УДК 371

Дахин Александр Николаевич

Доктор педагогических наук, доцент, профессор, Новосибирский государственный педагогический университет, г. Новосибирск. E-mail: dakhin@mail.ru

ШКОЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ЕЁ КОГНИТИВНЫЕ КАРТЫ

В статье рассмотрены вопросы построения когнитивных карт на примере школьного курса математики. Основная цель статьи – представить способы структурирования учебного материала через распространённые операции, использующиеся в продуктивном мышлении: удачные структурные группировки, изоляции, центрирование, структурная транспонируемость и структурная иерархия учебного материала, фрагмент которого представлен на примере решения задач с параметрами. Рассмотрение учебного материала на основе когнитивных карт согласуется с основными положениями Концепции развития математического образования в РФ. Авторский результат связан с предложением вариантов систематизации образовательного процесса через развитие логического мышления, осуществляемое посредством межпредметных связей. Именно в математике как учебной дисциплине содержатся дидактические единицы, способствующие формированию особого стиля мышления, готового для творческого применения в любых исследовательских ситуациях.

Ключевые слова: когнитивная карта, структурная иерархия, универсальные учебные действия, аналитический путь, геометрический путь, задачи с параметром, множество решений.

Dakhin Alexander Nikolayevich

Ph.D, professor, Novosibirsk State pedagogical University, Novosibirsk. E-mail: dakhin@mail.ru

SCHOOL ALGEBRA AND ITS COGNITIVE CARDS

In the article questions of construction of cognitive maps on an example of a school course of mathematics are considered. The main goal of the article is to present ways of structuring the educational material through the common operations used in productive thinking: successful structural groupings, isolation, centering, structural transposability and structural hierarchy of educational material, a fragment of which is represented by solving problems with parameters. The deployment of educational material based on cognitive maps is consistent with the main provisions of the Concept for the Development of Mathematical Education in Russia. The author's result is connected with the proposal of variants of the systematization of the educational process through the development of logical thinking, carried out through inter-subject links. It is in mathematics as a teaching discipline that there are didactic units that contribute to the formation of a special style of thinking, ready for creative application in any research situations.

Keywords: cognitive map, structural hierarchy, universal learning activities, analytical path, geometric path, tasks with a parameter, many solutions.

Учебная дисциплина «Математика» занимает важное место в образовательном пространстве современной российской школы, а также особое положение в науке и национальной культуре. В статье рассматривается проблема, заявленная в «Концепции развития математического образования в Российской Федерации»[1]. На образовательную область «Математика и информатика» возложена особая миссия-цель – систематизировать образовательный процесс в целом через развитие логического мышления посредством межпредметных связей. Заметим, что в математике как учебной дисциплине содержатся дидактические единицы, способствующие формированию особого стиля мышления, готового для творческого применения в любых исследовательских ситуациях. На это в своё время указывал Д. С. Брунер, модифицируя психологические труды У. Найссера и Ж. Пиаже, исследовавший роль интеллекта при обеспечении адаптации индивида через осознание адекватных схем окружающего мира [1; 2]. Именно эти фундаментальные взгляды исследователей когнитивной педагогики составили методологическую основу работы.

В статье предложены некоторые мыслительные приёмы, названные нами когнитивными картами, отработка которых эффективна на уроках математики, но применение универсально при рассмотрении любых исследовательских ситуаций, что делает эти приёмы инновационными. Действительно, удачно составленные когнитивные карты дают качественно новый эффект обучения, т. к. они содержательно наполняют универсальные учебные действия, описанные в современном образовательном стандарте. Это и есть необходимое и достаточное условие признания метода инновационным. Но сначала об этих картах. Впервые они появились в когнитивной психологии.

Основоположник необихевиоризма Эдвард Толмен предложил анализировать структуру мышления и поведение крыс, бегающих по лабиринтам. Впоследствии эту структуру назвали когнитивной картой окружающей обстановки [3, p. 190]. Современного школьника также окружает своеобразная обстановка, хочется верить, что иногда она связана с интеллектуальным и даже креативным напряжением.

Школьная математика способна такое «напряжение» формализовать и технологически оформить в педагогически успешном варианте. Учителю предстоит понять, что причинная или каузальная схема определяет познавательный путь, траекторию размышлений учащегося о возможных причинах какого-то явления, определяющих конкретное следствие, наблюдаемое в исследовательском проекте. Это обеспечивает ученика как субъекта познания средствами к продуцированию причинных атрибуций на основе имеющейся у него информации, иногда ограниченной. У каждого исследователя есть некоторый репертуар мыслительных моделей, активно используемых им для типичного анализа, проводимого по формуле «причина – следствие». Это так называемые каузальные схемы. В школьном курсе алгебры изучается тема «Задачи с параметрами», в рамках которой каузальные схемы отличаются полнотой, и ситуации их применения достаточно легко распознаются. Именно эта тематика даёт структурное понимание проблемной ситуации.

В этих задачах трансформация структуры значительно и даже полностью меняет прежнее видение учеником проблемно-познавательного поля. Переход на новую точку зрения осуществляется спонтанно, через внезапное озарение,

[1] *Концепция* развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. N 2506-р, Москва [Электронный ресурс]. – URL: http:// www.pravo.gov.ru (дата обращения: 27.12.2013).

названное в гештальтпсихологии *инсайтом*. Этот феномен отметил О. Мандельштам, дав школьникам, изучающим математику, надежду на творческий прорыв.

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин
И мнимое рву постоянство
И самосознанье причин.

Акцент ставится на то, что не совсем ясные положения, когнитивные проблемы и следующие из них затруднения следует рассматривать в соответствии с их местом и функцией в общей структуре проблемной математической ситуации. Распространёнными операциями в продуктивном мышлении являются удачные структурные группировки, изоляции, центрирование, структурная транспонируемость и структурная иерархия учебного материала, фрагмент которого мы представим ниже на примере решения задач с параметрами.

Главное в процессе познания – не столько операционально-технологические процессы, направленные на решение уже сформулированной задачи, сколько сама формулировка математической задачи, постановка проблемы в иной форме.

Специальные когнитивные умения начинают формироваться в школьном курсе алгебры, но не получают своего логического завершения, что вполне естественно для любого творческого явления [4]. Для описания таких умений на основе эмпирического обобщение экспериментальных результатов, полученных нами ранее, мы вводим понятие когнитивной карты, что, на наш взгляд, вполне оправдано. [5–8].

В контексте данной статьи примем рабочее определение. Когнитивная карта – это конфигурация, или группировка частей, а также элементов информации в алгебраическую структуру, приводящую к решению учебной задачи. Такие карты мы представим как в обобщённом виде, так и в конкретной исследовательской ситуации решения алгебраических задач с параметрами, широко распространённых в итоговой аттестации выпускников российских школ.

Изложим основные рекомендации для решения таких задач, подготовленных В. Н. Дятловым и представленных нами в педагогической трактовке соответствующих когнитивных карт. Приведённый ниже математический активный поиск дополнит его когнитивный контекст [9, с. 51–53]. Методически такого рода поиск удобно организовывать на основе постановки вопросов, соответствующих ответов на них и выполнения рекомендаций, следующих из этого дискурса.

Вопросы по существу проблемы способствуют постановке цели на каждом шаге решения, который должен быть обоснован. Удачные вопросы позволяют выявить причину, по которой то или иное действие должно быть выполнено. Обобщая опыт, предложим несколько вопросов, а также варианты ответов на них.

Начнём с вопроса, направляющего поиск либо к анализу алгебраических соотношений, либо к исследованию функций.

Какая исследовательская задача ставится для соотношения, фигурирующего в условии? Если речь идёт о наиболее простом описании семейства множеств, т. е. о решении соотношения, занимаемся решением соотношения, ориентируясь на подготовленные типовые варианты когнитивных карт, названные В. Н. Дятловым наблюдениями [9, с. 51].

Речь идет о каких-то обстоятельствах, связанных с этими множествами, полезно поставить вопрос: рассматриваются свойства определяемых соотношениями множеств или взаимодействие таких множеств? Если спрашивается о свойствах семейства множеств, то можно решать соотношение и искать ответ на вопрос в процессе решения. Это редко используемый ход, применяемый только к соотношениям, характеризуемым равенствами, однако полностью исключать его не следует. При изучении взаимодействия семейств множеств важны новые формулировки. Необходим базовый запас ситуаций, с которыми надо уметь работать, и способность переводить задачу с одного «языка» на другой до тех пор, пока не появится и не проявится базовая ситуация, подпадающая под когнитивную карту. Лучше всего использовать такие связанные с множествами формулировки, как включение множеств, их пересечение и т. п.

Далее следует определиться с аналитическим или геометрическим подходами, удобными для исследования. Этот выбор может повлиять такой вопрос: какой подход к задаче лучше: аналитический или геометрический? Геометрический путь предпочтительнее, когда параметр выражается через переменную или переменная через параметр. Таким образом, появляется возможность:

а) использовать графики функций;

б) строить графики семейства функций, участвующих в соотношении;

в) рассматривать сразу обе переменные исходного соотношения и др.

Аналитический путь нередко связан с техническими трудностями, поэтому здесь полезна как психологическая, так и геометрическая поддержка решения задачи и решающего эту задачу.

При анализе количественных характеристик, к примеру, единственности решения или чётности числа решений, возникает следующий вопрос. Каковы особенности участия переменных в соотношении? При ответе на этот вопрос полезно проанализировать свойства входящих в соотношение выражений на предмет выполнения необходимых условий, сужающих множество изучаемых значений параметра до обозримого и доступного для выбора искомых значений. Например, если переменная входит в соотношение чётным образом, а вопрос ставится о нечётности числа решений, то нуль является решением.

Для систем уравнений иногда используется симметрия, а также чётность как основа необходимого анализа условий задачи. Одним из важных средств решения является замена переменных. Она обусловлена либо стремлением к упрощению технических деталей, либо к ожиданию какой-либо качественно новой информации о соотношении, возникающем при решении. К замене надо относиться с большим вниманием, в частности, следить за сопровождающими её ограничителями, как правило, относящимися к области определения.

Отметим несколько частных наблюдений, также претендующих на статус когнитивной карты. При рассмотрении соотношений с одной переменной полезна геометрическая интерпретация, причём как в плоскости «переменная – значение», так и в плоскости «переменная – параметр». При использовании плоскости «переменная – значение» лучше изучить пересечения графиков функций, на плоскости «переменная – параметр» – пересечение графика горизонтальными или вертикальными прямыми в зависимости от того, рассматривается плоскость (x; a) или (a; x). Для неравенств предпочтительнее плоскость «переменная – параметр», т. к. на ней ответы на вопросы получаются на основе одного множества, тогда как при использовании плоскости «переменная – значение» приходится работать с семействами множеств. Система, состоящая из уравнения и неравенства, ориентирована, как правило, на геометрический путь решения. Если уравнение и неравенство содержат одну переменную, то, как и для неравенств, можно использовать либо плоскость «переменная – значение», либо плоскость «переменная – параметр». Если рассматривается система с несколькими переменными, то целесообразнее использовать интерпретацию соотношений на координатной плоскости входящих в неё переменных, обычно (x; y) [9, с. 78–80].

Иногда полезен переход к новым переменным, обусловленный видом соотношений и направленный на их упрощение или выявление новых свойств, недостаточно просматриваемых в исходных переменных. Система, содержащая неравенства с несколькими переменными, анализируется исключительно с помощью геометрической интерпретации. При рассмотрении семейства функций большую роль играет графическая интерпретация. С ней легче просматривается влияние параметра на исследуемое свойство. В целом здесь необходим анализ изменяемости изучаемых свойств в зависимости от параметра.

В заключение заметим, что задачи с параметрами вызывают затруднения у обучающихся именно из-за не проработанной системы методов их решения. Частично этот пробел ликвидируют методические рекомендации В. Н. Дятлова, которые мы назвали когнитивными картами математической культуры школьника [10]. Таким образом, мы рассмотрели сугубо математический пример системности и алгоритмов решения уравнений и неравенств, который относится он к определённой теме задач с параметрами. Однако способ рассуждений, представленный в статье, может обеспечить учащегося универсальными методами исследования, которым учит нас математика как наука об особом языке познания.

Список литературы

1. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. – М.: Международная педагогическая академия, 1994. – 678 с.

2. *Bruner J. S.* Toward a Theory of Instruction. – Cambridge: The Belknap Press of Harvard Univ. Press, 1967. – 176 p.

3. *Tolman E. C.* Cognitive maps in rats and men // Psychological Review. – 1948. – № 55 (4). – P. 189–208.

4. *Жафяров А. Ж.* Реализация технологии внедрения компетентностного подхода в школьном курсе математики // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2017. – № 2. – С. 71–84.

5. *Дахин А. Н., Холина Л. И., Абаскалова Н. П.* Моделирование и неопределённость педагогических результатов // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2015. – № 6. – С. 101–110.

6. *Дахин А. Н., Юрьев К. А.* Формирование метапредметной компетентности учащихся 9-х классов в процессе интеграции изучения физики и математики: учебное пособие / под ред. чл.-корр. РАО, д-ра физ.-мат. наук, проф. А. Ж. Жафярова. – Новосибирск: Изд-во НГПУ, 2016. – 127 с.

7. *Дахин А. Н.* Математика как «живое знание» компетентного школьника // Народное образование. – 2017. – № 3–4 (1461). – С. 149–155.

8. *Дахин А. Н.* Когнитивная гармония математики // Народное образование. – 2017. – № 6–7 (1463). – С. 81–88.

9. *Дятлов В. Н.* Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 7. Задачи с параметрами. – Новосибирск: Издательство Института математики, 2010. – 96 с.

10. *Дятлов В. Н.* Технологии решения задач. Задачи с параметрами. Взаимодействие множеств решений // Математика. 1 Сентября. – 2013. – № 4. – С. 50–57.