

Обучение решению задач

**С. Е. ЦАРЕВА,
Новосибирский государственный
педагогический университет**

Каких бы образовательных концепций учитель ни придерживался, по каким бы программам и учебникам ни работал, он не может не ставить перед собой цель научить детей решать задачи, причем не только математические, но и орфографические, природоведческие, бытовые и др. Обучение решению задач в той или иной мере происходит при изучении любого учебного предмета. В курсах математики, математики и конструирования предусмотрено специальное обучение учащихся начальных классов этому умению. Однако далеко не каждый учитель начальных классов (и не только начальных) может похвалиться, что его воспитанники хорошо умеют решать задачи.

Между тем есть вполне доступный теоретический подход и соответствующая технология обучения, которые позволяют каждому овладевшему ими учителю справиться с рассматриваемой проблемой. Основы этого подхода разработаны автором в кандидатской диссертации, детализированы и апробированы вначале самим автором на спецкурсе для студентов, а затем и преподавателями кафедры математики и методики преподавания ФНК Новосибирского госпединститута как в работе со студентами, так и в работе с учителями и учащимися.

Цель настоящей статьи — представить подход целостно и обобщенно. (Он частично отражен в статьях автора и ее коллег Р. П. Шульги, Л. Ю. Кузнецовой, Т. В. Смолеевой, Е. А. Рудаковой.) Основные идеи и положения этого подхода легко вписываются в любую систему развивающего обучения.

Взгляд на проблему обучения решению задач определяется прежде всего особенностями осознания сущности понятий "задача", "решение задачи", "решить задачу", "процесс решения задачи", "методы и способы решения задачи", "обучение решению задачи", "умение решать задачи".

Первые пять понятий относятся к теории решения задач безотносительно к тому, проводится ли это решение в ситуации обучения или вне ее. Два последние понятия — ключевые понятия в теории обучения решению задач. Поэтому изложение своих взглядов разделю на две части: сначала опишу понимание понятий первой группы, затем — второй и ответ на вопрос: "Как обу-

чить решению задач?" Именно содержание, смысл понятий первой группы определяет сущность представляемого подхода.

У большинства учителей начальных классов слово "задача" ассоциируется только с текстовыми сюжетными задачами, поэтому в данной статье буду говорить не только о таких задачах, но и о любых возможных и существующих, в том числе и таких, которые в начальной школе не принято называть задачами (например: "Решить уравнение $x + 3 = 7$ "; "Вставить пропущенные буквы в текст, данный ниже ..."). Это один из принципиальных моментов подхода к обучению решению задач. Он позволяет как учителю, так и ученику, обучаясь решению текстовых математических задач, одновременно обучаться и решению многих других, в том числе и житейских задач, позволяет мотивировать обучение решению текстовых задач, осуществлять личностно-ориентированное обучение математике.

Понятие "задача" относится к числу широких общенаучных понятий. Не пытаюсь поэтому дать строгое определение, выделю основные его характеристики.

Любая задача, реально возникшая у человека, зафиксированная в тексте или представленная как-то иначе, содержит в себе некоторую информацию о какой-либо области действительности и требование вывести, получить новую информацию об определенных компонентах той же области действительности, либо построить на основе данной информации новый объект, способ действия, закономерность, свойство, либо установить, подтвердить или опровергнуть истинность некоторого утверждения. Ту часть задачи, в которой задана информация, в методической литературе принято называть условием задачи, а часть задачи, в которой указывается, что необходимо найти, узнать, построить, доказать, принято называть требованием задачи. В методической литературе для начальной школы чаще используется термин "вопрос задачи".

Требование задачи может быть выражено побудительным предложением (Найти площадь прямоугольника; Добиться увеличения зарплаты; Найти эффективное средство лечения) или вопросительным (Чему равна площадь прямоугольника? Как увеличить зарплату? Какое средство лечения будет эффективным?).

В зависимости от области знаний, из которой взято содержание задач, их можно разделить на задачи математические,

лингвистические, психологические, химические, кулинарные, педагогические, экономические, задачи общения и т.п. Существует множество других классификаций задач: по характеру требования (задачи на нахождение искомого, на построение и конструирование, на доказательство), по методам и способам решения (арифметические, логические, практические, на нахождение четвертого пропорционального, на "части" и т.п.) и по многим другим основаниям, характерным для задач из какой-либо определенной области знания.

Термин "решение задачи" употребляется в научно-методической литературе обычно в четырех разных смыслах: 1. Процесс перехода от условия к выполнению требования задачи (к ответу на вопрос задачи) или процесс выполнения плана решения. 2. Запись результата процесса решения (Покажи мне свое решение). 3. Ответ на вопрос задачи или вывод о выполнении требования (Назови свое решение). 4. Способ, метод перехода от условия к выполнению требования задачи (Какое красивое решение найдено!).

В данной статье я стремилась использовать термин "решение задачи" в словосочетаниях, однозначно выражающих их смысл: процесс решения задачи, запись решения задачи, методы и способы решения задачи.

Процесс решения задачи — это переход от условия задачи к ответу на ее вопрос (к выполнению требования). Ответ на вопрос задачи или вывод о выполнении требования — результат процесса решения задачи. Иногда результатом решения может быть вывод о невозможности получения ответа на вопрос задачи (о невозможности выполнения ее требования).

Процесс решения может осуществляться с осознанием каждого шага или свернуто, интуитивно; вербально или без словесного выражения. В последнем случае ответ на вопрос возникает в результате, как говорят, "озарения", догадки. При невербальном (без словесного описания) процесс решения задачи осуществляется через конструирование зрительных, слуховых или осязательных образов¹. В этом случае человек не всегда и не сразу может описать, как он решал задачу. Именно такое, невербальное (несловесное) решение задачи происходит в случае, когда ученик начальной школы, едва дослушав задачу до конца, верно называет ответ на вопрос задачи, но не может

объяснить, как он его получил. В действительности он "увидел" всю заданную ситуацию и ответ на вопрос задачи. И такое решение нужно считать верным, а в дальнейшем необходимо научить ребенка это внутреннее "зрительное" решение выражать в рисунке, в математической записи.

Будем считать задачу решенной, если в результате некоторых операций с информацией, данной в задаче вербально (словесно) или в других знаковых системах, сформулирован ответ на вопрос задачи (вывод о выполнении требования задачи), соответствующий условию задачи. Ответ на вопрос задачи считается соответствующим условию задачи, если информация, содержащаяся в нем, не противоречит никакой информации, данной в условии (построенный в результате решения объект обладает свойствами, не противоречащими описываемым в условии).

Самый примитивный метод решения задач — это метод проб и ошибок. При таком ходе решения ответ на вопрос задачи угадывается. Это самый непродуктивный метод, однако он не только имеет право на существование, но и требует внимания и специального обучения. Ведь и на этом пути основные моменты решения — выбор пробных ответов на вопрос задачи и проверка их соответствия условию — осуществляется с помощью мыслительных операций, необходимых при решении любым продуктивным путем. Кроме этого, угадывание ответа требует интуиции, без которой невозможно никакое решение.

В понимании процесса решения задачи важную роль играет различие следующих вопросов и ответов на них:

1. Что значит решить (решать) задачу?
2. Как можно решить (решать) задачу?

Ответ на первый вопрос характеризует смысл решения (процесса решения) задачи. Этот смысл остается неизменным для любого вида задач, он не зависит от способа решения.

Решить задачу — это значит на основе информации из условия задачи и содержания требования дать ответ на вопрос задачи, соответствующий условию (выполнить требование задачи в соответствии с условием задачи).

Решать задачу — это значит выполнять действия — умственные, предметные, графические, речевые и т.д., направленные

¹ См.: Бэндлер Р., Гриндер Д. Из лягушек — в принцы: Нейро-лингвистическое программирование: Пер. с англ. — Новосибирск, 1992.

— в принцы: Нейро-лингвистическое программирование: Пер. с англ. — Новосибирск, 1992.

на достижение цели: найти ответ на вопрос задачи, соответствующий условию (выполнить требование задачи в соответствии с условием).

На вопрос "Как решить (решать) задачу?" однозначного ответа нет и быть не может. Путь, методов, способов, приемов² перехода от условия к вопросу, к выполнению требования любой задачи существует бесконечное множество. Процессы решения одной и той же задачи разными людьми или одним и тем же человеком в разное время различны. Эти различия могут быть более или менее значительными, приводить к одинаковым или различным способам внешнего выражения процесса решения. Даже в случае, когда задача решается одним и тем же методом, реальное его осуществление разными людьми различно, ибо каждый человек — индивидуальность, со своим неповторимым жизненным опытом, внутренним миром, способом эмоционального восприятия, характером и темпом мыслительных процессов, воображения, уровнем понимания каждого слова, понятия, термина, ситуации.

Сказанное не означает, что в ходе решения задач разными людьми нет общего. Наоборот, логика, которой мы пользуемся и которая заложена в нас от природы, по существу одинакова у всех, но способы и формы ее проявления могут в значительной мере отличаться у разных людей и в разные периоды жизни, в разное время. Понимать это — значит признавать возможность в любой, самой, казалось бы, стандартной ситуации получить неожиданный результат, найти оригинальный ход, способ решения, способ выражения хода решения, его проверки и т.д.

Представленная позиция — ключевая в нашем подходе. Она противоположна позиции, явно или неявно имеющейся во многих методических пособиях для учителей начальных классов. Согласно такой позиции решить задачу — это значит выполнить арифметические действия над числами, данными в задаче, и тем самым ответить на вопрос задачи. По этой же позиции способов решения задач существует всего лишь несколько, причем учитель знает, какие способы рациональные, и обучает детей именно этим "хорошим", "удобным" способам, приемам.

Учитель с такой позицией, включая задачу в урок, заранее точно знает, как она должна быть решена детьми. Поэтому любое отклонение от намеченного пути в луч-

шем случае мягко и доброжелательно исправляется, и дети находят то решение и в том виде, как это задумано учителем. При этом детская мысль неизбежно отвергается, подавляется. Кроме того, если ученик знает, что решение задачи возможно только в том виде, который показан учителем, то в случае, когда он по какой-то причине забыл его, ему ничего не остается делать, как отказываться от решения.

Учитель, допускающий многообразие путей, способов и форм решения, всегда заметит неординарный поворот мысли ребенка, поддержит его, и тогда на каждом уроке возможны открытия. У такого учителя учащиеся в большей мере рассчитывают на свою мысль, чем на память. Если знаешь, что, кроме показанного пути решения, существует еще множество других путей, то стоит ли огорчаться, что забыл этот один путь? Что значит один забытый путь в сравнении с бесконечным числом других возможных! Это очень сильная мотивационная посылка. Дети, принявшие ее, чувствуют силу своего ума, не боятся высказывать свое мнение, вносить свои предложения по ходу решения; им открыта возможность ощутить радость познания, радость понимания, удовольствие от умственной работы.

Следующее важное положение, на которое я опиралась при построении методики обучения решению задач и методики использования задач в обучении, можно сформулировать так: эффективно влиять на качество умения решать задачи; эффективно использовать задачи в обучении можно, лишь изучив, как происходит процесс решения у людей, достигающих положительных результатов и вычленив "инструменты", которыми они пользуются, условия и способы их применения.

Стремление понять, как человек решает задачи, как справляется с проблемами, присуще человечеству. В настоящее время исследованию процесса решения задач посвящены работы психологов, педагогов, математиков, специалистов в области кибернетики, техники, инженерии. Изучение результатов таких исследований (Д. Поля, Л. М. Фридман, Ю. М. Колягин, В. И. Крунич, М. А. Бантова и др.), сопоставление полученных представлений с итогами собственных наблюдений за решением задач учащимися и учителями начальных классов, студентами, обсуждение вопросов содержания процесса решения задач с коллегами дало возможность представить этапы реше-

² Описание методов и способов решения в данной статье даны лишь в общем плане.

ния задач и приемы их выполнения ("инструменты"), само понятие задачи и процесса решения задач в виде данного ниже текста. (Каждый этап решения есть сложное уместное действие, входящее в состав еще более сложного — решения задачи. Тогда каждый "прием выполнения" есть операция или совокупность операций соответствующего действия. Такое толкование "этапов" решения дано в диссертации В. А. Лебединцевой, и я вполне с ним согласна.)

Этапы решения задачи и приемы их выполнения

I. Восприятие и осмысление задачи.

Цель: понять задачу, т.е. установить смысл каждого слова, словосочетания, предложения и на этой основе выделить множества, отношения, величины, зависимости, известные и неизвестные, искомое, требование.

Приемы выполнения:

1. *Правильное чтение* задачи (правильное прочтение слов и предложений, правильная расстановка логических ударений) в случае, когда задача задана текстом.

2. *Правильное слушание* при восприятии задачи на слух.

3. *Представление ситуации*, описанной в задаче (создание зрительного, возможно, слухового и кинестетического образов).

4. *Разбиение текста* на смысловые части.

5. *Переформулировка текста* задачи (изменение текста или построение словесной модели):

— замена термина содержательным описанием;

— замена содержательного описания термином;

— замена некоторых слов синонимами или другими словами, близкими по смыслу;

— исключение части текста, не влияющей на результат решения;

— замена некоторых слов, терминов словами, обозначающими более общее или более частное понятие;

— изменение порядка слов и (или) предложений;

— дополнение текста пояснениями;

— замена числовых данных другими, более наглядными;

— замена числовых данных буквенными;

— замена буквенных данных числовыми;

— введение произвольных единиц величин и связанные с этим другие изменения текста.

6. *Построение материальной или материализованной модели:*

— предметной (показ задачи на конкретных предметах, в лицах — драматизация с использованием приема "оживления" или без него);

— геометрической (показ задачи с помощью графических изображений геометрических фигур или предметных моделей фигур с использованием их свойств и отношений между ними);

— условно-предметной (рисунок);

— словесно-графической (схематическая краткая запись текста задачи, переформулированного в результате применения предыдущего приема);

— табличной (таблица).

7. Постановка специальных вопросов:

— О чем задача?

— Что требуется узнать (доказать, найти) ?

— Что известно?

— Что неизвестно?

— Что обозначают слова... словосочетания... предложения?

— Какие предметы, понятия, объекты описываются в задаче?

— Какими свойствами, величинами они характеризуются?

— Сколько раз и как дается характеристика каждого предмета, понятия, объекта?

— Какая ситуация описывается в задаче?

— Сколько ситуаций описывается в задаче?

— Другие вопросы по содержанию задачи.

II. Поиск плана решения.

Цель: составить план решения задачи.

Приемы выполнения:

1. *Рассуждения "от вопроса к данным" и (или) "от данных к вопросу" без построения графических схем³:*

1) по данному тексту;

2) по модели.

2. *Рассуждения "от вопроса к данным" и (или) "от данных к вопросу" с построением графической схемы:*

1) по данному тексту;

2) по модели.

3. *Замена неизвестного переменной и перевод текста на язык равенств и (или) неравенств с помощью рассуждений "от вопроса к данным" и (или) "от данных к вопросу":*

1) по данному тексту;

2) по модели.

III. Выполнение плана решения.

Цель: найти ответ на вопрос задачи (выполнить требование задачи).

³ См., например: Рудакова Е. А., Царева С. Е. Разбор задачи с использованием графических схем//Начальная школа, 1992, № 11-12.

Приемы и формы выполнения:

1. *Устное выполнение каждого пункта плана.*

2. *Письменное выполнение каждого пункта плана:*

1) арифметического решения:

— в виде выражения с записью шагов по его составлению, вычислений и полученного результата этих вычислений — равенства;

— в виде выражения, преобразуемого после вычислений в равенство, без записи шагов по составлению выражения;

— по действиям с пояснениями;

— по действиям без пояснений;

— по действиям с вопросами;

2) алгебраического решения:

— в виде уравнения (неравенства) и его решения;

— через запись шагов составления уравнения, самого уравнения и его решения;

3) графического и геометрического решения⁴:

— в виде чертежа и (или) рисунка без промежуточных шагов построения и измерения;

— в виде чертежа и (или) рисунка с представлением промежуточных шагов построения и измерения;

4) табличного решения:

— в виде таблицы с записью шагов по ее построению и заполнению;

— в виде таблицы и ее заполнения без представления промежуточных шагов;

5) логического решения:

— с использованием символического языка логики;

— без использования символического языка логики.

3. *Выполнение решения путем практических действий с предметами:*

— реальное;

— мысленное.

4. *Выполнение пунктов плана с помощью вычислительной техники или других вычислительных средств:*

— с записью программы для ЭВМ, МК или др. техники;

— без записи программы для ЭВМ, МК и др. техники.

IV. Проверка решения⁵

Цель: установить, соответствует ли процесс и результат решения образцу правильного решения.

Приемы выполнения:

1. Прогнозирование результата (прикидка, установление границ ответа на вопрос задачи) и последующее сравнение хода решения с прогнозом. При несоответствии прогнозу — решение неверно. При соответствии решение может быть как верным, так и неверным. (Возможно установление правильности (правдоподобности) или неправильности (неправдоподобности) хода решения.)

2. Установление соответствия между результатом решения и условием задачи: введение в текст задачи вместо вопроса (требования) ответа на него (утверждение о выполнении требования), получение всех возможных следствий из полученного текста, сопоставление результатов друг с другом и с информацией, содержащейся в тексте. (Если в результате будут обнаружены противоречивые утверждения, то задача решена неправильно. В противном случае — результат решения верен. Правильность хода решения не устанавливается.)

3. Решение другим методом или способом. (Если в результате решения другим (другими) способом или методом получили тот же результат — этот результат верен, в противном случае — неверен. Правильность хода решения не устанавливается.)

4. Составление и решение обратной задачи. (Если в результате решения обратной задачи получено данное прямой задачи, то результат решения верен. В противном случае — неверен. Правильность хода решения не устанавливается.)

5. Определение смысла составленных в процессе решения выражений. (Если все выражения имеют смысл и смысл последнего таков, что позволяет ответить на вопрос задачи, то выражения составлены верно и после проверки правильности нахождения значений выражений можно утверждать, что ход и результат решения верны. В противном случае либо ход решения, либо его результат — неверны. Возможно установление правильности как хода, так и результата решения.)

6. Сравнение с правильным решением — с образцом хода и (или) результата решения. (При решении задачи тем же методом и способом, что и в имеющемся образце, возможно установление правильности как хода, так и результата решения.)

7. Повторное решение тем же методом и способом. (Возможно установление правильности хода и результата решения.)

⁴ Графическое решение может быть геометрическим, если основано на геометрических свойствах изображений, и негеометрическим, если свойства геометрических фигур не используются.

⁵ Результаты проверки любым из перечисленных приемов достоверны лишь в той мере, в какой правильно осуществлены все проверяющие действия и операции.

8. Решение задач "с малыми числами" с последующей проверкой вычислений. (Возможно установление правильности хода и результата решения.)

9. Решение задач с упрощенными отношениями и зависимостями с последующим восстановлением отношений и зависимостей, данных в задаче. (Возможно установление правильности как хода, так и результата решения.)

10. Обоснование (по ходу) каждого шага решения через соотнесение с более общими теоретическими положениями. (Возможно установление правильности как хода, так и результата решения.)

V. Формулировка ответа на вопрос задачи (вывода о выполнении требования).

Цель: дать ответ на вопрос задачи (подтвердить факт выполнения требования задачи).

Формы и способы выполнения:

1. Построение развернутого истинного суждения вида: "Так как..., то можно сделать вывод, что..." (формулируется ответ на вопрос задачи полным предложением в устной или письменной форме).

2. Формулировка полного ответа на вопрос задачи без обосновывающей части устно или письменно.

3. Формулировка краткого ответа устно или письменно с помощью специальных знаков.

VI. Исследование решения⁶.

Цель: установить, является ли данное решение (результат решения) единственным или возможны и другие результаты (ответы на вопрос задачи), удовлетворяющие условию задачи.

Приемы выполнения:

1. Изменение результата решения в соответствии с его смыслом и установление характера (направления) изменений в отношениях между измененным результатом и условием задачи.

2. Подбор другого результата решения и установление соответствия (возможности соответствия) условию задачи. Оценка степени возможности удовлетворения условию задачи других результатов.

Итак, чтобы решить задачу, нужно вначале ознакомиться с ней и понять ее, затем составить план решения, после чего выполнить его, сформулировать ответ на вопрос (вывод о выполнении требования) задачи, проверить ход и результат решения; выяснить, возможны ли другие результаты решения. Выполнить каждый из перечисленных этапов можно, применив один или несколько приемов, названных выше или сконструированных на их основе самостоятельно.

Часть из перечисленных выше приемов универсальна, т.е. применима к любым задачам, другая часть применима лишь к математическим задачам. Существуют и приемы более узкого назначения — для задач определенного вида. Выбор данного выше набора приемов обусловлен прежде всего результативностью и конструктивностью, т.е. возможностью расчленения на вполне конкретные и доступные освоению детьми операции.

Выделенные приемы, "инструменты" не есть изобретение автора. Они давно используются явно или неявно в опыте, часть из них представлена в описании процессов решения задач, часть (например, приемы проверки) описана мной. В настоящей статье я свела их в один перечень, осмыслила как "инструменты", приемы, операции, которые могут и должны стать не только способами "подсказки" ученикам при решении ими задач, но, прежде всего, предметом специального освоения учащимися.

Возможно и другое вычленение "инструментария" решения задач, как в ТРИЗ⁷, как в работе И. И. Ильасова⁸ и др. источниках. Выделенные приемы доступны учащимся начальной школы и соответствуют традициям русской методической мысли.

Представленные в настоящей статье элементы теории решения задач, их смыслы, содержательное наполнение составляют содержание обучения решению задач и соответствующий взгляд на проблему обучения этому содержанию.

⁶ В начальной школе этот этап должен выполняться только тогда, когда он может быть мотивирован.

⁷ ТРИЗ — теория решения изобретательских задач — разработана Г. С. Альтшуллером в конце 60 — начале 70-х гг., в настоящее время развита им и его многочисленными последователями.

⁸ Ильасов И. И. Система эвристических приемов решения задач. — М., 1992.