

Как рождается величина.

С.Е. ЦАРЕВА,
Новосибирский государственный педагогический университет

Понятие величины - сложное и неоднозначное. Слово *величина* в русском языке имеет несколько значений. Термин *величина* в разных науках отражает разное содержание.

Существует два отличных друг от друга понятия величины: *физическое и математическое*. Точнее, два подпонятия одного общего, отражающие разные стороны одного и того же явления действительности. В физическом понятии величины центральное место занимают качественные характеристики явлений действительности. Именно качественное своеобра-

зие определенных свойств мира, элементов мира отражено в каждой конкретной физической величине: массе, длине, площади, объеме, мощности тока, давлении и т.д. Количественные характеристики служат средством раскрытия характеристик - качественных, средством мощным, необходимым, но лишь средством. Физик поэтому всегда говорит о величине как таковой: о массе, длине и т.п., даже если он сравнивает числовые значения, выполняет операции с ними, исследует их зависимости. Задача физика как раз и состоит в выявлении каче-

ственного своеобразия каждой величины, в разработке способов сравнения (в том числе способов измерения) объектов по каждой величине.

В физике принято такое определение: «Под физической величиной следует понимать характеристику физических объектов или явлений материального мира, общую в качественном отношении множеству объектов или явлений, но индивидуальную для каждого из них в количественном отношении... Физическая величина представляет собой либо обобщенное понятие (например, длина, площадь, объем, масса, вес, сила электрического тока...), либо конкретную величину - индивидуальную характеристику конкретного объекта или явления (например, масса данного вольтметра ...)»¹.

В математическом понятии величины главную роль играют *количественные отношения*. Но так как количественные отношения имеют смысл лишь для одного и того же качества (либо для таких качеств, при количественном изменении одного из которых точно так же меняется и другое), то математика использует (и то лишь иногда) качественные характеристики явлений и объектов действительности как средство объяснения различий в количественных отношениях. В «чистой» математической теории величин качественное своеобразие явлений и объектов отражено лишь в том, что признается существование величин «разного рода».

Математическое понятие величины есть обобщение физического понятия, происшедшее в результате абстрагирования от качественной, содержательной стороны разнообразных свойств. Нетрудно заметить, что в математических определениях главное внимание уделяется свойствам отношений между числами - значениями величин, причем, в определении А. Н. Колмогорова, числовые значения (в физическом смысле) называются *величинами*. С

позиций «чистой» математики такое абстрагирование и упрощение не только оправдано, но и необходимо. В результате теория величин, возникшая как обобщение определенных физических свойств мира, стала моделирующим и структурирующим средством анализа и других сторон мира.

В связи с тем что физическое и математическое понятия величины есть отражение хоть и неразрывно связанных, но разных сторон, разных уровней явлений и объектов, то и язык физического и математического описания различен. Для математика сумма $2 + 3$, где 2 - длина одного отрезка в сантиметрах, а 3 - длина другого отрезка в тех же единицах, есть сумма величин.

Физики же считают, что говорить о сумме $2 + 3$ как о сложении величин неправильно, ошибочно, что $2 + 3$ - это всего лишь *сумма числовых значений величин*.

По моему убеждению, основанному на результатах многолетнего исследования, изучать величины в начальной школе, взяв за основу математическое их толкование, *нельзя*. Математическая величина должна «вырастать» из физической величины. Чтобы понять сущность как самого понятия величины, так и тех сторон мира, которые зафиксированы, отражены в нем, нужно рассмотреть «происхождение» понятий, «прожить» это происхождение, участвовать в «порождении» его знакового выражения². Это необходимо и взрослому, и ребенку, учителю и ученику. *Поэтому я приглашаю учителей «прожить» происхождение, рождение величины вместе со мной.*

Понятие величины исторически возникло из необходимости сравнивать предметы и явления по выделенным свойствам, точнее по количеству одного и того же свойства у разных предметов, явлений. Это, вероятно, и послужило причиной использования в русском языке

для обозначения соответствующего понятия слова *величина*, образованного от древнерусского *вель, велий* - *большой*. «Что такое величина? - писал в начале XX в. русский и советский математик В. Ф. Каган (1869-1953). - Почти во всех классических руководствах по арифметике мы находим следующее определение: «Величина есть все, что может быть больше или меньше». В таком понимании, несомненно, заложена истина. Вспомним хотя бы те величины, которые изучаются в начальной школе: длина, масса, площадь, объем, время, скорость. Смысл каждой из них можно понять, раскрыть только через отношения «равно», «больше», «меньше».

Посмотрите вокруг себя. Какие предметы вы увидели? Какой предмет вам более всего приглянулся?

Посмотрели?.. Сделаю и я то же самое. Так как я сейчас сижу за письменным столом и пишу, то прежде всего я увидела лист бумаги, шариковую ручку в руке, часы-будильник, несколько книг на столе и, конечно же, сам стол. Больше всего мне нравится мой стол: он - полированный, большой, удобный... Что еще могу я о нем сказать? Какие свойства назвать? А у других столов эти свойства есть или нет? А у других предметов? У них все свойства такие же, как у моего стола, или лишь некоторые? Вот сколько вопросов может возникнуть о самом обычном столе!

Рассмотрим некоторые свойства стола. Мой стол большой... Сказала так и подумала: «А в каком смысле большой? По сравнению с какими столами или столом?» Вспомнился стол в зале заседаний Совета Московского педагогического университета. Мой стол по сравнению с ним просто небольшой! Но тут же мелькнула мысль, что тот стол в московском вузе больше моего лишь по длине, а вот по ширине и высоте - он такой же, как мой, а может, больше лишь на самую малость...

Итак, я выделила свойства: *длина, ширина, высота*. Но ширина, высота - это тоже длина, только других сторон! Значит, я назвала только одно свойство - *длина*...

«Так какой же мой стол: большой или маленький?» Этот вопрос лучше было задать так: «Мой стол больше другого стола или меньше?», а еще точнее: Мой стол больше другого стола по длине или меньше, или они равны? Мой стол больше другого стола по длине в другом горизонтальном направлении или меньше, или они равны? Мой стол больше другого стола по длине в вертикальном направлении или меньше, или они равны?» На такие вопросы можно дать уже точные ответы.

Сравнивать, что «больше», «меньше» или «равно», можно лишь в том случае, когда названо свойство, по которому проводится сравнение. Поэтому попытаемся перечислить все свойства стола, какие сумеем выделить: длину (в каждом из бесконечного множества направлений или в одном, двух, ...); площадь поверхности (всей или только крышки стола); объем использованного материала; плотность вещества, из которого он сделан; твердость; гладкость поверхностей (высота и частота микроскопических выступов и неровностей); температура; назначение (для письменных или каких-то других работ); материал, из которого он изготовлен; время, затраченное на изготовление; срок эксплуатации; форма (прямоугольный, овальный, иной); красота; количество ножек; ящичков...

На этом можно остановиться, хотя перечислены далеко не все свойства. А какие свойства смогли бы назвать вы для выбранного вами предмета?

Мы сделали с вами *первый шаг к построению, порождению понятия величины - выделили у предмета его свойства*. Вглядитесь в них внимательно. Могут ли они быть выделены без сравнения нашего предмета (стола) с аналогичными предметами? Очевидно, нет. Любые свойства выделяются, осознаются только в сравнении, только при выявлении сходного и различного. Значит, и в обучении детей *основой формирования понятия величины будет сравнение, выделение свойств*.

Но вернемся к моему столу...

Очевидно, есть и другие предметы, в том числе и столы, которые тоже обладают выделенными свойствами, а есть предметы, у которых из названных свойств есть лишь некоторые.

Масштабная линейка на моем столе тоже деревянная, тоже имеет длину, массу, площадь поверхности, но в отличие от стола она не имеет отдельных составляющих ее частей (если не рассматривать клеточный, молекулярный или атомарный состав).

У будильника есть «ножки», нет ящиков, зато имеются масса, твердость, площадь, объем и т.п. Он тоже сделан из материала, хотя и иного, чем стол.

Шариковая ручка изготовлена из пластмассы. Можно говорить о ее длине, объеме, площади поверхности, твердости, прочности, массе, температуре, назначении, красоте, форме, времени изготовления, времени эксплуатации, цвете, количестве составляющих частей, горючести, плотности материала...

К любому предмету по каждому выделенному свойству мы можем поставить вопросы: «Есть ли это свойство у данного предмета или его нет?», «Какие еще предметы обладают этим свойством?».

Более того, мы можем мысленно (а в некоторых случаях и практически) собрать в одну группу предметы, обладающие каким-то общим для всех свойством. Так, выделение свойств приводит к возможности и необходимости группировки предметов, явлений по некоторым определенным признакам, т.е. к их классификации. Это *второй шаг в образовании понятия величины* - мы не просто увидели в предметах их свойства, но и научились «узнавать» каждое из этих свойств, мысленно (или практически) собрали в группы все предметы, обладающие одним и тем же свойством. Значит, и при изучении величин в школе без такой классификации не обойтись.

Пойдем дальше в поисках величины. После предыдущей работы у меня не просто стол со всеми его свойствами, а группы, в каждой из

которых представлено множество предметов с каким-то общим свойством - одним из того набора, который мы обнаружили в моем письменном столе. Рассмотрим отдельно каждую группу.

Пусть, например, мы собрали в группу все предметы, имеющие цвет. Одинаковы ли они по этому признаку? Конечно, нет. Но можно ли спросить о них: «Порвну ли у них цвета? У кого из них цвета больше (или меньше)?»

В обычном смысле - *нет. Так спрашивать не принято.* Мы можем лишь устанавливать, одинаков ли цвет или неодинаков. Однако известно, что цвет определяется длиной световой волны и степенью отражения. В этом смысле мы могли бы договориться, что цвета в предмете «больше» тогда, когда отражается световая волна большей (или, наоборот, меньшей) длины.

Возьмем теперь группу предметов, имеющих массу. Отношения «больше», «меньше», «равно» можно легко установить между любыми двумя из них, договорившись, что масса того предмета больше, чашка весов с которым опустится ниже.

Если так же рассмотреть все остальные свойства, то выяснится, что для многих из них существует *договоренность*, в каких случаях и каким способом устанавливать, имеет ли предмет этого свойства больше, чем другой, меньше, чем другой, или столько же, сколько и другой.

Описанная выше *процедура установления по выделенному свойству отношений «больше», «меньше», или «равно» между всеми предметами (явлениями, процессами)* - это *третий шаг в образовании понятия величины*. Образно можно о нем сказать: как только все предметы, у которых есть одинаковое свойство, собираются вместе, в одну группу, так между ними начинается спор, у кого этого свойства больше (много), у кого меньше (мало), у кого поровну. Этот спор разрешается с помощью *сравнения*, разного для разных свойств. В результате все предметы занимают

подобающее им место в порядке возрастания или убывания количества определенного свойства. (Дети начинают разрешать эти «предметные споры» на втором, третьем году жизни.)

Два предмета в группе можно сравнить непосредственно³, выполнив определенные практические действия. Например, для сравнения предметов по длине мы можем к одному из них приложить другой или наложить один на другой. Для сравнения по площади, например, поверхностей стола и книги, мы можем книгу положить на стол и сразу станет ясно, площадь какой поверхности больше. Сами же отношения «больше», «меньше», «равно» между предметами, установленные по определенному признаку, обладают, как известно, свойствами рефлексивности, асимметричности, транзитивности⁴. Знание этих свойств значительно облегчает работу с величинами.

Однако мало знать, что один из предметов, например, длиннее другого. Хорошо бы результат сравнения как-то обозначить, чтобы сравнить предметы можно было по этому обозначению, не прибегая ни к каким операциям с самими предметами.

Поступим так. В каждой группе выберем предмет-посредник, с которым по определенному свойству будем сравнивать все другие.

Обозначим количество свойства у этого предмета каким-либо знаком и термином. Например, таким — η , или таким - I, как это принято в римской нумерации, или 1, как это мы привыкли делать. Назвать этот знак можно по-разному: *сигма, ляма, ...* или *ту, айци, единица*. (Обозначение эталона графическим знаком - цифрой и словом - всегда либо произвол того, кто проводит сравнение, либо следствие договоренности между людьми. Это очень важно понять для овладения сутью понятия величины

и для понимания многих других математических понятий.)

Итак, *четвертым шагом в образовании понятия величины будет выбор посредника - эталона, мерки и соответственно - единицы «количества» свойства*. Выберем теперь в каждой группе объекты, у которых соответствующего свойства столько же, сколько и в эталоне, т.е., у которых «единица свойства». Ясно, что процедура выделения будет зависеть прежде всего от качественного своеобразия самого свойства, отраженного в критериях, способах сравнения.

Пусть, например, в группе предметов, обладающих массой, в качестве эталона мы возьмем обыкновенную шариковую ручку. Массу ручки обозначим, например, знаком η и термином «ляма» (можно, конечно, обозначить и общепринятой сейчас цифрой 1 и термином «один» или «единица»), т.е. масса ручки - масса эталона равна η ручки. Это и будет то, что мы называем *единицей массы*.

Чтобы отобрать предметы с такой же массой, нам понадобятся чашечные весы (хотя физики, возможно, использовали бы иные, более совершенные приборы). На одну чашку весов положим свой эталон, а на другую по очереди будем класть каждый из предметов, обладающих массой. В принципе это возможно, хотя практически сейчас это невыполнимо - у нас нет весов. Но тем и хороша математика, что в ней важна принципиальная возможность, а не практическая выполнимость! А потому все процедуры будем выполнять мысленно.

Предметы, которые уравнивают мерку, равны ей по массе, и их массу мы имеем право обозначать тем же знаком и термином, что и массу мерки. Таких предметов, очевидно, найдется много. Это может быть тонкая книжка, другая ручка, кусок ткани и т.п. Массу каждого из этих предметов мы также мо-

³ В огромном числе случаев практическое непосредственное сравнение невозможно. Не приложишь же друг к другу две скалы, чтобы узнать, какая из них выше! Но тем и хороши математика, физика, что можно говорить о принципиальной возможности такого сравнения.

⁴ См.: Сто й л о в а Л. П., Пы ш к а л о А. М. Основы начального курса математики. - М 1988

жем обозначить тем же знаком η , и термином, а чтобы видно было, что взято в качестве мерки, запишем η рч. Читается эта запись так: «Масса предмета равна «ляма ручек», или в переводе на обычный язык: «Масса предмета равна одной ручке». Теперь если на всех таких предметах поставить метку - написать η рч., то в дальнейшем по метке можно, не проводя сравнения, узнавать равные по массе предметы.

Аналогичные рассуждения можно провести и для других свойств величин: длины, площади, объема и т.п.

Мы еще на шаг продвинулись в рассмотрении понятия «величина». Этот, пятый шаг - отбор, «меченые» всех предметов, имеющих столько же свойства, сколько его в мерке (эталоне), и получение возможности использовать в качестве мерки (мерок) любые «меченые» предметы.

Мы выбрали в качестве эталона массы (в качестве мерки) ручку - чистая случайность. Мы могли взять любой другой предмет - стол, линейку, карандаш, веревку и т.п. Точно так же мы совершенно произвольно можем выбрать эталон длины, времени любого другого свойства. Однако если мы хотим, чтобы нас поняли другие люди, мы должны как-то с ними договориться о том, какой предмет взять в качестве мерки.

Теперь в каждой группе с определенным свойством есть «меченые» предметы. О них мы можем сообщить, что в каждом из них η рч. свойства или «ляма ручек свойства», или «один эталон свойства», «единица свойства» (один килограмм массы, один метр длины и т.д., если бы мы выбрали соответствующие мерки). Смысл такого сообщения: в каждом из объектов свойства столько, сколько его в выбранном эталоне.

Получить информацию о количестве свойства в остальных объектах мы уже не можем (кроме сведений, больше или меньше

свойства в каком-либо предмете, чем в эталоне). Поэтому нам необходим способ сравнения объектов, не равных принятой мерке, сводимый к сравнению знаков. Один из путей - составление нового предмета из предметов, равных эталону.

Вновь обратимся к группе объектов с каким-либо одним свойством. Определим в нем эталон, а потом выберем другой предмет, равный ему по данному свойству. Соединим их так, чтобы «количества свойств объединились»⁵. Если это длина, то состыкуем мерки, как показано на рисунке:



«Составной» предмет имеет длину большую, чем у мерки. Обозначим ее каким-нибудь знаком, например: Λ . и назовем любым произвольно взятым словом, допустим «тер». Вы можете придумать свои знаки и названия, можете воспользоваться теми, которые за десятки и сотни тысяч лет выработало человечество, — цифрой 2 и словом *два*. Дети с удовольствием придумают свои знаки и цифры.

Естественно считать, что $\eta < \Lambda$, а $\Lambda > \eta$ и что $\eta + \eta = \Lambda$. Смысл этих записей понятен из предыдущих рассуждений.

Теперь мы можем отобрать все предметы, которые равны этому составному по данному свойству, и сделать на них соответствующие метки. Теперь, имея меченые предметы, можно узнавать о равенстве или неравенстве по меткам, ничего не делая с предметами.

Аналогично можно поступить и в любой другой группе, где выбран эталон (мерка). Отличие будет заключаться в способах получения «составного предмета» и сравнения его с другими.

⁵ Объединение (для некоторых свойств) может быть понято так же, как последовательное повторение одной и той же мерки и «мечение» результата.

Затем к предмету, в котором \aleph , свойства, присоединим еще мерку. Новый «составной» предмет по заданному свойству больше как эталона, так и предыдущего «составного» предмета. Количество свойства у него можно обозначить новым знаком и термином. И так до бесконечности.

Теперь рассмотрим случай, когда какой-нибудь объект меньше мерки или не равен ни одному предмету, составленному из нескольких мерок. Тогда понадобятся дробные обозначения результатов измерения (ведь мерку придется дробить).

Из сказанного следует, что по каждому из свойств в принципе, а практически - по некоторым из них (для которых выработаны критерии сравнения и действия «дробить», «составлять» или «укладывать») можно проводить измерения, т.е. не только непосредственно выявлять различия в количестве свойства, но и обозначать их специальными знаками и словами.

Такое развитие представлений об окружающих нас предметах привело человечество к созданию чисел, к возникновению системы их «называния» и форм записи. Ведь «составлять» новые предметы из мерок и «дробить» мерку можно до бесконечности, а придумать и практически пользоваться бесконечным и даже конечным, но большим количеством знаков и названий невозможно. Между тем все многообразие чисел записывается десятью арабскими цифрами. Оно может быть также записано с помощью любого конечного набора знаков.

Числовые обозначения «количества свойства», иначе - результатов измерения, дают нам возможность оперировать не самими предметами, а ее значениями величин, их характеризующих, на этом же уровне общаться и понимать друг друга, рассчитывать последствия предпринимаемых действий задолго до их практического осуществления.

Итак, *шестой шаг - разработка способа сравнения любых предметов с эталоном (меркой), т.е. систем измерения количественного*

содержания свойств и рационального обозначения результатов измерений.

Если, однако, позволить каждому выбирать мерку, как ему вздумается, то неизбежно получится, что они у всех будут разными, непонятными непосвященным. Не исключено, что избранной единицей измерить некоторые объекты будет весьма затруднительно. Попробуйте, например, выразить в шариковых ручках... массу груженого КамАЗа! Или, наоборот, массу шариковой ручки - в КамАЗах! Так возникает потребность в новых эталонах, новых единицах измерения и задача соотнесения результатов измерений одного и того же объекта по одному и тому же свойству в различных единицах. Решение этой задачи - еще один шаг - *седьмой - в построении понятия величины: введение новых мерок, новых единиц, установление соотношений между ними и старой единицей, договоренность людей об использовании в общих делах одинаковых единиц.*

История развития понятия величины в грубом приближении проходила те же шаги, которые прошли мы, только, конечно, не так прямолинейно и гораздо медленнее. Многообразие величин - это многообразие объектов и свойств реального мира и его изучение без овладения общими способами выделения и измерения самых разных свойств невозможно. Обеспечив детей возможностью «прошагать» от выделения свойств к обобщению качественных и количественных характеристик в понятии величины, к пониманию разных сторон и уровней этого понятия - значит, помочь им понять этот бесконечно загадочный мир событий, вещей, явлений, отношений, в том числе себя как частицу этого мира и как его носителя.

Величины - богатейшее поле для детских открытий, для развития интеллекта, чувств, для формирования экономического мышления и развития речи учащихся. Попытайтесь проникнуть в тайны величин - и искрящиеся радостью познания глаза детей будут вам достойной наградой.