Введение произвольных единиц величин при решении задач

Многие текстовые задачи начального курса математики, и не только начального, содержат величины. В большинстве из них требуется найти значение некоторой величины в определенных единицах, тогда как в условии задач эта величина характеризуется иными средствами.

Большинство детей при решении таких задач испытывает затруднения. Происходит это от того, что дети в своих рассуждениях не в состоянии перейти от общепринятых, заданных в задаче единиц измерения к произвольным, определяемым в соответствии с содержанием задачи. Между тем многие трудные задачи станут достаточно простыми даже для слабых учащихся, если они будут способны свободно переходить от одной единицы величины к другим.

Покажем суть описываемого приема на примере решения нескольких задач. Все представляемые задачи в настоящее время относят либо к недоступным для учащихся начальных классов, либо к трудным.

Задача 1. Ученик заплатил за 2 блокнота и 3 открытки 99 к. Сколько стоит блокнот и открытка в отдельности, если блокнот в 4 раза дороже открытки?

Будем рассуждать так. В задаче речь идет о цене — стоимости единицы товара, о стоимости всего товара и о количестве товара — о количестве (штук) блокнотов и открыток.

Стоимость и цена — это величины. В задаче использована только одна единица стоимости — копейка и одна единица цены — копейка за 1 штуку товара. Однако стоимость, как любая другая величина, может иметь много других единиц. Мы вправе в качестве меры (мерки, эталона) выбрать любой объект, характеризуемый данной величиной, и приписать ему значение равное единице, т. е. принять количество данной величины в этом объекте за единицу[1].

Поскольку в задаче описывается лишь два рода предметов, характеризуемых стоимостью — блокноты и открытки, то в качестве мерки удобно выбрать один из них и принять значение стоимости в нем равным единице. Так как возможностей для выбора существует две, то и путей решения задачи — два.

Возьмем в качестве мерки более дешевый предмет — открытку, а ее стоимость примем за единицу. Дадим название этой единице. Чтобы не придумывать новых терминов, назовем новую единицу так же, как и предмет — «открытка». Итак, мы имеем теперь новую единицу стоимости — 1 откр., где «откр.» — сокращенное написание слова «открытка», означающего в данном случае не сам предмет, т. е. саму открытку, а ее стоимость.

Выразим в новых единицах стоимости цены описываемых в задаче товаров. Цена открытки, т. е. стоимость одной открытки — 1 откр., стоимость трех открыток — 3 откр. Цена блокнота, т. е. стоимость 1 блокнота равна согласно условию 1 откр.-4 (в 4 раза дороже), т. е. 4 откр. Тогда стоимость всех блокнотов будет равна 4-2 (откр.), или 8 откр. Итак, все открытки стоят 3 откр., а все блокноты — 8 откр. Стоимость всей покупки равна сумме 3 откр. и 8 откр., т. е. 3 откр.+8 откр.= = 11 откр.

Теперь имеем: стоимость всей покупки в новых единицах равна 11 откр., а в старых, в копейках — 99 к. Отсюда легко находим отношение между этими единицами: 11 откр.=99 к.

1 откр.=99 к : 11

1 откр.=9 к.

Значит, цена открытки в копейках — 9 к. Теперь совсем нетрудно найти стоимость всех блокнотов в копейках.

Развернутая запись решения в тетрадях учащихся в период ознакомления с описываемым приемом может быть такой.

---

[1] Напомним, что величина — это некоторое свойство любого рода объектов, по которому можно проводить количественное сравнение объектов друг с другом, т. е. такое свойство, которое может быть измерено. Любое измерение проводится следующим образом:

1. Выбирается мерка (мера, эталон) — любой из объектов, обладающих данным свойством.
2. Выбранной мерке приписывается значение, равное единице, другими словами, условливаются, что в мерке (мере, эталоне) одна единица свойства (величины).
3. Придумываются название этой единице и, если нужно, обозначение на письме.
4. Способом, Соответствующим измеряемой величине, устанавливают, сколько раз мерка, или точнее свойство, содержащееся в мерке, «укладывается» в измеряемом объекте. Полученное положительное число — целое или дробное, рациональное или иррациональное — и есть результат измерения.

Примем стоимость одной открытки за единицу и обозначим — 1 откр. Тогда цена открытки — 1 откр.

1) $1\cdot3=3$ (откр.) —стоимость трех открыток.
2) $1\cdot4=4$ (откр.) —цена блокнота.
3) $4\cdot2=8$ (откр.) — стоимость двух блокнотов.
4) $8 + 3=11$ (откр.) — стоимость всей покупки.
5) 11 откр.=99 к.; 99 к.: 11 = 9 к.
   1 откр.=9 к.— цена одной открытки в копейках.
6) $9\cdot4=36$ (к.) — цена одного блокнота в копейках.

Ответ: открытка стоит 9 к., блокнот — 36 к.

При всей кажущейся сложности записи, само решение вполне может быть выполнено устно или с частичной записью[22]. Развернутую запись целесообразно использовать лишь для объяснения. Краткая форма записи решения этой задачи может быть, например, такой:

Единица стоимости — 1 откр.

1) $4\cdot2=8$
2) $8+3=11$
3) 99 : 11=9; 9 к.= 1 откр.
4) 9-4=36 (к.)

Ответ: 9 к., 36 к.

При решении приведенной выше задачи в качестве мерки может быть выбран блокнот. Стоимость его в этом случае принимают за единицу. Назвать эту единицу можно так же, как и в предыдущем случае, по названию предмета, т. е. блокнот, сокращенно блк.

Итак, пусть новая единица стоимости — 1 блк. (один блокнот). Тогда два блокнота будут стоить 2 блк. (два блокнота). Так как цена блокнота в 4 раза больше цены открытки, то цена открытки будет в 4 раза меньше — $^1/_4$ блк. Тогда 3 открытки будут стоить $^3/_4$ блк. Вся покупка соответственно будет стоить: 2 блк.+ $^3/_4$ блк.=$2^3/_4$ блк.

Итак, в «блокнотах» вся покупка стоит $2^3/_4$ блк., в копейках — 99 к. Остается найти отношение между единицами: $2^3/_4$ блк.=99 к.

1 блк. = 99 к. : $2^3/_4$ = 99 к. • $^{11}/_4$ = 99 к. : $11\cdot4$ = = 36 к.

Теперь нетрудно найти цену открытки в копейках: 36 : 4=9 (к.)

Конечно, это решение недоступно большинству детей из-за последнего действия, однако оговорить принципиальную его возможность можно. Мы привели решение рассматриваемой задачи полностью, чтобы читателям яснее стала суть приема.

Рассмотрим еще несколько задач, при решении которых используются произвольные единицы величин.

Задача 2[3]. Сколько дедушке лет, столько внучке месяцев. Дедушке с внучкой вместе 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?

В задаче речь идет о величине «время». Использовны две единицы измерения времени — год (лета) и месяц. Отношение между этими единицами известно: 1 г.= 12 мес., т. е. 1 год в 12 раз длиннее, больше 1 месяца. Но тогда одинаковое число лет и месяцев возраста дедушки и внучки означает, что дедушка в 12 раз старше внучки. Так же, как и для других величин, в качестве меры (эталона) времени может быть взят любой объект, характеризуемый данной величиной. Так как в задаче всего два таких объекта — два человека, дедушка и внучка, то естественно в качестве мерки взять одного из них, а его возраст — в качестве единицы времени. Как и в предыдущей задаче, удобнее взять за единицу меньшую величину, в рассматриваемом случае — возраст внучки. Последнее словосочетание может служить и названием новой единицы 1 в. в. (один возраст внучки). Так как дедушка в 12 раз старше внучки, то его возраст будет равен 12 в. в. Тогда сумма их возрастов дедушки и внучки в новых единицах будет равна 12 в. в.+1 в. в.= 13 в. в.

Теперь мы знаем сумму возрастов дедушки и внучки, выраженную в годах — 91 год (по условию задачи), и в наших единицах — возрастах внучки. Остается только установить соотношение между этими единицами, т. е. ответить на вопрос: сколько лет составляет 1 в. в.

Имеем 13 в. в=91 г., следовательно, 1 в. в.= = 91 г.:13=7 л. Тогда возраст дедушки в годах $7\cdot12=84$ (г.). Мы ответили на вопрос задачи. Возраст внучки 7 лет, дедушки — 84 года.

Задача 3. В один ларек привезли 15 ящиков с фруктами, в другой — 10 таких же ящиков. В первый ларек привезли на 60 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов фруктов привезли во второй ларек?

Основная величина, описываемая в задаче — масса. Общепринятая единица массы, используемая в задаче — килограмм. Однако в этой задаче масса характеризуется и другой единицей — ящиком. Точнее, в качестве единицы массы в задаче взята масса фруктов в одном ящике. Ведь ясно, что когда говорят, что в магазин привозят 15 ящиков с фруктами, то число 15 служит не столько для указания количества самих ящиков, сколько для характеристики массы находящихся в них фруктов.

Введем новую единицу массы — массу фруктов в одном ящике. Обозначим ее 1 ящ. Теперь масса в задаче характеризуется с помощью двух единиц измерения. В задаче требуется перевести значение массы фруктов во втором ларьке из одних единиц — «ящиков» в другие — килограммы. Для этого достаточно найти отношение между этими единицами. Сделать это можно лишь тогда, когда для одного и того же количества массы будут известны результаты измерения в каждой единице.

---

[1] Способ решения задач, предлагаемый автором, представляется интересным. Но все-таки думается, что этот способ не так естественен и доступен младшему школьнику, как это представляется автору.

Вопросы могут возникнуть и у учителя. Прежде, чем говорить о методике использования данного приема (какую подготовительную работу проводит учитель, как вводится этот способ и т. п.) , мы сочли возможным в целом познакомить читателей с данным методическим подходом к решению задач.— *Ред.*

[3] Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел.— М., 1986.— С. 52.

В условии задачи в килограммах характеризуется лишь разница в массах фруктов, завезенных в ларьки. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли эту разницу найти в других единицах массы. Конечно, можно, так как нам известны значения массы фруктов в каждом ларьке, выраженной в новых единицах — в ящиках.

Найдем, на сколько больше ящиков фруктов завезли в первый ларек, чем во второй (или: на сколько ящиков масса фруктов, привезенных в первый ларек, больше, чем масса фруктов, привезенных во второй ларек); 15—10=5 (ящ.) — масса фруктов в первом ларьке на 5 ящиков больше массы фруктов во втором ларьке.

Итак, по условию задачи разность массы фруктов в ларьках — 60 кг, согласно последнему действию эта разница равна 5 ящикам. Отсюда следует, что масса в 5 ящиках, измеренная в килограммах, даст нам значение — 60 кг. Итак, 5 ящ. и 60 кг — это масса одного и того же количества фруктов. По этим данным легко найти отношение между единицами: 60 кг : 5 = 12 кг, т. е. 12 кг составляет массу одного ящика, или 1 ящ.= 12 кг. Масса всех фруктов во втором ларьке 10 ящ. Переведем это значение в килограммы: 10 ящ.= = (10·12) кг = 120 кг. (Знак равенства здесь абсолютно правомочен точно так же, как в записях вида 10 кг=10 000 г.)

Задача решена. Ответ: во второй ларек было привезено 120 кг фруктов.

При всей кажущейся необычности приведенных рассуждений, они более естественны и более корректны в математическом отношении, чем принятая в настоящее время схема, согласно которой для решения выделяется три величины: масса одного ящика, число ящиков, масса всех ящиков. Ведь эти три величины, на самом деле, есть одна и та же величина — масса.

Приведем решение еще одной задачи такого же вида, как предыдущая.

Задача 4. Магазин продал за день 12 банок вишневого варенья и 20 таких же банок малинового, причем малинового варенья было продано на 16 кг больше, чем вишневого. Сколько килограммов варенья каждого сорта было продано за день?

Эта задача о массе варенья. В ней использованы две единицы массы: «банка» — масса варенья в одной банке (1 б); «килограмм» — масса такого количества любого вещества, которое уравновешивает на чашках весов соответствующую гирю.

Масса варенья каждого вида характеризуется в «банках», а разность между этими массами — в килограммах. Найдем эту разность еще и в банках: 20 б.—12 б.=8 б.

Итак, малинового варенья было продано на 8 б. больше и на 16 кг больше, т. е. 8 б.= 16 кг, 1 б.= 16 кг: 8=2 кг. Отношение между этими единицами массы: 1 б.=2 кг. Переведем теперь значение массы варенья каждого вида в килограммы: 12 б.= (2 • 12) кг=24 кг; 20 б. = (2•20) кг= =40 кг. Ответ. 24 кг вишневого варенья и 40 кг малинового варенья.

Рассуждения, приводящие к решению двух последних задач, более просты, чем при решении их принятым в настоящее время способом.

Задача 5. На изготовление 10 пар ботинок потребовалось 36 дм^2 кожи. Сколько квадратных метров кожи потребуется на 1 000 пар ботинок?

Будем считать, что площадь кожи измеряется в квадратных метрах, в квадратных дециметрах, а также в «парах ботинок», где 1 п. б. — площадь кожи, необходимая для изготовления одной пары ботинок. Тогда 10 п. б.= 36 дм^2, а 1 000 п. б.= = 10 п. б. • 100=36 дм^2•100=3 600 дм^2=36 м^2.

Как видно, введение новых единиц измерения заключается не только в том, что становятся ненужными сложные зависимости и искусственные построения, но и в том, что можно использовать все свойства и правила записей и действий со значениями величин, выраженных одновременно в нескольких единицах. Другими словами, можно использовать все знания о «составных именованных числах» и действиях с ними.

Если, кроме правил оперирования с составными значениями величин, использовать еще и свойства равенств или зависимости между результатами и компонентами действий, то ученикам начальной школы станут доступны даже такие задачи, которые без составления уравнения зачастую не могут решить не только старшеклассники, но и учителя.

Попробуйте, например, решить следующую задачу.

Задача 6. 8 детских пальто стоят столько же, сколько 10 детских костюмов. Костюм дешевле пальто на 300 р. Сколько рублей стоят костюм и пальто в отдельности?

В данной задаче речь идет о стоимости, о деньгах. Будем считать, что количество денег измеряется в рублях, в «стоимости одного пальто», в «стоимости одного костюма». Соответствующие единицы измерения 1 р., 1 п., 1 кост. Из условия задачи следует, что 10 кост.=8 п., и 1 кост.+ +300 р.= 1 п. Подставим значение 1 п. в первое равенство. Получим:

10 кост.= (1 кост.+300 р.) • 8.

10 кост.=8 кост.+2 400 р.

На основе зависимости между суммой и слагаемым (если из суммы 10 кост. вычтем одно слагаемое — 8 кост., то получится второе слагаемое — 2 400 р.) получим равенство:

10 кост. — 8 кост.=2 400 р.

2 кост.=2 400 р.

1 кост.= 1 200 р.

1 п.= 1 кост.+300 р.= 1 200 р.+300 р.= 1 500 р.

Задача решена.

Возможно читателям описанный прием покажется сложным. Но не торопитесь его отвергать. Сложен он лишь потому, что при обучении в школе, педучилище и в институте очень мало уделялось внимания такому важному понятию математики, как величина. Кроме того, в действующих школьных учебниках вообще игнорируется тот факт, что выбор единицы измерения — это произвол измеряющего и ограничен он лишь целевым назначением этого измерения.

В пособиях, школьных учебниках также не обращается внимание на то, что в повседневной жизни мы часто прибегаем к самым разным и необычным единицам измерения. Вас, например, просят купить обувь ребенку и дают кусочек нити, равный длине его стопы. В данном случае длина стопы ребенка — единица длины. По радио в очередной раз рассказывают о бартерных сделках, например, об обмене зерна на трубы определенного размера: 1 т зерна за 10 м труб. Здесь налицо измерение массы зерна в «метрах труб», где 1 м труб=0,1 т. зерна. Примеров таких можно привести много.

В данной статье мы показали лишь один аспект применения величайшего научного понятия современности — величины. К сожалению, в настоящее время мало литературы, из которой можно почерпнуть необходимые сведения и углубить свое понимание этого понятия. Но несколько книг и статей для тех, кого заинтересует этот вопрос, можно порекомендовать.

К л и м е н ч е н к о Д. В. Величины и их измерение // Начальная школа.— 1990.— № 6.

К л и м е н ч е н к о Д. В. Из истории метрической системы мер // Начальная школа.— 1991.— № 7.

А л е к с а н д р о в А. Д. Основания геометрии.— М., 1987.

К о г а н В. Ф. Очерки по геометрии.— М., 1963.

Математический энциклопедический словарь.— М,, 1990.

Д е п м а н И. Я., В и л е н к и н Н. Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5—6 классов средней школы.— М., 1989.

С т о ц к и й Л. Р. Физические величины и их измерение.— М., 1984.

В издательстве Новосибирского областного института усовершенствования учителей готовится книга автора данной статьи: Ц а р е в а С. Е. Изучение величин в начальной школе. В ней на доступном языке дается общая характеристика понятия «величина», показаны возможные подходы к его рассмотрению в школе, а также рекомендации по изучению единиц длины, массы, площади, времени в начальных классах. Материал книги будет полезен и тем, кто работает по обычным программам и учебникам, и особенно тем, кто осваивает экспериментальные учебники, концепции развивающего обучения В. В. Давыдова.

Если у читателей возникнут вопросы по данной статье, буду рада ответить на них каждому, кто напишет мне по адресу: 630126. Новосибирск, Вилюйская, 28, пединститут, факультет начальных классов — Царевой Светлане Евгеньевне.

С. Е. ЦАРЕВА