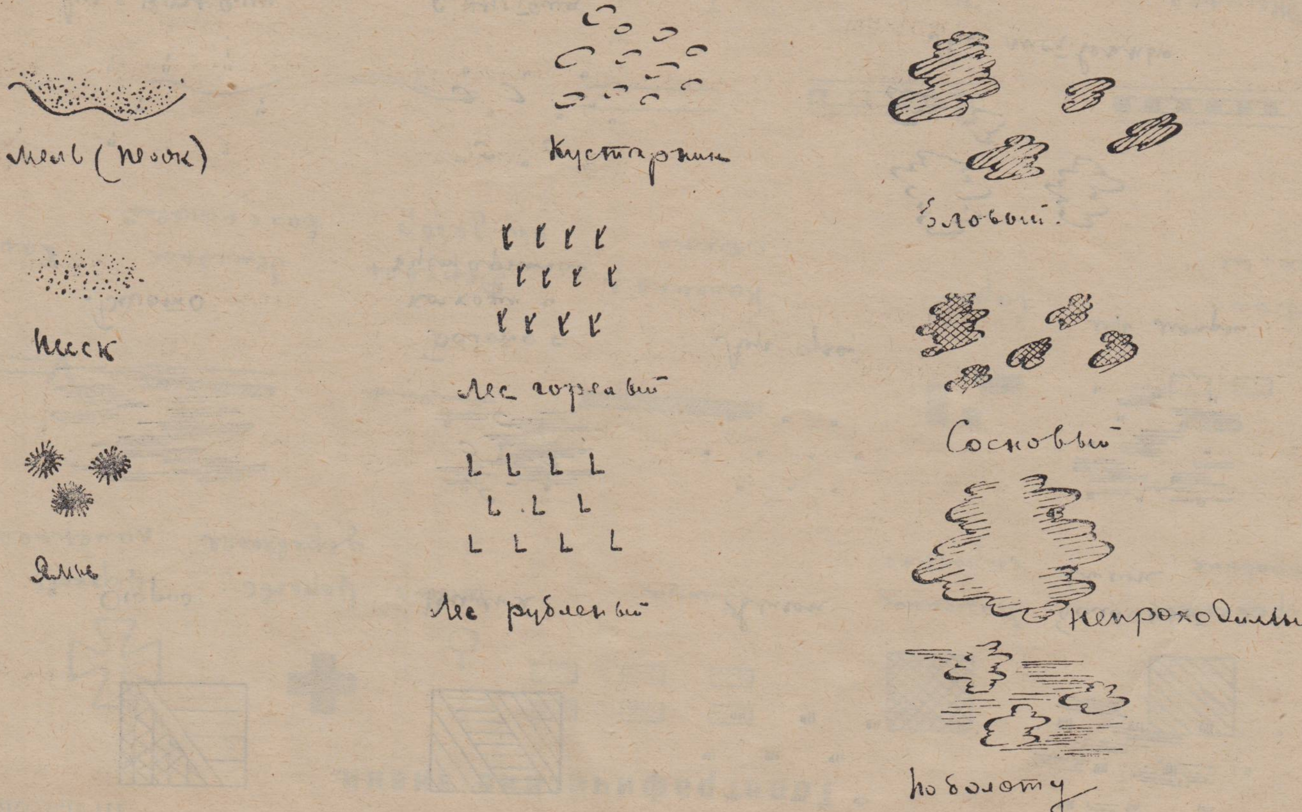
Таким способом получим все измеренные профили и построим модель горы.

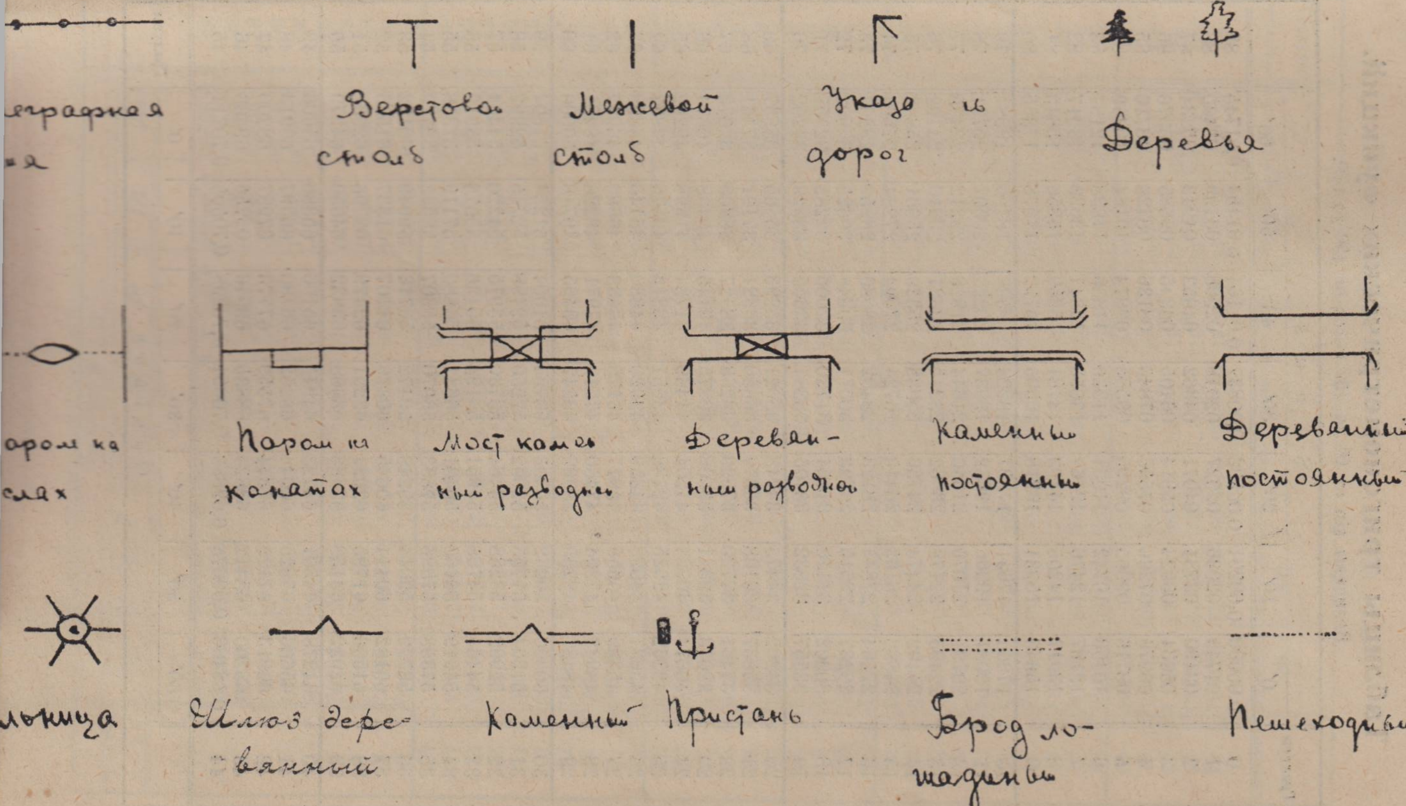
Высушив ее, определим об'ем, для чего погружаем в сосуд, наполненный доверху песком. Остаток последнего измеряем мензуркой. Об'ем его и будет равен об'ему модели. Зная масштаб, по которому строили модель, определим и об'ем горы.

Топографические знаки.




Огород
Пашня
Выгон
Болотный выгон
Болото
Болото с кочками и кустарником
Луг сухой
Луг мокрый
Луг с кочками
с кустами
Лес лиственный


Мель (песок)
Песок
Ямы
Кустарник
Лес горелый
Лес рубленый
Еловый
Сосновый
Непроходимый
По болоту


…еграфная
…ия
Верстов. столб
Межевой столб
Указа. и дорог
Деревья
…аром на
…слах
Паром на канатах
Мост каменный разводной
Деревянный разводной
Каменный постоянный
Деревянный постоянный
…льница
Шлюз деревянный
Каменный
Пристань
Брод лошадиный
Пешеходный

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Таблицы тригонометрических функций.

Величины sin от 0° до 45° и cos от 45° до 90°.

Градусы	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0.00000	0,00291	0,00582	0,00837	0,01164	0,01454	0,01745	89
1	01745	02036	02327	02618	02908	03199	03490	88
2	03490	03781	04071	04362	04653	04943	05234	87
3	05234	05524	05814	06105	06395	06685	06976	86
4	06976	07266	07556	07846	08136	08426	08716	85
5	08716	09005	09295	09585	09874	10164	10453	84
6	10453	10742	11031	11320	11609	11898	12187	83
7	12187	12476	12764	13053	13341	13629	13917	82
8	13917	14205	14493	14781	15069	15356	15643	81
9	15643	15931	16218	16505	16792	17078	17365	80
10	17365	17651	17937	18224	18509	18795	19081	79
11	19081	19366	19652	19937	20222	20507	20791	78
12	20791	21076	21360	21644	21928	22212	22495	77
13	22495	22778	23062	23345	23627	23910	24192	76
14	24192	24474	24756	25038	25320	25601	25882	75
15	25882	26163	26443	26724	27004	27284	27564	74
16	27564	27843	28123	28402	28680	28959	29237	73
17	29237	29515	29793	30071	30348	30625	30902	72
18	30902	31178	31454	31730	32006	32282	32557	71
19	32557	32832	33106	33381	33655	33929	34202	70
20	34202	34475	34748	35021	35293	35565	35837	69
21	35837	36108	36379	36650	36921	37191	37461	68
22	37461	37730	37999	38268	38527	38805	39073	67
23	39073	39341	39608	39875	40145	40408	40674	66
24	40674	40931	41204	41469	41734	41998	42262	65
25	42262	42525	42788	43051	43313	43575	43837	64
26	43837	44098	44359	44620	44880	45140	45399	63
27	45399	45658	45917	46175	46433	46680	46947	62
28	46947	47204	47460	47716	47971	48226	48481	61
29	48481	48735	48989	49242	49495	49748	50000	60
30	50000	50252	50503	50754	51004	51254	51504	59
31	51504	51753	52002	52250	52498	52745	52992	58
32	52992	53238	53484	53730	53975	54220	54464	57
33	54464	54708	54951	55194	55436	55678	55919	56
34	55919	56160	56401	56641	56880	57119	57358	55
35	57358	57596	57833	58070	58307	58543	58779	54
36	58779	59014	59248	59472	59716	59949	60182	53
37	60182	60414	60645	60876	61107	61337	61566	52
38	61566	61795	62024	62251	62479	62706	62932	51
39	62932	63158	63383	63608	63832	64056	64279	50
40	64278	64501	64723	64945	65166	65386	65606	49
41	65606	65825	66044	66262	66480	66697	66913	48
42	66913	67129	67344	67559	67773	67987	68200	47
43	68200	68412	68824	68835	69046	69256	69466	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	0,70711	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Cosinus	Градусы

Величины sinus от 45° до 90° и cos от 0° до 45°.

Градусы	Sinus 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	0,70711	0,70716	0,71121	0,71325	0,70529	0,71732	0,71934	44
46	71934	72136	72337	72537	72731	72937	73135	43
47	73135	73333	73531	73728	73924	74120	74314	42
48	74314	74509	74703	74896	75088	75280	75471	41
49	75471	75661	75851	76041	76229	76417	76704	40
50	76604	76791	76977	77162	77347	77531	77715	39
51	77715	77897	78079	78261	78442	78622	78801	38
52	78801	78980	79158	79335	79512	79688	79864	37
53	79864	80038	80212	80386	80558	80730	80902	36
54	80902	81072	81242	81412	81580	81748	81915	35
55	81915	82082	82248	82413	82577	82741	82904	34
56	82904	83066	83228	83389	83549	83708	83867	33
57	83867	84025	84182	84339	84495	84650	84805	32
58	84805	84959	85112	85264	85416	85567	85715	31
59	85717	85866	86015	86163	86310	86457	86603	30
60	86603	86748	86892	87036	87178	87321	87462	29
61	87462	87603	87743	87882	88020	88158	88295	28
62	88295	88431	88566	88701	88835	88968	89101	27
63	89101	89232	89363	89493	89623	89752	89879	26
64	89879	90007	90133	90259	90383	90507	90631	25
65	90631	90753	90875	90996	91116	91236	91355	24
66	91355	91472	91590	91706	91822	91936	92050	23
67	92050	92164	92276	92388	92499	92609	92718	22
68	92718	92827	92935	93042	93148	93253	93358	21
69	93358	93462	93565	93667	93769	93869	93969	20
70	93969	94068	94167	94264	94361	94457	94552	19
71	94552	94646	94740	94832	94924	95015	95106	18
72	95106	95195	95284	95372	95459	95545	95630	17
73	95630	95715	95799	95882	95964	96046	96126	16
74	96126	96206	96285	96363	96440	96517	96593	15
75	96593	96667	96742	96815	96887	96959	97030	14
76	97030	97100	97169	97237	97304	97371	97437	13
77	97437	97502	97566	97630	97692	97754	97815	12
78	97815	97875	97934	97992	98050	98107	98163	11
79	98163	98218	98272	98325	98378	98430	98481	10
80	98481	98531	98580	98629	98676	98723	98769	9
81	98769	98814	98858	98902	98944	98986	99027	8
82	99027	99067	99106	99144	99182	99219	99255	7
83	99255	99290	99324	99357	99390	99415	99452	6
84	99452	99482	99511	99540	99567	99594	99619	5
85	99619	99644	99668	99692	99714	99736	99756	4
86	99756	99776	99795	99813	99831	99847	99863	3
87	99863	99878	99892	99905	99917	99929	99939	2
88	99939	99949	99958	99966	99973	0,99979	0,99985	1
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	1,00000	1,00000	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ Cosinus	Градусы

Величины tg от 0^0 до 45^0 и cotg от 45^0 до 90^0.

Градусы	Tangens							
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455	0,01746	89
1	01746	02036	02328	02619	02910	03201	03492	88
2	03492	03883	04075	04366	04658	04949	05241	87
3	05241	05533	05824	06116	06408	06700	06993	86
4	06993	07285	07578	07870	08163	08456	08749	85
5	08749	09042	09335	09629	09923	10216	10510	84
6	10510	10805	11099	11394	11688	11983	12278	83
7	12278	12574	12869	13165	13461	13758	14054	82
8	14054	14351	14648	14945	15243	15540	15838	81
9	15838	16137	16435	16734	17033	17333	17633	80
10	17633	17933	18233	18534	18835	19136	19438	79
11	19438	19740	20042	20345	20648	20952	21256	78
12	21256	21560	21864	22169	22475	22781	23087	77
13	23087	23393	23700	24008	24316	24624	24933	76
14	24933	25242	25552	25862	26172	26483	26795	75
15	26795	27107	27419	27732	28046	28360	28675	74
16	28675	28990	29305	29621	29938	30255	30573	73
17	30573	30891	31210	31530	31850	32171	32492	72
18	32492	32814	33146	33460	33783	34108	34433	71
19	34433	34758	35085	35412	35740	36068	36397	70
20	36397	36727	37057	37388	37720	38053	38386	69
21	38386	38721	39055	39391	39727	40065	40403	68
22	40403	40741	41081	41421	41763	42105	42447	67
23	42447	42791	43136	43481	43828	44175	44523	66
24	44523	44872	45222	45573	45924	46277	46631	65
25	46631	46985	47341	47698	48055	48414	48773	64
26	48773	49134	49495	49858	50222	50587	50953	63
27	50953	51320	51688	52057	52427	52798	53171	62
28	53171	53545	53920	54296	54673	55051	55431	61
29	55431	55812	56194	56577	56962	57348	57735	60
30	57735	58124	58513	58905	59297	59691	60086	59
31	60086	60483	60881	61280	61681	62083	62487	58
32	62487	62892	63299	63707	64117	64528	64941	57
33	64941	65355	65771	66189	66608	67028	67451	56
34	67451	67875	68301	68728	69157	69588	70021	55
35	70021	70455	70891	71329	71769	72211	72654	54
36	72654	73100	73547	73996	74447	74900	75355	53
37	75355	75812	76272	76733	77196	77661	78129	52
38	78129	78598	79070	79544	80020	80498	80978	51
39	80978	81461	81946	82434	82923	83415	83910	50
40	83910	84407	84906	85408	85912	86419	86929	49
41	86929	87441	87955	88473	88992	89515	90040	48
42	90040	90569	91099	91633	92170	92079	93252	47
43	93252	93797	94345	94896	95451	96008	0,96569	46
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420	1,00000	45
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′	Градусы
	Cotangens							

Величины tg от 45⁰ до 90⁰ и cotg от 0⁰ до 45⁰.

Градусы	Tangens 0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952	1,03553	44
46	1,03553	1,04158	1,04866	1,05378	1,05994	1,06613	1,07237	43
47	1,07237	1,07864	1,08496	1,09131	1,09770	1,10404	1,11061	42
48	1,11061	1,11713	1,12369	1,13029	1,13694	1,14363	1,15037	41
49	1,15037	1,15715	1,16398	1,17085	1,17777	1,18474	1,19175	40
50	1,19175	1,19882	1,20593	1,21310	1,22031	1,22758	1,23490	39
51	1,23490	1,24227	1,24969	1,25717	1,26471	1,27230	1,27994	38
52	1,27994	1,28764	1,29541	1,30323	1,31110	1,31904	1,32704	37
53	1,32704	1,33511	1,34323	1,35142	1,35968	1,36800	1,37638	36
54	1,37638	1,38484	1,39366	1,40195	1,41061	1,41939	1,42815	35
55	1,42815	1,43703	1,44598	1,45501	1,46411	1,47330	1,48256	34
56	1,48256	1,49190	1,50133	1,51084	1,52043	1,53010	1,53987	33
57	1,53987	1,54972	1,55966	1,56969	1,57981	1,59002	1,60033	32
58	1,60033	1,61074	1,62125	1,63185	1,64256	1,65337	1,66428	31
59	1,66428	1,67530	1,68643	1,69766	1,70901	1,72047	1,73205	30
60	1,73205	1,74375	1,75556	1,76749	1,77955	1,79174	1,80405	29
61	1,80405	1,81649	1,82906	1,84177	1,85462	1,86760	1,88073	28
62	1,88073	1,89400	1,90741	1,92098	1,93470	1,94858	1,96261	27
63	1,96261	1,97680	1,99116	2,00569	2,02039	2,03526	2,05030	26
64	2,05030	2,06553	2,08094	2,09654	2,11233	2,12832	2,14451	25
65	2,14451	2,16090	2,17749	2,19430	2,21132	2,22857	2,24604	24
66	2,24604	2,26374	2,28167	2,29984	2,31826	2,33693	2,35585	23
67	2,35585	2,37504	2,39449	2,41421	2,43422	2,45451	2,47509	22
68	2,47909	2,49597	2,51715	2,53865	2,56046	2,58261	2,60509	21
69	2,60509	2,62791	2,65109	2,67462	2,69853	2,72281	2,74748	20
70	2,74748	2,77254	2,79802	2,82391	2,85023	2,87700	2,90421	19
71	2,90421	2,93189	2,96004	2,98869	3,01783	3,04749	3,07768	18
72	3,07768	3,10842	3,13972	3,17159	3,20406	3,23714	3,27085	17
73	3,27085	3,30502	3,34023	3,37594	3,41236	3,44951	3,48741	16
74	3,48741	3,52609	3,56557	3,60588	3,64705	3,68909	3,73205	15
75	3,73205	3,77591	3,82083	3,86671	3,91364	3,96165	4,01078	14
76	4,01078	4,06107	4,11256	4,16530	4,21933	4,27471	4,33148	13
77	4,33148	4,38969	4,44942	4,51071	4,57363	4,63825	4,70463	12
78	4,70463	4,77286	4,84300	4,91516	4,98940	5,06584	5,14455	11
79	5,14455	5,22566	5,30928	5,39552	5,48451	5,57638	5,67128	10
80	5,67128	5,76937	5,87080	5,97575	6,08444	6,19703	6,31375	9
81	6,31375	6,43484	6,56055	6,69116	6,82694	6,96823	7,11537	8
82	7,11537	7,26873	7,42871	7,59575	7,77035	7,95302	8,14435	7
83	8,14435	8,34496	8,55555	8,77689	9,00983	9,25530	9,51436	6
84	9,51436	9,78817	10,07803	10,38540	10,71191	11,05443	11,43005	5
85	11,43005	11,82617	12,25051	12,70621	13,19688	13,72674	14,30067	4
86	14,30067	14,92442	15,60478	16,34986	17,16934	18,07498	19,08114	3
87	19,08114	20,20555	21,47040	22,90377	24,54176	26,43160	28,63625	2
88	28,63625	31,24158	34,36777	38,18846	42,96408	49,10388	57,28996	1
89	57,28996	68,75009	85,93979	119,58865	171,88540	343,77371	∞	0
	60′	50′	40′	30′	20′	10	0′	Градусы
	Cotangens							

ОГЛАВЛЕНИЕ.