Различные способы решения задач и различные формы записи решения

На одном из уроков математики во II классе ученик, получив задание «Реши задачу», спросил: «Каким способом нужно решать: по действиям или выражением?» Учитель ответил: «По действиям».

Этот диалог показал, что и учитель, и ученик принимают различные формы записи решения за различные способы ее решения. Посещение уроков, беседы с учителями и учащимися позволили нам сделать вывод, что эта ошибка довольно распространена. Смешение же названных понятий приводит к тому, что, когда требуется действительно решить задачу разными способами, учащиеся либо вовсе, не понимают задания, либо понимают его с большим трудом. А это, в свою очередь, снижает обучающие и воспитывающие возможности такого важного вида работы над задачей, как решение задач разными способами.

Поэтому мы считаем своевременным обратить внимание учителей на отличие понятий способа решения задачи и формы записи решения задачи.

Задача считается решенной различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

Рассмотрим, например, задачу № 522 из учебника математики для II класса: «Для уроков труда купили 4 катушки белых ниток, по 10 коп. за катушку, и 6 катушек черных ниток по такой же цене. Сколько денег уплатили за эти нитки?»

Эта задача может быть решена двумя арифметическими способами.

При первом из них, наиболее очевидном, первоначально определяют стоимость черных ниток: (10-4) коп., затем стоимость белых ниток: (10-6) коп. и, наконец, стоимость всех ниток.

При втором способе замечаем, что цена 1 катушки белых ниток та же, что и черных, поэтому вначале можно узнать, сколько всего катушек ниток купили (6+4), а затем определить стоимость всех этих ниток.

Запись решения для каждого способа может быть выполнена в нескольких формах. Покажем все эти формы для каждого способа решения.

Запись решения по действиям с планом.

I способ

1. Сколько бтоят белые нитки?
   $10 \cdot 4 = 40$ (коп.)
2. Сколько стоят черные нитки?
   $10 \cdot 6 = 60$ (коп.)
3. Сколько денег уплатили за все эти нитки?
   $40+60=100$ (коп.)
   100 коп. = 1 руб.

Ответ: 1 руб.

II способ

1. Сколько всего катушек с нитками купили?
   $6+4=10$ (шт.)
2. Сколько денег уплатили за все эти нитки?
   $10 \cdot 10 = 100$ (коп.)
   100 коп.= 1 руб.

Ответ: 1 руб.

В настоящее время эта форма записи решения задач в начальной школе практически не применяется. Однако мы считаем, что ознакомить с ней учащихся полезно и ее можно использовать на уроках математики, хотя и значительно реже, чем другие формы.

Рассмотрим другую форму записи решения той же задачи — это запись решения по действиям с пояснениями.

I способ

1. $10 \cdot 4 = 40$ (коп.)—стоимость белых ниток.
2. $10 \cdot 6=60$ (коп.) — стоимость черных ниток.
3. $40+60=100$ (коп.)—стоимость всех ниток.
   100 коп.= 1 руб.

Ответ: 1 руб.

II способ

1. $6+4=10$ (шт.)—всего купили катушек ниток.
2. $10 \cdot 10=100$ (коп.) — стоимость всех ниток,
   100 коп. = 1 руб.

Ответ: 1 руб.

Решение задачи можно также оформить по действиям без пояснений,

I способ

1. $10 \cdot 4 = 40$ (коп.).
2. $10 \cdot 6 = 60$ (коп.).
3. $40+60=100$ (коп.).
   100 коп.= 1 руб.

Ответ: все нитки стоят 1 руб.

II способ

1. $6+4=10$ (коп.).
2. $10 \cdot 10=100$ (коп.).
   100 коп. = 1 руб.

Ответ: все нитки стоят 1 руб.

По задаче можно также составить *выражение* и найти его значение,

I способ

$10 \cdot 4+10 \cdot 6=100$ (коп.)

100 коп. = 1 руб.

О т в е т : все нитки стоят 1 руб.

II способ

$10 \cdot (6+4) = 100$ (коп.)

100 коп.= 1 руб.

О т в е т : все нитки стоят 1 руб.

Запись решения в этой форме осуществляется учащимися в два этапа. Вначале составляется выражение, затем учащиеся находят его значение, после чего запись решения приобретает вид равенства, в левой части которого записано в ы р а ж е н и е, составленное по задаче, а в правой части — его з н а ч е н и е.

Ни в коем случае н е л ь з я н а з ы в а т ь запись $10 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 100$ в ы р а ж е н и е м, так как это противоречит тому определению понятия выражения, которое положено, в основу изучения этого понятия в школе. Математическое выражение составляется из цифр, букв, знаков арифметических действий и скобок, но не содержит знаков математических отношений: равенства, неравенства и др. Два математических выражения, соединенные знаком равенства, образуют р а в е н с т в о.

Приведенная выше запись — это р а в е н с т в о, левая часть которого есть выражение, составленное по задаче ($10 \cdot 4 + 10 \cdot 6$), а правая часть — выражение, состоящее всего лишь из одного числа (100), являющегося значением предыдущего выражения.

При проверке решения задачи, записанной в этой форме, учащимся можно дать такие задания:

1. Прочитайте выражение, составленное, по задаче.

При выполнении этого задания учащиеся должны прочитать только левую часть равенства. (Сумма двух произведений $10 \cdot 4$ и $10 \cdot 6$.) После чтения выражения можно задать вопросы, ответы на которые покажут, как учащиеся понимают смысл каждой части выражения ($10 \cdot 4$ и $10 \cdot 6$) и всего выражения в целом ($10 \cdot 4 + 10 \cdot 6$)г что означает произведение десяти и четырех? десяти и шести? что означает сумма этих произведений?

2. Назовите значение этого выражения. (Значение составленного по задаче выражения равно 100.)

3. Дайте ответ на вопрос задачи. (Все нитки стоят 100 коп., т. е. 1 руб.)

При решении задач следует правильно употреблять в своей речи соответствующие термины: *Решите задачу и запишите решение по действиям с пояснениями. Решите задачу двумя способами, записав каждое решение в виде равенства, левая часть которого — выражение, составленное по задаче. Решите задачу двумя способами. Составьте соответствующие выражения и найдите их значения. Решите задачу и запишите решение вначале по действиям с пояснениями, а затем в виде выражения. Найдите значение этого выражения. Дайте ответ на врпрос задачи.*

Выше мы говорили только об арифметических способах решения текстовых задач. Решение задач а л г е б р а и ч е с к и существенно отличается от их решения арифметическими путями. Если при арифметическом -решении цель решающего — последовательно найти с помощью выполнения арифметических действий над данными значениями величин несколько неизвестных значений, пока не будет найдено значение искомого, то при алгебраическом решении эти цели другие.

Целью решающего задачу алгебраически является з а п и с ь т е к с т а задачи в виде у р а в н е н и я, р е ш е н и е этого уравнения, а затем о п р е д е л е н и е и с к о м о г о.

Процесс анализа и разбора задачи, форма записи при алгебраическом способе решения задачи отличаются от соответствующих этапов работы над задачей при арифметических способах решения. Так как по одной и той же задаче обычно можно составить не одно, а несколько различных уравнений, то можно говорить о существовании различных алгебраических способов решения одной и той же задачи. Различные способы решения могут отличаться выбором неизвестного, которое обозначается буквой или же (при одном и том же выборе неизвестного) уравнениями, составленными по задаче. В I—III классах решаются путем составления уравнения только несложные задачи, при решении которых буквой *x* *(y* и т. п.) удобнее всего обозначать искомое. Поэтому два алгебраических решения одной и той же задачи в начальной школе могут отличаться лишь уравнениями. Форма же записи при любом алгебраическом способе остается постоянной.

Решение задачи с помощью уравнения осуществляется решающим в несколько этапов. Покажем эти этапы на примере решения задачи № 32, с. 100 из учебника математики для II класса: «Хозяйка израсходовала на посуду 7 руб. За 3 руб. она купила кастрюлю, а на остальные деньги два одинаковых ведра. Сколько стоит одно ведро?»

Вначале уславливаются обозначить искомое той или иной буквой *(x, y, a, b),* и вопрос, задачи преобразуется в повествовательное предложение. Текст задачи полезно переформулировать так:

«Хозяйка израсходовала на посуду 7 руб. За 3 руб. она купила кастрюлю, а на остальные деньги два одинаковых ведра. Одно ведро стоит *x* руб.»

На следующем этапе по этому тексту составляется уравнение. Для этого нужно составить два различных выражения для одного и того же значения одной величины или для равных значений различных величин.

В приведенной нами задаче это может быть достигнуто по крайней мере двумя путями, которые мы опишем в виде рассуждения решающего.

1. Пусть 1 ведро стоит x руб. Тогда 2 ведра будут стоить $(x \cdot 2)$ руб. Так как эти 2 ведра куплены на оставшиеся у хозяйки после покупки кастрюли деньги, то, следовательно, эти 2 ведра стоят (7—3) руб. Оба выражения $(x \cdot 2)$ и (7—3) обозначают одно и то же количество денег, поэтому между ними можно поставить знак равенства. Получим уравнение:

$$x \cdot 2 = 7-3,$$

в котором x обозначает цену ведра.

2. На покупку кастрюли и двух ведер хозяйка израсходовала 7 руб. Пусть 1 ведро стоит x руб. Тогда 2 ведра будут стоить $(x \cdot 2)$ руб. Так как за кастрюлю хозяйка уплатила 3 руб., то вся покупка будет стоить $(3+x \cdot 2)$ руб. Число 7 и выражение $(3+x \cdot 2)$ обозначают стоимость всей покупки; следовательно, между ними можно поставить знак равенства. Получим уравнение:

$$3+x \cdot 2 = 7,$$

в котором x обозначает цену ведра.

На третьем этапе решающий отвлекается от содержания задачи и решает составленное по ней уравнение.

Следующим шагом является перевод найденного решения уравнения на язык текста задачи и формулировка ответа на вопрос задачи. Этот перевод происходит в процессе таких рассуждений решающего: «Так как мы условились, Что 1 ведро стоит x руб., а из уравнения нашли, что $x = 2$, то, значит, ведро стоит 2 руб. Ответ на вопрос задачи будет таким: одно ведро стоит 2 руб.»

В целом решение приведенной задачи (№ 32, с. 100) может быть записано в следующем виде:

«Пусть одно ведро стоит x руб.

Тогда $(x \cdot 2)$ руб. — стоимость двух ведер;
(7—3) руб. — стоимость двух ведер.

$x \cdot 2 = 7-3$
$x \cdot 2 = 4$
$x=2$
$2 \cdot 2 = 7-3$
$4 = 4$

О т в е т : одно ведро стоит 2 руб.

Пусть одно ведро стоит x руб.
Тогда $(x \cdot 2)$ руб. — стоимость двух ведер;
$(3+x \cdot 2)$ руб. — стоимость всей покупки;
7 руб. — стоимость всей покупки.

$3+x \cdot 2 = 7$
$x \cdot 2 = 7-3$
$x \cdot 2 = 4$
$x = 2$
$3+2 \cdot 2 = 7$
$7 = 7$

О т в е т : одно ведро стоит 2 руб.»

При записи решения задачи с помощью уравнения обычно записывают только уравнение, его решение и ответ. А очень важная часть решения задачи — рассуждения, приводящие к составлению уравнения,— остается незафиксированной в тетрадях учащихся. На наш взгляд, это упущение приводит к формальному овладению алгебраическим способом решения задач. Мы считаем целесообразным (может быть, и не всегда, но достаточно часто) записывать кратко рассуждения, приводящие к составлению уравнения, как это показано выше.

Ответ при решении задач с помощью уравнений лучше записывать полным предложением. Это помогает осознать учащимся решение уравнения как решение задачи.

После формулировки ответа полезно сделать прикидку полученного ответа в соответствии с условием задачи.

К а ж д а я ф о р м а з а п и с и р е ш е н и я задачи и к а ж д ы й н о в ы й С п о с о б р е ш е н и я позволяют взглянуть на задачу по-иному, яснее осознать процесс решения, глубже понять связи и отношения между данными, между данными и искомым. А это помогает полнее реализовать как дидактические, так и воспитывающие и развивающие функции текстовых задач. Поэтому в соответствии с конкретными целями урока и в соответствии с целями использования текстовых задач на уроке математики следует умело применять как различные способы решения задач, так и различные формы -записи решения задач в тетрадях учащихся.

С. Е. ЦАРЕВА,
Новосибирский педагогический институт