ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет»

А. И. Кузьмичев

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–2

Курс лекций для студентов 1 – го курса

Новосибирск 2008

УДК 511(075.8) Печатается по решению
ББК 22.131я73-2 Редакционно-издательского совета НГПУ
К 893

Р е ц е н з е н т ы :

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ СО РАН

М. В. Нещадим

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры МФ НГПУ

Ю. В. Сосновский

Н а у ч н ы й р е д а к т о р :

кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой алгебры и матанализа ИФМИЭО НГПУ

М. П. Тропин

К 893 **Кузьмичев, А. И.** Линейная алгебра–2: курс лекций для студентов 1–го курса математического факультета / А. И. Кузьмичев. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008. – 102 с.

Пособие является второй частью курса лекций по линейной алгебре и входит в серию «Учебно-дидактические комплексы кафедры алгебры». В курс лекций вошли основные темы, изучаемые во втором семестре: «Комплексные числа, «Векторные пространства», «Линейные операторы», «Квадратичные формы». Особое внимание уделяется основным примерам задач, решаемых самыми современными методами. Предназначено для преподавателей и студентов математических специальностей вузов.

УДК 511(075.8)

ББК 22.131я73-2

ТЕМА 5. Комплексные числа

§1. Построение поля комплексных чисел

Определение. *Полем комплексных чисел* $\langle \mathbb{C};\ +, \cdot \rangle$ называется поле, для которого выполняются следующие свойства (аксиомы).

1) Поле действительных чисел $\langle \mathbb{R}; +, \cdot \rangle$ *изоморфно вкладывается в поле комплексных чисел.*

2) В $\mathbb{C}$ *разрешимо уравнение* $x^2 + 1 = 0$, *где 1 и 0 – соответственно единичный и нулевой элементы поля* $\mathbb{C}$.

3) Если $\langle P; +; \cdot \rangle$ *– поле, для которого выполняются условия 1) и 2), то поле* $\langle \mathbb{C}; +; \cdot \rangle$ *изоморфно вкладывается в поле* $\langle P; +; \cdot \rangle$.

Прежде чем перейти к построению поля $\mathbb{C}$ изучим некоторые его свойства. Согласно аксиоме 3, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ – это минимальное расширение поля действительных чисел, в котором разрешимо уравнение $x^2 + 1 = 0$. Решение этого уравнения обозначают i и называют *мнимой единицей.* Таким образом, мнимая единица – это элемент, удовлетворяющий равенству

$$i^2 = -1.$$

Пусть $\overline{R} \subset \mathbb{C}$ — изоморфная копия действительных чисел, которая содержится в $\mathbb{C}$ по аксиоме 1. Так как поле замкнуто относительно сложения и умножения, то для любых $a, b \in \overline{R}$ все элементы вида $a + bi \in \mathbb{C}$. Докажем, что $\mathbb{C}$ исчерпывается элементами этого вида.

Теорема 1. $\mathbb{C} = \left\{ a + b\,i \middle| a, b \in \overline{R} \right\}$.

Доказательство. Пусть

$$\overline{C} = \left\{ a + b\,i \middle| a, b \in \overline{R} \right\}.$$

Тогда $\overline{C} \subseteq \mathbb{C}$. В силу аксиом поля получаем:

$$(a+bi)\cdot(x+yi) = a(x+yi) + bi(x+yi) =$$

$$= ax + a(yi) + (bi)x + (bi)(yi) =$$

$$= ax + (ay)i + (bx)i + (by)\cdot i^2 =$$

$$= (ax - by) + (ay + bx)i \;,$$

$$(a+bi) + (x+yi) = a + bi + x + yi = (a+x) + (b+y)i \,.$$

Из этого следует, что $\overline{C}$ замкнуто относительно сложения и умножения.

Так как $0 = 0 + 0 \cdot i$ и $1 = 1 + 0 \cdot i$, то $0,1 \in \overline{C}$ и будут нейтральными элементами (нулевым и единичным) в $\overline{C}$.

Докажем, что $\overline{C}$ замкнуто относительно взятия противоположного и обратного. По свойствам противоположного, которые выполняются в любом поле, получаем:

$$-(a+bi) = (-a) + (-b)i \in \overline{C}\,.$$

Если $a + bi = 0$ для $a, b \in \overline{R}$ и $b \neq 0$, то $i = -\dfrac{a}{b} \in \overline{R}$ будет решением уравнения $x^2 + 1 = 0$, что противоречит тому, что у этого уравнения нет действительных решений. Если $b = 0$, то и $a = 0$. В результате получилось, что

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0,\; b = 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = 0.$$

Пусть теперь $a+bi \neq 0$, тогда $a^2+b^2 \neq 0$ и обратным для элемента $a+bi$ будет элемент $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i \in \overline{C}$. Действительно,

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)=$$

$$=a\cdot\frac{a}{a^2+b^2}+a\cdot\frac{-b}{a^2+b^2}i+bi\cdot\frac{a}{a^2+b^2}+(bi)\cdot\left(\frac{-b}{a^2+b^2}i\right)=$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}i+\frac{ab}{a^2+b^2}i-\frac{b^2}{a^2+b^2}i^2=$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1.$$

Согласно критерию $\left\langle \overline{C};\, +;\, \cdot \right\rangle$ – подполе поля $\mathbb{C}$, в котором имеет решение уравнение $x^2+1=0$. Согласно свойству минимальности (аксиома 3) $\overline{C}=\mathbb{C}$. ▲

Определение. Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$, где $a,b\in\overline{R}$ и $i^2=-1$, называется *алгебраической формой записи комплексного числа* z.

Теорема 2 (о действиях с комплексными числами в алгебраической форме). *Для любых комплексных чисел* $a+bi,\ \ x+yi$ *выполняются следующие свойства.*

1) $a+bi=x+yi \quad\Leftrightarrow\quad a=b,\ x=y$ *(отношение равенства);*

2) $(a+bi)+(x+yi)=(a+x)+(b+y)i$ *(сложение);*

3) $(a+bi)\cdot(x+yi)=(ax-by)+(ay+bx)i$ *(умножение;.*

4) $-(a+bi)=(-a)+(-b)i$ *(взятие противоположного);*

5) $\left(a+bi\right)^{-1}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{-b}{a^2+b^2}i, \quad a+bi\neq 0$ *(взятие обратного).*

Доказательство. 1) Если $a+bi=x+yi$, то $\left(a-x\right)+\left(b-y\right)i=0$. Согласно замечанию в теореме 1, тогда $\left(a-x\right)=0$ *и* $\left(b-y\right)=0$ или $a=x,\ b=y$.

Свойства 2)–5) были доказаны в теореме 1.

По теореме 1 определение поля комплексных чисел можно переформулировать следующим образом.

Определение. Полем комплексных чисел $\left\langle \overline{C};\ +;\ \cdot\right\rangle$ называется поле, для которого выполняются следующие свойства (аксиомы):

1. В $\mathbb{C}$ содержится подполе $\overline{\mathrm{R}}$, изоморфное полю действительных чисел.

2. В $\mathbb{C}$ существует такой элемент i, что $i^2=-1$.

3. Для всякого $z\in\mathbb{C}$ существуют такие $a,b\in\overline{R}$, что $z=a+bi$.

Теперь переходим к доказательству существования поля комплексных чисел. Для этого построим поле, удовлетворяющее аксиомам 1)-3) из определения. При построении будем пользоваться свойствами из теоремы 2, т.к. они обязаны выполняться в поле комплексных чисел.

Теорема 3. *Поле комплексных чисел существует.*

Доказательство. Зададим множество $\mathbb{C}$ как множество всех упорядоченных пар действительных чисел $\mathbb{C} = \{(a;\ b)\ |a, b \in \mathbb{R}\}$. Равенство упорядоченных пар определяем как обычно:

$$(a;\ b) = (x; y) \Leftrightarrow \begin{cases} a = x, \\ b = y. \end{cases}.$$

На множестве $\mathbb{C}$ зададим сложение и умножение:

$$(a;\ b) + (x;\ y) = (a + x;\ b + y),$$

$$(a;\ b) \cdot (x;\ y) = (ax - by;\ ay + bx)$$

(см. теорему 2).

1) Докажем, что *алгебра* $\langle \mathbb{C};\ +;\ \cdot \rangle$ *является полем, в котором нулевым элементом будет* $\mathbf{0} = (0;\ 0)$, *а единичным* – $\mathbf{1} = (1;\ 0)$ *, причём в* $\mathbb{C}$ *разрешимо уравнение* $x^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Практически все аксиомы поля проверяются по определению. Поэтому проверим выполнение части аксиом, для остальных доказательство аналогично.

Коммутативность сложения:

$$(a;\ b) + (x;\ y) = (a + x;\ b + y) = (x + a;\ y + b) = (x;\ y) + (a;\ b)\ .$$

$\mathbf{0} = (0; 0)$ – нейтральный (нулевой) элемент по сложению:

$$(a;\ b) + \mathbf{0} = (a;\ b) + (0;\ 0) = (a + 0;\ b + 0) =$$

$$= (a;\ b) = (0 + a;\ 0 + b) = (0;\ 0) + (a; b) = \mathbf{0} + (a;\ b).$$

Коммутативность умножения:

$$(a;\ b) \cdot (x;\ y) = (ax - by;\ ay + bx),$$

$$(x;\ y)\cdot(a;\ b)=(xa-yb;\ xb+ya)=$$

$$=(ax-by;\ ay+bx)=(a;\ b)\cdot(x;\ y).$$

Ассоциативность умножения:

$$\big((a;\ b)\cdot(x;\ y)\big)\cdot(u;\ v)=(ax-by;\ ay+bx)\cdot(u;\ v)=$$

$$=\big((ax-by)\cdot u-(ay+bx)\cdot v;\ \ (ax-by)\cdot v+(ay+bx)\cdot u\big)=$$

$$=(axu-bxv-byu-ayv;\ axv+ayu+bxu-byv),$$

$$(a;\ b)\cdot\big((x;\ y)\cdot(u;\ v)\big)=(a;\ b)\cdot(xu-yv;\ xv+yu)=$$

$$=\big(a\cdot(xu-yv)-b\cdot(xv+yu);\ a\cdot(xv+yu)+b\cdot(xu-yv)\big)=$$

$$=(axu-ayv-bxv-byu;\ axv+ayu+bxu-byv)=$$

$$=\big((a;\ b)\cdot(x;\ y)\big)\cdot(u;\ v).$$

Существование единичного элемента:

$$(a;\ b)\cdot\mathbf{1}=(a;\ b)\cdot(1;\ 0)=(a\cdot 1-b\cdot 0;\ a\cdot 0+b\cdot 1)=(a;\ b).$$

Существование обратного элемента.

Заметим, что $(a;\ b)\neq(0;\ 0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\neq 0\\ b\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow a^2+b^2\neq 0.$

Докажем, что $(a;\ b)^{-1}=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2};\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right).$

Действительно,

$$(a;\ b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)==\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{b\cdot(-b)}{a^2+b^2};\frac{b\cdot a}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2};\frac{0}{a^2+b^2}\right)=(1;0)=\mathbf{1}.$$

Все аксиомы поля выполняются, поэтому $\langle \mathbb{C};\ +;\ \cdot\rangle$ – поле.

Так как

$$(0;\ 1)^2+\mathbf{1}=(0;\ 1)\cdot(0;\ 1)+(1;\ 0)=(0\cdot 0-1\cdot 1;\ 0\cdot 1+1\cdot 0)+(1;\ 0)=$$

$$=(-1;\ 0)+(1;\ 0)=(0;\ 0)=\mathbf{0},$$

$$(0;\ -1)^2+\mathbf{1}=(0;\ -1)\cdot(0;\ -1)+(1;\ 0)=$$

$$=\left(0\cdot 0-(-1)\cdot(-1);\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0\right)+(1;\ 0)=$$

$$=(-1;\ 0)+(1;\ 0)=(0;\ 0)=\mathbf{0},$$

то элементы поля $(0;\ -1),\ (0;\ 1)$ являются решениями уравнения $x^2+\mathbf{1}=\mathbf{0}$.

Докажем вложимость поля действительных чисел $\mathbb{R}$ в поле $\mathbb{C}$. Для этого выделим в $\mathbb{C}$ подполе, которое изоморфно полю $\mathbb{R}$. Пусть $\overline{R}=\left\{(a;\ 0)\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\right\}$.

2). Докажем, что $\langle \overline{R};\ +;\ \cdot\rangle$ *является подполем, изоморфным полю действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Так как

$$(a;\ 0)+(b;\ 0)=(a+b;\ 0)\ \text{и}$$

$$(a;\ 0)\cdot(b;\ 0)=(a\cdot b-0\cdot 0;\ a\cdot 0+0\cdot b)=(ab;\ 0),$$

то $\overline{R}$ замкнуто относительно сложения и умножения комплексных чисел.

$$\mathbf{1}=(1;0),\ \mathbf{0}=(0;0)\in\overline{R}.$$

Проверим замкнутость относительно взятия противоположного и обратного.

Если $z=(a;\ 0)\in\overline{R}$, то $-z=(-a;\ 0)\in\overline{R}$. Действительно,

$$(a;\ 0)+(-a;\ 0)=(a-a;\ 0)=(0;\ 0)=\mathbf{0}.$$

Если $z=(a;\ 0)\neq 0$, $(a\neq 0)$, то $z^{-1}=\left(\dfrac{1}{a};\ 0\right)\in\overline{R}$. Действительно,

$$(a;\ 0)\cdot\left(\frac{1}{a};\ 0\right)=\left(a\cdot\frac{1}{a}-0\cdot 0;\ a\cdot 0+0\cdot\frac{1}{a}\right)=(1;\ 0)=\mathbf{1}.$$

Согласно критерию подполя, $\left\langle\overline{R};\ +;\ \cdot\right\rangle$– подполе поля комплексных чисел.

Докажем, что поле действительных чисел изоморфно данному полю. Пусть $a\in\mathbb{R}$. Определим правило f из $\mathbb{R}$ в $\overline{R}$ следующим образом: $f(a)=(a;\ 0)$. Тогда f – взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на $\overline{R}$.

Более того, для любых $a,b\in\mathbb{R}$ имеем:

$$f(a+b)=(a+b;\ 0)=(a;\ 0)+(b;\ 0)=f(a)+f(b),$$

$$f(a\cdot b)=(a\cdot b;\ 0)=(a;\ 0)\cdot(b;\ 0)=f(a)\cdot f(b.)$$

Все свойства изоморфизма выполняются, поэтому $\overline{R}$ изоморфно полю действительных чисел $\mathbb{R}$.

3. Докажем, что *для всякого* $z\in\mathbb{C}$ *существуют такие* $a,b\in\overline{R}$*, что* $z=a+bi$.

Положим $z=(x;\ y)\in\mathbb{C}$. Как было показано выше $i=(0;\ 1)$. Рассмотрим $a=(x;\ 0)$, $b=(y;\ 0)\in\overline{R}$. Тогда имеем следующее:

$$z=(x;\ y)=(x;\ 0)+(0;\ y)=(x;\ 0)+(y;\ 0)\cdot(0;\ 1)=a+bi. \blacktriangle$$

N.B. В дальнейшем комплексные числа в основном будут рассматриваться в *алгебраической форме*

$$z=a+bi,$$

а элементы поля $(a;\ 0)\in\overline{R}$ будут отождествляться с соответствующими им действительными числами $a\in\mathbb{R}$.

Замечания. 1) *Комплексные числа можно построить* и в других видах, например, *в виде квадратных матриц* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$, *с обычными операциями сложения и умножения матриц.*

2) *Обратный элемент к числу* $a+bi\neq 0$ *можно находить умножением числителя и знаменателя дроби* $\dfrac{1}{a+bi}$ *на элемент* $a-bi$:

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{1\cdot(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=$$

$$=\frac{a-bi}{a^2-abi+abi-b^2i^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Определение. *Сопряжённым* к комплексному числу $z=a+bi$ называется комплексное число $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$. *Действительной частью* комплексного числа $z=a+bi$ называется действительное число $\operatorname{Re} z=a$, *мнимой частью* – действительное число $\operatorname{Im} z=b$, *модулем* – неотрицательное действительное число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Теорема 4 (о свойствах сопряжённого). *Для любых комплексных чисел* $z,\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ *выполняются свойства:*

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$*;*

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

3) $\overline{\overline{z}} = z$;

4) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$;

5) $z = a + b \cdot i \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} \iff \operatorname{Im} z = b = 0$.

Доказательство. Пусть $z = a + bi,\ z_1 = x + yi,\ z_2 = u + vi$, где $a, b, x, y, u, v \in R$. Тогда

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x + yi) + (u + vi)} = \overline{(x + u) + (y + v)i} =$$

$$= (x + u) - (y + v)i = (x - yi) + (u - vi) = \overline{x + yi} + \overline{u + vi} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x + yi) \cdot (u + vi)} = \overline{(xu - yv) + (xv + yu)i} =$$

$$= (xu - yv) - (xv + yu)i = (x - yi) \cdot (u - vi) =$$

$$= \left(\overline{x + yi}\right) \cdot \left(\overline{u + vi}\right) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$$

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = \overline{a + (-b)i} = a - (-b)i = a + bi = z;$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot \overline{(a + bi)} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R},$$

причём $a^2 + b^2 \geq 0$;

$$z = a + bi \in \mathbb{R} \iff z = a + 0 \cdot i = a - 0 \cdot i = \overline{z} \iff b = \operatorname{Im} z = 0 . \blacktriangle$$

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Свойства модуля

Так как

$$a + bi = x + yi \iff \begin{cases} a = x, \\ b = y, \end{cases}$$

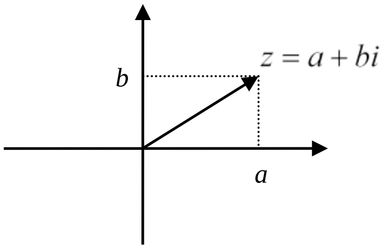

Рис. 1

то с каждым комплексным числом $z = a + bi$ можно взаимно однозначно связать точку $M(a;\, b)$ на координатной плоскости с абсциссой a и ординатой b. Отождествляя точки плоскости с соответствующими комплексными числами, получим *комплексную плоскость*, в которой ось OX называется *действительной* осью, а ось OY – *мнимой.* При изображении комплексного числа $z = a + bi$ на комплексной плоскости его действительную часть $\operatorname{Re} z = a$ откладываем на действительной оси, а мнимую часть $\operatorname{Im} z = b$ – на мнимой.

Радиус-вектором комплексного числа $z = a + bi$ называется вектор с началом в начале координат и концом в точке, изображающей комплексное число z (см. рис. 1).

Комплексному числу $z = 0 + 0 \cdot i = \mathbf{0}$ соответствует начало координат и нулевой радиус-вектор. Легко видеть, что $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – это расстояние от начала координат до точки z на комплексной плоскости или длина соответствующего радиус-вектора, а сложению комплексных чисел соответствует сложение их радиус-векторов по правилу параллелограмма.

Комплексные числа вида bi, где $b \in \mathbb{R}$, называются *чисто мнимыми* при $b \neq 0$. Действительные комплексные числа изображаются на действительной оси, а чисто мнимые – на мнимой оси.

Теорема 5 (свойства модуля комплексных чисел). *Если* $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *и* $a \in \mathbb{R}$, *то выполняются следующие свойства:*

1) $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0; \end{cases}$

2) $|z|^2 = z \cdot \overline{z};$

3) $|z| = 0 \iff z = 0;$

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$

5) если $z \neq 0$, то $\left|z^{-1}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|};$

6) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$

7) $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|.$

Доказательство.

1) $|a| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

2) $|z|^2 = |a + bi|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z}.$

3) $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff$

$$\iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0.$$

4) $|z_1 \cdot z_2| = |(x + yi)(u + vi)| = |(xu - yv) + (xv + yu)i| =$

$$= \sqrt{(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2} =$$

$$= \sqrt{x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2};$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{x^2u^2 + y^2u^2 + x^2v^2 + y^2v^2}.$$

5) $\left|z^{-1}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} + \frac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} == \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Если* $z_2 \neq 0$ *, то* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

6) Докажем сначала, что $|z+1| \leq |z| + 1$. Действительно,

$$|z+1|^2 = (z+1)\overline{(z+1)} = (z+1)\left(\overline{z}+1\right) = z \cdot \overline{z} + z + \overline{z} + 1 =$$

$$= |z|^2 + 2a + 1 \leq |z|^2 + 2|z| + 1 = \left(|z|+1\right)^2,$$

т.к. для $z = a + bi$ выполняются свойства:

$$z + \overline{z} = 2a \text{ и } |z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq a .$$

В результате получилось, что $|z+1|^2 \leq \left(|z|+1\right)^2$ и т.к. $|z|, |z+1| \geq 0$, то

$$|z+1| \leq |z| + 1.$$

Теперь докажем неравенство 6) в общем случае.

Если $z_2 = 0$, то $|z_1 + z_2| = |z_1 + 0| = |z_1| + 0 \leq |z_1| + |z_2|$.

Если $z_2 \neq 0$, то

$$|z_1 + z_2| = \left|z_2\left(\frac{z_1}{z_2} + 1\right)\right| = |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2} + 1\right| \leq |z_2|\left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 1\right) = |z_1| + |z_2|.$$

7) Так как $z_1 = \left(z_1 - z_2\right) + z_2$, то

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2|. \;\blacktriangle$$

При решении задач с модулем полезно учитывать геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = a + bi,\ z_2 = x + yi$. Докажем, что *модуль разности* $|z_1 - z_2|$ *равен расстоянию между точками* $A_1(a;\, b)$ *и* $A_2(x;\, y)$ *на комплексной плоскости.* Действительно:

$$|z_1 - z_2| = |(a - x) + (b - y)i| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2}\,.$$

§2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Определение. *Аргументом* комплексного числа $z = a + bi$ называется угол между положительным направлением действительной оси OX и радиус-вектором числа *z*.

Замечания. Аргумент числа $z = 0 + 0 \cdot i$ не определён. В остальных случаях аргумент существует, но определён с точностью до 2π. *Главным аргументом* комплексного числа z называется тот аргумент φ, который находится в пределах от 0 до 2π: $0 \le \varphi < 2\pi$. Он обозначается $\arg z$. Произвольный аргумент обозначается $Arg\ z$ и, как отмечено выше,

$$Arg\ z = \arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

В дальнейшем будет использоваться следующий факт из тригонометрии:

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, *существует* $\varphi \in \mathbb{R}$, *для которого выполняются условия:*

$$\begin{cases} \alpha = \cos\varphi, \\ \beta = \sin\varphi. \end{cases}$$

Если добавить условие $0 \le \varphi < 2\pi$, *то такое* φ *единственно.*

Теорема 6 (о существовании тригонометрической формы). *Для любого числа* $z \in \mathbb{C}$, $z \ne 0$, *существует единственная пара действительных чисел* φ, r, *удовлетворяющая условиям:*

1) $r > 0$,

2) $0 \le \varphi < 2\pi$,

3) $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Доказательство. *Существование.*

Пусть $0 \ne z = a + bi \iff a^2 + b^2 \ne 0$. Тогда

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0 \text{ и}$$

$$z = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right) = = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, а аргумент φ с условиями

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

существует по приведённому выше утверждению, т.к.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Единственность.

Если $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = t \cdot (\cos\psi + i\sin\psi)$, то

$$|z| = |r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)| = |r| \cdot |\cos\varphi + i\sin\varphi| = = r \cdot \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = r .$$

Аналогично, $|z| = t$. Значит, $t = r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Тогда

$\cos\varphi + i\sin\varphi = \cos\psi + i\sin\psi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \cos\psi, \\ \sin\varphi = \sin\psi \end{cases} \Leftrightarrow \psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Если при этом $0 \le \varphi,\ \psi < 2\pi$, то $\varphi = \psi$. ▲

Замечание. В общем случае

$$z = r \cdot (\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)),$$

где $k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \arg z$.

Определение. *Тригонометрической формой* ненулевого комплексного числа $z = a + bi$ называется представление его в виде $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Если $z = 0$, то положим $0 = 0 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ – произвольное.

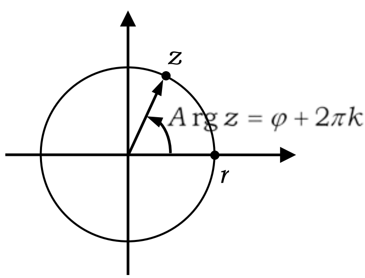

Рис.2

Замечание. По тригонометрической форме ненулевое комплексное число $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ однозначно изображается на комплексной плоскости: это пересечение окружности радиуса r с центром в начале координат и луча, выходящего из начала координат и составляющего угол φ с положительным направлением действительной оси (см. рис.2).

Теорема 7 (о действиях с комплексными числами в тригонометрической форме). *Для любых комплексных чисел* $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *и* $u = t\cdot(\cos\psi + i\sin\psi)$*, где* $r, t, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ *и* $r, t \ge 0$*, выполняются следующие свойства.*

1) $z\cdot u = (r\cdot t)\cdot\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$.

2) Если $z \ne 0$*, то* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\cdot\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$.

3) Если $z \ne 0$*, то* $\dfrac{u}{z} = \dfrac{t}{r}\cdot\left(\cos(\psi-\varphi) + i\sin(\psi-\varphi)\right)$.

4) $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ *для любого натурального числа n.*

5) $z^n = \left(r^n\right)\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ *для любого натурального числа n (формула Муавра).*

Доказательство.

1) $z\cdot u = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)\cdot\left(t(\cos\psi + i\sin\psi)\right) =$

$$= (r\cdot t)\cdot\left((\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot(\cos\psi + i\sin\psi)\right) =$$

$$= (r\cdot t)\cdot\left(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)i\right) =$$

$$= (r\cdot t)\cdot\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right).$$

(по формулам косинуса суммы и косинуса разности)

2) Пусть $z \ne 0$, то $r \ne 0$ и

$$\left(\frac{1}{r}\cdot\left(\cos\left(-\varphi\right)+i\sin\left(-\varphi\right)\right)\right)\cdot\left(r\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)\overset{1)}{=}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\cdot r\right)\cdot\left(\cos\left(-\varphi+\varphi\right)+i\sin\left(-\varphi+\varphi\right)\right)=1\cdot\left(\cos 0+i\sin 0\right)=1,$$

т.е. $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\cdot\left(\cos\left(-\varphi\right)+i\sin\left(-\varphi\right)\right)$. В силу единственности обратного элемента получаем требуемое утверждение.

3) $$\frac{u}{z}=u\cdot z^{-1}\overset{2)}{=}=\left(t\cdot\left(\cos\psi+i\sin\psi\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\left(\cos\left(-\varphi\right)+i\sin\left(-\varphi\right)\right)\right)\overset{1)}{=}$$

$$=\frac{t}{r}\cdot\left(\cos\left(\psi-\varphi\right)+i\sin\left(\psi-\varphi\right)\right).$$

4) Индукция по n, начиная с $n=2$.

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^2=\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=$$

$$=\cos\left(\varphi+\varphi\right)+i\sin\left(\varphi+\varphi\right)=\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi.$$

Пусть утверждение верно для всех натуральных чисел $2\le k<n$. Тогда для $k=n$:

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^{n-1}\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=$$

$$=\left(\cos\left((n-1)\cdot\varphi\right)+i\sin\left((n-1)\cdot\varphi\right)\right)\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=$$

$$=\left(\cos\left((n-1)\varphi+\varphi\right)+i\sin\left((n-1)\varphi+\varphi\right)\right)=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

5) $$z^n=\left(r\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=\left(r^n\right)\cdot\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=$$

$$=r^n\cdot\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right).\ \blacktriangle$$

Следствие. $\arg\left(z\cdot u\right)=\arg z+\arg u+2\pi k$, где $k=0$ или $k=-1$.

Извлечение корней n-й степени из комплексных чисел

Определение. *Корнем n-й степени* $(n \in \mathbb{N})$ из комплексного числа z называется комплексное число α такое, что $\alpha^n = z$.

Теорема 8 (о корнях n-й степени из 1). *Существует ровно n различных комплексных корней n-й степени из 1, которые находятся по формулам*

$$u_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Заметим, что

$$(u_k)^n = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = 1,$$

т.е. все числа u_k являются корнями n-й степени из 1. Так как аргументы $0 \le \frac{2\pi \cdot 0}{n}, \frac{2\pi \cdot 1}{n}, \ldots, \frac{2\pi \cdot (n-1)}{n} < 2\pi$ и все различны, то и числа u_k все различны при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Докажем, что если u – комплексный корень n-й степени из 1, то u совпадает с одним из чисел u_k. Пусть $u^n = 1$ и $u = z \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Тогда $\left|u^n\right| = |1|$, $|u|^n = 1$ и $|u| = 1$, т.е. $r = 1$ и $u = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

$$u^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi = 1 = \cos 0 + i\sin 0.$$

Значит,

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = \cos 0 + i\sin 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos n\varphi = \cos 0, \\ \sin n\varphi = \sin 0 \end{cases} \iff n\varphi = 0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \iff \varphi = \frac{2\pi k}{n},$$

и если $0 \le \varphi < 2\pi$, то $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т.е. $u = u_k$ для некоторого $k = 0, 1, \ldots, n-1$. ▲

Обозначение. $K_n = \left\{ \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1 \right\}$ *– множество всех корней n-й степени из 1.*

Пример. Найти все корни третьей степени из 1.

По условию $n = 3$, $k = 0, 1, 2$.

$$k = 0 : u_0 = \cos\frac{2\pi \cdot 0}{3} + i\sin\frac{2\pi \cdot 0}{3} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 .$$

$$k = 1 : u_1 = \cos\frac{2\pi \cdot 1}{3} + i\sin\frac{2\pi \cdot 1}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i .$$

$$k = 2 : u_2 = \cos\frac{2\pi \cdot 2}{3} + i\sin\frac{2\pi \cdot 2}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i .$$

Следствие. *Все n различных комплексных корней n-й степени из 1 можно изобразить точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат и с одной из вершин в точке $M(1; 0)$, соответствующей корню u_0.*

Это утверждение следует из того, что

1) $|u_k| = 1$, т.е. все корни u_k расположены на единичной окружности,

2) число $u_0 = 1$ соответствует точке $M(1; 0)$,

3) угол между радиус-векторами соседних корней u_k и u_{k+1} равен $\dfrac{2\pi \cdot (k+1)}{n} - \dfrac{2\pi k}{n} = \dfrac{2\pi}{n}$.

Теорема 9 (о корнях n-й степени из комплексного числа). *Существует ровно n различных комплексных корней n-й* *степени из комплексного числа* $z \neq 0$, $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *которые находятся по формулам*

$$\alpha_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Заметим, что $\alpha_k = \alpha_0 \cdot u_k$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и u_k – корень n-й степени из 1. Значит, все α_k различны и

$$\alpha_k{}^n = (\alpha_0 \cdot u_k)^n = \alpha_0{}^n \cdot u_k{}^n = \left(\sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\right)^n \cdot 1 =$$

$$= |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = z,$$

т.е. числа α_k являются корнями n-й степени из z.

Если же $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\alpha^n = z$, то

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^n = \frac{\alpha^n}{\alpha_0{}^n} = \frac{z}{z} = 1.$$

Поэтому $\dfrac{\alpha}{\alpha_0} \in K_n = \{u_0; u_1; \ldots; u_{n-1}\}$ и $\alpha = \alpha_0 \cdot u_k = a_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. ▲

Следствие. *Корни n-й степени из числа* $z \neq 0$ *можно изобразить точками, расположенными в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса* $r = \sqrt[n]{|z|}$ *с центром в начале координат.*

Пример. Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни 4-й степени из комплексного числа (см.рис.3)

$$z = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)i}{1 + i}.$$

Имеем

$$z=\frac{\left(\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\sqrt{3}-i=\sqrt{3}+(-1)\,i\,,$$

$$a=\sqrt{3},\quad b=-1,\ \ |z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2\,.$$

Решаем систему $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\varphi=-\dfrac{1}{2},\\ 0\le\varphi<2\pi,\end{cases}$

$\varphi=\dfrac{11\pi}{6}$ и $z=2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. Затем применяем формулу нахождения α_k

$$\alpha_0=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{24}+i\sin\frac{11\pi}{24}\right),$$

$$\alpha_1=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{23\pi}{24}+i\sin\frac{23\pi}{24}\right),$$

$$\alpha_2=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{35\pi}{24}+i\sin\frac{35\pi}{24}\right),$$

$$\alpha_3=\sqrt[4]{2}\cdot\left(\cos\frac{47\pi}{24}+i\sin\frac{47\pi}{24}\right).$$

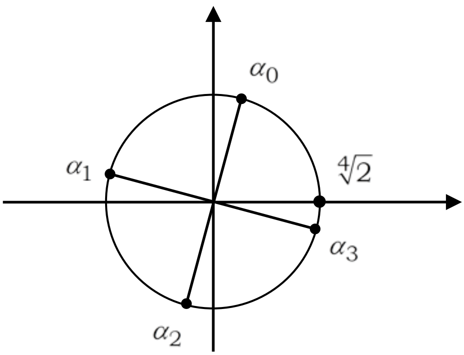

Рис.3

Разница между аргументами соседних корней $\dfrac{12\pi}{24}=\dfrac{\pi}{2}$.

ТЕМА 6. АБСТРАКТНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Основные определения и простейшие свойства

Арифметическое векторное пространство является частным случаем более общего понятия векторного пространства. Рассмотрим основные определения и обозначения.

Пусть V – непустое множество, а P – некоторое поле. Элементы V будем называть *векторами*, а элементы P – *скалярами.*

V называется векторным (*линейным*) *пространством над полем P*, если на нём заданы операция сложения векторов и операция умножения векторов на скаляры и выполняются следующие свойства (аксиомы).

1) $\langle V;+\rangle$ – коммутативная (абелева) группа, т.е. сложение коммутативно, ассоциативно, существует нейтральный элемент θ и для любого $a \in V$ существует противоположный элемент $-a \in V$.

2) Для любых векторов $a, b \in V$, скаляров $\alpha, \beta \in P$:

а) $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$,

б) $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$,

в) $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$,

г) $1 \cdot a = a$.

Замечание. Так как $\langle V; +\rangle$ – абелева группа, то для V выполняются все свойства группы. В частности, при сложении векторов можно не ставить скобки; вектор θ

определён однозначно; для любого вектора a однозначно определён противоположный ; однозначно определён вектор $b = a + \ -b$, а так же другие свойства групп.

Примеры.

1) Множество всех матриц размерности $k \times n$ с элементами из поля P образует векторное пространство над полем P.

2) Множество всех многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

3) Множество всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ с операциями:

а) сложение функций $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

б) умножение функции на скаляр $(\lambda \times f)(x) = \lambda \times f(x)$,

образует векторное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

4) Множество всех комплексных чисел $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$.

Теорема 10 (о простейших свойствах векторных пространств). *Для любых векторов* $, b, a_1, a_2, \ ., a_k \quad V$ *и скаляров* $\alpha, \beta, \ _1, a_2, \ ., a_k \quad P$ *выполняются следующие свойства.*

1) Если $a + b = a$ *, то* $b = \theta$ *.*

2) Если $a + b = \theta$ *, то* $b = -a$ *.*

3) $0 \times a = \theta, \ \alpha \times \theta \ = \theta$ *.*

4) $(-1) \times a = -a$ *.*

5) Если $\alpha \times a \ = \theta$ *, то* $\alpha = 0$ *или* $a = \theta$ *.*

6) Если $\alpha \times a = \alpha \cdot b$ и $\alpha \neq 0$ *, то* $a = b$ *.*

7) Если $\alpha \times a = \beta \cdot a$ и $a \neq \theta$ *, то* $\alpha = \beta$ *.*

8) $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) \times a = \alpha_1 \times a + \alpha_2 \times a + \ldots + \alpha_k \times a$ *и*

$$\alpha \times (a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = \alpha \times a_1 + \alpha \times a_2 + \ldots + \alpha \times a_k .$$

Доказательство. Свойства 1) и 2) следуют из того, что $\langle V;+\rangle$ – группа.

3) Заметим, что

$$0 \times a + a = 0 \times a + 1 \times a = (0+1) \times a = 1 \times a = a ,$$

т.е. $0 \times a + a = a$. Тогда по свойству 1) получаем, что $0 \times a = \theta$. Аналогично $\alpha \times \theta + \alpha \times a = \alpha \times (\theta + a) = \alpha \times a$, т.е. $\alpha \times \theta + \alpha \times a = \alpha \times a$ и $\alpha \times \theta = \theta$.

4) $a + (-1) \times a = 1 \times a + (-1) \times a = (1 + (-1)) \times a = 0 \times a = \theta$.

Значит, $(-1) \times a = -a$.

5) Пусть $\alpha \times a = \theta$ и $\alpha \neq 0$. Умножив обе части равенства на $\dfrac{1}{\alpha}$, получим

$$\frac{1}{\alpha} \times (\alpha \times a) = \frac{1}{\alpha} \times \theta , \ \left(\frac{1}{\alpha} \times \alpha\right) \times a = \theta , 1 \times a = \theta, \quad a = \theta .$$

6) Пусть $\alpha \times a = \alpha \times b$. Умножив обе части равенства на α^{-1}, получим $a = b$.

7) Пусть $\alpha \times a = \beta \times a$. Тогда $\alpha \times a - \beta \times a = \theta, \quad (\alpha - \beta) \times a = \theta$ и т.к. $a \neq \theta$, то $(\alpha - \beta) = 0$ и $\alpha = \beta$.

8) Доказывается индукцией по k, начиная с $k = 2$. ▲

Линейная выра. аемость. Линейная зависимость и независимость

Определения. *Линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in P$ называется вектор $\alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k \in V$.

Последовательностью векторов векторного пространства V над полем P называется непустая упорядоченная совокупность векторов из V.

Вектор $b \in V$ *линейно выражается* через последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из V, если существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in P$ такие, что

$$b = \alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_k \times a_k .$$

Векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ и вектора $b \in V$ называется уравнение вида

$$b = x_1 \times a_1 + x_2 \times a_2 + \ldots + x_k \times a_k .$$

Однородным векторным уравнением последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$ называется уравнение вида

$$x_1 \times a_1 + x_2 \times a_2 + \ldots + x_k \times a_k = \theta .$$

Замечание. Если векторное уравнение $b = x_1 \times a_1 + x_2 \times a_2 + \ldots + x_k \times a_k$ имеет решение, то вектор b линейно выражается через последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Однородное векторное уравнение для любой последовательности всегда имеет по крайней мере одно решение – нулевое: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Определение. Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно независимой (ЛНЗ)*, если её однородное векторное уравнение имеет единственное нулевое решение, и *линейно зависимой (ЛЗ),* если однородное векторное уравнение этой последовательности имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Другими словами, если для последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ найдутся не все равные нулю скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta$, то данная последовательность линейно зависима. Если же равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \theta$ возможно лишь для $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то последовательность линейно независима; и наоборот.

Как и для арифметических векторных пространств, для абстрактных векторных пространств верны все свойства линейной зависимости.

Теорема (о свойствах линейной зависимости и линейной независимости).

1) Последовательность векторов, содержащая хотя бы один нулевой вектор θ*, линейно зависима.*

2) Последовательность, в которой есть два равных вектора, линейно зависима.

3) Последовательность, содержащая хотя бы два пропорциональных вектора, линейно зависима.

4) Если подпоследовательность линейно зависима, то и вся последовательность линейно зависима.

5) Если последовательность линейно независима, то и любая её подпоследовательность линейно независима.

6) Если последовательность линейно зависима, то хотя бы один её вектор линейно выражается через остальные.

7) Если хотя бы один вектор последовательности линейно выражается через остальные, то последовательность линейно зависима.

8) Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через остальные.

Теорема (основная лемма о линейной зависимости). *Если каждый вектор последовательности*

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \qquad (*)$$

линейно выражается через последовательность векторов

$$b_1, b_2, \ldots, b_k, \qquad (**)$$

то последовательность $(*)$ линейно зависима.

Доказательство этих теорем для арифметического векторного пространства годится и для случая произвольного векторного пространства. ▲

Следствие. Если каждый вектор последовательности (1) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно выражается через последовательность (2) $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и $m > k$, то последовательность (1) линейно зависима.

Базис последовательности векторов и векторного пространства

Определение. *Базисом последовательности векторов* $(*)$ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторного пространства V над полем P называется такая её подпоследовательность *Б*, что

1) подпоследовательность *Б* линейно независима;

2) каждый вектор последовательности $(*)$ линейно выражается через векторы последовательности *Б*.

Для базисов верна такая же теорема, что и для базисов арифметических векторных пространств с таким же доказательством.

Теорема (о свойствах базиса последовательности векторов). 1*) Конечная последовательность, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис.*

2) Количество векторов в любых двух базисах одной и той же последовательности векторов одинаково.

Рангом конечной последовательности векторов, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется количество векторов в базисе этой последовательности. Ранг последовательности нулевых векторов считается равным нулю.

Следствие. Если вектор b линейно выражается через последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$, содержащую ненулевые векторы, то он выражается и через её базис.

Определение. Если в векторном пространстве V над полем P существует конечная последовательность векторов $(*)$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такая, что она линейно независима и через неё линейно выражается каждый вектор V, то пространство V называется *конечномерным*, последовательность $(*)$ называется *базисом пространства* V, а число n называется его *размерностью* и обозначается $\dim_P V = n$.

Из основной леммы о линейной зависимости и следствия из неё вытекает, что в любых двух базисах конечномерного векторного пространства количество векторов одинаково.

Эквивалентные последовательности векторов

Определение. Последовательности векторов

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{I}$$

и

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{II}$$

векторного пространства V называются *эквивалентными*, если каждый вектор последовательности (I) линейно выражается через векторы последовательности (II), и наоборот каждый вектор последовательности (II) линейно выражается через векторы последовательности (I).

Обозначение: $(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II})$.

Замечания. 1) *Базис последовательности векторов эквивалентен всей последовательности.*

2) Если (I), (II) и (III) последовательности векторов из одного пространства, то:

$$(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{I});$$

$$\text{если}\,(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II}),\ \text{то}\,(\mathrm{II}) \sim (\mathrm{I});$$

$$\text{если}\ (\mathrm{I}) \sim (\mathrm{II})\ \text{и}\,(\mathrm{II}) \sim (\mathrm{III}),\ \text{то}\,(\mathrm{I}) \sim (\mathrm{III}).$$

Определение. *Элементарными преобразованиями* последовательности векторов (I) называются преобразования следующих типов:

1) удаление из последовательности нулевого вектора θ;

2) умножение любого вектора последовательности на ненулевой скаляр;

3) прибавление к некоторому вектору последовательности любого другого, умноженного на произвольный скаляр.

Теорема 11 (об элементарных преобразованиях). *Если к последовательности (I) $a_1, a_2, \dots, a_k$ применить конечное число элементарных преобразований, то получится последовательность, эквивалентная исходной.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если к последовательности применить одно элементарное преобразование, то получится последовательность, эквивалентная исходной, а затем воспользоваться индукцией по количеству преобразований.

Так как вектор θ линейно выражается через любую последовательность и не влияет на выражаемость других векторов, то применение преобразований типа 1) дает эквивалентную последовательность.

Пусть

$$\text{(I)}\, a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_k\,,$$

$$\text{(II)}\, a_1, \ldots, \alpha \cdot a_m, \ldots, a_k \quad (\alpha \neq 0)\,,$$

т.е. (II) получена из (I) умножением вектора a_m $(m = 1, \ldots, k)$ на α. Тогда

$$a_i = 0 \times a_1 + \ldots + 1 \times a_i + \ldots + 0 \times a_k \text{ при } i \neq m$$

и

$$a_m = 0 \times a_1 + \ldots + \frac{1}{\alpha} \times (\alpha \times a_m) + \ldots + 0 \times a_k\,.$$

Наоборот:

$$a_i = 0 \times a_1 + \ldots + 1 \times a_i + \ldots + 0 \times a_k \text{ при } i \neq m\,,$$

$$\alpha \times a_m = 0 \times a_1 + \ldots + \alpha \times a_m + \ldots + 0 \times a_k\,.$$

Таким образом, каждый вектор последовательности (I) линейно выражается через векторы последовательности (II) и, наоборот, каждый вектор последовательности (II) линейно выражается через векторы последовательности (I). Следовательно, $(\text{I}) \sim (\text{II})$.

Пусть

$$\text{(I)} \quad a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_k\,,$$

$$(\text{II})\quad a_1,\ldots,\, a_i+\alpha\cdot a_j,\ldots,\, a_j,\ldots,a_k,\quad \alpha\in P,$$

т.е. последовательность (II) получена из (I) заменой вектора a_i на вектор $a_i+\alpha\cdot a_j$, $i\neq j$ и $1\leq i,j\leq k$. Тогда

$$a_s=0\cdot a_1+\ldots+1\cdot a_s+\ldots+0\cdot a_k \text{ при } s\neq i,$$

$$a_i=0\cdot a_1+\ldots+1\cdot\left(a_i+\alpha\cdot a_j\right)+\ldots+(-\alpha)\cdot a_j+\ldots+0\cdot a_k,$$

$$a_i+\alpha\cdot a_j=0\cdot a_1+\ldots+1\cdot a_i+\ldots+\alpha\cdot a_j+\ldots+0\cdot a_k.$$

Отсюда следует, что $(\text{I})\sim(\text{II})$.

Завершает доказательство индукция по количеству преобразований и свойство транзитивности. ▲

Координатная строка вектора в данном базисе

Если $Б=\langle a_1;a_2;\ldots;a_n\rangle$ – базис пространства V над полем P, $a\in V$ и

$$a=\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\ldots+\alpha_n\cdot a_n,$$

$$a=\gamma_1\cdot a_1+\gamma_2\cdot a_2+\ldots+\gamma_n\cdot a_n,$$

то вычитая почленно из одного равенства другое, получим

$$(\alpha_1-\gamma_1)\cdot a_1+(\alpha_2-\gamma_2)\cdot a_2+\ldots+(\alpha_n-\gamma_n)\cdot a_n=\theta.$$

Так как последовательность $Б$ линейно независима, то

$$\alpha_1-\gamma_1=0,\ \alpha_2-\gamma_2=0,\ldots,\alpha_n-\gamma_n=0 \quad\text{или}$$

$$\alpha_1=\gamma_1,\ \alpha_2=\gamma_2,\ldots,\alpha_n=\gamma_n.$$

Таким образом, *коэффициенты разложения векторов в произвольном векторном пространстве V по базису $Б$ определены однозначно.*

Определение. Коор*динатной строкой (столбцом) вектора* $a\in V$ в базисе $Б=\langle a_1;a_2;\ldots;a_n\rangle$ называется такая вектор-строка (вектор-столбец)

$$[a]_Б = (\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \qquad \left([a]_Б{}^T = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right),$$

что

$$a = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n .$$

З**АМЕЧАНИЕ.** Все свойства координатных вектор-строк легко переносятся на координатные вектор-столбцы и обратно. Поэтому достаточно изучить свойства координатных вектор-строк или просто координатных строк.

Т**ЕОРЕМА** 12 (о свойствах координатных строк). *Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P, $Б=\langle a_1;a_2;\ldots;a_n\rangle$ – его базис. Тогда выполняются свойства:*

1) $[\theta]_Б = (0;0;\ldots;0)$*;*

2) $[a+b]_Б = [a]_Б + [b]_Б$*;*

3) $[\alpha \cdot a]_Б = \alpha \cdot [a]_Б$ *;*

4) $[\alpha \cdot a + \beta \cdot b]_Б = \alpha \cdot [a]_Б + \beta \cdot [b]_Б$ *;*

5) $[\alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \ldots + \alpha_k \cdot b_k]_Б =$

$$= \alpha_1 \cdot [b_1]_Б + \alpha_2 \cdot [b_2]_Б + \ldots + \alpha_k \cdot [b_k]_Б$$

для любых векторов $a, b, b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$ *и скаляров* $\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В любом базисе

$$\theta = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n .$$

Поэтому $[\theta]_Б = (0;0;\ldots;0)$.

2) Пусть

$$a = \alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_n \times a_n ,$$

$$b = \beta_1 \times a_1 + \beta_2 \times a_2 + \ldots + \beta_n \times a_n -$$

разложение векторов a и b по базису $Б$. Тогда

$$[a]_Б = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n), \ [b]_Б = (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n),$$

$$[a+b]_Б = \left[(\alpha_1 + \beta_1) \times a_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \times a_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \times a_n\right]_Б =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \ldots; \alpha_n + \beta_n) =$$

$$= (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) + (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n) =$$

$$= [a]_Б + [b]_Б .$$

3) $\alpha \times a = (\alpha \times \alpha_1) \times a_1 + (\alpha \times \alpha_2) \times a_2 + \ldots + (\alpha \times \alpha_n) \times a_n$.

Поэтому

$$[\alpha \times a]_Б = (\alpha \times \alpha_1; \alpha \times \alpha_2; \ldots; \alpha \times \alpha_n) = \alpha \times (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) = \alpha \times [a]_Б .$$

4) $\alpha \times a + \beta \times b =$

$$= \alpha \times (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n) + \beta \times (\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n) =$$

$$= (\alpha \times \alpha_1 + \beta \times \beta_1) a_1 + (\alpha \times \alpha_2 + \beta \times \beta_2) a_2 + \ldots + (\alpha \times \alpha_n + \beta \times \beta_n) a_n .$$

Поэтому

$$[\alpha \times a + \beta \times b]_Б = (\alpha \times \alpha_1 + \beta \times \beta_1; \alpha \times \alpha_2 + \beta \times \beta_2; \ldots; \alpha \times \alpha_n + \beta \times \beta_n) =$$

$$= (\alpha \times \alpha_1; \alpha \times \alpha_2; \ldots; \alpha \times \alpha_n) + (\beta \times \beta_1; \beta \times \beta_2; \ldots; \beta \times \beta_n) =$$

$$= \alpha \times (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) + \beta \times (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n) = \alpha \times [a]_Б + \beta \times [b]_Б .$$

5) Доказывается индукцией по k, начиная с $k = 2$, с использованием свойства 4). ▲

§2. Подпространства векторного пространства

Определение. Непустое подмножество U векторного пространства V над полем P называется его *подпространством*, если U само является векторным пространством над полем P.

Теорема 13 (критерий подпространства). *Непустое подмножество U векторного пространства V над полем P является его подпространством тогда и только тогда, когда*

1) для любых $a, b \in U$ сумма $a + b \in U$;

2) для любого $a \in U$ и любого $\alpha \in P$ произведение $\alpha \cdot a \in U$.

Доказательство. Докажем, что U является векторным пространством над полем P. Для этого достаточно проверить выполнимость для U всех аксиом векторного пространства. Из свойства 1) и 2) следует, что сумма и умножение на скаляры являются операциями на множестве U.

Так как $U \subseteq V$, то все свойства, выполняющиеся для любых векторов из V и скаляров из P выполняются и в U. Проверяем выполнимость остальных аксиом.

Так как $U \neq \varnothing$, то существует $a \in U$. Тогда вектор $0 \cdot a \in U$, т.к. $0 \times a = \theta$, то $\theta \in U$.

Пусть $a \in U$. Возьмем $-1 \in P$. Тогда $(-1) \cdot a \in U$, но $(-1) \times a = -a$, поэтому $-a \in U$. В результате все аксиомы векторного пространства выполняются и U – пространство над полем P.

В обратную сторону утверждение тривиально.▲

Примеры.

1) *Линейная оболочка последовательности векторов.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in V$ и не все векторы нулевые. Обозначим

$$L = L(a_1; a_2; \ldots; a_n) = \{\alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n \mid \alpha_i \in P\} -$$

множество всех линейных комбинаций последовательности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с коэффициентами из поля P. Множество L называется *линейной оболочкой последовательности векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Множество L является подпространством пространства V.

Действительно,

$L \neq \varnothing$, т.к. $\theta \in L$ $(\theta = 0 \times a_1 + 0 \times a_2 + \ldots + 0 \times a_n)$. По определению L и свойствам векторного пространства $L \subseteq V$.

Если $a, b \in L$, то

$$\alpha_1 \quad 1 \quad \alpha_2 \quad 2 \qquad \alpha \qquad , \qquad \beta_1 \quad 1 \quad \beta_2 \quad 2 \qquad \beta$$

.

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) \times a_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \times a_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \times a_n,$$

следовательно, $a + b \in L$.

Если $a \in L$ и $\alpha \in P$, то

$$\alpha \times a = \alpha \times (\alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_n \times a_n) =$$

$$= (\alpha \times \alpha_1) \times a_1 + (\alpha \times \alpha_2) \times a_2 + \ldots + (\alpha \times \alpha_n) \times a_n$$

и, следовательно, $\alpha \cdot a \in L$.

По критерию подпространства L является подпространством векторного пространства V над полем P.

2) *Пересечение подпространств.*

Пусть U_1, U_2 – подпространства пространства V над полем P. Обозначим $U = U_1 \cap U_2$. Тогда U – подпространство пространства V над полем P.

Действительно, $U \subseteq V$; $U \neq \varnothing$, т.к. $\theta \in U$ (ибо $\theta \in U_1$ и $\theta \in U_2$).

Если $a, b \in U$, то $a, b \in U_1 \cap U_2$. Значит, $a, b \in U_1$ и $a, b \in U_2$. Так как U_1, U_2 – подпространства, то $a + b \in U_1$ и $a + b \in U_2$. Но тогда $a + b \in U_1 \cap U_2$, т.е. $a + b \in U$.

Если $a \in U$ и $\alpha \in P$, то $a \in U_1 \cap U_2$ и $a \in U_1$, $a \in U_2$. Тогда $\alpha \cdot a \in U_1$, $\alpha \cdot a \in U_2$ и $\alpha \cdot a \in U_1 \cap U_2$, т.е. $\alpha \cdot a \in U$.

По критерию U – подпространство векторного пространства V.

Следствие. Индукцией по k можно доказать, что пересечение k подпространств $U_1, \ldots, U_k$ пространства V над полем P является его подпространством.

3) *Сумма подпространств.*

Пусть U_1, U_2 – подпространства пространства V над полем P. Обозначим

$$U = U_1 + U_2 = \left\{ a + b \,\middle|\, a \in U_1,\, b \in U_2 \right\}.$$

Тогда U – подпространство векторного пространства V.

Действительно, для любых $a \in U_1$ и $b \in U_2$ имеем $a + b \in V$, значит, $U \subseteq V$. $U \neq \varnothing$ $(\theta \in U)$. Пусть $x, y \in U$. Тогда $x = a_1 + b_1$, $y = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in U_1$, $b_1, b_2 \in U_2$, и

$$x + y = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \in U_1 + U_2.$$

Если $x \in U$ и $\alpha \in P$, то $x = a + b$, где $a \in U_1$, $b \in U_2$ и

$$\alpha \cdot x = \alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b \in U_1 + U_2.$$

Значит, $x+y \in U$ и $\alpha \cdot x \in U$ для любых $x,y \in U$ и $\alpha \in P$. По критерию U является подпространством векторного пространства V.

Следствие. Индукцией по k можно доказать, что *сумма k подпространств векторного пространства V над полем P является его подпространством.* При этом, из определения суммы подпространств и аксиом пространства следует, что для любых подпространств U_1, U_2, U_3 векторного пространства V над полем P выполняются свойства:

$$U_1 + U_2 = U_2 + U_1 \text{ и } \left(U_1 + U_2\right) + U_3 = U_1 + \left(U_2 + U_3\right).$$

Определение. Сумма + называется *прямой суммой подпространств* векторного пространства V над P, если $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$.

Заметим, что сумма $U_1 + U_2$ прямая тогда и только тогда, когда для любых $a_1, a_2 \in U_1$ и $b_1, b_2 \in U_2$ из равенства $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Действительно, если $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, то $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$. Правая часть равенства принадлежит U_1, а левая часть – U_2. Так как $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, то $a_1 - a_2 = \theta$ *и* $b_2 - b_1 = \theta$ и, следовательно, $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Прямая сумма подпространств U_1 и U_2 обозначается

$$U_1 \oplus U_2.$$

Для произвольных векторных пространств и их подпространств, так же как и для арифметических пространств, верна теорема о существовании базиса.

Теорема (о существовании базиса подпространства). *Если U – ненулевое подпространство n-мерного векторного пространства V над полем P, то U имеет базис с количеством векторов меньшим или равным n.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству для случая арифметических пространств.

Замечания. 1). Базисом линейной оболочки ненулевой последовательности векторов $(*)$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является любой базис последовательности $(*)$.

2). Если подпространства U_1, U_2 – конечномерные и $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_k \rangle$, $Б_2 = \langle b_1; b_2; \ldots; b_m \rangle$ их базисы соответственно, то базисом суммы подпространств $U_1 + U_2$ будет базис последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_m$. Если при этом $U_1 \cap U_2 = \{\theta\}$, т.е. сумма U_1 и U_2 прямая, то базисом $U_1 \oplus U_2$ является последовательность векторов $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_k; b_1; b_2; \ldots; b_m \rangle$.

§3. Изоморфизм векторных пространств

Определение. Пусть V, U – некоторые векторные пространства над полем P. Взаимно однозначное отображение f пространства V на пространство U называется *изоморфизмом*, если для любых векторов $a, b \in V$ и любого скаляра $\lambda \in P$ выполняются условия:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

2) $f(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot f(a)$.

Векторные пространства V и U в этом случае называются *изоморфными.*

Обозначение: $V \cong U$.

Теорема 14 (о простейших свойствах изоморфизма). *Для любых векторных пространств V, U, W над одним и тем же полем P выполняются свойства:*

1) $V \cong V$;

2) если $V \cong U$, то $U \cong V$;

3) если $V \cong U$ и $U \cong W$, то $V \cong W$.

Доказательство. 1) Изоморфизмом будет тождественное отображение ε : $\varepsilon(a) = a$ для любого $a \in V$.

2) Если f – изоморфизм пространства V на U, то определено и является взаимно однозначным отображение f^{-1} пространства U на V, действующее по правилу: если $a \in V$ и $f(a) = x \in U$, то $f^{-1}(x) = a$.

Докажем, что для f^{-1} выполнены оба условия изоморфизма. Действительно, для любых $x, y \in U$ имеем

$$f\left(f^{-1}(x+y)\right) = x + y ,$$

$$f\left(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(x)\right) + f\left(f^{-1}(y)\right) = x + y ,$$

т.е. $f\left(f^{-1}(x+y)\right) = f\left(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right)$. В силу взаимной однозначности отображения f получаем, что $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

Аналогично, для любого $x \in U$ и $\alpha \in P$ имеем

$$f\left(f^{-1}(\alpha \times x)\right) = \alpha \times x,$$

$$f\left(\alpha \times f^{-1}(x)\right) = \alpha \times f\left(f^{-1}(x)\right) = \alpha \times x .$$

Значит, $f\left(f^{-1}(\alpha \times x)\right) = f\left(\alpha \times f^{-1}(x)\right)$ и $f^{-1}(\alpha \times x) = \alpha \times f^{-1}(x)$. В результате f– изоморфизм и $U \cong V$.

3) Пусть f – изоморфизм пространства V на U, g – изоморфизм пространства U на W. Определим их композицию $g \circ f$, действующую по правилу: для любого вектора $a \in V$ положим $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Как известно, композиция взаимно однозначных отображений является взаимно однозначной, поэтому $g \circ f$ – взаимно однозначное отображение V на W.

Докажем выполнение остальных условий изоморфизма. Действительно, для любых $a, b \in V$ и любого $\alpha \in P$ имеем:

$$(g \circ f)(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) =$$

$$= g(f(a)) + g(f(b)) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b) \quad \text{и}$$

$$(g \circ f)(\alpha \cdot a) = g(f(\alpha \cdot a)) = g(\alpha \cdot f(a)) =$$

$$= \alpha \cdot g(f(a)) = \alpha \cdot ((g \circ f)(a)).$$

Значит, $g \circ f$ – изоморфизм и $V \cong W$. ▲

Изоморфизм конечномерных векторных пространств

В этом пункте будем рассматривать n-мерные ненулевые векторные пространства, т.е. $n > 0$.

Теорема 15. *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P. Тогда V изоморфно арифметическому векторному пространству P^n.*

Доказательство. Пусть $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ – базис пространства V над полем P, f – отображение, сопоставляющее каждому вектору $a \in V$ его координатную строку $[a]_Б$, т.е. вектора $a = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$ получаем, что $f(a) = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \in P^n$. Из свойств однозначности координатной строки и теоремы 11 следует, что f является изоморфизмом пространств V и P^n, $V \cong P^n$. ▲

Теорема 16. *Пусть U, V – конечномерные векторные пространства над полем P. Пространства U и V изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

Доказательство. Пусть $\dim U = \dim V = n > 0$. По теореме 15 $U \cong P^n$ и $V \cong P^n$. Из теоремы 14 следует, что $U \cong V$.

Наоборот, пусть $U \cong V$, оба пространства конечномерные и f – изоморфизм пространства U на пространство V. Выберем базис $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ пространства U. Тогда последовательность векторов $Б_2 = \langle f(a_1); f(a_2); \ldots; f(a_n) \rangle$ является базисом пространства V.

Действительно, если $x \in V$, то существует $a \in U$ такой, что $f(a) = x$. Но $a = \alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_n \times a_n$. Поэтому

$$x = f(a) = f(\alpha_1 \times a_1 + \alpha_2 \times a_2 + \ldots + \alpha_n \times a_n) =$$

$$= \alpha_1 \times f(a_1) + \alpha_2 \times f(a_2) + \ldots + \alpha_n \times f(a_n),$$

т.е. любой вектор из V линейно выражается через векторы $Б_2$.

Докажем, что последовательность $Б_2$ – линейно независима. Пусть

$$\gamma_1 \times f(a_1) + \gamma_2 \times f(a_2) + \ldots + \gamma_n \times f(a_n) = \theta_V .$$

Тогда

$$f(\gamma_1 \times a_1 + \gamma_2 \times a_2 + \ldots + \gamma_n \times a_n) = f(\theta_U).$$

Ввиду взаимной однозначности отображения f получаем:

$$\gamma_1 \times a_1 + \gamma_2 \times a_2 + \ldots + \gamma_n \times a_n = \theta_U ,$$

а т.к. $Б_1$ базис пространства U, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots \gamma_n = 0$, т.е. последовательность $Б_2$ линейно независима.

Таким образом, базис пространства U переходит в базис пространства V, причём $\dim U = n = \dim V$. ▲

ТЕМА 7. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ УМНОЖЕНИЕМ

§1. Скалярное умножение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным умножением* в векторном пространстве V над полем P называется правило, которое каждой упорядоченной паре a, b элементов из V ставит в соответствие скаляр из P, обозначаемый (a, b), удовлетворяющий для любых векторов a, b и c из V и скаляров α, β из P следующим условиям (аксиомам):

1) $(a, b) = (b, a)$,

2) $(\alpha a + \beta b, c) = \alpha \cdot (a, c) + \beta \cdot (b, c)$.

Скаляр $(a, b) \in P$ называется *скалярным произведением векторов a и b.*

Скалярное умножение в пространстве V называется *невырожденным,* если для любого ненулевого вектора $a \in V$ имеем $(a, a) \neq 0$.

Скалярное умножение называется *нулевым,* если $(a, b) = 0$ для любых a и b из V.

ПРИМЕРЫ.

1. *Стандартное* скалярное умножение в арифметическом векторном пространстве P^n, которое каждой паре векторов $a = (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$ и $b = (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n)$ ставит в соответствие скаляр

$$(a,\, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \beta_n .$$

Стандартное умножение в $\mathbb{R}^n$ является невырожденным.

2. В P^n можно определить и вырожденное скалярное умножение, если взять, например, $(a,\, b) = \alpha_1 \cdot \beta_1 \quad (n > 1)$.

3. Пусть C – множество всех непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. В качестве операций возьмём обычное сложение функций и умножение функций на скаляр. Нетрудно доказать, что оно будет векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Скалярное умножение на этом пространстве можно задать по правилу:

$$(f,\, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx .$$

Теорема 17 (о простейших свойствах скалярного умножения). *Для любых векторов* $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_k$ *векторного пространства V над полем P, с заданным на нём скалярным умножением, и скаляров* $\partial, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *из P выполняются следующие свойства.*

1) $(\partial \cdot a,\, b) = \partial \cdot (a,\, b)$.

2) $(a,\, \theta) = 0$.

3) $(\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k,\, b) =$

$$= (b, \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k) =$$

$$= \alpha_1 \cdot (a_1, b) + \alpha_2 \cdot (a_2, b) + \ldots + \alpha_k \cdot (a_k, b) .$$

Доказательство.

1) $(\partial \cdot a,\, b) = (\partial \cdot a + 0 \cdot a,\, b) = \partial \cdot (a,\, b) + 0 \cdot (a,\, b) = \partial \cdot (a,\, b)$.

2) $(a, \theta) = (\theta, a) = (0 \cdot \theta, a) = 0 \cdot (\theta, a) = 0$.

3. Индукция по k с использованием аксиом скалярного умножения. ▲

Ортогональные последовательности векторов

Определение. Векторы $a, b \in V$ называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*), если $(a, b) = 0$.

Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из V называется *ортогональной,* если её векторы попарно ортогональны:

$$\left(a_i, a_j\right) = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } 1 \leq i, j \leq k .$$

Ортогональная последовательность векторов, являющаяся базисом пространства V, называется *ортогональным базисом.*

Теорема 18 (об ортогональных последовательностях векторов). *Пусть V – векторное пространство над полем P с заданным на нем невырожденным скалярным умножением. Тогда любая ортогональная последовательность ненулевых векторов линейно независима.*

Доказательство. Пусть $(*)$ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ортогональная последовательность ненулевых векторов пространства V и

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = \theta . \qquad (1)$$

Докажем, что это возможно в том и только в том случае, если все α_m равны нулю. Умножив обе части равенства (1) на вектор a_m, $m = 1, 2, \ldots, k$, получим

$$\alpha_1 \cdot (a_1, a_m) + \ldots + \alpha_m (a_m, a_m) + \ldots + \alpha_k \cdot (a_k, a_m) = (\theta, a_m).$$

Из ортогональности последовательности $(*)$ и свойств скалярного умножения следует, что $\alpha_m \cdot (a_m, a_m) = 0$, а т.к.

$(a_m, a_m) \neq 0$, то $\lambda_m = 0$ для всех $m = 1, 2, \dots, k$. Значит, последовательность $(*)$ линейно независима. ▲

Следствие. *Если V – ненулевое n-мерное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением, то любая ортогональная последовательность n ненулевых векторов является его ортогональным базисом.*

Процесс ортогонализации

Ниже будет разобран алгоритм ортогонализации, который позволяет решать следующие задачи.

1) Нахождение ортогонального базиса линейной оболочки последовательности векторов.

2) Преобразование базиса пространства *V* в ортогональный базис.

3) Дополнение ортогональной последовательности ненулевых векторов конечномерного пространства до ортогонального базиса.

При этом предполагается, что в векторном пространстве *V* над полем *P* задано невырожденное скалярное умножение.

Заметим, что, пользуясь приемом из доказательства теоремы о существовании базиса, можно показать, что любую линейно независимую последовательность векторов конечномерного векторного пространства *V* можно дополнить до базиса этого пространства.

Теорема 19 (процесс ортогонализации). *Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением и* $(*)$ $a_1, a_2, \dots, a_k$ *ненулевая последовательность векторов из V. Тогда существует ортогональная последовательность векторов пространства V, эквивалентная последовательности* $(*)$ *и являющаяся ортого-*

нальным базисом линейной оболочки последовательности $(*)$.

Доказательство. Пусть (1) $c_1, c_2, \dots, c_m$ – базис последовательности $(*)$. Тогда $(*) \sim (1)$ и (1) – базис линейной оболочки последовательности $(*)$. По основной теореме о линейной зависимости в искомой последовательности тоже будет m векторов.

Положим $b_1 = c_1$. Вектор b_2 будем искать в виде $b_2 = c_2 + \alpha_{21} \cdot b_1$ и удовлетворяющим условию $(b_1, b_2) = 0$. Имеем:

$$0 = (b_1, b_2) = (b_1, c_2 + \alpha_{21} \cdot b_1) = (b_1, c_2) + \alpha_{21} \cdot (b_1, b_1)$$

и т.к. $b_1 \neq 0$, то $(b_1, b_1) \neq 0$, значит, $\alpha_{21} = -\dfrac{(c_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$.

Вектор b_3 будем искать в виде $b_3 = c_3 + \alpha_{31} \cdot b_1 + \alpha_{32} \cdot b_2$ и удовлетворяющим условиям $(b_1, b_3) = (b_2, b_3) = 0$. Аналогично предыдущему находим $\alpha_{31} = -\dfrac{(c_3, b_1)}{(b_1, b_1)}$, $\alpha_{32} = -\dfrac{(c_3, b_2)}{(b_2, b_2)}$.

Если векторы $b_1, b_2, \dots, b_{s-1}$ уже найдены, то вектор b_s $(2 \leq s \leq m)$ ищем в виде:

$$b_s = c_s + \alpha_{s1} \cdot b_1 + \alpha_{s2} \cdot b_2 + \ldots + \alpha_{s\,s-1} \cdot b_{s-1}$$

и с условиями $(b_1, b_s) = (b_2, b_s) = \ldots = (b_{s-1}, b_s) = 0$.

Умножив скалярно b_s на b_t, $t = 1, 2, \dots, s-1$, находим $\alpha_{st} = -\dfrac{(c_s, b_t)}{(b_t, b_t)}$. Полученные векторы (2) $b_1, b_2, \dots, b_m$ образуют ортогональную последовательность. По теореме 11 получаем, что $(1) \sim (2)$, значит, в (2) нет нулевых векторов. По свойствам эквивалентности $(*) \sim (1) \sim (2)$ заключаем, что (2) – ортогональный базис линейной оболочки последовательности $(*)$. ▲

Ортогональное дополнение подпространства

Определение. Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением и L – его подпространство. *Ортогональным дополнением* подпространства L называется множество

$$L^{\perp} = \left\{ a \in V \,\middle|\, (a, b) = 0 \ \text{ для любого вектора } b \in L \right\}.$$

Теорема 20 (о свойствах ортогонального дополнения). *Пусть V – векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением, L – его подпространство. Тогда выполняются следующие свойства:*

1) $L^{\perp}$ – подпространство пространства V над P.

2) Если L конечномерное, то $V = L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство. 1) $\theta \in L^{\perp}$, значит, $L^{\perp} \neq \varnothing$. $L^{\perp} \subseteq V$ по определению.

Пусть $a, b \in L^{\perp}$. Тогда для любого вектора $c \in L$ имеем $(a, c) = 0$, $(b, c) = 0$. Но в этом случае $(a + b, c) = (a, c) + (b, c) = 0 + 0 = 0$. Значит, $a + b \in L^{\perp}$.

Пусть $a \in L^{\perp}$, $\alpha \in P$ и с – произвольный вектор из L. Тогда $(a, c) = 0$ и $(\alpha \cdot a, c) = \alpha \cdot (a, c) = \alpha \cdot 0 = 0$, т.е. $\alpha \cdot a \in L^{\perp}$.

По критерию подпространства получаем, что $L^{\perp}$ – подпространство пространства V.

2) Если $a \in L \cap L^{\perp}$, то $(a, a) = 0$ и $a = \theta$. Значит, $L \cap L^{\perp} = \{\theta\}$ и сумма L и $L^{\perp}$ – прямая.

Если $L=\{\theta\}$, то $L^{\perp}=V$ и $V=L\oplus L^{\perp}$.

Допустим, что $L\neq\{\theta\}$ и т.к. по условию теоремы L – конечномерное, то в L по теореме 62 существует ортогональный базис $Б=\langle b_1; b_2; \ldots; b_m\rangle$.

Докажем, что для любого $a\in V$ существуют $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in P$ и $x\in L^{\perp}$ такие, что

$$a=\alpha_1\cdot b_1+\alpha_2\cdot b_2+\ldots+\alpha_m\cdot b_m+x\text{, т.е. } a\in L+L^{\perp}.$$

Коэффициенты $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ находятся, если умножать обе части искомого равенства скалярно на векторы b_i, $i=1,2,\ldots,m$. Из ортогональности базиса и условия, что $x\in L^{\perp}$ получается $(a,b_i)=\alpha_i\cdot(b_i,b_i)$, значит, $\alpha_i=\dfrac{(a,b_i)}{(b_i,b_i)}$.

Если для данного вектора $a\in V$ взять $\alpha_i=\dfrac{(a,b_i)}{(b_i,b_i)}$, то вектор $x=a-\alpha_1\cdot b_1-\alpha_2\cdot b_2-\ldots-\alpha_m\cdot b_m$ действительно лежит в ортогональном дополнении $L^{\perp}$, т.к. для любого $i=1,2,\ldots,m$

$$(x,b_i)=(a,b_i)-\alpha_i\cdot(b_i,b_i)=(a,b_i)-\frac{(a,b_i)}{(b_i,b_i)}\cdot(b_i,b_i)=0,$$

т.е. x ортогонален всем базисным векторам пространства L. Теперь, если $c\in L$ и $c=\lambda_1\cdot b_1+\lambda_2\cdot b_2+\ldots+\lambda_m\cdot b_m$, то непосредственными вычислениями проверяется, что $(x,c)=0$, т.е. $x\in L^{\perp}$.

В результате $a\in L+L^{\perp}$ и $V=L\oplus L^{\perp}$. ▲

Следствие. *Если V – конечномерное векторное пространство над полем P с невырожденным скалярным умножением и L – его подпространство, то $V = L \oplus L^{\perp}$.*

§2. Евклидовы векторные пространства

Определение. Векторное пространство E над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ с невырожденным скалярным умножением таким, что $(a, a) > 0$ для любого ненулевого вектора a из E называется *евклидовым векторным пространством.*

Пример. Арифметическое векторное пространство с заданным на нем стандартным скалярным умножением является евклидовым пространством.

Обозначение: E_n.

Определение. *Нормой* вектора a евклидова векторного пространства E над полем $\mathbb{R}$ называется величина $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$, т.е. корень квадратный из скалярного квадрата вектора a.

Теорема 21 (свойства нормы в евклидовом пространстве).

Для любых векторов a, b евклидова пространства E над $\mathbb{R}$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются следующие свойства.

1) $\|a\| \geq 0$ и $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$.

2) $\|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$.

3) $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ *(неравенство Коши –Бунявского).*

4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ *(неравенство треугольника).*

Доказательство. Свойства 1) и 2) следуют из определения нормы и определения арифметического квадратного корня из действительного числа.

3) Если $a = \theta$ или $b = \theta$, то неравенство верно. Пусть $a \neq \theta,\ b \neq \theta$. Тогда для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ по определению евклидова пространства верно неравенство:

$$(\alpha \cdot a - \beta \cdot b, \alpha \cdot a - \beta \cdot b) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \cdot a, \alpha \cdot a - \beta \cdot b) - (\beta \cdot b, \alpha \cdot a - \beta \cdot b) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot (a, \alpha \cdot a - \beta \cdot b) - \beta \cdot (b, \alpha \cdot a - \beta \cdot b) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \cdot (a, a) - \alpha \cdot \beta \cdot (a, b) - \beta \cdot \alpha \cdot (b, a) + \beta^2 \cdot (b, b) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 \cdot (a, a) - 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (a, b) + \beta^2 \cdot (b, b) \geq 0 .$$

Положим, что $\alpha = \|b\|,\ \beta = \|a\|$. Тогда, подставив в последнее неравенство, получим

$$2 \cdot \left(\|a\| \cdot \|b\| \right)^2 - 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| \cdot (a, b) \geq 0 .$$

Так как $a \neq \theta,\ b \neq \theta$, то $\|a\| \cdot \|b\| > 0$ и, значит, $\|a\| \cdot \|b\| - (a, b) \geq 0$ или $(a, b) \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Если заменить a на $-a$ и заметить, что $\|-a\| = \|a\|$ и $(-a, b) = -(a, b)$, то получим $-(a, b) \leq \|a\| \cdot \|b\|$. В результате $|(a, b)| \leq \|a\| \cdot \|b\|$.

4) Докажем сначала, что $\|a + b\|^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2$. Действительно,

$$\|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) =$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \cdot (a, b) \leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \cdot \|a\| \cdot \|b\| = (\|a\| + \|b\|)^2 ,$$

т.е. $\|a+b\|^2 \le (\|a\|+\|b\|)^2$. Так как значения нормы неотрицательны, то $\|a+b\| \le \|a\|+\|b\|$. ▲

Следствие. *Для евклидова пространства E_n и для векторов $a=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$, $b=(\beta_1;\beta_2;\ldots;\beta_n)$ из свойства 3) получаем*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\beta_i\right| \le \sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\ldots+\alpha_n{}^2}\cdot\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots+\beta_n{}^2},$$

а из 4)

$$\sqrt{(\alpha_1+\beta_1)^2+(\alpha_2+\beta_2)^2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\ldots+\alpha_n{}^2}+\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots+\beta_n{}^2}.$$

Ортонормированный базис евклидова пространства

Определение. Вектор a евклидова пространства E над $\mathbb{R}$ называется *нормированным,* если $\|a\|=1$, т.е. если $(a,a)=1$.

Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ называется *ортонормированной*, если она ортогональна и каждый её вектор нормирован.

Ортонормированная последовательность векторов, являющаяся базисом евклидова пространства, называется *ортонормированным базисом.*

Теорема 22. *Ненулевое конечномерное евклидово пространство E имеет ортонормированный базис.*

Доказательство. По теореме 19 пространство E имеет ортогональный базис $Б_1=\langle a_1; a_2;\ldots; a_n\rangle$. Для каждого

$i = 1, 2, \dots, n$ положим $e_i = \dfrac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i$. . Тогда последовательность $Б_2 = \langle e_1; e_2; \dots; e_n \rangle$ по теореме 11 эквивалентна последовательности $Б_1$, поэтому является базисом, причём

$$\left(e_i, e_j\right) = \left(\frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i,\ \frac{1}{\|b_j\|} \cdot b_j\right) = = \frac{1}{\|b_i\| \cdot \|b_j\|} \cdot \left(b_i, b_j\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В результате, $Б_2$ – ортонормированный базис пространства E. ▲

Определение. Отображение f евклидова пространства E на евклидово пространство E' называется *изоморфизмом*, если оно взаимнооднозначно и для любых $a, b \in E$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$;

2) $f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a)$;

3) $(f(a), f(b)) = (a, b)$

Замечание. Как следствие к теоремам 15, 16 и 22 и определения изоморфизма евклидовых пространств получаем, что n-мерное евклидово пространство изоморфно евклидову пространству E_n и любые два конечномерные евклидовы пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

ТЕМА 8. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Основные определения и простейшие свойства

Определение. Отображение φ векторного пространства V в себя называется *линейным оператором* пространства V, если выполняются свойства:

1) для любых векторов $a, b \in V$: $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

2) для любого вектора $a \in V$ и любого скаляра $\alpha \in P$:

$$\varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a).$$

Примеры.

1) Проекция вектора на одну из координатных плоскостей в трехмерном пространстве.

2) Дифференцирование в пространстве многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля P.

3) (основной пример). Пусть V – ненулевое n-мерное векторное пространство над полем P, $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ – базис V над P, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица размерности $n \times n$ с элементами из поля P. Для любого вектора $\alpha \in V$ однозначно определён его координатный вектор-столбец, который, в данном параграфе будем обозначать как и коорди-

натную вектор-строку через $[a]_Б = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$. Определим правило φ его действием на каждый вектор из пространства V:

$$\varphi(a) = \beta_1 \cdot a_1 + \beta_2 \cdot a_2 + \ldots + \beta_n \cdot a_n \text{, где}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \cdot [a]_Б = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_1 \cdot \alpha_{11} + \gamma_2 \cdot \alpha_{12} + \ldots + \gamma_n \cdot \alpha_{1n}, \\ \beta_2 &= \gamma_1 \cdot \alpha_{21} + \gamma_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \gamma_n \cdot \alpha_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= \gamma_1 \cdot \alpha_{n1} + \gamma_2 \cdot \alpha_{n2} + \ldots + \gamma_n \cdot \alpha_{nn}. \end{aligned}$$

В силу однозначности умножения матриц (а координатный вектор-столбец является матрицей размерности $n \times 1$) φ – отображение из V в V. По свойствам действий с матрицами и координатных вектор-столбцов получаем, что

$$A \cdot [a+b]_Б = A \cdot \left([a]_Б + [b]_Б\right) = A \cdot [a]_Б + A \cdot [b]_Б,$$

$$\text{т.е. } \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{, и}$$

$$A \cdot [\alpha \cdot a]_Б = A \cdot \left(\alpha \cdot [a]_Б\right) = \alpha \cdot \left(A \cdot [a]_Б\right) \text{, т.е. } \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a).$$

Значит, φ – линейный оператор пространства V над P.

Теорема 23 (простейшие свойства линейного оператора). *Пусть φ – линейный оператор векторного пространства V над полем P. Тогда выполняются следующие свойства:*

1) $\varphi(\theta)=\theta$.

2) Для любых векторов $a_1,a_2,\dots,a_k\in V$ *и скаляров* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k\in P$

$$\varphi(\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\dots+\alpha_k\cdot a_k)=$$
$$=\alpha_1\cdot\varphi(a_1)+\alpha_2\cdot\varphi(a_2)+\dots+\alpha_k\cdot\varphi(a_k).$$

Доказательство. 1) $\varphi(\theta)=\varphi(0\cdot\theta)=0\cdot\varphi(\theta)=\theta$.

2) Доказательство индукцией по *k*. Если $k=1$, то $\varphi(\alpha_1\cdot a_1)=\alpha_1\cdot\varphi(a_1)$. В предположении индукции

$$\varphi(\alpha_1\cdot a_1+\dots+\alpha_k\cdot a_k)=\varphi((\alpha_1\cdot a_1+\dots+\alpha_{k-1}\cdot a_{k-1})+\alpha_k\cdot a_k)=$$

$$=\varphi(\alpha_1\cdot a_1+\dots+\alpha_{k-1}\cdot a_{k-1})+\varphi(\alpha_k\cdot a_k)=$$

$$=\alpha_1\cdot\varphi(a_1)+\dots+\alpha_{k-1}\cdot\varphi(a_{k-1})+\alpha_k\cdot\varphi(a_k).\ \blacktriangle$$

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a).$$

Ядро и образ линейного оператора

Определение. Линейные операторы φ_1 и φ_2 векторного пространства *V* над полем *P равны,* если для любого вектора $a\in V$:

Определение. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства *V* над полем *P*. *Ядром* оператора φ называется множество

$$\operatorname{Ker}\varphi=\{\,a\in V\,|\,\varphi(a)=\theta\,\}.$$

Образом линейного оператора φ называется множество

$$\operatorname{Im}\varphi=\{\varphi(a)\,|\,a\in V\}.$$

Теорема 24. *Если* φ *– линейный оператор векторного пространства* V *над полем* P, *то* $\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\operatorname{Im}\varphi$ *– подпространства пространства* V *над* P.

Доказательство. Так как $\varphi(\theta)=\theta$, то $\theta\in\operatorname{Ker}\varphi$, $\theta\in\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi\neq\varnothing$, $\operatorname{Im}\varphi\neq\varnothing$. По определению $\operatorname{Ker}\varphi,\operatorname{Im}\varphi\subset V$.

Если $a,b\in\operatorname{Ker}\varphi$, то

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\theta \quad \text{и} \quad \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)=\theta+\theta=\theta,$$

т.е. $\varphi(a+b)=\theta$ и, значит, $a+b\in\operatorname{Ker}\varphi$.

Если $a\in\operatorname{Ker}\varphi$ и $\alpha\in P$, то $\varphi(\alpha\cdot a)=\alpha\cdot\varphi(a)=\alpha\cdot\theta=\theta$, т.е. $\alpha\cdot a\in\operatorname{Ker}\varphi$.

Если $x,y\in\operatorname{Im}\varphi$, то существуют $a,b\in V$ такие, что $x=\varphi(a)$, $y=\varphi(b)$. Тогда $x+y=\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi(a+b)\in\operatorname{Im}\varphi$, $\alpha\cdot x=\alpha\cdot\varphi(a)=\varphi(\alpha\cdot a)\in\operatorname{Im}\varphi$.

Таким образом, все свойства критерия подпространства для обоих множеств выполняются и $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ – подпространства пространства V. ▲

Определение. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем P, φ – линейный оператор пространства V. *Рангом* линейного оператора φ называется число $\operatorname{rang}\varphi=\dim\operatorname{Im}\varphi$, *дефектом* – число $\operatorname{def}\varphi=\dim\operatorname{Ker}\varphi$.

Теорема 25. *Пусть* V *–* n*-мерное векторное пространство над полем* P *и* φ *– линейный оператор пространства* V. *Тогда* $n=\dim V=\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{rang}\varphi+\operatorname{def}\varphi$.

Доказательство. Если $n=0$, то $V=\{\theta\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\{\theta\}$, $\operatorname{Ker}\varphi=\{\theta\}$ и

$$0=\dim V=0+0=\dim\operatorname{Ker}\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{rang}\varphi+\operatorname{def}\varphi.$$

Пусть $n > 0$. Выберем в $\operatorname{Im}\varphi$ базис $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_k \rangle$. Тогда $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rang}\varphi = k$. Так как $a_i \in \operatorname{Im}\varphi$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то существуют такие векторы $b_1, b_2, \ldots, b_k \in V$, что $\varphi(b_i) = a_i$.

Докажем, что последовательность $Б_2 = \langle b_1; b_2; \ldots; b_k \rangle$ – линейно независима. Действительно, если $\lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_k \cdot b_k = \theta$, то

$$\varphi\left(\lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_k \cdot b_k\right) = \varphi(\theta),$$

$$\lambda_1 \cdot \varphi(b_1) + \ldots + \lambda_k \cdot \varphi(b_k) = \theta,$$

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta,$$

а т.к. последовательность $Б_1$ – линейно независима, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, но тогда и $Б_2$ – линейно независима.

Пусть $L = \left\{ \beta_1 \cdot b_1 + \ldots + \beta_k \cdot b_k \,\middle|\, \beta_i \in P \right\}$ – линейная оболочка последовательности векторов $Б_2$. Тогда $Б_2$ – базис L и $\dim L = k$.

Докажем, что $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus L$, т.е. 1) $\operatorname{Ker}\varphi \cap L = \{\theta\}$ и 2) $V = \operatorname{Ker}\varphi + L$.

1) Пусть $c \in \operatorname{Ker}\varphi \cap L$. Тогда $c \in \operatorname{Ker}\varphi$ и $c \in L$, $\varphi(c) = \theta$ и $c = \gamma_1 \cdot b_1 + \ldots + \gamma_k \cdot b_k$.

Из этих условий последовательно получаем:

$$\varphi(c) = \varphi(\gamma_1 \cdot b_1 + \ldots + \gamma_k \cdot b_k),$$

$$\theta = \gamma_1 \cdot \varphi(b_1) + \ldots + \gamma_k \cdot \varphi(b_k),$$

$$\gamma_1 \cdot a_1 + \ldots + \gamma_k \cdot a_k = \theta.$$

Так как последовательность $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_k \rangle$ – линейно независима, то $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ – нулевые скаляры, $c = 0 \cdot b_1 + \ldots + 0 \cdot b_k = \theta$ и $\operatorname{Ker}\varphi \cap L = \{\theta\}$.

2) Пусть $a \in V$. Тогда $\varphi(a) \in \operatorname{Im}\varphi$ и

$$\varphi(a) = t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2 + \ldots + t_k \cdot a_k.$$

Положим $b = t_1 \cdot b_1 + t_2 \cdot b_2 + \ldots + t_k \cdot b_k$. В этом случае

$$\varphi(b) = \varphi(t_1 \cdot b_1 + \ldots + t_k \cdot b_k) = t_1 \cdot \varphi(b_1) + \ldots + t_k \cdot \varphi(b_k) =$$

$$= t_1 \cdot a_1 + \ldots + t_k \cdot a_k,$$

т.е. $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Рассмотрим вектор $c = a - b$. Тогда

$$\varphi(c) = \varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \theta,$$

т.е. $c \in \operatorname{Ker}\varphi$. Из этого следует, что $a = c + b$, причём $c \in \operatorname{Ker}\varphi$ и $b \in L$. Поэтому

$$a \in \operatorname{Ker}\varphi + L \text{ и } V \subset \operatorname{Ker}\varphi + L.$$

С другой стороны $\operatorname{Ker}\varphi + L \subset V$. Поэтому

$$V = \operatorname{Ker}\varphi + L, \ \operatorname{Ker}\varphi \oplus L = V.$$

Так как сумма прямая, то

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker}\varphi \oplus L) = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim L =$$

$$= \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{def}\varphi + \operatorname{rang}\varphi. \ \blacktriangle$$

Задание линейного оператора образами базисных векторов

В дальнейшем будут рассматриваться ненулевые конечномерные пространства и линейные операторы этих пространств. При изучении линейных операторов важное значение имеет способ их задания.

Теорема 26. *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P,* $Б=\langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ *– базис пространства V и* $(*)$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *– произвольная последовательность векторов из V. Тогда существует единственный линейный оператор* φ *пространства V такой, что*

$$(1)\quad \varphi(a_1)=b_1, \varphi(a_2)=b_2, \ldots, \varphi(a_n)=b_n .$$

Доказательство. *Существование.* Если $c_1 \in V$, то существует единственное представление

$$c_1=\alpha_1 \cdot a_1+\alpha_2 \cdot a_2+\ldots+\alpha_n \cdot a_n .$$

Определим $\varphi(c_1)=\alpha_1 \cdot b_1+\alpha_2 \cdot b_2+\ldots+\alpha_n \cdot b_n$ и докажем, что φ – искомый линейный оператор.

Действительно, φ – отображение из V в V. Если $c_2 \in V$ и $c_2=\beta_1 \cdot a_1+\beta_2 \cdot a_2+\ldots+\beta_n \cdot a_n$, то

$$\varphi(c_2)=\beta_1 \cdot b_1+\beta_2 \cdot b_2+\ldots+\beta_n \cdot b_n ,$$

$$c_1+c_2=(\alpha_1+\beta_1) \cdot a_1+(\alpha_2+\beta_2) \cdot a_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n) \cdot a_n ,$$

$$\varphi(c_1+c_2)=(\alpha_1+\beta_1) \cdot b_1+(\alpha_2+\beta_2) \cdot b_2+\ldots+(\alpha_n+\beta_n) \cdot b_n=$$

$$=\alpha_1 \cdot b_1+\alpha_2 \cdot b_2+\ldots+\alpha_n \cdot b_n+\beta_1 \cdot b_1+\beta_2 \cdot b_2+\ldots+\beta_n \cdot b_n=$$

$$=\varphi(c_1)+\varphi(c_2).$$

Если $\lambda \in P$, то

$$\lambda \cdot c_1=(\lambda \cdot \alpha_1) \cdot a_1+(\lambda \cdot \alpha_2) \cdot a_2+\ldots+(\lambda \cdot \alpha_n) \cdot a_n \text{ и}$$

$$\varphi(\lambda \cdot c_1)=(\lambda \cdot \alpha_1) \cdot b_1+(\lambda \cdot \alpha_2) \cdot b_2+\ldots+(\lambda \cdot \alpha_n) \cdot b_n=$$

$$=\lambda \cdot(\alpha_1 \cdot b_1+\alpha_2 \cdot b_2+\ldots+\alpha_n \cdot b_n)=\lambda \cdot \varphi(c_1) .$$

Таким образом, φ удовлетворяет всем аксиомам линейного оператора. Кроме того, т.к.

$$a_i = 0 \cdot a_1 + \ldots + 1 \cdot a_i + \ldots + 0 \cdot a_n$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\varphi(a_i) = 0 \cdot b_1 + \ldots + 1 \cdot b_i + \ldots + 0 \cdot b_n = b_i$$

и условие (1) выполнено.

Единственность. Пусть φ_1, φ_2 – два линейных оператора, для которых выполнено условие (1). Возьмём произвольный вектор $c \in V$,

$$c = \gamma_1 \cdot a_1 + \ldots + \gamma_n \cdot a_n,$$

тогда

$$\varphi_1(c) = \varphi_1(\gamma_1 \cdot a_1 + \ldots + \gamma_n \cdot a_n) = \gamma_1 \cdot \varphi_1(a_1) + \ldots + \gamma_n \cdot \varphi_1(a_n) =$$

$$= \gamma_1 \cdot b_1 + \ldots + \gamma_n \cdot b_n \quad \text{и}$$

$$\varphi_2(c) = \varphi_2(\gamma_1 \cdot a_1 + \ldots + \gamma_n \cdot a_n) = \gamma_1 \cdot \varphi_2(a_1) + \ldots + \gamma_n \cdot \varphi_2(a_n) =$$

$$= \gamma_1 \cdot b_1 + \ldots + \gamma_n \cdot b_n.$$

В результате $\varphi_1(c) = \varphi_2(c)$ для любого $c \in V$ и $\varphi_1 = \varphi_2$. ▲

§2. Матрица линейного оператора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ – некоторый базис V, а φ – линейный оператор пространства V. Вычислим векторы $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ и выразим их через базис:

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = \alpha_{11} \cdot a_1 + \alpha_{21} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{n1} \cdot a_n, \\ \varphi(a_2) = \alpha_{12} \cdot a_1 + \alpha_{22} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{n2} \cdot a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(a_n) = \alpha_{1n} \cdot a_1 + \alpha_{2n} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot a_n. \end{cases}$$

Тогда *матрицей линейного оператора* φ в базисе *Б* называется матрица

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

k-й столбец этой матрицы является координатным столбцом вектора $\varphi(a_k)$ *в базисе Б.*

Если $[a]_Б$ обозначает вектор-столбец вектора a в базисе *Б*, то по определению

$$M_Б(\varphi)=\left([\varphi(a_1)]_Б \quad [\varphi(a_2)]_Б \quad \dots \quad [\varphi(a_n)]_Б \right).$$

Очевидно, матрицы одного и того же оператора в разных базисах будут разными.

Каждому линейному оператору φ пространства *V* над *P* однозначно сопоставляется матрица $M_Б(\varphi)$. Наоборот, пусть φ, ψ – линейные операторы пространства *V* и $M_Б(\varphi)=M_Б(\psi)$ для некоторого базиса $Б=\langle a_1; a_2; \dots; a_n \rangle$. Тогда

$$M_Б(\varphi)=\left([\varphi(a_1)]_Б \quad [\varphi(a_2)]_Б \quad \dots \quad [\varphi(a_n)]_Б \right) \text{ и}$$

$$M_Б(\psi)=\left([\psi(a_1)]_Б \quad [\psi(a_2)]_Б \quad \dots \quad [\psi(a_n)]_Б \right).$$

Из равенства этих матриц следует, что

$$[\varphi(a_i)]_Б=[\psi(a_i)]_Б \text{ для любого } i=1,2,\dots,n.$$

Но тогда $\varphi(a_i)=\psi(a_i)$ и $\varphi=\psi$.

В результате установлено взаимно однозначное соответствие между линейными операторами и квадратными матрицами размерности $n \times n$.

Теорема 27 (о вычислении линейного оператора по его матрице). *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P,* $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ *– его базис и* φ *– линейный оператор пространства V. Тогда для любого вектора* $a \in V$ *выполняется равенство*

$$\left[\varphi(a)\right]_Б = M_Б(\varphi) \cdot [a]_Б,$$

где $\left[\varphi(a)\right]_Б$ и $[a]_Б$ – координатные столбцы соответствующих векторов.

Доказательство. Пусть $a \in V$ и

$$a = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n,$$

$$\varphi(a) = \gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \ldots + \gamma_n \cdot a_n.$$

Тогда

$$\varphi(a) = \varphi(\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \varphi(a_1) + \alpha_2 \cdot \varphi(a_2) + \ldots + \alpha_n \cdot \varphi(a_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot a_1 + \alpha_{21} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{n1} \cdot a_n) +$$

$$+ \alpha_2 \cdot (\alpha_{12} \cdot a_1 + \alpha_{22} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{n2} \cdot a_n) + \ldots +$$

$$+ \alpha_n \cdot (\alpha_{1n} \cdot a_1 + \alpha_{2n} \cdot a_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot a_n) =$$

$$= (\alpha_1 \cdot \alpha_{11} + \alpha_2 \cdot \alpha_{12} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{1n}) \cdot a_1 +$$

$$+ (\alpha_1 \cdot \alpha_{21} + \alpha_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{2n}) \cdot a_2 + \ldots +$$

$$+ (\alpha_1 \cdot \alpha_{n1} + \alpha_2 \cdot \alpha_{n2} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{nn}) \cdot a_n.$$

Получаем систему равенств

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot \alpha_{11} + \alpha_2 \cdot \alpha_{12} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{1n} = \gamma_1, \\ \alpha_1 \cdot \alpha_{21} + \alpha_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{2n} = \gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 \cdot \alpha_{n1} + \alpha_2 \cdot \alpha_{n2} + \ldots + \alpha_n \cdot \alpha_{nn} = \gamma_n. \end{cases}$$

В матричном виде эту систему можно записать так:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix},$$

или, используя обозначения, это можно записать:

$$M_Б(\varphi) \cdot [a]_Б = [\varphi(a)]_Б. \ \blacktriangle$$

Нахождение базисов $\mathrm{Ker}\,\varphi$ *и* $\mathrm{Im}\,\varphi$ *по* $M_Б(\varphi)$.

Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, φ – линейный оператор пространства V, $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ – базис этого пространства, а $M_Б(\varphi)$ – матрица оператора φ в базисе $Б$. Тогда

$$M_Б(\varphi) = \left([\varphi(a_1)]_Б \quad [\varphi(a_2)]_Б \quad \ldots \quad [\varphi(a_n)]_Б \right).$$

Из взаимно однозначного соответствия между векторами и их координатными столбцами и аксиом 1) и 2) оператора следует, что базису последовательности векторов соответствует базис их координатных столбцов и наоборот. Так как любой вектор из $\mathrm{Im}\,\varphi$ линейно выражается через $(*)$ $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$, то базисом $\mathrm{Im}\,\varphi$ является любой базис последовательности векторов $(*)$. Значит, найдя базис последовательности вектор-столбцов $\left[\varphi(a_1)\right]_Б$, $\left[\varphi(a_2)\right]_Б$, ..., $\left[\varphi(a_n)\right]_Б$, найдем и базис последовательности $(*)$.

С другой стороны, если $a \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $M_Б(\varphi)\cdot[a]_Б = [\theta]_Б$, а т.к. вектор a – произвольный, то возьмем $[a]_Б = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. От матричного уравнения $M_Б(\varphi)\cdot[a]_Б = [\theta]_Б$ перейдем к равносильной системе линейных уравнений, ФСР которой и даст базис $\operatorname{Ker}\varphi$.

Пример. Пусть $\dim V = 4$, $Б = \langle a_1; a_2; a_3; a_4 \rangle$. $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти базисы $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.

Находим по алгоритму базис последовательности векторов $\left[\varphi(a_1)\right]_Б$, $\left[\varphi(a_2)\right]_Б$, $\left[\varphi(a_3)\right]_Б$, $\left[\varphi(a_4)\right]_Б$, компоненты которых стоят в соответствующих столбцах матрицы $M_Б(\varphi)$.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1)\ (2)\ (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} [\varphi(a_1)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_2)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_3)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_4)]_{\text{Б}} \end{matrix}\end{array} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)\ (1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} [\varphi(a_1)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_2)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_3)]_{\text{Б}} & [\varphi(a_4)]_{\text{Б}} \end{matrix}\end{array}$$

Базис последовательности вектор-столбцов состоит из векторов $\left[\varphi(a_1)\right]_{\text{Б}}$ и $\left[\varphi(a_3)\right]_{\text{Б}}$. Значит, $\text{Б}_{\operatorname{Im}\varphi} = \langle \varphi(a_1);\ \ \varphi(a_3) \rangle$, где

$$\varphi(a_1) = 1 \cdot a_1 + (-1) \cdot a_2 + (-2) \cdot a_3 + 3 \cdot a_4 = a_1 - a_2 - 2a_3 + 3a_4,$$

$$\varphi(a_3) = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 + (-1) \cdot a_4 = a_2 + a_3 - a_4.$$

Решаем уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \ \ 0 \cdot x_3 + \ 1 \cdot x_4 = 0, \\ (-1) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ \ 1 \cdot x_3 + \ 2 \cdot x_4 = 0, \\ (-2) \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \ \ 1 \cdot x_3 + \ 1 \cdot x_4 = 0, \\ 3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (-1) \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как основная матрица однородной системы совпадает с матрицей $M_{\text{Б}}(\varphi)$, то подходят преобразования, сделанные выше:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \mathbf{1} & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Находим ФСР:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + \mathbf{x}_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_1 = -x_2 - x_4, \\ \mathbf{x}_3 = -3x_2 - 3x_4. \end{cases}$$

x1	x2	**x**3	x4
-1	1	-3	0
-1	0	-3	1

В результате $Б_{\mathrm{Ker}\,\varphi} = \langle c_1;\ \ c_2 \rangle$, где

$$[c_1]_Б = (-1;\ \ 1;\ \ -3;\ \ 0),\ [c_2]_Б = (-1;\ \ 0;\ \ -3;\ \ 1)$$

или

$$c_1 = (-1)\cdot a_1 + 1\cdot a_2 + (-3)\cdot a_3 + 0\cdot a_4 = -a_1 + a_2 - 3a_3,$$

$$c_2 = (-1)\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + (-3)\cdot a_3 + 1\cdot a_4 = -a_1 - 3a_3 + a_4.$$

Матрица перехода от одного базиса к другому

Определение. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$, $Б_2 = \langle b_1; b_2; \ldots; b_n \rangle$ – два его базиса и векторы второго базиса линейно выражены через первый базис:

$$\begin{cases} b_1 = t_{11} \cdot a_1 + t_{21} \cdot a_2 + \ldots + t_{n1} \cdot a_n, \\ b_2 = t_{12} \cdot a_1 + t_{22} \cdot a_2 + \ldots + t_{n2} \cdot a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = t_{1n} \cdot a_1 + t_{2n} \cdot a_2 + \ldots + t_{nn} \cdot a_n. \end{cases}$$

Матрицей перехода от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$ называется матрица

$$T_{Б_1Б_2} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [b_1]_{Б_1} & [b_2]_{Б_1} & \ldots & [b_n]_{Б_1} \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть A, B – квадратные матрицы одного порядка и для любого вектор-столбца X выполняется равенство $A \cdot X = B \cdot X$, тогда $A = B$.

Для доказательства достаточно последовательно взять вектор-столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 28 (свойства матрицы перехода). *Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем P, $Б_1=\langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$, $Б_2=\langle b_1; b_2; \ldots; b_n \rangle$ – его базисы, $T_{Б_1Б_2}$ – матрица перехода от $Б_1$ к $Б_2$. Тогда:*

1) матрица $T_{Б_1Б_2}$ – обратима;

2) для любого вектора $a \in V$ верны равенства

$$[a]_{Б_1} = T_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_2} \text{ и } [a]_{Б_2} = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_1};$$

3) $T^{-1}_{Б_1Б_2} = T_{Б_2Б_1}$.

Доказательство. 1) Так как последовательность столбцов матрицы $T_{Б_1Б_2}$ есть последовательность координатных вектор-столбцов векторов базиса $Б_2$, то она линейно независима и, следовательно, $\left|T_{Б_1Б_2}\right| \neq 0$. По теореме о существовании обратной матрицы матрица $T_{Б_1Б_2}$ обратима.

2. Пусть

$$a = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n, \; a = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \ldots + \beta_n \cdot b_n,$$

$$T_{Б_1Б_2} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} b_1 = t_{11} \cdot a_1 + t_{21} \cdot a_2 + \ldots + t_{n1} \cdot a_n, \\ b_2 = t_{12} \cdot a_1 + t_{22} \cdot a_2 + \ldots + t_{n2} \cdot a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = t_{1n} \cdot a_1 + t_{2n} \cdot a_2 + \ldots + t_{nn} \cdot a_n. \end{cases}$$

Тогда

$$a = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2 + \ldots + \beta_n \cdot b_n =$$

$$= \beta_1 \cdot (t_{11} \cdot a_1 + t_{21} \cdot a_2 + \ldots + t_{n1} \cdot a_n) +$$
$$+ \beta_2 \cdot (t_{12} \cdot a_1 + t_{22} \cdot a_2 + \ldots + t_{n2} \cdot a_n) + \ldots +$$
$$+ \beta_n \cdot (t_{1n} \cdot a_1 + t_{2n} \cdot a_2 + \ldots + t_{nn} \cdot a_n) =$$

$$= (\beta_1 \cdot t_{11} + \beta_2 \cdot t_{12} + \ldots + \beta_n \cdot t_{1n}) \cdot a_1 +$$
$$+ (\beta_1 \cdot t_{21} + \beta_2 \cdot t_{22} + \ldots + \beta_n \cdot t_{2n}) \cdot a_2 + \ldots +$$
$$+ (\beta_1 \cdot t_{n1} + \beta_2 \cdot t_{n2} + \ldots + \beta_n \cdot t_{nn}) \cdot a_n.$$

Поэтому $\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \cdot t_{11} + \beta_2 \cdot t_{12} + \ldots + \beta_n \cdot t_{1n}, \\ \alpha_2 = \beta_1 \cdot t_{21} + \beta_2 \cdot t_{22} + \ldots + \beta_n \cdot t_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = \beta_1 \cdot t_{n1} + \beta_2 \cdot t_{n2} + \ldots + \beta_n \cdot t_{nn}, \end{cases}$ или

$$[a]_{Б_1} = T_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_2}.$$

Умножив последнее равенство слева на матрицу $T^{-1}_{Б_1Б_2}$, получим

$$[a]_{Б_2} = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_1}.$$

3. Так как $[a]_{Б_2} = T_{Б_2Б_1} \cdot [a_1]_{Б_1} = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot [a_1]_{Б_1}$ для любого столбца $[a]_{Б_1}$, то по замечанию выше получаем, что $T_{Б_2Б_1} = T^{-1}_{Б_1Б_2}$. ▲

Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах

Пусть V – ненулевое n-мерное векторное пространство над полем P, $Б_1 = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$, $Б_2 = \langle b_1; b_2; \ldots; b_n \rangle$ – базисы V, $T_{Б_1Б_2}$ – матрица перехода от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$.

ТЕОРЕМА 29 (о связи матриц линейного оператора в разных базисах). *Пусть φ – линейный оператор векторного n-мерного пространства V над полем P, $Б_1$, $Б_2$ – его базисы. Тогда $M_{Б_2}(\varphi) = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1Б_2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 28

$$(1) \quad [a]_{Б_1} = T_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_2},$$

$$(2)\quad \left[\varphi(a)\right]_{Б_2} = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot \left[\varphi(a)\right]_{Б_1}.$$

Кроме того, по теореме 27

$$(3)\quad \left[\varphi(a)\right]_{Б_2} = M_{Б_2}(\varphi) \cdot [a]_{Б_2},$$

$$(4)\quad \left[\varphi(a)\right]_{Б_1} = M_{Б_1}(\varphi) \cdot [a]_{Б_1}.$$

После этого последовательно получаем:

$$M_{Б_2}(\varphi) \cdot [a]_{Б_2} \overset{(3)}{=} \left[\varphi(a)\right]_{Б_2} \overset{(2)}{=} T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot \left[\varphi(a)\right]_{Б_1} \overset{(4)}{=}$$

$$= T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot [a]_{Б_1} \overset{(1)}{=} T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_2}.$$

В результате

$$M_{Б_2}(\varphi) \cdot [a]_{Б_2} = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1Б_2} \cdot [a]_{Б_2}$$

для любого вектора a из пространства V.

Согласно замечанию перед теоремой 28 это влечёт равенство

$$M_{Б_2}(\varphi) = T^{-1}_{Б_1Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1Б_2}. \ \blacktriangle$$

§3. Собственные векторы и значения линейного оператора

Определение. Пусть V – векторное пространство над полем P. Ненулевой вектор $a \in V$ называется *собственным вектором линейного оператора* φ, если существует скаляр $\alpha \in P$ такой, что

$$\varphi(a) = \alpha \cdot a.$$

При этом α называется *собственным значением* линейного оператора φ, соответствующим собственному вектору *a*. Собственный вектор *a* называется принадлежащим собственному значению α.

Заметим, что всякий собственный вектор $a \in V$ имеет единственное собственное значение, т.к. если $\varphi(a) = \alpha \cdot a$ и $\varphi(a) = \alpha_1 \cdot a$, то $\alpha \cdot a = \alpha_1 \cdot a$ и т.к. $a \neq \theta$, то $\alpha = \alpha_1$.

Для данного $\alpha \in P$ обозначим $V_\alpha = \left\{ a \in V \,\middle|\, \varphi(a) = \alpha \cdot a \right\}$.

Теорема 30. *Для любого $\alpha \in P$, любого векторного пространства V над полем P и его линейного оператора φ множество V_α является подпространством пространства V.*

Доказательство. $V_\alpha \neq \varnothing$, т.к. $\theta \in V_\alpha$ $\left(\varphi(\theta) = \alpha \cdot \theta = \theta \right)$. $V_\alpha \subseteq V$ по определению.

Пусть $a, b \in V_\alpha$, т.е. $\varphi(a) = \alpha \cdot a,\ \varphi(b) = \alpha \cdot b$. Тогда

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b = \alpha \cdot (a+b).$$

Значит, $a + b \in V_\alpha$. Если $a \in V_\alpha$ и $\lambda \in P$, то

$$\varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \varphi(a) = \lambda \cdot (\alpha \cdot a) = \alpha \cdot (\lambda \cdot a) \quad \text{и} \quad \lambda \cdot a \in V_\alpha.$$

Все условия критерия подпространства выполняются, значит, V_α – подпространство пространства *V*. ▲

Нахождение собственных векторов линейного оператора в конечномерном случае

Пусть *V* – ненулевое *n*-мерное векторное пространство над полем *P*, *Б*=$\langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$– базис *V*, φ– линейный оператор пространства *V* с матрицей

$$M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение $\varphi(a)=\lambda\cdot a$, для $a\neq\theta$ и $\lambda\in P$, получаем:

$$\left[\varphi(a)\right]_Б=[\lambda\cdot a]_Б \iff M_Б(\varphi)\cdot[a]_Б=\lambda\cdot[a]_Б \iff$$

$$\iff M_Б(\varphi)\cdot[a]_Б-\lambda\cdot[a]_Б\cdot E=[\theta]_Б \iff$$

$$\iff \left(M_Б(\varphi)-\lambda\cdot E\right)\cdot[a]_Б=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как вектор a неизвестен, то возьмем $[a]_Б=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$M_Б(\varphi)-\lambda\cdot E=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Подставляя эту матрицу и столбец в равенство выше, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda)\cdot x_1 + \quad \alpha_{12}\cdot x_2 + \ldots + \quad \alpha_{1n}\cdot x_n = 0, \\ \alpha_{21}\cdot x_1 + (\alpha_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \ldots + \quad \alpha_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\cdot x_1 + \quad \alpha_{n2}\cdot x_2 + \ldots + (\alpha_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Ненулевые решения у этой однородной системы имеются тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы равен 0, т.е. $\left|M_Б(\varphi)-\lambda\cdot E\right|=0$.

Заметим, что определитель $\left|M_Б(\varphi)-\lambda E\right|$ после вычисления будет многочленом степени n от λ.

Определение. Многочлен $\left|M_Б(\varphi)-\lambda\cdot E\right|$ называется *характеристическим многочленом* оператора φ, а уравнение $\left|M_Б(\varphi)-\lambda\cdot E\right|=0$ – *характеристическим уравнением.*

Это уравнение относительно одного неизвестного λ.

Теорема 31. *Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора не зависят от выбора базиса, в котором вычисляется матрица оператора.*

Доказательство. Пусть $Б_1, Б_2$ – базисы ненулевого n-мерного векторного пространства V над полем P, $M_{Б_1}(\varphi)$, $M_{Б_2}(\varphi)$ – матрицы φ в этих базисах соответственно. Тогда по теореме 19 верно равенство

$$M_{Б_2}(\varphi)=T_{Б_1Б_2}^{-1}\cdot M_{Б_1}(\varphi)\cdot T_{Б_1Б_2}.$$

Поэтому

$$\left|M_{Б_2}(\varphi)-\lambda\cdot E\right|=\left|T_{Б_1Б_2}^{-1}\cdot M_{Б_1}(\varphi)\cdot T_{Б_1Б_2}-\lambda\cdot E\right|=$$

$$= \left| T^{-1}_{Б_1 Б_2} \cdot M_{Б_1}(\varphi) \cdot T_{Б_1 Б_2} - T^{-1}_{Б_1 Б_2} \cdot (\lambda E) \cdot T_{Б_1 Б_2} \right| =$$

$$= \left| T^{-1}_{Б_1 Б_2} \cdot \left(M_{Б_1}(\varphi) - \lambda \cdot E \right) \cdot T_{Б_1 Б_2} \right| =$$

$$= \left| T^{-1}_{Б_1 Б_2} \right| \cdot \left| M_{Б_1}(\varphi) - \lambda \cdot E \right| \cdot \left| T_{Б_1 Б_2} \right| =$$

$$= \frac{1}{\left| T_{Б_1 Б_2} \right|} \cdot \left| T_{Б_1 Б_2} \right| \cdot \left| M_{Б_1}(\varphi) - \lambda \cdot E \right| = \left| M_{Б_1}(\varphi) - \lambda \cdot E \right|.$$

Таким образом $\left| M_{Б_2}(\varphi) - \lambda \cdot E \right| = \left| M_{Б_1}(\varphi) - \lambda \cdot E \right|$.

Значит, характеристический многочлен линейного оператора φ не зависит от выбора базиса, а потому и характеристическое уравнение $\left| M_Б(\varphi) - \lambda \cdot E \right| = 0$ не зависит от выбора базиса пространства *V*. ▲

Решив уравнение $\left| M_Б(\varphi) - \lambda \cdot E \right| = 0$, можно найти все собственные значения оператора φ, а затем для каждого собственного значения λ_0 найти решения однородного уравнения $\left(M_Б(\varphi) - \lambda_0 \cdot E \right) \cdot X = [\theta]_Б$. Тем самым будут найдены все собственные векторы, соответствующие λ_0.

Для этого нужно найти ФСР данной системы, чтобы получить базис подпространства собственных векторов оператора φ, соответствующих собственному значению λ_0.

Линейные операторы с простым спектром

В данном пункте рассматривается случай линейного оператора *n*-мерного векторного пространства, имеющего *n* попарно различных собственных значений.

ТЕОРЕМА 32 (о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих разным собственным значениям).

Если собственные векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$ линейного оператора имеют попарно различные собственные значения, то последовательность $a_1, a_2, \dots, a_m$ – линейно независима.

Доказательство. Пусть φ – линейный оператор векторного пространства *V*, $a_1, a_2, \dots, a_m$– собственные векторы φ, принадлежащие различным собственным значениям, т.е. выполняются условия:

$$\varphi(a_1) = \lambda_1 \cdot a_1, \dots, \varphi(a_m) = \lambda_m \cdot a_m, \tag{1}$$

$$\lambda_i \neq \lambda_k \text{ при } i \neq k. \tag{2}$$

Далее доказательство проводится индукцией по *m*.

Если $m = 1$, то $a_1 \neq \theta$ как собственный вектор и теорема верна. Пусть теорема верна для $m-1$ векторов. Докажем, что она верна для *m* векторов.

Пусть

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m = \theta. \tag{3}$$

Тогда

$$\varphi(\alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m) = \varphi(\theta),$$

$$\alpha_1 \cdot \varphi(a_1) + \ldots + \alpha_m \cdot \varphi(a_m) = \theta \text{ или}$$

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_m \cdot \lambda_m \cdot a_m = \theta. \tag{4}$$

Прибавим к обеим частям равенства (4) соответствующие части равенства (3), умноженные на $(-\lambda_m)$. Тогда получим равенство

$$\alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_m) \cdot a_1 + \ldots + \alpha_{m-1} \cdot (\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot a_{m-1} = \theta. \tag{5}$$

По индуктивному предположению последовательность собственных векторов $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ линейно независима. Поэтому из (5) следует, что

$$\alpha_1 \cdot \left(\lambda_1 - \lambda_m\right) = 0, \ldots, \quad \alpha_{m-1} \cdot \left(\lambda_{m-1} - \lambda_m\right) = 0 .$$

Из (2) следует, что $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{m-1} = 0$. Подставим эти значения в (3) и получим $\alpha_m \cdot a_m = \theta$. Так как $a_m \neq \theta$, то $\alpha_m = 0$. Следовательно, все коэффициенты в (3) нулевые и последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – линейно независима.

Определение. Линейный оператор φ n-мерного векторного пространства V над полем P, имеющий n попарно различных собственных значений, называется *оператором с простым спектром.* Набор всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром.*

Теорема 33 (о свойствах операторов с простым спектром). *Пусть φ – линейный оператор n-мерного векторного пространства V над полем P с простым спектром $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – собственные векторы φ, принадлежащие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда*

1) $Б = \langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ – базис пространства V;

2) $M_Б(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица, по диагонали которой стоят собственные значения;

3) для любого вектора $c \in V$, $c = x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n$ верно равенство $\varphi(c) = \lambda_1 \cdot x_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n \cdot a_n$.

Доказательство. 1) По определению $\lambda_i \neq \lambda_k$ при $i \neq k$. Тогда по теореме 32 последовательность $Б$ – линейно независима. А так как $\dim_P V = n$, то $Б$ – базис пространства V.

2) Так как

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(a_1)=\lambda_1\cdot a_1=\lambda_1\cdot a_1+0\cdot a_2+\ldots+0\cdot a_n,\\ \varphi(a_2)=\lambda_2\cdot a_2=0\cdot a_1+\lambda_2\cdot a_2+\ldots+0\cdot a_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(a_n)=\lambda_n\cdot a_n=0\cdot a_1+0\cdot a_2+\ldots+\lambda_n\cdot a_n\end{array}\right.,$$

то $M_Б(\varphi)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.

3) Пусть $c\in V$, $c=x_1\cdot a_1+\ldots+x_n\cdot a_n$. Тогда

$$\varphi(c)=\varphi(x_1\cdot a_1+\ldots+x_n\cdot a_n)=x_1\cdot\varphi(a_1)+\ldots+x_n\cdot\varphi(a_n)=$$

$$=\lambda_1\cdot x_1\cdot a_1+\lambda_2\cdot x_2\cdot a_2+\ldots+\lambda_n\cdot x_n\cdot a_n.\ \blacktriangle$$

ТЕМА 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§1. Основные определения, свойства и задачи

Истоки теории квадратичных форм лежат в аналитической геометрии, а именно, в теории кривых второго порядка. В данном параграфе разбирается общий случай n переменных (или неизвестных) (в геометрии рассматриваются случаи $n = 2$ и $n = 3$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратичной формой* $f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одной из переменных, или произведением разных переменных с коэффициентом.

Квадратичная форма называется *действительной* или *комплексной* в зависимости от того, являются ли её коэффициенты действительными или комплексными числами.

Считая, что в квадратичной форме f уже сделано приведение подобных, введём для её коэффициентов следующие обозначения: коэффициент при x_i^2 обозначим через α_{ii}, а коэффициент при $x_i x_j$ для $i \neq j$ – через $2\alpha_{ij}$, т.е. предполагаем, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $1 \le i, j \le n$. Ввиду этого сумма $\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i \quad (i \neq j)$ запишется в виде

$$\alpha_{ij} \cdot x_i x_j + \alpha_{ji} \cdot x_j x_i = 2\alpha_{ij} \cdot x_i x_j \ (i \neq j),$$

а вся квадратичная форма f – в виде суммы всевозможных слагаемых $\alpha_{ij} \cdot x_i x_j$, где i, j независимо друг от друга пробегают значения от 1 до n:

$$f = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i x_j .$$

Матрицей квадратичной формы f называется квадратная матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$, составленная из коэффициентов квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ранг r матрицы А называется *рангом* квадратичной формы *f*.

Если $r = n$, т.е. если матрица невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*, в противном случае – *вырожденной*.

Ввиду равенства $a_{ij} = a_{ji}$ матрица А является *симметрической* т.к. её элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Заметим, что любая симметрическая матрица определяет, причём единственным образом, квадратичную форму, имеющую коэффициентами элементы этой матрицы. Известно, что квадратная матрица А тогда и только тогда будет симметрической, когда $A^T = A$, где A^T – транспонированная к матрице А.

Обозначив через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ столбец переменных квадратичной формы *f*, получим $X^T = \left(x_1; \quad x_2; \quad \dots \quad ; x_n\right)$, и тогда квадратичную форму f можно записать в виде

$$f = X^T \cdot A \cdot X;$$

это – *матричная форма записи квадратичной формы f.*

Пример. Пусть

$$f\left(x_1;\quad x_2;\quad x_3\right)=2x_1^2-x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+3x_2x_3 .$$

Тогда матрица этой квадратичной формы будет иметь вид:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$. Если $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X^T=(x_1;x_2;x_3)$, то

$$X^T\cdot A\cdot X=\left(x_1;\quad x_2;\quad x_3\right)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\left(2x_1-x_2;\quad -x_1-x_2+\frac{3}{2}x_3;\quad \frac{3}{2}x_2+3x_3\right)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=$$

$$=2x_1^2-x_2x_1-x_1x_2-x_2^2+\frac{3}{2}x_3x_2+\frac{3}{2}x_2x_3+3x_3^2=$$

$$=2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+3x_2x_3+3x_3^2 .$$

Теорема 34 (об изменении матрицы квадратичной формы при линейном преобразовании). *Если к квадратичной форме* $f=f\left(x_1;\quad x_2;\quad \ldots;\quad x_n\right)$ *с матрицей* A *применить линейное преобразование переменных* $x_i==\sum_{k=1}^{n} q_{ik}\cdot y_k$, $i=1,2,\ldots,n$, *с матрицей* $Q=\left(q_{ij}\right)_{n\times n}$, *то получится квадратичная форма от* n *переменных* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *с матрицей* $Q^T AQ$.

Доказательство.

Пусть $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тогда $Y^T = \left(y_1; \quad y_2; \quad \dots \quad ; y_n\right)$ и линейное преобразование переменных x_i имеет вид $X = Q \cdot Y$. Откуда $X^T = Y^T \cdot Q^T$ и

$$f = X^T \cdot A \cdot X = \left(Y^T \cdot Q^T\right) \cdot A \cdot \left(Q \cdot Y\right) = Y^T \cdot \left(Q^T \cdot A \cdot Q\right) \cdot Y$$

или $f = Y^T \cdot B \cdot Y$, где $B = Q^T \cdot A \cdot Q$.

Матрица B является симметрической, т.к.

$$B^T = \left(Q^T \cdot A \cdot Q\right)^T = Q^T \cdot \left(Q^T \cdot A\right)^T = Q^T \cdot \left(A^T \cdot Q^{TT}\right) =$$

$$= Q^T \cdot A^T \cdot Q = Q^T \cdot A \cdot Q = B.$$

Значит, $B = Q^T \cdot A \cdot Q$ – матрица квадратичной формы от переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$. ▲

Замечание. Если преобразование переменных невырождено, т.е. матрица Q, а вместе с ней и матрица Q^T, невырожденные, то по теореме о ранге произведения матриц ранги матриц A и $Q^T \cdot A \cdot Q$ равны, т.е. *ранг квадратичной формы не изменяется при невырожденных линейных преобразованиях.*

По аналогии с задачами аналитической геометрии рассмотрим вопрос о приведении квадратичной формы невырожденным линейным преобразованием к сумме квадратов переменных с некоторыми коэффициентами, т.е. к виду, в котором коэффициенты при произведении переменных с разными номерами равны нулю. Такой вид квадратичной формы называется *каноническим.*

Теорема 35. *Если квадратичная форма* $f = f(x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ *невырожденным линейным преобразованием переменных приведена к каноническому виду* $f = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \dots + \beta_n y_n^2$, *то количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде равно её рангу.*

Доказательство. По замечанию выше, ранг формы после применения к ней невырожденного линейного преобразования переменных не изменяется. Матрица канонического вида квадратичной формы $f = \beta_1 \cdot y_1^2 + \beta_2 \cdot y_2^2 + \dots + \beta_n \cdot y_n^2$ имеет диагональный вид $B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$, значит, её ранг равен количеству ненулевых элементов, стоящих на главной диагонали. ▲

Теорема 36 (основная теорема о квадратичных формах). *Всякая квадратичная форма некоторым невырожденным линейным преобразованием переменных может быть приведена к каноническому виду, причём если квадратичная форма имеет действительные коэффициенты, то и все коэффициенты соответствующего невырожденного линейного преобразования можно взять действительными.*

Доказательство. Индукция по количеству переменных n.

При $n = 1$ квадратичная форма имеет вид $f = f(x_1) = \alpha_{11} x_1^2$. Требуемое линейное преобразование – это тождественное преобразование $x_1 = y_1$, т.к. f уже имеет канонический вид.

Пусть для всех натуральных чисел $1 \le n \le k-1$, где $k \in N$, теорема верна. Докажем, что теорема верна и для $n = k$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$f = f(x_1;\quad x_2;\quad \dots;\quad x_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j .$$

Для доказательства теоремы достаточно построить соответствующее невырожденное линейное преобразование.

Пусть среди коэффициентов $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{kk}$, т.е. среди коэффициентов при x_i^2 есть ненулевые. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha_{11} \neq 0$. Тогда квадратичная форма

$$h = \alpha_{11}{}^{-1} \cdot (\alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \dots + \alpha_{1k} \cdot x_k)^2$$

содержит такие же слагаемые с переменным x_1, как и f, а квадратичная форма $f_1 = f - h$ будет содержать неизвестные $x_2, x_3, \dots, x_k$, но не будет содержать x_1.

Таким образом, невырожденное линейное преобразование переменных

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \dots + \alpha_{1k} \cdot x_k, \\ y_i = x_i, \ \text{если} \ \ i = 2, 3, \dots, k \end{cases} \tag{$*$}$$

даёт равенство $f = \alpha_{11}{}^{-1} \cdot y_1{}^2 + g$, где g – квадратичная форма от переменных $y_2, y_3, \dots, y_k$, которая получена из f невырожденным линейным преобразованием, обратным к $(*)$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}{}^{-1} \cdot y_1 - \alpha_{11}{}^{-1} \cdot \alpha_{12} \cdot y_2 - \dots - \alpha_{11}{}^{-1} \cdot \alpha_{1k} \cdot y_k, \\ x_i = y_i, \ \text{если} \ \ i = 2, 3, \dots, k. \end{cases}$$

Это преобразование имеет своим определителем число $\alpha_{11}{}^{-1}$, а потому является невырожденным.

Форма g может быть приведена к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием по предположению индукции, что и завершает доказательство.

Если же $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0$, но есть $\alpha_{ij} \neq 0,\ i \neq j$, то можно сделать вспомогательное невырожденное линейное преобразование, приводящее к появлению в форме f квадратов переменных. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha_{12} \neq 0$, т.е. f содержит слагаемое $2\alpha_{12}x_1x_2$.

Применим линейное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_1 + z_2, \\ x_i = z_i, \text{ если } i = 3, \ldots, k. \end{cases}$$

Это преобразование невырождено, т.к. его определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

После преобразования в квадратичной форме появятся квадраты с ненулевыми коэффициентами:

$$2\alpha_{12}x_1x_2 = 2\alpha_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2\alpha_{12}{z_1}^2 - 2\alpha_{12}{z_2}^2,$$

которые не могут сократиться ни с одним из остальных слагаемых, т.к. в каждое из них входит одна из переменных $z_3, \ldots, z_k$.

После этого доказательство сводится к рассмотренному выше случаю. ▲

Замечание. Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду следует из доказательства теоремы.

Пример. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f\left(x_1;\quad x_2;\quad x_3\right) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Так как в этой форме нет квадратов неизвестных, то вначале применим невырожденное линейное преобразование $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f = 2\cdot\left(y_1 - y_2\right)\cdot\left(y_1 + y_2\right) - 4\cdot\left(y_1 - y_2\right)\cdot y_3 + 6\cdot\left(y_1 + y_2\right)\cdot y_3 =$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2\cdot y_1\cdot y_3 + 10\cdot y_2\cdot y_3.$$

Коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, поэтому можно выделить квадрат одного переменного. Для этого положим

$$z_1 = 2y_1 + y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3.$$

Тогда

$$y_1 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}y_3 = \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3 \ -$$

линейное преобразование с матрицей $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

причём невырожденное, так как $\left|B\right| = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

Далее делаем замену

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 + 10y_2y_3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3\right)^2 - 2z_2^2 + 2\left(\frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_3\right)z_3 + 10z_2z_3 =$$

$$=\frac{1}{2}z_1^2-2z_2^2-\frac{1}{2}z_3^2+10z_2z_3.$$

Получилась форма с матрицей $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -1/2 \end{pmatrix}$.

В ней выделился полный квадрат переменного z_1. После этого подвергаем оставшуюся квадратичную форму от переменных z_2, z_3 аналогичным преобразованиям.

Положим

$$t_1=z_1,\ \ t_2=-2z_2+5z_3,\ \ t_3=z_3 \quad \text{или}$$

$$z_1=t_1,\ \ z_2=-\frac{1}{2}t_2+\frac{5}{2}t_3,\ \ z_3=t_3.$$

Это преобразование с матрицей $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$f=\frac{1}{2}t_1^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}t_2+\frac{5}{2}t_3\right)^2-\frac{1}{2}t_3^2+10\cdot\left(-\frac{1}{2}t_2+\frac{5}{2}t_3\right)\cdot t_3=$$

$$=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2+12\,t_3^2.$$

Невырожденное линейное преобразование, сразу переодящее к полученному виду, имеет своей матрицей произведение $A\cdot B\cdot C=$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применив к f невырожденное $\left(|A\cdot B\cdot C|\neq 0\right)$ линейное преобразование

$$x_1=\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2-3t_3,\; x_2=\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2+2t_3,\; x_3=t_3\,,$$

можно сразу получить f в каноническом виде.

Заметим, что квадратичную форму к каноническому виду можно привести и другими преобразованиями, тоже линейными и невырожденными, и получить в общем случае другой результат. Например, квадратичная форма

$$f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$$

преобразованием

$$x_1=\frac{1}{2}t_1+\frac{1}{2}t_2+3t_3,\; x_2=\frac{1}{2}t_1-\frac{1}{2}t_2-t_3,\; x_3=t_3$$

приводится к каноническому виду $f=\frac{1}{2}t_1^2-\frac{1}{2}t_2^2+6t_3^2$, а преобразованием $x_1=t_1+3t_2+2t_3$, $x_2=t_1-t_2-2t_3$, $x_3=t_2$ к виду $f=2t_1^2+6t_2^2-8t_3^2$, причём оба преобразования линейные и невырожденные.

Комплексная квадратичная форма может быть всегда приведена к виду $f=t_1^2+t_2^2+\ldots+t_r^2$, где r – ранг квадратичной формы f.

В случае действительных квадратичных форм верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА (закон инерции действительных квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится* *данная квадратичная форма с действительными коэффициентами, не зависит от выбора этого преобразования.*

Число положительных квадратов канонического вида, к которому приводится квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции.* Число отрицательных квадратов – *отрицательным индексом инерции*, а разность между положительным и отрицательным индексами инерции – *сигнатурой* формы f. При заданном ранге формы задание любого из трёх определённых выше чисел определяет и два других.

ТЕОРЕМА. *Две квадратичные формы от n переменных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

§2. Положительно определённые квадратичные формы

Квадратичная форма f от n переменных с действительными коэффициентами называется *положительно определённой*, если она приводится к каноническому виду, состоящему из n положительных квадратов, т.е. если ранг и положительный индекс инерции этой формы равны числу переменных. Критерием положительной определённости действительной квадратичной формы служит следующая теорема.

ТЕОРЕМА (критерий положительной определённости квадратичной формы). *Квадратичная форма f от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определённой, когда при любых действительных значениях входящих в неё переменных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает только положительные значения.*

К сожалению, эта теорема не дает возможности сразу по коэффициентам действительной квадратичной формы установить, будет ли форма положительно определена или нет.

Введем вспомогательные понятия, в терминах которых можно сформулировать положительную определённость действительной квадратичной формы по её коэффициентам.

Пусть f – действительная квадратичная форма от n переменных с матрицей $A=\left(\alpha_{ij}\right)$. Миноры порядка 1, 2, ..., n этой матрицы, расположенные в левом верхнем углу, т.е. миноры

$$\left|\alpha_{11}\right|,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kk}\end{vmatrix},\ldots,\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает с определителем матрицы А, называются *главными минорами* формы f.

Теорема 37 (критерий Сильвестра положительной определённости действительной квадратичной формы). *Квадратичная форма f от n переменных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определённой, когда все её главные миноры строго положительны.*

Доказательство. Индукция по n. При $n=1$ теорема верна, т.к. форма f в этом случае имеет вид $f=\alpha_{11}x_1^2$ и потому положительно определена тогда и только тогда, когда $\alpha_{11}>0$. Далее предположим, что теорема верна в случае $n-1$ переменной и докажем её для форм с n переменными.

Заметим, что если форма f с действительными коэффициентами, составляющими матрицу А, подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то знак определителя формы, т.е. определителя её матрицы, не меняется. Действительно, после указанного преобразования получаем квадратичную форму с матрицей $Q^T \cdot A \cdot Q$, а т.к. $\left|Q^T\right| = |Q|$, то $\left|Q^T \cdot A \cdot Q\right| = |A| \cdot |Q|^2$, т.е. $|A|$ умножается на положительное число и его знак не меняется.

Пусть дана квадратичная форма $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_i x_j$. Тогда её можно записать в виде

$$f = \varphi\left(x_1;\ \ x_2;\ \ \ldots;\ \ x_{n-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} \cdot x_i x_n + \alpha_{nn} \cdot x_n{}^2, \qquad (1)$$

где φ – квадратичная форма от $n-1$ переменной, составленная из тех членов формы *f*, в которые не входит x_n. Главные миноры φ совпадают со всеми, кроме последнего $|A|$, главными минорами формы *f*.

Пусть форма *f* положительно определена. Форма φ в этом случае тоже положительно определена, т.к. если бы нашлись значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, не все равные нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то, полагая дополнительно $x_n = 0$, получим, что форма *f* принимает не строго положительное значение, хотя не все значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ равны нулю.

Поэтому по индуктивному предположению все главные миноры формы φ, т.е. все главные миноры формы *f*, кроме, быть может, последнего, строго положительны.

Положительность последнего главного минора формы *f*, определителя $|A|$, вытекает, по замечанию выше, из того, что у формы *f* в каноническом виде $f = x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2$ положительно определены все главные миноры её матрицы $Q^T \cdot A \cdot Q$, а значит, $|A| > 0$.

Наоборот, пусть строго положительны все главные миноры формы *f*. Тогда строго положительны и все главные миноры формы φ, и она положительно определена по индуктивному предположению. Следовательно, существует такое невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых переменных $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Это невырожденное линейное преобразование можно дополнить до невырожденного линейного преобразования всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, полагая $x_n = y_n$. Ввиду (1), форма приводится указанным преобразованием к виду

$$f = y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_{n-1}{}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ij} \cdot y_i y_n + \beta_{nn} \cdot y_n{}^2. \quad (2)$$

Заметим, что

$$y_i{}^2 + 2\beta_{in} \cdot y_i y_n = \left(y_i + \beta_{in} \cdot y_n\right)^2 - \beta_{in}^2 \cdot y_n{}^2.$$

Поэтому невырожденное линейное преобразование $z_i = y_i + \beta_{in} y_n$, $z_n = y_n$, приводит f из (2) к каноническому виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i{}^2 + \gamma \cdot z_n{}^2. \quad (3)$$

Определитель формы, стоящей в правой части равенства (3), равен γ. Поэтому достаточно доказать, что число γ положительно.

Так как правая часть равенства (3) получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был, как последний из главных миноров, строго положителен, то и определитель формы, стоящей в правой части равенства (3), положителен. Значит, $\gamma > 0$, что и завершает доказательство.

Примеры.

1. Квадратичная форма

$$f = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$$

положительно определена, т.к. все её главные миноры

$$|5| = 5,\quad \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 9,\quad \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

строго положительны.

2. Квадратичная форма

$$f = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

не будет положительно определённой, т.к. её второй главный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12$ отрицателен.

По аналогии с положительно определёнными квадратичными формами можно ввести *отрицательно определённые квадратичные формы,* т.е. такие невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, канонический вид которых содержит лишь отрицательные квадраты переменных. Вырожденные квадратичные формы, канонический вид которых состоит из квадратов одного знака, называются *полуопределёнными. Неопределёнными* называются квадратичные формы, канонический вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты переменных.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е и з д а н и е

Кузьмичёв Анатолий Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–2

Курс лекций для студентов 1-го курса
математическогофакультета

Редактор В.В.Козлова

Компьютерная вёрстка А.Ю.Пугач

Лицензия ЛР№020059 от 24.03.97 г.

Гигиенический сертификат №54.НК.05.953.П.000149.12.02 от 27.12.02 г.

Подписано в печать 16.06.08 г. Формат бумаги 60x84/16.

Печать RISO. Уч.-изд.л. 6,38. Усл.п.л. 5,93. Тираж 100 экз.

Заказ №44

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, Вилюйская, 28