ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет»

А.И.Кузьмичёв

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–1

Курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета

Новосибирск 2007

УДК 512(075.8) Печатается по решению
ББК 22.143я73-2 редакционно-издательского совета НГПУ
К 893

Р е ц е н з е н т ы :

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ СО РАН

М.В.Нещадим

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры МФ НГПУ

Ю.В.Сосновский

Н а у ч н ы й р е д а к т о р :

кандидат физико-математических наук, зав.кафедрой алгебры МФ НГПУ

М.П.Тропин

К 893 **Кузьмичёв, А.И.** Линейная алгебра–1: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета/ А.И.Кузьмичёв. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007. – 134 с.

Пособие входит в серию «Учебно-дидактические комплексы кафедры алгебры» и содержит конспект лекций по алгебре для студентов первого курса математического факультета. В него входит первая часть раздела «Линейная алгебра», а также тема «Общеалгебраические понятия». Пособие рассчитано на один семестр.

УДК 512(075.8)

ББК 22.143я73-2

© Кузьмичёв А.И., 2007

© ГОУ ВПО НГПУ, 2007

Тема 1. Матрицы и определители

§ 1. Матрицы и действия над ними

Матрицы

Определение. Прямоугольная таблица с выделенными строками и столбцами, на пересечении которых стоит единственный элемент, называется *матрицей*.

Обозначение. В общем виде матрица A, у которой m строк и k столбцов, записывается следующим образом:

$$A_{m\times k}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk}\end{pmatrix}=\left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k};$$

$m\times k$ – *размерность* матрицы, α_{ij} – элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце.

Строки матрицы $A_{m\times k}$ обозначаются так:

$$A_{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k}\end{pmatrix},$$

$$A_{(2)}=\begin{pmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k}\end{pmatrix},$$

......

$$A_{(m)}=\begin{pmatrix}\alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mk}\end{pmatrix};$$

а столбцы - так:

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\\ \vdots\\ \alpha_{m1}\end{pmatrix},\; A^{(2)}=\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\\ \vdots\\ \alpha_{m2}\end{pmatrix},\dots,\; A^{(k)}=\begin{pmatrix}\alpha_{1k}\\ \alpha_{2k}\\ \vdots\\ \alpha_{mk}\end{pmatrix}.$$

Номера строк записываются внизу в скобках, столбцов – вверху в скобках.

Замечание. В случае необходимости элементы строк матрицы A можно отделять запятыми, например,

$$A_{(3)}=\left(\alpha_{31},\quad \alpha_{32},\quad \ldots,\quad \alpha_{3k}\right),$$

или точками с запятой:

$$A_{(3)}=\left(\alpha_{31};\quad \alpha_{32};\quad \ldots;\quad \alpha_{3k}\right).$$

Определение. Две матрицы A и B называются *равными*, если равны их размерности и они равны поэлементно, то есть если $A = A_{m\times k} = \left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k}$, $B = B_{n\times s} = \left(\beta_{ij}\right)_{n\times s}$ то $m = n$, $k = s$ и $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ для всех $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le k$.

Матрица A размерности $n \times n$ (в которой количество строк равно количеству столбцов) называется *квадратной матрицей* размерности n.

Действия с матрицами

Можно выделить следующие действия с матрицами.

1) Умножение матрицы на скаляр.

По определению

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mk} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda\cdot\alpha_{11} & \lambda\cdot\alpha_{12} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{1k} \\ \lambda\cdot\alpha_{21} & \lambda\cdot\alpha_{22} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\cdot\alpha_{m1} & \lambda\cdot\alpha_{m2} & \dots & \lambda\cdot\alpha_{mk} \end{pmatrix} = \left(\lambda\cdot\alpha_{ij}\right)_{m\times k},$$

т.е. произведение матрицы $A = A_{m\times k}$ на скаляр λ равно матрице размерности $m\times k$, каждый элемент которой равен произведению λ на соответствующий элемент матрицы A.

2) Сложение матриц.

Суммой матриц $A=\left(\alpha_{ij}\right)_{m\times k}$ и $B=\left(\beta_{ij}\right)_{m\times k}$ одной и той же размерности $m\times k$ называется такая матрица $C=\left(\gamma_{ij}\right)_{m\times k}$, что $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}+\beta_{ij}$ для всех $1\le i\le m,\ 1\le j\le k$, т.е. сложение производится поэлементно, причём складываться могут только матрицы одинаковой размерности.

Пример.

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 3-4 & -3-2 & 6+2 \\ 6-2 & 3-6 & 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 8 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

3) Умножение строки на столбец.

Произведением строки $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix}$ длины k справа на столбец $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ такой же длины k называется число (или матрица размерности 1×1), равное

$$(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_k)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_k\end{pmatrix}=\alpha_1\cdot\beta_1+\alpha_2\cdot\beta_2+\dots+\alpha_k\cdot\beta_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot\beta_i\,.$$

Мнемоническое правило умножения строки на столбец той же длины состоит в следующем. Сначала нужно повернуть строку на 90° по часовой стрелке, приставить к столбцу так, чтобы первый элемент строки оказался напротив первого элемента столбца, второй – напротив второго и т.д. Так как длины строки и столбца совпадают, то последний элемент строки будет стоять напротив последнего элемента столбца. Перемножив стоящие напротив элементы и сложив полученные произведения, получим результат умножения строки на столбец.

Пример.

$$(-2 \quad 3 \quad 4 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}=(-2)\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot(-1)+1\cdot 2=0+3-4+2=1.$$

4) Умножение матриц.

Произведением матрицы A размерности $m\times k$ на матрицу B размерности $k\times r$ называется матрица C размерности $m\times r$, вычисляемая по правилу:

$$A_{m\times k}\cdot B_{k\times r}=C_{m\times r}=\begin{pmatrix}A_{(1)}\cdot B^{(1)} & A_{(1)}\cdot B^{(2)} & \dots & A_{(1)}\cdot B^{(r)}\\ A_{(2)}\cdot B^{(1)} & A_{(2)}\cdot B^{(2)} & \dots & A_{(2)}\cdot B^{(r)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{(m)}\cdot B^{(1)} & A_{(m)}\cdot B^{(2)} & \dots & A_{(m)}\cdot B^{(r)}\end{pmatrix}.$$

Элемент, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы C $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le r)$ равен произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Отметим, что количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B или, другими словами, длина строки матрицы A должна равняться длине столбца матрицы B. Это необходимо для того, чтобы можно было выполнить умножение строк матрицы A на столбцы матрицы B.

5) Транспонирование матрицы.

Дана матрица $A_{m \times k} = \left(\alpha_{ij}\right)_{m \times k}$. *Транспонированной* к ней называется матрица $A^T = B_{k \times m} = \left(\beta_{ij}\right)_{k \times m}$ такая, что $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$ для всех $1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k$.

Легко видеть, что каждый элемент матрицы A^T получается перемещением элемента α_{ij} в j-ю строку и i-й столбец. Другими словами, транспонированная матрица A^T получается в результате замены строк матрицы A её соответствующими столбцами или, наоборот, заменой столбцов матрицы A соответствующими строками.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Теорема 1 (свойства действий с матрицами).

Для любых матриц A, B, C подходящих размеров и скаляров α, β верны следующие равенства.

1) $A+(B+C)=(A+B)+C$ *(ассоциативность сложения);*

2) $A+B=B+A$ *(коммутативность сложения);*

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,\quad (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

(дистрибутивность умножения относительно сложения и сложения относительно умножения);

4) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B,\quad (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$*;*

5) $\alpha\cdot A=A\cdot\alpha,\quad \alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$*;*

6) $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)$*;*

7) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ *(ассоциативность умножения);*

8) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$*;*

9) существует матрица $\mathrm{O}_{m\times k}$*, называемая нулевой, такая, что для всех матриц* $A_{m\times k}$ *выполняется равенство:*

$$A_{m\times k}+\mathrm{O}_{m\times k}=\mathrm{O}_{m\times k}+A_{m\times k}=A_{m\times k};$$

10) для любой матрицы $A_{m\times k}$ *существует матрица* $B_{m\times k}$*, называемая противоположной, такая, что*

$$A_{m\times k}+B_{m\times k}=B_{m\times k}+A_{m\times k}=\mathrm{O}_{m\times k};$$

Матрица, противоположная к A, обозначается $-A$*.*

11) $1\cdot A=A,\quad (-1)\cdot A=-A$*;*

12) во множестве всех квадратных матриц размерности $n\times n$ *существует матрица* $E=E_{n\times n}$*, называемая единичной, такая, что для любой квадратной матрицы* $A=A_{n\times n}$*:*

$$A\cdot E=E\cdot A=A;$$

13) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$, т.е. умножение матриц не коммутативно.

Доказательство. Все свойства доказываются прямым вычислением по определению.

Докажем, например, первую часть свойства 3. Для вычисления $A \cdot (B + C)$ исходные матрицы должны иметь следующие размерности: $A = A_{m \times k}$, $B = B_{k \times r}$, $C = C_{k \times r}$. В этом случае, согласно определению операций, матрицы $A \cdot (B + C)$ и $A \cdot B + A \cdot C$ существуют и имеют одинаковую размерность $m \times r$.

Докажем их поэлементное равенство. Пусть $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, $C = (\gamma_{ij})$. Вычислим элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы в левой части равенства:

$$A_{(i)} \cdot (B + C)^{(j)} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{is} \cdot (\beta_{sj} + \gamma_{sj}).$$

Затем найдем элемент i-й строки и j-ого столбца матрицы в правой части:

$$A_{(i)} \cdot B^{(j)} + A_{(i)} \cdot C^{(j)} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{is} \cdot \beta_{sj} + \sum_{s=1}^{k} \alpha_{is} \cdot \gamma_{sj} =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} (\alpha_{is} \cdot \beta_{sj} + \alpha_{is} \cdot \gamma_{sj}) = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{is} \cdot (\beta_{sj} + \gamma_{sj}).$$

Эти элементы совпадают, поэтому, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Докажем свойство 7. Для существования произведений $A \cdot B$, $B \cdot C$, $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ необходимо, чтобы исходные матрицы имели следующие размерности: $A = A_{k \times n}$, $B = B_{n \times t}$, $C = C_{t \times s}$. Тогда произведения $(A \cdot B) \cdot C$

и $A\cdot(B\cdot C)$ имеют одинаковую размерность $k\times s$. Докажем их поэлементное равенство.

Легко видеть, что для действий со строками и столбцами выполняются равенства

$$A_{(i)}\cdot\left(B^{(1)}+B^{(2)}\right)=A_{(i)}B^{(1)}+A_{(i)}B^{(2)}$$

и

$$A_{(i)}\cdot\left(B^{(1)}+\ldots+B^{(t)}\right)=A_{(i)}\cdot B^{(1)}+\ldots+A_{(i)}\cdot B^{(t)}.$$

Обозначим $T_{k\times s}=(A\cdot B)\cdot C$, $H_{k\times s}=A\cdot(B\cdot C)$. Тогда

$$t_{ij}=(A\cdot B)_{(i)}C^{(j)}=\left(A_{(i)}\cdot B^{(1)};A_{(i)}\cdot B^{(2)};\ldots;A_{(i)}\cdot B^{(t)}\right)\cdot C^{(j)}=$$

$$=A_{(i)}\cdot B^{(1)}\cdot\gamma_{1j}+A_{(i)}\cdot B^{(2)}\cdot\gamma_{2j}+\ldots+A_{(i)}\cdot B^{(t)}\cdot\gamma_{tj}=$$

$$=A_{(i)}\cdot\left(B^{(1)}\cdot\gamma_{1j}+B^{(2)}\cdot\gamma_{2j}+\ldots+B^{(t)}\cdot\gamma_{tj}\right)=$$

$$=A_{(i)}\cdot\left(\begin{pmatrix}\beta_{11}\cdot\gamma_{1j}\\ \beta_{21}\cdot\gamma_{1j}\\ \vdots\\ \beta_{n1}\cdot\gamma_{1j}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_{12}\cdot\gamma_{2j}\\ \beta_{22}\cdot\gamma_{2j}\\ \vdots\\ \beta_{n2}\cdot\gamma_{2j}\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}\beta_{1t}\cdot\gamma_{tj}\\ \beta_{2t}\cdot\gamma_{tj}\\ \vdots\\ \beta_{nt}\cdot\gamma_{tj}\end{pmatrix}\right)=$$

$$=A_{(i)}\cdot\begin{pmatrix}\beta_{11}\cdot\gamma_{1j}+\beta_{12}\cdot\gamma_{2j}+\ldots+\beta_{1t}\cdot\gamma_{tj}\\ \beta_{21}\cdot\gamma_{1j}+\beta_{22}\cdot\gamma_{2j}+\ldots+\beta_{2t}\cdot\gamma_{tj}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{n1}\cdot\gamma_{1j}+\beta_{n2}\cdot\gamma_{2j}+\ldots+\beta_{nt}\cdot\gamma_{tj}\end{pmatrix}=$$

$$= A_{(i)} \cdot \begin{pmatrix} B_{(1)} \cdot C^{(j)} \\ B_{(2)} \cdot C^{(j)} \\ \vdots \\ B_{(n)} \cdot C^{(j)} \end{pmatrix} = A_i \cdot (B \cdot C)^{(j)} = h_{ij} .$$

Что и требовалось доказать.

Докажем свойство 8. Пусть $A = A_{m \times k}$, $B = B_{k \times r}$. Тогда $(A \cdot B)^T$ имеет размерность $r \times m$, как и матрица $B^T \cdot A^T$. Докажем поэлементное равенство этих матриц.

Пусть $(A \cdot B)^T = C = (c_{ij})$, $B^T \cdot A^T = H = (h_{ij})$. Тогда

$$c_{ij} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \ldots & \alpha_{jk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \\ \beta_{ki} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{j1} \cdot \beta_{1i} + \alpha_{j2} \cdot \beta_{2i} + \ldots + \alpha_{jk} \cdot \beta_{ki} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{js} \cdot \beta_{si} .$$

С другой стороны,

$$h_{ij} = \left(B^T\right)_{(i)} \cdot \left(A^T\right)^{(j)} = \begin{pmatrix} \beta_{1i} & \beta_{2i} & \ldots & \beta_{ki} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{j1} \\ \alpha_{j2} \\ \vdots \\ \alpha_{jk} \end{pmatrix} =$$

$$= \beta_{1i} \cdot \alpha_{j1} + \beta_{2i} \cdot \alpha_{j2} + \ldots + \beta_{ki} \cdot \alpha_{jk} =$$

$$= \alpha_{j1} \cdot \beta_{1i} + \alpha_{j2} \cdot \beta_{2i} + \ldots + \alpha_{jk} \cdot \beta_{ki} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{js} \cdot \beta_{si} = c_{ij} .$$

Следовательно $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Докажем свойство 9. Легко видеть, что матрица

$$\mathrm{O}_{m\times k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

имеющая m строк и k столбцов, является требуемой, т.к. для любой матрицы $A = A_{m\times k}$ выполняется равенство

$$A + \mathrm{O} = \mathrm{O} + A = A.$$

Матрица $\mathrm{O}_{m\times k}$ называется *нулевой* матрицей размерности $m \times k$. Она единственна, так как если бы существовала еще одна матрица O' с этим же свойством, то, в частности,

$$\mathrm{O} + \mathrm{O}' = \mathrm{O}' + \mathrm{O} = \mathrm{O} \text{ и } \mathrm{O}' + \mathrm{O} = \mathrm{O} + \mathrm{O}' = \mathrm{O}', \text{ т. е. } \mathrm{O} = \mathrm{O}'.$$

Докажем свойство 10. Пусть $A = A_{m\times k} = (\alpha_{ij})$. Положим

$$B_{m\times k} = \begin{pmatrix} -\alpha_{11} - \alpha_{12} \dots - \alpha_{1k} \\ -\alpha_{21} - \alpha_{22} \dots - \alpha_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\alpha_{m1} - \alpha_{m2} \dots - \alpha_{mk} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $A_{m\times k} + B_{m\times k} = B_{m\times k} + A_{m\times k} = \mathrm{O}_{m\times k}$.

Причём для каждой матрицы $A_{m\times k}$ матрица $B_{m\times k}$ единственна. Она обозначается $-A_{m\times k}$. Кроме того,

$$-A_{m\times k} = (-1) \cdot A_{m\times k}$$

Докажем свойство 12. Пусть

$$E = E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для любой квадратной матрицы $A = A_{n\times n}$ верно равенство $A\cdot E = E\cdot A = A$. Заметим, что если бы существовали две матрицы E_1, E_2 размерности $n\times n$ такие, что выполняются равенства $E_1\cdot A = A\cdot E_1 = A$ и $A\cdot E_2 = E_2\cdot A = A$, то $E_1\cdot E_2 = E_1$ и $E_1\cdot E_2 = E_2$, т.е. $E_1 = E_2$. Это означает, что матрица *E единственна*. Она называется *единичной* матрицей по умножению во множестве всех квадратных матриц размерности $n\times n$.

Докажем свойство 13. Для выполнения равенства $A\cdot B = B\cdot A$ необходимо, чтобы матрицы *A* и *B* были квадратными одной и той же размерности $n\times n$. Возьмем $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix},\ B\cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},\ \text{т.е. } A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Для других размерностей $n\times n$ $(n > 1)$ достаточно брать матрицы, у первой из которых в левом верхнем углу стоит матрица *A*, а у второй – матрица *B*, а все остальные элементы равны нулю.▲

Определение. Элементы $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называются *диагональными*. Они образуют *главную диагональ* матрицы *A*.

§2. Перестановки и подстановки

Перестановки

Обозначим $M_n = \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ – множество, содержащее первые n натуральных чисел.

Определение. Упорядоченная n-ка из всех элементов множества M_n, взятых ровно по одному разу, называется *перестановкой* множества M_n. Перестановки будем обозначать как $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)$, где все $\alpha_i \in M_n$ и $\alpha_i = \alpha_j \ \Leftrightarrow\ i = j$.

Две перестановки $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)$ и $(\beta_1;\ \beta_2;\ \dots;\ \beta_n)$ элементов множества M_n *равны* тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, \dots,\ \alpha_n = \beta_n .$$

Если $n \neq m$, то перестановки множеств M_n и M_m *несравнимы*, а, значит, и не могут быть равными.

Замечание. Если взять конечное множество M, состоящее ровно из n различных элементов, $M = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$, то можно определить понятие *перестановки* и для элементов множества M. Однако, если отождествить элемент a_i с его номером i, то перестановка $\left(a_{\alpha_1};\ a_{\alpha_2};\ \dots;\ a_{\alpha_n}\right)$ элементов множества M отождествляется с перестановкой $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots;\ \alpha_n)$ элементов множества M_n. В дальнейшем мы будем рассматривать только перестановки множества M_n.

Примеры. 1. $M_3 = \{1;\ 2;\ 3\}$. Выпишем все перестановки элементов множества M_3:

$$(1;\ \ 2;\ \ 3),(1;\ \ 3;\ \ 2),(2;\ \ 1;\ \ 3),$$

$$(2;\ \ 3;\ \ 1),(3;\ \ 1;\ \ 2),(3;\ \ 2;\ \ 1).$$

2. $M=\{\mathbf{!}\ ;\ \ \square\ ;\ \ \mathbf{W}\}$. Обозначим $a_1=\mathbf{!}$, $a_2=\square$, $a_3=\mathbf{W}$. Тогда все перестановки множества M получаются из перестановок множества M_3 заменой номера i на элемент a_i:

$$(\mathbf{!}\ ;\ \ \square\ ;\ \ \mathbf{W}),(\mathbf{!}\ ;\ \ \mathbf{W};\ \ \square\ ),(\square\ ;\ \ \mathbf{!}\ ;\ \ \mathbf{W}),$$

$$(\square\ ;\ \ \mathbf{W};\ \ \mathbf{!}\ ),(\mathbf{W};\ \ \mathbf{!}\ ;\ \ \square\ ),(\mathbf{W};\ \ \square\ ;\ \ \mathbf{!}\ ).$$

Теорема 2. *Количество всех различных перестановок множества* M_n *равно* $n!$.

Доказательство. Индукция по n.

Если $n=1$, то $M_1=\{1\}$ и перестановка элементов этого множества всего одна: (1). Количество всех перестановок множества M_1 равно $1=1!$, т.е. утверждение теоремы верно.

Допустим, что утверждение теоремы верно для $k=n$, т.е. количество всех различных перестановок множества M_n равно $n!$. Докажем утверждение теоремы для $k=n+1$, т.е. что количество различных перестановок множества M_{n+1} равно $(n+1)!$.

Разобьем множество всех перестановок множества M_{n+1} на $n+1$ непересекающееся подмножество: в первом – все перестановки, начинающихся с 1, во втором – с 2, в третьем – с 3 и т.д.:

$$\begin{cases}(1;\ \ 2;\ \ \ldots;\ \ n;\ \ n+1), \\ (1;\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (1;\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots);\end{cases} \begin{cases}(2;\ \ \ldots), \\ (2;\ \ \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots \\ (2;\ \ \ldots);\end{cases} \ldots\ldots \begin{cases}(n+1;\ \ \ldots), \\ (n+1;\ \ \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1;\ \ \ldots).\end{cases}$$

В каждом выделенном подмножестве находятся все перестановки с одним и тем же фиксированным элементом и n изменяющимся. По предположению индукции таких элементов будет ровно $n!$. А так как подмножества непересекающиеся и их $(n+1)$, то всего различных перестановок множества M_{n+1} будет $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$. Утверждение доказано. ▲

Определение. Говорят, что два числа в перестановке образуют *инверсию*, если $i > j$, но i расположено в перестановке левее *j*.

Пример. Пусть $(2;\ 4;\ 3;\ 6;\ 1;\ 5)$ – перестановка множества M_6. Выпишем пары чисел, образующие инверсии в данной перестановке:

$$2 \leftrightarrow 1,\ 4 \leftrightarrow 3,\ 4 \leftrightarrow 1,\ 3 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 5.$$

Итого, 6 инверсий.

Определение. Перестановка называется *чётной*, если в ней чётное количество инверсий, и *нечётной* в противном случае.

В предыдущем примере перестановка $(2;\ 4;\ 3;\ 6;\ 1;\ 5)$ - чётная.

Определение. *Транспозицией* называется такое преобразование перестановки, при котором в ней меняются местами ровно два каких-либо символа.

Пример.

$$(2;\ 4;\ 1;\ 3) \to (4;\ 2;\ 1;\ 3) \text{ или } (2;\ 4;\ 1;\ 3) \to (3;\ 4;\ 1;\ 2).$$

ТЕОРЕМА 3. *Все* $n!$ *различных перестановок множества* M_n *можно расположить в таком порядке, что каждая следующая получается из предыдущей при помощи одной транспозиции, причем эту цепочку можно начинать с любой перестановки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по *n*.

Для $n=1$ перестановка единственна и расположена должным образом.

Для $n=2$ получаем: $(1;\ 2) \to (2;\ 1)$ или $(2;\ 1) \to (1;\ 2)$. Других случаев нет, т.е. для $n = 1,\ 2$ утверждение верно.

Пусть утверждение теоремы верно для $k = n$. Докажем его для $k = n + 1$.

Пусть $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\ ;\alpha_{n+1})$ – произвольная перестановка множества M_{n+1}. Зафиксируем первый элемент перестановки α_1 и будем менять местами остальные n её элементов. В этом случае будут получаться перестановки остальных n элементов. Для них по предположению индукции утверждение теоремы верно, поэтому все $n!$ перестановок множества M_{n+1}, начинающиеся с элемента α_1, можно расположить в требуемом порядке.

Первой в полученной цепочке будет стоять перестановка $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\ ;\alpha_{n+1})$. Пусть последняя перестановка в этой цепочке имеет вид $(\alpha_1; \dots ;\alpha_2; \dots)$. От неё с помощью одной транспозиции перейдем к перестановке $(\alpha_2; \dots ;\alpha_1; \dots)$. Далее, аналогично предыдущему, все перестановки, начинающиеся с элемента α_2, расположим в требуемой последовательности.

От последней перестановки $(\alpha_2; \dots ;\alpha_3; \dots)$ в этой цепочке при помощи ровно одной транспозиции перейдем к перестановке $(\alpha_3; \dots ;\alpha_2; \dots)$ и т.д.

Таким образом, все $(n+1)!$ перестановок множества M_{n+1}, начиная с $(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\ ;\alpha_{n+1})$, будут расположены в требуемом порядке. Теорема доказана.▲

ТЕОРЕМА 4. *Каждая транспозиция меняет чётность перестановки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два случая.

1) Транспозиция меняет местами два рядом стоящих символа: $(\dots; i; j\ ;\dots) \to (\dots;\ j;\ i;\ \dots)$, оставляя остальные на их местах.

Так как все остальные символы остаются на своих местах, то они сохраняют все прежние инверсии и не образуют новых инверсий ни между собой, ни с символами i и j. Переставляя же i и j, мы либо увеличим количество инверсий на одну (если $i<j$), либо уменьшим на одну (если $i>j$). Тем самым количество инверсий изменится на 1, а значит, чётность перестановки изменится на противоположную.

2) Транспозиция меняет местами два символа, между которыми находится k элементов $(k \ge 1)$:

$$(\dots;i;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\alpha_k;\ j;\dots) \to (\dots;j;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\alpha_k;\ i;\dots),$$

оставляя остальные на своих местах.

Перейдем от первой перестановки ко второй, меняя местами лишь рядом стоящие символы:

$$(\dots;i;\ \alpha_1;\ \alpha_2;\ \dots\alpha_k;\ j;\dots) \to (\dots;\alpha_1;i;\ \alpha_2;\ \dots\alpha_k;\ j;\dots) \to$$

$$(\dots;\alpha_1;\alpha_2;\ i;\ \dots\alpha_k;\ j;\dots) \to (\dots;\alpha_1;\alpha_2;\ \alpha_3;\ i;\ \dots\alpha_k;\ j;\dots) \to \dots$$

$$(\ldots;\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots\alpha_k;i;\ \ \ j;\ldots)\to(\ldots;\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots\alpha_k;j;\ \ i;\ldots)\to\ldots$$

$$(\ldots;\alpha_1;j;\ \ \alpha_2;\ \ldots\alpha_k;\ i;\ldots)\to(\ldots;j;\ \alpha_1;\alpha_2;\ \ldots\alpha_k;\ i;\ldots).$$

При этом было применено ровно $2k+1$ транспозиций, каждая из которых по предыдущему пункту меняет чётность соответствующей перестановки. Так как $2k+1$ - нечётное число, то чётность исходной и полученной перестановок различны. Это доказывает теорему во втором случае.▲

Теорема 5. *Для любого $n \geq 2$ количество чётных перестановок множества M_n равно количеству нечётных и равно $\frac{1}{2}\cdot n!$.*

Доказательство. По теореме 3 все $n!$ различных перестановок множества M_n можно расположить в цепочку, в которой каждая следующая получается из предыдущей при помощи транспозиции, а по теореме 4 каждая транспозиция меняет чётность перестановки. При $n \geq 2$ число $n!$ чётное. Значит, цепочки могут быть двух видов:

чётная → нечётная → чётная → …→ нечётная

или

нечётная → чётная → нечётная →…→ чётная.

Ровно половина перестановок и в той, и в другой цепочке будет чётными, а другая половина нечётными, т.е. тех и других по $\frac{1}{2}\cdot n!$▲

Подстановки

Определение. *Взаимно однозначным отображением* множества A на множество B называется правило, которое:

1) каждому элементу множества A ставит в соответствие единственный элемент множества B;

2) в каждый элемент множества B переходит единственный элемент множества A (в частности, разные элементы множества A переходят в разные элементы множества B).

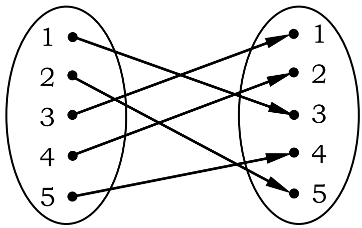
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Подстановкой* множества M_n называется взаимно однозначное отображение множества M_n на себя (т.е. на множество M_n). Две подстановки множества M_n *равны*, если они одинаково действуют на элементах множества M_n, т.е. если для любого $k \in M_n$ выполняется равенство $\varphi_1(k) = \varphi_2(k)$.

Существуют различные способы задания подстановок. Рассмотрим некоторые из них.

1. Функциональный способ: задается образ каждого элемента множества M_n. Например, возьмем $M_5 = \{1; \ 2; \ 3; \ 4; \ 5\}$ и зададим подстановку f так:

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 4.$$

2. При помощи графа. Ту же подстановку можно задать графом, в котором начало стрелки исходит из прообраза, а конец стрелки указывает на образ.

f:


3. Табличный способ. Подстановка задается таблицей из двух строк. В верхней её строке записываются элементы множества M_n, а в нижней – под каждым элементом его

образ. При этом нельзя путать такой способ задания подстановок с матрицами размерности $2 \times n$. Обычно из контекста каждого рассуждения или задачи ясно, когда рассматриваются матрицы, а когда - подстановки.

Рассмотренная выше подстановка может быть задана табличным способом так: $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Из определения равенства подстановок получаем, что

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

При табличном способе задания подстановок и в верхней и в нижней строках находятся перестановки множества M_n. Очевидно, если поменять местами любые два столбца, то подстановка не изменится.

Определение. Запись подстановки множества M_n в виде $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, при которой в верхней строке элементы стоят по порядку, называется *канонической*.

Подстановки множества M_n часто называют подстановками степени *n*. Множество всех подстановок степени *n* обозначается через S_n.

Заметим, что если $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, то $\varphi(1) = \alpha_1$, $\varphi(2) = \alpha_2, \dots, \varphi(n) = \alpha_n$. Например, если $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, то $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 1$.

Замечание. Переход от одной табличной записи подстановки к другой не меняет суммарной чётности её верхней и нижней строк, так как такой переход можно осуществить при помощи конечного числа транспозиций столбцов. Но при одной транспозиции столбцов меняется чётность каждой из двух строк подстановки, значит, суммарная чётность строк остаётся неизменной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подстановка называется *чётной*, если сумма инверсий её верхней и нижней строк чётная, и *нечётной* в противном случае.

ТЕОРЕМА 6. *Количество всех подстановок множества* M_n *равно* $n!$. *При этом количество чётных равно количеству нечётных и равно* $\frac{1}{2}\cdot n!$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем все подстановки в каноническом виде. Тогда две подстановки различны, если различны их нижние строки, которые являются перестановками множества M_n. Различных нижних строк $n!$, а значит столько же и различных подстановок.

У всех подстановок, записанных в каноническом виде, верхняя строка имеет нуль инверсий. Значит, чётность подстановки в этом случае определяется чётностью нижней строки. По теореме 5 получаем, что чётных и нечётных подстановок будет одинаковое количество, равное $\frac{1}{2}\cdot n!$.▲

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Знаком* подстановки φ называется число

$$\operatorname{sgn}\varphi = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi \text{ четная;} \\ -1, \text{ если } \varphi \text{ нечетная.} \end{cases}$$

ПРИМЕР. Пусть $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. В верхней строке нуль инверсий, в нижней – пять:

$$3 \leftrightarrow 1,\ 3 \leftrightarrow 2,\ 5 \leftrightarrow 1,\ 5 \leftrightarrow 2,\ 5 \leftrightarrow 4\,.$$

Значит, данная подстановка нечётная и $\operatorname{sgn}\varphi = -1$.

§3. Определители квадратных матриц

Общие понятия

В курсе школьной математики рассматривались системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 = \beta_2. \end{cases}$$

Рассмотрим выражение $\Delta = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}$. Было доказано, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Более того, если ввести понятие, называемое *определителем*, вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21},$$

то при $\Delta \neq 0$ решения системы имеют вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \beta_1 \cdot \alpha_{22} - \beta_2 \cdot \alpha_{12},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \beta_2 - \alpha_{21} \cdot \beta_1.$$

При решении систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \alpha_{13} \cdot x_3 = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \alpha_{23} \cdot x_3 = \beta_2, \\ \alpha_{31} \cdot x_1 + \alpha_{32} \cdot x_2 + \alpha_{33} \cdot x_3 = \beta_3, \end{cases} \qquad (*)$$

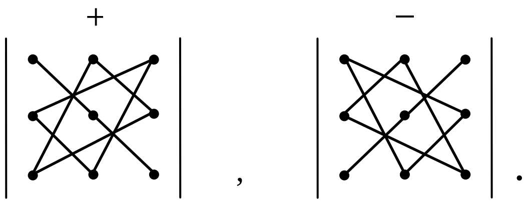
можно ввести понятие *определителя* третьего порядка, составленного из коэффициентов при неизвестных. А именно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} -$$

$$-\alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32}.$$

Вычисление определителя третьего порядка таким способом называется *правилом Саррюса*. Мнемоническое правило вычисления определителей можно записать в виде:



При этом, если $\Delta \neq 0$, то система (*) имеет единственное решение. Более того, если рассмотреть определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \beta_2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \beta_3 & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_3 \end{vmatrix},$$

которые также вычисляются по правилу Саррюса, то $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ аналогично случаю системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Правильные произведения

Для обобщения этого утверждения потребуется ввести понятие определителя n-го порядка при $n > 3$.

Определение. *Правильным произведением* элементов квадратной матрицы $A = A_{n\times n}$ называется произведение её элементов, в которое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A.

Пример. Согласно определению $\alpha_{32}\cdot\alpha_{14}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{45}\cdot\alpha_{51}$ – это правильное произведение элементов матрицы $A_{5\times 5}$, а $\alpha_{21}\cdot\alpha_{32}\cdot\alpha_{43}\cdot\alpha_{51}\cdot\alpha_{24}$ таковым не является, так как в него входят два элемента α_{21} и α_{51} из первого столбца и нет ни одного элемента из пятого столбца.

Теорема 7. *Количество всех различных правильных произведений элементов квадратной матрицы* $A = A_{n\times n}$ *равно* $n!$.

Доказательство. Запишем каждое правильное произведение таким образом, чтобы элементы из разных строк шли по порядку, т.е. в виде $\alpha_{1k_1}\cdot\alpha_{2k_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{nk_n}$. По определению правильного произведения все индексы $k_1,k_2,\ldots,k_n$ должны быть различны и должны принадлежать множеству M_n. Таким образом, каждому правильному произведению однозначно сопоставляется подстановка $\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix}$.

Наоборот, каждой подстановке однозначно сопоставляется правильное произведение $\alpha_{1k_1}\cdot\alpha_{2k_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_{nk_n}$. Это взаимно однозначное соответствие подстановок n-й степени и правильных произведений элементов квадратной матрицы $A_{n\times n}$ показывает, что количество всех правильных произведений элементов матрицы размерности $n\times n$ равно $n!$.▲

Введенное выше взаимно однозначное соответствие позволяет дать следующее

Определение. *Знаком* правильного произведения элементов квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называется знак соответствующей ему подстановки.

Пример. Пусть дана квадратная матрица $A_{5\times 5}$. Правильному произведению $\alpha_{13}\cdot\alpha_{25}\cdot\alpha_{31}\cdot\alpha_{42}\cdot\alpha_{54}$ соответствует подстановка $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}$. В верхней её строке нуль инверсий, а в нижней – пять. Эта подстановка нечётная, $\operatorname{sgn}\varphi=-1$, а знак данного правильного произведения равен -1.

Понятие определителя

Определение. *Определителем квадратной матрицы A размерности* $n\times n$ называется сумма всех её правильных произведений, взятых ровно по одному разу и с соответствующим знаком.

Определитель матрицы A будем обозначать символом $|A|$. Так как с каждым правильным произведением взаимно однозначно связана подстановка, то суммирование правильных произведений можно вести по подстановкам и записать

$$|A|=\sum_{\varphi\in S_n}\operatorname{sgn}\varphi\cdot\alpha_{1\varphi(1)}\cdot\alpha_{2\varphi(2)}\cdot\ldots\cdot\alpha_{n\varphi(n)},$$

где $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\\varphi(1)&\varphi(2)&\ldots&\varphi(n)\end{pmatrix}$.

Замечание. Для случая $n=1$ положим $|(\alpha_{11})|=\alpha_{11}$. Легко видеть, что для случаев $n=1,2,3$ данное выше определение совпадает с теми, что были даны раньше.

Напомним, что диагональная матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называются *треугольными.*

Свойства определителей

ТЕОРЕМА 8 (простейшие свойства определителей).

1) Определитель матрицы с нулевой строкой или нулевым столбцом равен нулю.

2) Определители диагональной и треугольной матриц равны произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В каждое правильное произведение элементов такой матрицы входит в качестве сомножителя хотя бы один нуль (из нулевой строки или столбца). Значит, каждое правильное произведение равно нулю и сумма всех правильных произведений, взятых с соответствующими знаками, равна нулю.

2) Вычислим определитель треугольной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца в правильное произведение, не содержащее нулей, можно взять только α_{11}. После этого из первой строки в правильное произведение уже нельзя брать другие элементы. Аналогично, из второго столбца войдет элемент α_{22} и нельзя брать другие элементы второй строки и т.д. Таким образом, лишь в одно правильное произведение $\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn}$, быть может, не входят нули в качестве сомножителей. Ему соответствует подстановка $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, знак которой равен $+1$. Поэтому $\Delta = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn}$. ▲

Теорема 9 (основные свойства определителей).

1) $|A| = |A^T|$ *(определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы* A^T *).*

2) При перестановке любых двух строк матрицы её определитель меняет знак на противоположный.

3) Определитель матрицы, имеющей хотя бы две одинаковые строки, равен нулю.

4) Общий множитель элементов строки можно вынести за знак определителя.

5) Если одна из строк определителя представлена в виде суммы двух строк $A_{(i)} = D_{(i)} + C_{(i)}$*, то определитель равен сумме двух определителей, в которых все строки,* *кроме i-й такие же, как у исходного определителя, а i-я строка у первого равна $B_{(i)}$, у второго – $C_{(i)}$.*

6) Если к какой-либо строке определителя прибавить любую другую его строку, умноженную на любой скаляр, то определитель не изменится.

7) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ (определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей).

Доказательство. 1) Для доказательства достаточно заметить, что в определители $|A|$ и $\left|A^T\right|$ входят одни и те же правильные произведения (и в том, и в другом случае берётся ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца, а строки первого определителя являются столбцами второго и наоборот). Поэтому, если в первый определитель входит правильное произведение $\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n}$ со знаком соответствующей подстановки $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, то это же правильное произведение входит и во второй определитель, но уже со знаком подстановки $\varphi_2 = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$. Так как $\operatorname{sgn}\varphi_1 = \operatorname{sgn}\varphi$, то знаки соответствующих правильных произведений из $|A|$ и $\left|A^T\right|$ будут совпадать. Поэтому, $|A| = \left|A^T\right|$.

Следствие. *Свойства определителей, выполняющиеся для строк, выполняются и для столбцов, и наоборот.*

2) Переставив в определителе Δ i-ю и j-ю $(i \neq j)$ строки, получим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \ldots & \alpha_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \ldots & \alpha_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что любое правильное произведение $\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n}$, входящее в определитель Δ, входит и в Δ_1, так как все сомножители этого правильного произведения есть и в Δ_1, причем они стоят в разных строках и в разных столбцах. Верно и обратное. При этом в определителе Δ знак правильного произведения определяется знаком подстановки $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_i & \ldots & k_j & \ldots & k_n \end{pmatrix}$, а в Δ_1 – знаком постановки $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_i & \ldots & k_j & \ldots & k_n \end{pmatrix}$. Легко видеть, что $\operatorname{sgn}\varphi_1 = -\operatorname{sgn}\varphi$, так как φ_1 получается из φ транспозицией символов i и j в верхней строке. Значит, все правильные произведения из Δ и только они входят в Δ_1, причем с противоположным знаком. Поэтому, $\Delta_1 = -\Delta$.

3) Переставляя в Δ две одинаковые строки, получим, с одной стороны, тот же самый определитель $\left(\text{так как } A_{(i)} = A_{(j)}\right)$, а с другой стороны, по свойству 2, определитель с противоположным знаком. Значит, $\Delta = -\Delta$ и $\Delta = 0$.

4) Если элементы i-й строки определителя имеют вид $\lambda \cdot \alpha_{ij}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$, то каждое правильное произведение определителя Δ можно представить в виде

$$\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\lambda \alpha_{ik_i}\right) \cdot \ldots \cdot \alpha_{nk_n} =$$

$$= \lambda \cdot \left(\alpha_{1k_1} \cdot \alpha_{2k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i\,k_i} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\,k_n}\right),$$

где в скобках в правой части – правильное произведение определителя, полученного из Δ после вынесения за знак определителя множителя λ, т. е.

$$\Delta = \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \left(\lambda \cdot \alpha_{i\,\varphi(i)}\right) \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\,\varphi(n)}\right) =$$

$$= \lambda \cdot \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\,\varphi(n)}\right) = \lambda \cdot \Delta_1 .$$

СЛЕДСТВИЕ. *Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Доказательство следует из свойств 4 и 3.

5) Представим i-ю строку определителя Δ в виде суммы двух строк, т.е. каждый элемент строки в виде суммы двух элементов:

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{i1} & \beta_{i2} & \ldots & \beta_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \ldots & \gamma_{in} \end{pmatrix} = B_{(i)} + C_{(i)} .$$

Тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{i1} + \gamma_{i1} & \beta_{i2} + \gamma_{i2} & \ldots & \beta_{in} + \gamma_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \left(\beta_{i\varphi(i)} + \gamma_{i\varphi(i)} \right) \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} \Big((\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \beta_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) +$$

$$+ (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) \Big) =$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \beta_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) +$$

$$+ \sum_{\varphi \in S_n} (\operatorname{sgn} \varphi) \cdot \left(\alpha_{1\varphi(1)} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i\varphi(i)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n\varphi(n)} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{i1} & \beta_{i2} & \ldots & \beta_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \ldots & \gamma_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. *Свойство 5 индукцией по k легко распространяется и на случай, когда элементы i-й строки представлены в виде суммы k строк.*

6) Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \ldots & \alpha_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$

Рассмотрим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + \lambda \cdot A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1} & \alpha_{i2} + \lambda \cdot \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{in} + \lambda \cdot \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

который получается из Δ прибавлением к i-й строке j-й строки, умноженной на λ. Тогда, по свойству 5, получаем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot \alpha_{j1} & \lambda \cdot \alpha_{j2} & \dots & \lambda \cdot \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \alpha_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие. *Свойство 6 индукцией по k легко распространяется на случай, когда к i-й строке определителя прибавляется линейная комбинация k его других строк* $(1 \le k \le n-1)$.

7) Доказательство этого свойства и следствий оставляется в качестве упражнения. ▲

Первый способ вычисления определителей

Этот способ основан на свойствах определителя, доказанных в теореме 9, и сводится к приведению Δ к треугольному виду.

Для этого в случае необходимости переставляем строки определителя, меняя при этом знак на противоположный, чтобы в новом определителе получить $\alpha_{11} \neq 0$.

После этого ко всем остальным строкам прибавляем первую, умноженную на такие скаляры, чтобы в первом столбце все элементы ниже α_{11} стали равными нулю.

Затем делаем то же самое с элементом α_{22} и вторым столбцом и т.д. Через конечное число преобразований сведем вычисление Δ к вычислению определителя треугольной матрицы.

Пример. Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 13 \end{vmatrix} = -\left(-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 13 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & -4 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (4) \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 59 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 59 = 59 .$$

Стрелки в данном примере показывают соответствующие преобразования строк, а числа возле них – коэффициенты, на которые умножаются прибавляемые строки. Предпоследнее преобразование выполнено для того, чтобы сделать элемент a_{33} равным 1, иначе пришлось бы строку умножать на дробные коэффициенты.

Вообще, для упрощения вычислений, элементы строк, стоящие на главной диагонали, с помощью которых зануляем элементы столбца, лучше всего делать равными ± 1 с помощью преобразований строк.

Заметим, что по свойству 1 теоремы 9 аналогичные преобразования при вычислении определителей можно производить и со столбцами.

Алгебраические дополнения

Определение. *Минором* элемента a_{ij} квадратной матрицы $A_{n \times n}$ называется определитель матрицы, полученной из A после вычеркивания i-й строки и j-ого столбца, т.е. строки и столбца, в которых стоит элемент a_{ij}.

Обозначение. Минор элемента a_{ij} обозначается через M_{ij}.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = -23,$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = -1,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 8.$$

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} квадратной матрицы $A_{n\times n}$ (или её определителя) называется величина

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Теорема 10. *Определитель Δ, n-ая строка которого состоит из нулевых элементов, кроме элемента a_{nn}, равен произведению a_{nn} на его алгебраическое дополнение.*

Доказательство. Правильные произведения определителя Δ, содержащие элементы $a_{n1} = a_{n2} = \ldots = a_{n\,n-1} = 0$ из n-й строки, равны нулю. Поэтому Δ равен сумме тех правильных произведений с их знаками, в которые из n-й строки входит элемент a_{nn}, т.е. правильные произведения вида

(1) $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Но произведение

(2) $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1\,k_{n-1}}$

является правильным произведением минора M_{nn}, причем знаки произведений (1) и (2) совпадают, так как определяются подстановками одной чётности

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} & n \end{pmatrix} \text{ и } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Наоборот, каждое правильное произведение вида (2) однозначно определяет правильное произведение вида (1), которое имеет тот же знак.

Ввиду этого,

$$\Delta = \alpha_{nn} \cdot M_{nn} = \alpha_{nn} \cdot (-1)^{2n} \cdot M_{nn} =$$

$$= \alpha_{nn} \cdot (-1)^{n+n} \cdot M_{nn} = \alpha_{nn} \cdot A_{nn}. \blacktriangle$$

Теорема 11. *Определитель Δ, i-я строка которого состоит из нулевых элементов, кроме элемента α_{ij}, равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.*

Доказательство. Если в Δ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то получим M_{ij}. Переместим в определителе Δ i-ю почти нулевую строку на последнее n-е место, последовательно переставляя её вначале с $(i+1)$-й строкой, затем с $(i+2)$-й строкой и т.д. При этом все остальные строки сместятся вверх на одно место, а i-я строка опустится на последнее место. В полученном определителе переместим j-й столбец, в котором находится элемент α_{ij}, вправо на последнее место, последовательно переставляя его с $(j+1)$-м столбцом, затем с $(j+2)$-м столбцом и т.д.

Если в полученном определителе Δ_1 вычеркнуть последнюю строку и последний столбец, т.е. строку и столбец, в которых в Δ_1 стоит элемент α_{ij}, то получим определитель M_{ij}, который получится, если в Δ вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец.

Заметим, что определитель Δ_1 получается из Δ в результате $(n-i)$ перестановок строк и $(n-j)$ перестановок столбцов. Следовательно, по свойству 2 теоремы 9,

$$\Delta_1 = (-1)^{n-i} \cdot (-1)^{n-j} \cdot \Delta = (-1)^{2n-i-j} \cdot \Delta = (-1)^{-i-j} \cdot \Delta .$$

Кроме того, по теореме 10, $\Delta_1 = \alpha_{ij} \cdot M_{ij}$. Значит,

$$\alpha_{ij} \cdot M_{ij} = (-1)^{-i-j} \cdot \Delta \quad \text{и} \quad \Delta = \alpha_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \alpha_{ij} \cdot A_{ij} . \blacktriangle$$

Разложение определителя по строке и столбцу

Теорема 12. *Определитель Δ n-ого порядка равен произведению всех элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, а сумма всех элементов какой-либо строки (столбца), умноженных на алгебраические дополнения элементов другой строки (столба), равна нулю, т.е. верны равенства:*

$$\Delta = \alpha_{i1} \cdot A_{i1} + \alpha_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + \alpha_{in} \cdot A_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1)$$

- разложение по i-й строке;

$$\Delta = \alpha_{1j} \cdot A_{1j} + \alpha_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + \alpha_{nj} \cdot A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

- разложение по j-му столбцу;

$$\alpha_{i1} \cdot A_{k1} + \alpha_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + \alpha_{in} \cdot A_{kn} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq k ; \quad (3)$$

$$\alpha_{1j} \cdot A_{1k} + \alpha_{2j} \cdot A_{2k} + \ldots + \alpha_{nj} \cdot A_{nk} = 0, \quad \text{если} \quad j \neq k . \quad (4)$$

Доказательство.

1. Для доказательства формулы (1) достаточно представить i-ю строку как сумму n строк:

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \ldots & \alpha_{in} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{i2} & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \alpha_{in} \end{pmatrix},$$

и воспользоваться следствием к свойству 5 теоремы 9 и теоремой 11.

2. Для доказательства формулы (2) достаточно представить *j*-й столбец как сумму *n* столбцов:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix},$$

и применить следствия 1, 5 теоремы 9 и теорему 11.

3. Рассмотрим определитель $\Delta_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array}$, у которого по сравнению с определителем Δ на месте *k*-й строки стоит *i*-я строка, а все остальные не меняются. По свойству 3 теоремы 9 получаем, что $\Delta_1 = 0$. С другой стороны, разлагая Δ_1 по *k*-й строке (формула (1)), получим

$$0 = \alpha_{i1} \cdot A_{k1} + \alpha_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + \alpha_{in} \cdot A_{kn} .$$

4. Рассмотрим определитель

$$\Delta_2 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \ldots & A^{(j)} & \ldots & A^{(j)} & \ldots & A^{(n)} \end{vmatrix}, \\ \begin{array}{cccccccc} \phantom{A^{(1)}} & \phantom{A^{(2)}} & & j & & k & & \phantom{A^{(n)}} \end{array} \end{array}$$

у которого по сравнению с определителем Δ на месте k-го столбца стоит j-й столбец.

По следствиям к свойствам 1 и 3 теоремы 9 получаем, что $\Delta_2 = 0$. С другой стороны, разлагая Δ_2 по k-му столбцу (формула (2)), имеем:

$$0 = \alpha_{1j} \cdot A_{1k} + \alpha_{2j} \cdot A_{2k} + \ldots + \alpha_{nj} \cdot A_{nk} \,.\blacktriangle$$

Второй способ вычисления определителей

Этого способ вычисления определителей основан на сочетании всех ранее доказанных их свойств, формул (1), (2) и первой части первого способа вычисления определителей. Выбирая *любой* ненулевой элемент определителя, с помощью преобразования строк или столбцов, в столбце или в строке, где стоит выбранный элемент, делаем все остальные элементы нулями. Затем, применяя теорему 11, сводим вычисление определителя к вычислению определителя меньшего порядка и т.д.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \;(1)\; = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 8 & 7 \\ -3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} \;(3)\;(1)$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 12 & 9 & 12 \\ 0 & 17 & 8 & 18 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 & 12 \\ 17 & 8 & 18 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)$$

$$= 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 9 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (-7) \cdot (30 - 27) = -21.$$

Обращение квадратных матриц

В данном параграфе всюду рассматриваются квадратные матрицы размерности $n \times n$ с действительными элементами. Множество всех таких матриц обозначается через $\square_{n \times n}$. Заметим, что если $A, B \in \square_{n \times n}$, то определены матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$, причем они обе из множества $\square_{n \times n}$. Среди всех матриц из $\square_{n \times n}$ существует особая единичная матрица $E = E_{n \times n}$ (свойство 12, теорема 1) такая, что $A \cdot E = E \cdot A = A$ для любой $A \in \square_{n \times n}$ причём

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

По аналогии с операцией умножения действительных чисел при решении уравнений $A \cdot X = B$ и $Y \cdot A = B$ в $\square_{n \times n}$ можно попытаться ввести понятие обратимой матрицы.

Определение. Матрица $A \in \square_{n \times n}$ называется *обратимой* в $\square_{n \times n}$, если существует матрица $B \in \square_{n \times n}$ такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E$. Матрица B в этом случае называется *обратной* к матрице A. Если обратной матрицы не существует, то матрица A называется *необратимой*.

Теорема 13. *Если матрица A обратима, то обратная к A единственна.*

Доказательство. Пусть A – обратима и B_1, B_2 – обратные к A. Тогда выполняются равенства:

$$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A = E \text{ и } A \cdot B_2 = B_2 \cdot A = E.$$

Поэтому, $B_1 = B_1 \cdot E = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E \cdot B_2 = B_2$, т.е. $B_1 = B_2$, что и означает единственность обратной матрицы.

Обозначение. Если матрица обратима, то обратная к ней обозначается через A^{-1}.

В этом параграфе будет доказано, что матрица A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель не равен нулю.*

Определение. *Присоединённой* матрицей к матрице $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента α_{ij} матрицы A.

Замечание. Следует обратить особое внимание на нумерацию элементов матрицы A^*, которая симметрична относительно главной диагонали нумерации элементов обычной матрицы A: элемент A_{ij} стоит в j-й строке и i-м столбце матрицы A^*. ▲

Теорема 14. *Матрица* $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ *обратима тогда и только тогда, когда* $|A| \neq 0$, *причем если A обратима, то* $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot A^*$, *где* $\Delta = |A|$.

Доказательство. Пусть A обратима. Тогда верно равенство $A\cdot A^{-1} = E$ или для определителей $\left|A\cdot A^{-1}\right| = |E|$. Но $\left|A\cdot A^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right|$ и $|E| = 1$. Значит, $|A|\cdot\left|A^{-1}\right| = 1$, откуда $|A| \neq 0$ и, более того, $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$.

Допустим, что $|A| \neq 0$. Вычислим произведение $A\cdot A^*$. По теореме 12, произведение i-й строки матрицы A на k-й столбец матрицы A^* равно

$$A_{(i)}\cdot\left(A^*\right)^{(k)} = \begin{pmatrix}\alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{k_1}\\ A_{k_2}\\ \vdots \\ A_{k_n}\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_{i1}\cdot A_{k1} + \alpha_{i2}\cdot A_{k2} + \ldots + \alpha_{in}\cdot A_{kn} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Аналогично, вычисляя элементы матрицы $A^*\cdot A$, получим:

$$\left(A^*\right)_{(i)}\cdot A^{(k)} = A_{1i}\cdot\alpha_{1k} + A_{2i}\cdot\alpha_{2k} + \ldots + A_{ni}\cdot\alpha_{nk} = \begin{cases} |A|, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$A\cdot A^{*}=A^{*}\cdot A=\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & |A| & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & |A| & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot E=\Delta\cdot E\,.$$

Поэтому, если $\Delta\neq 0$, то $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta}\cdot A^{*}$ – обратная матрица к A и матрица A обратима.▲

Пример. Найти матрицу обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 7\\ 4 & -2 & 8\\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $\Delta=|A|=$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7\\ 4 & -2 & 8\\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}(-1)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix}(-1)\;(-3)=\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1\\ 2 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 2=-2\neq 0\,.$$

Значит, матрица A обратима.

Для вычисления матрицы $A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ найдем все элементы A_{ij}.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 8\\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-12+8=-4\,;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -(12+7) = -19\,;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 14 = 30\,;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(24 - 24) = 0\,;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 21 = 3\,;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -(32 - 28) = -4\,;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2\,;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10\,;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16\,.$$

Подставляем алгебраические дополнения и получаем:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -19 & 30 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & 10 & -16 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = -\frac{1}{2} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 2 & 19/2 & -15 \\ 0 & -3/2 & 2 \\ -1 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Для проверки достаточно перемножить A и A^{-1}.

Тема 2. Системы линейных уравнений (СЛУ)

§ 1. Основные определения

Определения. *Системой k линейных уравнений от n неизвестных* (сокращённо СЛУ) называется система вида:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \alpha_{k2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

где α_{ij} – коэффициент при неизвестном x_j в *i*-м уравнении системы, β_i – свободный член *i*-го уравнения.

Для удобства систему (I) будем иногда записывать в виде:

$$\alpha_{i1} \cdot x_1 + \alpha_{i2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i \quad \left(i = 1, 2, \ldots, k\right).$$

Основной матрицей A системы (I) называется матрица её коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \ldots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы (I) называется матрица

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \alpha_{kn} & \beta_k \end{pmatrix}.$$

Столбцом неизвестных системы (I) называется матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Столбцом свободных членов системы (I) называется матрица

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}.$$

Матричной формой записи системы (I) называется матричное уравнение

$$A \cdot X = B\,. \qquad \text{(II)}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Перемножив матрицы в левой части уравнения (II) и приравняв матрицы слева и справа, получим систему (I).

Решением линейного уравнения $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n = \beta$ называется упорядоченная n-ка чисел $(\gamma_1;\ \ \gamma_2;\ \ \ldots;\ \ \gamma_n)$ такая, что верно равенство:

$$\alpha_1 \cdot \gamma_1 + \alpha_2 \cdot \gamma_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \gamma_n = \beta\,.$$

Решением системы (I) называется упорядоченная n-ка чисел $(\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$, которая является решением каждого уравнения системы (I).

Решить систему (I) – значит найти множество всех её решений.

Решением матричного уравнения (II) называется матрица $C=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}$, для которой верно равенство $A\cdot C=B$.

Решить матричное уравнение (II) – значит найти множество всех его решений.

Система линейных уравнений (I) называется *совместной*, если множество всех решений M этой системы не пусто (т.е. существует хотя бы одно её решение), и *несовместной*, если $M=\varnothing$ (т.е. система решений не имеет).

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если решений больше одного.

Линейное уравнение $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$ называется *нулевым*, а уравнение $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b$, где $b\neq 0$, называется *противоречивым*.

Замечание. Каждая упорядоченная n-ка чисел $(\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$ является решением нулевого уравнения. Противоречивое уравнение решений не имеет, и система (I), содержащая противоречивое уравнение, несовместна, т.е. не имеет решений.

Говорят, что СЛУ (1) от n неизвестных *равносильна* системе (2) от того же количества неизвестных, если множество всех решений системы (1) совпадает с множеством решений системы (2), т.е. каждое решение (1) является решением (2) и, наоборот, каждое решение (2) является решением (1).

Факт равносильности СЛУ (1) системе (2) обозначается так: $(1) \Leftrightarrow (2)$.

Замечание. Так как каждое транспонированное решение системы (I), как легко видеть из определений действия с матрицами и равенства матриц, является решением матричного уравнения (II) и, наоборот, каждое транспонированное решение матричного уравнения (II) является решением СЛУ (I), то можно считать, что система (I) *равносильна* матричному уравнению (II).

Теорема 15. *Для любых систем линейных уравнений (1), (2) и (3) выполняются следующие свойства отношения равносильности:*

1) $(1) \Leftrightarrow (1)$*;*

2) если $(1) \Leftrightarrow (2)$*, то* $(2) \Leftrightarrow (1)$*;*

3) если $(1) \Leftrightarrow (2)$ и $(2) \Leftrightarrow (3)$, *то* $(1) \Leftrightarrow (3)$.

Доказательство. Пусть M_1 – множество всех решений СЛУ (1), M_2 – системы (2), M_3 – системы (3). Тогда

1) $(1) \Leftrightarrow (1)$, так как $M_1 = M_1$.

2) Если $(1) \Leftrightarrow (2)$, то $M_1 = M_2$, а значит, $M_2 = M_1$ и $(2) \Leftrightarrow (1)$.

3) Если $(1)\Leftrightarrow(2)$ и $(2)\Leftrightarrow(3)$, то $M_1 = M_2$, $M_2 = M_3$, а значит, $M_1 = M_3$ и $(1)\Leftrightarrow(3)$.▲

Замечания.

1. Если в систему линейных уравнений включить или исключить нулевое уравнение, то получится СЛУ, равносильная данной.

2. Множество всех решений СЛУ не зависит от того, какими буквами обозначены её неизвестные, т.е.

$$\begin{cases} \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n}\cdot x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n}\cdot x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}\cdot x_1 + \alpha_{k2}\cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn}\cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2 + \ldots + \alpha_{1n}\cdot y_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\cdot y_1 + \alpha_{22}\cdot y_2 + \ldots + \alpha_{2n}\cdot y_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}\cdot y_1 + \alpha_{k2}\cdot y_2 + \ldots + \alpha_{kn}\cdot y_n = \beta_k. \end{cases}$$

§2. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

В этом параграфе будем рассматривать СЛУ (I) в случае, когда количество уравнений системы совпадает с количеством её неизвестных $(k = n)$ и при $n = 2$, 3 рассмотренном в начале §3 темы 1.

Если $k = n$, то матрица $A = A_{n\times n}$ квадратная и существует её определитель $|A|$.

Выше было сделано замечание, что СЛУ (I) в определенном смысле равносильна матричному уравнению (II). Поэтому в случае $k = n$ будем решать уравнение (II).

Теорема 16 (правило Крамера). *Если в системе (I)* $n = k$ *и* $\Delta = |A| \neq 0$, *то система имеет единственное решение, которое находится по формулам* $x_m = \dfrac{\Delta_m}{\Delta}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, *где* Δ_m *– определитель, полученный из Δ заменой m-го столбца на столбец свободных членов.*

Доказательство. Так как $\Delta = |A| \neq 0$, то по теореме 14 существует матрица A^{-1} обратная к матрице *А*. Умножим обе части матричного уравнения (2) $A \cdot X = B$ на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

В силу ассоциативности умножения матриц получаем:

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; E \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B.$$

В силу единственности обратной матрицы A^{-1} получаем, что решение матричного уравнения (II) единственно, а значит, единственно решение СЛУ (I).

Найдем решение $X = A^{-1} \cdot B$ матричного уравнения (II). По теореме 14 имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \dfrac{A_{n1}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \dfrac{A_{n2}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{A_{1n}}{\Delta} & \dfrac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \dfrac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}\cdot\beta_1+A_{21}\cdot\beta_2+\ldots+A_{n1}\cdot\beta_n}{\Delta}\\\dfrac{A_{12}\cdot\beta_1+A_{22}\cdot\beta_2+\ldots+A_{n2}\cdot\beta_n}{\Delta}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\dfrac{A_{1n}\cdot\beta_1+A_{2n}\cdot\beta_2+\ldots+A_{nn}\cdot\beta_n}{\Delta}\end{pmatrix}.$$

Значит, для любого натурального числа m, $1\le m\le n$, верно равенство $x_m=\dfrac{A_{1m}\cdot\beta_1+A_{2m}\cdot\beta_2+\ldots+A_{nm}\cdot\beta_n}{\Delta}$.

Заметим, что сумма $A_{1m}\cdot\beta_1+A_{2m}\cdot\beta_2+\ldots+A_{nm}\cdot\beta_n$ есть не что иное, как разложение определителя Δ_m по m-му столбцу, и, следовательно, $x_m=\dfrac{\Delta_m}{\Delta}$. ▲

Пример. Доказать, что СЛУ $\begin{cases}2x_1+5x_2+3x_3+4x_4=0,\\-3x_1+2x_2+5x_3+3x_4=0,\\4x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-3,\\3x_1+5x_2+2x_3+4x_4=0\end{cases}$

имеет единственное решение и найти значение x_3.

В §3 был вычислен определитель матрицы данной системы: $|A|=\Delta=-21\neq 0$, поэтому по теореме 16 система имеет единственное решение.

По этой же теореме $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&5&0&4\\-3&2&0&3\\4&3&-3&2\\3&5&0&4\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&5&4\\-3&2&3\\3&5&4\end{vmatrix}(1)=$$

$$=(-3)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 7 & 7\\ -3 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 7\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\!\urcorner\\ |\\ (-1)\end{matrix} = (-3)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 7\end{vmatrix} =$$

$$=(-3)\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & 7\end{vmatrix}=3\cdot(14-21)=-21.$$

Поэтому $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-21}{-21}=1$.

§3. Модифицированный метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Если в системе (I) $k\neq n$ или $\Delta=0$ в случае $k=n$, то такая система не решается по правилу Крамера. Наша цель – научиться решать произвольные системы линейных уравнений способом, который назовем *модифицированным методом Гаусса.*

Метод Гаусса в обычном виде представляет собой способ решения систем методом последовательного исключения неизвестных. На практике такой способ решения СЛУ чаще всего нерационален и ограничивает возможности применения к решению других задач.

Необходимые понятия и определения

Ведущим коэффициентом системы (I) может быть выбран любой ненулевой коэффициент при неизвестных.

СЛУ называется *полностью преобразованной системой* (ППС), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в системе нет нулевых уравнений;

2) все противоречивые уравнения, если они есть, записаны в конце системы;

3) в каждом непротиворечивом уравнении есть ведущий коэффициент, причем ровно один;

4) все ведущие коэффициенты равны единице;

5) если $\alpha_{ij} = 1$ – ведущий коэффициент в ППС, стоящий в уравнении при неизвестном x_j, то во всех остальных уравнениях системы коэффициенты при x_j должны быть равны нулю (т.е. если $m \neq i$, то $\alpha_{mj} = 0$);

6) все ведущие коэффициенты стоят по порядку: слева направо и сверху вниз.

Для удобства ведущие коэффициенты в системе обводятся или выделяются жирным шрифтом.

Элементарными преобразованиями системы (I) называются преобразования одного из следующих типов:

а) умножение какого-либо уравнения системы на ненулевой скаляр;

б) прибавление к одному из уравнений системы любого другого, умноженного на произвольный скаляр;

в) исключение из системы нулевого уравнения.

Замечание. При преобразованиях типа б) изменяется лишь то уравнение, к которому что-то прибавляется. Все остальные уравнения при этом остаются без изменения.

Теорема 17. *Если к системе линейных уравнений (I) применить конечное число элементарных преобразований, то в результате получится система, равносильная исходной.*

Доказательство. Достаточно доказать, что после применения одного элементарного преобразования к системе линейных уравнений, получится СЛУ, равносильная исходной, а затем воспользоваться утверждениями теоремы 15 и методом математической индукции.

Умножим i-е уравнение СЛУ (1) на скаляр $\lambda \neq 0$. Получим некоторую новую систему (2). Пусть $(c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_n)$ – решение системы (1). Тогда эта упорядоченная n-ка удовлетворяет каждому уравнению системы (2) кроме, быть может, i-го уравнения, т.к. они не изменились. Так как она является решением системы (1), то верно равенство:

$$\alpha_{i1} \cdot c_1 + \alpha_{i2} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{in} \cdot c_n = \beta_i .$$

Умножив обе части этого равенства на λ и переставив скобки, получаем верное равенство:

$$\left(\lambda \cdot \alpha_{i1}\right) \cdot c_1 + \left(\lambda \cdot \alpha_{i2}\right) \cdot c_2 + \dots + \left(\lambda \cdot \alpha_{in}\right) \cdot c_n = \lambda \cdot \beta_i ,$$

т.е. n-ка $(c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_n)$ удовлетворяет и i-му уравнению системы (2) и, следовательно, является решением СЛУ (2).

Пусть теперь упорядоченная n-ка $(c_1;\ c_2;\ \dots;\ c_n)$ является решением СЛУ (2). Тогда она удовлетворяет каждому уравнению системы (1) кроме, быть может, i-го. Кроме того верно равенство:

$$\left(\lambda \cdot \alpha_{i1}\right) \cdot c_1 + \left(\lambda \cdot \alpha_{i2}\right) \cdot c_2 + \dots + \left(\lambda \cdot \alpha_{in}\right) \cdot c_n = \lambda \cdot \beta_i$$

или

$$\lambda \cdot \left(\alpha_{i1} \cdot c_1 + \alpha_{i2} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{in} \cdot c_n\right) = \lambda \cdot \beta_i .$$

Сократив обе части последнего равенства на $\lambda \neq 0$, получаем верное равенство

$$\alpha_{i1} \cdot c_1 + \alpha_{i2} \cdot c_2 + \dots + \alpha_{in} \cdot c_n = \beta_i .$$

Таким образом, n-ка $\left(c_1;\ \ c_2;\ \ \ldots;\ \ c_n\right)$ удовлетворяет и i-му уравнению СЛУ (I) и, следовательно, является решением СЛУ (I).

Из двух доказанных утверждений следует, что множества решений систем (I) и (2) совпадают, т.е. $(I) \Leftrightarrow (2)$.

Аналогичное утверждение для преобразования типа б) следует из равносильности двух систем равенств:

$$\begin{cases} \alpha_{i1} \cdot c_1 + \alpha_{i2} \cdot c_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot c_n = \beta_i, \\ \alpha_{j1} \cdot c_1 + \alpha_{j2} \cdot c_2 + \ldots + \alpha_{jn} \cdot c_n = \beta_j \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \left(\alpha_{i1} + \lambda \cdot \alpha_{j1}\right) \cdot c_1 + \ldots + \left(\alpha_{in} + \lambda_{jn}\right) \cdot c_n = \beta_i + \lambda \cdot \beta_j, \\ \qquad \alpha_{j1} \cdot c_1 \qquad + \ldots + \qquad \alpha_{jn} \cdot c_n = \beta_j. \end{cases}$$

Ранее было замечено, что любая упорядоченная n-ка является решением нулевого уравнения. Поэтому исключение нулевого уравнения из системы (впрочем, как и включение его в систему) не изменяет множества всех её решений.

Для окончательного доказательства теоремы нужно воспользоваться утверждениями теоремы 15 и методом математической индукции, что оставляется на самостоятельную работу.▲

Следствие. *Если одно из уравнений системы (I) последовательно прибавить к нескольким (или ко всем остальным) уравнениям системы, умножая его при этом на произвольные скаляры, то получится система, равносильная исходной.*

Замечание. При помощи конечного числа элементарных преобразований можно в системе линейных уравнений поменять местами любые два уравнения.

Действительно, обозначив через $P_i(\bar{x})$ и $P_j(\bar{x})$ соответственно i-тое и j-тое уравнения системы, получим такую цепочку равносильных систем:

$$\begin{cases} P_1(\bar{x}), \\ P_2(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_i(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_j(\bar{x}), \quad (1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_k(\bar{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(\bar{x}), \\ P_2(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_i(\bar{x}) + P_j(\bar{x}), \quad (-1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_j(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_k(\bar{x}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1(\bar{x}), \\ P_2(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_i(\bar{x}) + P_j(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ -P_i(\bar{x}), \qquad (1), \ \cdot(-1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_k(\bar{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(\bar{x}), \\ P_2(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_j(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_i(\bar{x}), \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_k(\bar{x}). \end{cases}$$

Теорема18 (модифицированный метод Гаусса). *Любая система линейных уравнений при помощи конечного числа элементарных преобразований может быть приведена к равносильной ей полностью преобразованной системе.*

Доказательство. Если среди коэффициентов при неизвестных данной системы нет вообще ни одного ненулевого, то, исключая нулевые уравнения (а их конечное количество), получим ППС, равносильную данной системе. Она будет либо пустой, либо состоять из противоречивых уравнений.

Если же среди коэффициентов при неизвестных есть ненулевые, то проведём доказательство индукцией по количеству неизвестных n.

Пусть $n = 1$, $\alpha_{i1} \neq 0$. В этом случае запишем цепочку равносильных СЛУ:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 = \beta_2, \\ \quad\vdots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 = \beta_i, \ \cdot\left(\dfrac{1}{\alpha_{i1}}\right) \\ \quad\vdots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 = \beta_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 = \beta_2, \\ \quad\vdots \\ \mathbf{1} \cdot x_1 = \gamma_i, \ \cdot(-\alpha_{21}), \cdot(-\alpha_{11}), \ldots, \cdot(-\alpha_{k1}) \\ \quad\vdots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 = \beta_k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \cdot x_1 = \gamma_1, \\ 0 \cdot x_1 = \gamma_2, \\ \quad\vdots \\ \mathbf{1} \cdot x_1 = \gamma_i, \\ \quad\vdots \\ 0 \cdot x_1 = \gamma_k. \end{cases}$$

Переставив i-е уравнение на первое место и исключив нулевые уравнения, получим ППС, равносильную исходной. При этом было сделано конечное количество элементарных преобразований.

Допустим, что для натурального числа $m = n - 1$ утверждение теоремы верно.

Докажем, что утверждение теоремы верно и для $m = n$.

Пусть $\alpha_{ij} \neq 0$. Запишем цепочку равносильных преобразований:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{1j} \cdot x_j + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{i1} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{ij} \cdot x_j + \ldots + \alpha_{in} \cdot x_n = \beta_i, \qquad \left(\cdot \dfrac{1}{\alpha_{ij}} \right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{kj} \cdot x_j + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{1j} \cdot x_j + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{i1} \cdot x_1 + \ldots + \mathbf{1} \cdot x_j + \ldots + \gamma_{in} \cdot x_n = \delta_i, \quad (-\alpha_{1j}) \ldots (-\alpha_{kj}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{kj} \cdot x_j + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{11} \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + \gamma_{1n} \cdot x_n = \delta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{i1} \cdot x_1 + \ldots + \mathbf{1} \cdot x_j + \ldots + \gamma_{in} \cdot x_n = \delta_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{k1} \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_j + \ldots + \gamma_{kn} \cdot x_n = \delta_k. \end{cases}$$

Было сделано не более k элементарных преобразований, в i-м уравнении системы выбран ведущий коэффициент при неизвестном x_j и во всех других уравнениях последней СЛУ коэффициенты при x_j равны нулю. Значит, во всех других уравнениях системы x_j уже исключено. На время исключим из рассмотрения i-е уравнение. Оставшаяся система линейных уравнений имеет на одно неизвестное меньше.

По предположению индукции полученная система приводится к равносильной ей полностью преобразованной системе. Включив в неё i-е уравнение на его место, получим систему, равносильную исходной. Затем остаётся в полученной СЛУ сделать нулями коэффициенты при тех неизвестных в i-м уравнении, которые соответствуют ведущим коэффициентам в других уравнениях системы. Это можно сделать при помощи не более, чем $n-1$ элементарных преобразований.

И, наконец, поставив, если нужно, i-е уравнение на нужное место, получим ППС, равносильную исходной. При этом было сделано конечное число элементарных преобразований, что и доказывает теорему. ▲

Пример. Преобразовать данную СЛУ к равносильной ППС.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+x_3=1, \quad (1)\ (2) \\ -x_1+5x_2-2x_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1+x_2 \qquad\quad =3, \quad (2)\,(-1) \\ 3x_1-2x_2+\mathbf{1}x_3=1, \\ 5x_1+x_2 \qquad\quad =3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x_1+\mathbf{1}x_2 \qquad\quad =3, \\ 13x_1 \qquad\quad +\mathbf{1}x_3=7, \\ 0x_1+0x_2+0x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1+\mathbf{1}x_2 \qquad\quad =3, \\ 13x_1+ \qquad \mathbf{1}x_3=7. \end{cases}$$

Замечание. При каждом элементарном преобразовании изменяются коэффициенты при неизвестных и свободные члены одного из уравнений. Неизвестные x_j *фиксируют* место коэффициентов в системе. Очевидно, элементарным преобразованиям системы однозначно соответствуют преобразования строк расширенной матрицы системы и наоборот, элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы соответствуют элементарные преобразования системы.

Более точно. Умножению i-того уравнения на $\lambda \neq 0$ соответствует умножение i-той строки расширенной матрицы на тот же скаляр. Прибавлению к i-тому уравнению j-того уравнения, умноженного на некоторый скаляр, соответствует прибавление к i-той строке j-той строки расширенной матрицы, умноженной на тот же скаляр. Исключению нулевого уравнения из системы соответствует исключение нулевой строки из расширенной матрицы.

Таким образом, достаточно преобразовывать не СЛУ, а соответствующую ей расширенную матрицу. Такой способ и будем называть *модифицированным методом Гаусса.*

Рассмотрим его применение на предыдущем примере, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой, а между матрицами ставя символ ~.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (1)\ (2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & \mathbf{1} & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} (2)\ (-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 13 & 0 & \mathbf{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 13 & 0 & \mathbf{1} & 7 \end{array}\right)$$

Последняя матрица в цепочке, соответствующая полностью преобразованной системе, называется *конечной.*

Выделение выбранных ведущих сохраняется на всё время преобразований. Преобразования производятся *только* со строками матриц.

Признаки матрицы, соответствующей ППС:

1) в каждой строке, имеющей ненулевые элементы до черты, есть ровно один выделенный коэффициент, равный 1, называемый *ведущим* (обводится или выделяется жирным шрифтом);

2) в столбце, где выбран ведущий коэффициент, все остальные коэффициенты равны нулю;

3) все строки, в которых до черты стоят нули, а за чертой – ненулевой элемент, расположены последними;

4) в матрице нет полностью нулевых строк; ведущие коэффициенты идут по порядку.

Пример. Преобразовать данную матрицу к конечной матрице и найти решения полученной ППС:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) (-1)\ (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & -1 & 8 \\ \mathbf{1} & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \end{array}\right) (-1)\ (4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & -1 & 8 \\ \mathbf{1} & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -11 & 33 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{1}{11}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & -1 & 8 \\ \mathbf{1} & 0 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right) (-4)\ (1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right).$$

Из вышеизложенного следует, что

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{1} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \\ 0 \cdot x_1 + \mathbf{1} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \mathbf{1} \cdot x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 5, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Теорема 19 (о множестве всех решений ППС).

1) Если ППС содержит противоречивое уравнение, то множество всех её решение пусто (т.е. она не имеет решений).

2) Пусть ППС не содержит противоречивых уравнений, тогда:

а) если количество ведущих коэффициентов равно количеству неизвестных, то решение единственно;

б) если количество ведущих коэффициентов меньше количества неизвестных, то множество всех решений системы бесконечно.

Доказательство. 1) Это утверждение верно для любой СЛУ, в частности, и для ППС.

2а) По условию теоремы каждое уравнение ППС содержит ровно один ведущий коэффициент, равный 1. В остальных уравнениях системы все коэффициенты при соответствующем неизвестном равны нулю. Так как число неизвестных и ведущих элементов совпадают, то все коэффициенты в каждом уравнении кроме ведущего равны нулю. Поэтому любое уравнение такой ППС имеет вид:

$$0 \cdot x_1 + \ldots + 1 \cdot x_i + \ldots + 0 \cdot x_n = \gamma_i,$$

а ППС имеет вид $\begin{cases} x_1 = \gamma_1, \\ x_2 = \gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = \gamma_k, \end{cases}$.

Очевидно, такая система имеет единственное решение.

2б) По условию теоремы в каждом уравнении ППС есть ровно один ведущий коэффициент, равный 1. Так как число неизвестных больше, чем количество ведущих элементов, то имеются неизвестные, при которых ни в одном из уравнений нет ведущих коэффициентов. Назовём такие неизвестные *независимыми* или *свободными.*

Перенесём все слагаемые с независимыми неизвестными в правую часть и будем считать независимые неизвестные параметрами. Получится ППС, имеющая согласно пункту 2а) единственное решение. Придавая произвольные значения независимым неизвестным, будем получать решения полученной ППС и, следовательно, решения исходной системы. Решений получится бесконечно много, т.к. придать значения независимым неизвестным можно бесконечным количеством способов. ▲

ЗАМЕЧАНИЕ. Других случаев, кроме разобранных в теореме, нет, так как ведущих коэффициентов в каждом уравнении ровно по одному, а при каждом неизвестном не больше одного, то ведущих не может быть больше, чем неизвестных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неизвестные, соответствующие ведущим коэффициентам в ППС, называются *зависимыми*, остальные неизвестные – *независимыми*.

Общим решением совместной СЛУ вида (1) называется система, полученная из равносильной полностью преобразованной системы после перенесения всех независимых переменных в правую часть.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ППС имеет единственное решение, то оно и будет общим решением равносильной ей системы (1).

ПРИМЕР. Найти общее решение СЛУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-2)\;(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Полученная конечная матрица соответствует ППС, равносильной исходной системе. Запишем её и найдем общее решение: $\begin{cases} \boldsymbol{x_1} + \qquad\qquad 3x_4 = 0, \\ \qquad \boldsymbol{x_2} - x_3 - 4x_4 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \quad -3x_4, \\ \boldsymbol{x_2} = x_3 + 4x_4. \end{cases}$

Для удобства зависимые неизвестные будем каким-либо способом выделять. Для получения из общего решения частных решений можно нарисовать таблицу, в которой в верхней строке записаны неизвестные по порядку, причем зависимые выделяются. Независимым неизвестным придаются произвольные значения, из общего решения находятся значения зависимых и всё это заносится в таблицу. Так, если в примере выше зададим $x_3 = 1,\ x_4 = 0$, то из общего решения получим $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Если $x_3 = 1,\ x_4 = 2$, то $x_1 = -3,\ x_2 = 9$.

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4
0	1	1	0
-3	9	1	2

Упорядоченная четверка $(0;\ 1;\ 1;\ 0)$– частное решение исходной СЛУ.

Тема 3. Арифметические векторные пространства и их применения

В рамках данной темы впервые используется понятие поля. Основные примеры числовых полей - это рациональные числа Θ и действительные числа Р. В дальнейшем для простоты можно считать, что *P* одно из этих полей, т.к. основные свойства полей Θ и Р, связанные со сложением, умножением, вычитанием и делением чисел, сохраняются для произвольного поля *P*. Подробно поля будут рассматриваться в рамках следующей темы 4.

§ 1. Арифметические векторы и действия с ними. Векторное пространство $\boldsymbol{P^n}$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. *Арифметическим n-мерным вектором* над полем *P* называется упорядоченная *n*-ка $(\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n)$ элементов поля *P*. Элементы $\alpha_i\ \ (i=1,\ldots,n)$ называются *компонентами* арифметического вектора.

Арифметические векторы будем обозначать буквами $a,\ b,\ c,\ldots,\ a_1,\ a_2,\ldots$. Например, $a=(1;\ \ -2;\ \ 3;\ \ 4)$ – четырехмерный арифметический вектор над полями Θ и Р; 1 – первая компонента, -2 – вторая и т.д.

Два арифметических вектора $a=(\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n)$ и $b=(\beta_1;\ \ \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \beta_k)$ считаются *равными* $(a=b)$ тогда и только тогда, когда они равны как упорядоченные *n*-ки, т.е. $n=k$ и $\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\ldots,\ \ \alpha_n=\beta_n$ (покомпонентное равенство).

Произведением скаляра $\lambda \in P$ на арифметический n-мерный вектор $a = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ над полем P называется n-мерный арифметический вектор

$$\lambda \cdot a = (\lambda \cdot \alpha_1;\ \ \lambda \cdot \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \lambda \cdot \alpha_n)$$

(умножение вектора на скаляр покомпонентное).

Множество всех n-мерных арифметических векторов с компонентами из поля P обозначается через P^n.

Суммой n-мерных арифметических векторов $a = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ и $b = (\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ называется n-мерный арифметический вектор

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1;\ \ \alpha_2 + \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n + \beta_n)$$

(сложение векторов производится покомпонентно).

Множество всех арифметических векторов P^n с действиями умножения векторов на скаляры из поля P и сложения векторов называется *арифметическим n-мерным пространством над полем P*.

Замечание. Как легко заметить, n-мерные векторы являются строками. Можно ввести понятие пространства n-мерных арифметических вектор-столбцов, для которых аналогично определяются действия умножения на скаляры из P и сложение. Для пространства вектор-столбцов будут выполняться такие же свойства и можно ввести такие же понятия, как и для арифметического векторного пространства вектор-строк P^n. При этом, если $a = (\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ – арифметический вектор (вектор-строка), то $a^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – арифметический вектор-столбец.

Пространство всех арифметических вектор-столбцов над полем P обозначим через $\left(P^n\right)^T$.

ТЕОРЕМА 20. *Для любых арифметических векторов* $a, b, c \in P^n$ *и любых скаляров* $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ *выполняются свойства:*

1) $a+(b+c)=(a+b)+c$ *(сложение векторов ассоциативно).*

2) $a+b=b+a$ *(сложение векторов коммутативно).*

3) Существует нулевой вектор $\theta \in P^n$ *такой, что* $a+\theta=\theta+a=a$ *для любого вектора* $a \in P^n$.

4) Для любого вектора $a \in P^n$ *существует единственный противоположный вектор* $-a \in P^n$ *такой, что* $a+(-a)=-a+a=\theta$.

5) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot a)=\lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot a)=(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot a$.

6) $(\lambda_1+\lambda_2) \cdot a=\lambda_1 \cdot a+\lambda_2 \cdot a$.

7) $\lambda \cdot (a+b)=\lambda \cdot a+\lambda \cdot b$.

8) $1 \cdot a=a$.

9) $(-1) \cdot a=-a$.

10) $0 \cdot a=\lambda \cdot \theta=\theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что по определению арифметических векторов и действий с ними (умножения на скаляры и сложение) арифметическое векторное пространство P^n можно интерпретировать как множество матриц размерности $1 \times n$ с упомянутыми выше операциями. Но тогда практически все свойства, в частности, существование $\theta = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0) \in P^n$, его единственность, существование противоположного $-a = (-\alpha_1;\ -\alpha_2;\ \ldots;\ -\alpha_n)$ следуют из доказательства теоремы 1.

Отметим, что векторные уравнения $a + x = b$ и $\lambda \cdot x = a$ $(\lambda \neq 0)$ имеют единственные решения $x = b - a$ (достаточно к обеим частям уравнения прибавить вектор $-a$) и $x = \frac{1}{\lambda} \cdot a$ (достаточно обе части уравнения умножить на элемент $\frac{1}{\lambda} \in P$). ▲

Определения. *Последовательностью векторов* арифметического векторного пространства P^n называется непустая упорядоченная совокупность векторов из P^n.

В основном будут рассматриваться конечные последовательности векторов. В последовательности векторов каждый вектор имеет номер. Некоторые векторы при этом могут совпадать, но иметь разные номера.

Линейной комбинацией векторов $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k$ из P^n с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$ называется вектор

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k .$$

В силу свойств действий с арифметическими *n*-мерными векторами результат линейной комбинации не зависит от расстановки скобок.

Вектор $b \in P^n$ *линейно выражается* через последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ из P^n, если b является линейной комбинацией этих векторов с некоторыми коэффициентами из *P*, т.е. существуют такие $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$, что

$$b = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k .$$

Векторным уравнением последовательности векторов $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k$ из P^n и вектора $b \in P^n$ называется уравнение

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k .$$

Однородным векторным уравнением последовательности векторов $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k \in P^n$ называется уравнение вида

$$\theta = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k ,$$

т.е. это векторное уравнение при условии $b = \theta$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если векторное уравнение $b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k$ имеет решение, то вектор b линейно выражается через последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Однородное векторное уравнение всегда имеет хотя бы одно решение – нулевое: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in P^n$ называется *линейно независимой*, если её однородное векторное уравнение имеет единственное нулевое решение, и *линейно зависимой*, если однородное векторное уравнение для этой последовательности имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Другими словами, если для последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$ найдутся не все равные нулю скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta$, то данная последовательность линейно зависима. Если же равенство $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta$ возможно лишь в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то последовательность линейно независима; и наоборот.

Словосочетание «линейно зависимая» будем сокращённо записывать через ЛЗ, а «линейно независимая» – через ЛНЗ.

Последовательность векторов

$$e_1 = (1;\quad 0;\quad 0;\quad \ldots;\quad 0),$$

$$e_2 = (0;\quad 1;\quad 0\quad \ldots;\quad 0),$$

$$\ldots,$$

$$e_n = (0;\quad 0;\quad 0;\quad \ldots;\quad 1)$$

называется последовательностью *единичных векторов*, а сами векторы *единичными*.

Эта последовательность линейно независима. Действительно,

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n = \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1;\quad x_2;\quad \ldots;\quad x_n) = (0;\quad 0;\quad \ldots;\quad 0) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

.

Линейное выражение вектора через последовательность векторов

Для линейного выражения вектора $b = (\beta_1;\quad \beta_2;\quad \ldots;\quad \beta_n)$ через последовательность векторов

$$a_1 = (\alpha_{11};\quad \alpha_{12};\quad \ldots;\quad \alpha_{1n}),$$

$$a_2 = (\alpha_{21};\quad \alpha_{22};\quad \ldots;\quad \alpha_{2n}),$$

$$\ldots,$$

$$a_k = (\alpha_{k1};\quad \alpha_{k2};\quad \ldots;\quad \alpha_{kn})$$

нужно решить векторное уравнение

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k :$$

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k \quad \Leftrightarrow$$

$$(\beta_1;\ \ \beta_2;\ \ \ldots;\ \ \beta_n) = x_1 \cdot (\alpha_{11};\ \ \alpha_{12};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{1n}) +$$

$$+ x_2 \cdot (\alpha_{21};\ \ \alpha_{22};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{2n}) + \ldots + x_k \cdot \left(\alpha_{k1};\ \ \alpha_{k2};\ \ \ldots;\ \ \alpha_{kn}\right) =$$

$$= (\alpha_{11} \cdot x_1;\ \ \alpha_{12} \cdot x_1;\ \ \ldots;\ \ \alpha_{1n} \cdot x_1) +$$

$$+ (\alpha_{21} \cdot x_2;\ \ \alpha_{22} \cdot x_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_{2n} \cdot x_2) +$$

$$\ldots$$

$$+ \left(\alpha_{k1} \cdot x_k;\ \ \alpha_{k2} \cdot x_k;\ \ \ldots;\ \ \alpha_{kn} \cdot x_k\right) =$$

$$= \Big(\alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{21} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{k1} \cdot x_k;\ \ \alpha_{12} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{k2} \cdot x_k;$$

$$\ldots;\ \ \alpha_{1n} \cdot x_1 + \alpha_{2n} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_k\Big) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{21} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{k1} \cdot x_k = \beta_1, \\ \alpha_{12} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{k2} \cdot x_k = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} \cdot x_1 + \alpha_{2n} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_k = \beta_n. \end{cases}$$

Таким образом, векторное уравнение равносильно системе линейных уравнений с k неизвестными, которая может быть решена модифицированным методом Гаусса или, если это возможно, по правилу Крамера. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{k1} & \beta_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{k2} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{kn} & \beta_n \end{array}\right).$$

Заметим, что в первом столбце расширенной матрицы стоят компоненты вектора a_1, во втором – a_2 и т.д., а за чертой – компоненты вектора b. Поэтому, для выражения вектора b через последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно сразу записать соответствующую расширенную матрицу, преобразовать её к конечной, записать решение системы и векторного уравнения.

Пример. Вектор $b = (2;\ \ 1;\ \ 2)$ линейно выразить через последовательность векторов

$$a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 0),\ a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 3),\ a_3 = (1;\ \ 1;\ \ 1).$$

Записываем расширенную матрицу соответствующей СЛУ, причем над столбцами ставим неизвестные, под столбцами – векторы, и преобразовываем её:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\,(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}.$$

Решение системы: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \end{cases}$

решение векторного уравнения:

$$b = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 = a_1 + a_2 - a_3.$$

Можно заметить, что при выражении нескольких векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k$ через одну и ту же последовательность, получится несколько СЛУ с одной и той же основной матрицей. Модифицированный метод Гаусса позволяет одновременно решать все эти системы.

Действительно, если с основной матрицей этих СЛУ производить *одни и те же* преобразования, то результаты слева от черты будут всегда одинаковы, разница при преобразовании расширенных матриц будет только в столбцах за чертой – в столбцах свободных членов, сформированных из компонент выражаемых векторов $b_1, b_2, ..., b_m$.

В методе Гаусса действия производятся только со строками, а изменения столбцов происходят *независимо* друг от друга. Поэтому можно записать матрицу, в которой до черты стоит основная матрица этих систем, а за чертой - столбцы компонент векторов $b_1, b_2, ..., b_m$. Если преобразовывать эту матрицу к конечной, то в полученной *конечной* матрице за чертой будут стоять решения соответствующих СЛУ (т.е. коэффициенты линейного выражения векторов $b_1, b_2, ..., b_m$ через векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$).

Пример. Линейно выразить векторы

$$b_1 = (2;\ \ 1;\ \ 2),\ b_2 = (3;\ \ 2;\ \ 1)\ b_3 = (1;\ \ 0;\ \ 2),\ b_4 = (4;\ \ 3;\ \ 4)$$

через последовательность векторов

$$a_1 = (1;\ \ 1;\ \ 0),\ a_2 = (2;\ \ 1;\ \ 3),\ a_3 = (1;\ \ 1;\ \ 1).$$

Как сказано выше, записываем матрицу, в которой до черты стоят компоненты векторов a_1, a_2, a_3, а за чертой – компоненты векторов b_1, b_2, b_3, b_4. Под столбцами подписываем соответствующие векторы, а над столбцами – неизвестные x_1, x_2, x_3, на которые умножаются вектора a_1, a_2, a_3 соответственно.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\
\mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}
\end{array}
(-1) \sim
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4
\end{array}\right) (-1)\ (-3) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & -1 & 1
\end{array}\right) (-1) \sim
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & -1 & 1
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & -1 & 1
\end{array}\right) \\
\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}
\end{array}.
$$

В результате получилось, что

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 = a_1 + a_2 - a_3, \\
b_2 &= 3 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-2) \cdot a_3 = 3a_1 + a_2 - 2a_3, \\
b_3 &= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3 = a_2 - a_3, \\
b_4 &= 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_1 + a_2 + a_3.
\end{aligned}
$$

В каждом столбце за чертой *конечной* матрицы стоят коэффициенты разложения соответствующего вектора по векторам a_1, a_2, a_3 .

Линейная зависимость и линейная независимость

Теорема 21 (о свойствах линейной зависимости и линейной независимости).

1) Последовательность векторов, содержащих хотя бы один нулевой вектор, линейно зависима.

2) Последовательность, содержащая хотя бы два равных вектора, линейно зависима.

3) Последовательность, содержащая хотя бы два пропорциональных вектора, линейно зависима.

4) Если подпоследовательность линейно зависима, то и вся последовательность линейно зависима.

5) Если последовательность линейно независима, то любая её подпоследовательность также линейно независима.

6) Если последовательность линейно зависима, то хотя бы один её вектор линейно выражается через остальные.

7) Если хотя бы один вектор последовательности линейно выражается через остальные, то последовательность линейно зависима.

8) Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *линейно независима, а последовательность* $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ *линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Доказательство. Практически все свойства доказываются по определению.

1) Пусть в последовательности s-тый вектор равен нулевому: $a_s = \theta$, $1 \le s \le k$. Тогда для коэффициентов $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_s = 1, \ldots, \lambda_k = 0$ выполняется равенство

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots \lambda_s \cdot a_s + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю ($\lambda_s = 1 \ne 0$). По определению последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ЛЗ.

2) Достаточно при одном из равных векторов взять коэффициент 1, при другом $--1$, а при остальных нули. Тогда линейная комбинация векторов с этими коэффициентами будет равна θ и не все коэффициенты нулевые. Значит, последовательность ЛЗ.

3) Если в последовательности есть векторы $\lambda_1 \cdot a$ и $\lambda_2 \cdot a$, где $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (иначе свойство 1), то берём при этих векторах коэффициенты λ_2 и $-\lambda_1$ соответственно, а при остальных векторах нулевые коэффициенты.

4) При векторах линейно зависимой подпоследовательности возьмем коэффициенты, обеспечивающие линейную зависимость, а при всех остальных – нули.

5) Нужно доказывать от противного с применением свойства 4.

6) Если последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ЛЗ, то существуют не все равные нулю коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (пусть $\lambda_i \neq 0$) такие, что

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_i \cdot a_i + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta \Leftrightarrow \lambda_i \cdot a_i = -\lambda_1 \cdot a_1 - \ldots - \lambda_k \cdot a_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right) \cdot a_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_i}\right) \cdot a_k .$$

В правой части равенства вектор a_i отсутствует, т.е. вектор a_i линейно выражается через остальные.

7) Если $a_i = \lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k$ и в правой части вектор a_i отсутствует, то, перенося всё в правую часть, получаем

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + (-1) \cdot a_i + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta .$$

Так как в данной линейной комбинации не все коэффициенты нулевые, то последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ЛЗ.

8) Пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ЛНЗ, а последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ – ЛЗ. Тогда существуют

не все равные нулю коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda$ такие, что

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k + \lambda \cdot b = \theta .$$

Если $\lambda = 0$, то $\lambda \cdot b = \theta$, хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ отличен от нуля и верно равенство $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_k \cdot a_k = \theta$, что означает линейную зависимость последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$, а это противоречит условию. Значит, $\lambda \neq 0$ и можно выразить вектор b из данного равенства

$$\lambda \cdot b = -\lambda_i \cdot a_1 - \ldots - \lambda_k \cdot a_k ,$$

$$b = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \cdot a_1 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda}\right) \cdot a_k .$$

В результате получилось, что вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$. ▲

Теорема 22 (основная лемма о линейной зависимости). *Если каждый вектор последовательности*

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \tag{*}$$

линейно выражается через последовательность векторов

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_k , \tag{**}$$

то последовательность (*) линейно зависима.

Доказательство. Индукция по k.

Если $k = 1$, то последовательность (*) состоит из двух векторов a_1, a_2, а последовательность (**) из одного вектора b_1 и $a_1 = \lambda_1 \cdot b_1$, $a_2 = \lambda_2 \cdot b_1$. Если $a_1 = \theta$ или $a_2 = \theta$, то последовательность (*) линейно зависима по теореме 21 (п.1). Если же $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$, то $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ и $\frac{1}{\lambda_1} a_1 = b_1 = \frac{1}{\lambda_2} a_2$.

Векторы системы (*) оказались пропорциональны, следовательно система (*) линейно зависима по теореме 15 (п.3).

Пусть для натурального числа $k = n - 1$ утверждение теоремы верно. Докажем, что это утверждение верно и для $k = n$, т.е. если каждый вектор последовательности (*) $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ линейно выражается через векторы последовательности (**) $b_1, b_2, \dots, b_n$, то последовательность (*) – линейно зависима.

По условию верна система равенств

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_{11} \cdot b_1 + \lambda_{12} \cdot b_2 + \dots + \lambda_{1n} \cdot b_n, \\ a_2 = \lambda_{21} \cdot b_1 + \lambda_{22} \cdot b_2 + \dots + \lambda_{2n} \cdot b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = \lambda_{n1} \cdot b_1 + \lambda_{n2} \cdot b_2 + \dots + \lambda_{nn} \cdot b_n, \\ a_{n+1} = \lambda_{n+1\,1} \cdot b_1 + \qquad \dots + \lambda_{n+1\,n} \cdot b_n. \end{cases} \quad \left(\frac{-\lambda_{nn}}{\lambda_{n+1\,n}}\right) \dots \left(\frac{-\lambda_{1n}}{\lambda_{n+1\,n}}\right) \qquad (1)$$

Если все коэффициенты при векторе b_n в данной системе нулевые, то векторы последовательности $a_1, \dots, a_n$ линейно выражается через векторы $b_1, \dots, b_{n-1}$, и значит, по предположению индукции она ЛЗ, причем является подпоследовательностью последовательности (*). Поэтому и последовательность (*) также линейно зависима.

Пусть среди коэффициентов при векторе b_n в системе равенств (1) есть ненулевые. Не теряя общности, можно считать, что $\lambda_{n+1\,n} \neq 0$. Исключим из первых n равенств системы (1) вектор b_n, применяя преобразования, указанные справа от (1) стрелками (т.е. прибавляя последовательно к каждому из первых n равенств системы (1) последнее равенство, умноженное на соответствующий скаляр). Получим новую систему равенств

$$\begin{cases} a_1 - \delta_1 \cdot a_{n+1} = \beta_{11} \cdot b_1 + \ldots + \beta_{1\,n-1} \cdot b_{n-1}, \\ a_2 - \delta_2 \cdot a_{n+1} = \beta_{21} \cdot b_1 + \ldots + \beta_{2\,n-1} \cdot b_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n - \delta_n \cdot a_{n+1} = \beta_{n1} \cdot b_1 + \ldots + \beta_{n\,n-1} \cdot b_{n-1}, \end{cases} \qquad (2)$$

где δ_i и β_{ij} получились после указанных выше преобразований, а последнее равенство системы (1) исключено.

По предположению индукции последовательность векторов

$$c_1 = a_1 - \delta_1 \cdot a_{n+1},\ c_2 = a_2 - \delta_2 \cdot a_{n+1}, \ldots, c_n = a_n - \delta_n \cdot a_{n+1}$$

линейно зависима, так как линейно выражается через последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Значит, существуют не все равные нулю коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in P$ такие, что верно равенство $\gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_2 + \ldots + \gamma_n \cdot c_n = \theta$ или после подстановки вместо c_i их выражений, раскрытия скобок и приведения подобных

$$\gamma_1 \cdot a_1 + \gamma_2 \cdot a_2 + \ldots + \gamma_n \cdot a_n + \left(-\delta_1 \cdot \gamma_1 - \ldots - \delta_n \cdot \gamma_n\right) \cdot a_{n+1} = \theta .$$

Но так как не все коэффициенты γ_i равны нулю, то последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ – ЛЗ.▲

Следствие. *Если каждый вектор последовательности (1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно выражается через последовательность (2) $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и $n > k$, то последовательность (1) линейно зависима.*

Действительно, подпоследовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ по теореме 22 будет ЛЗ, а значит, последовательность (1) также ЛЗ.

Базис и ранг последовательности арифметических векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Базисом последовательности векторов*

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \qquad (*)$$

арифметического векторного пространства P^n называется такая её подпоследовательность $Б$, что

1) эта подпоследовательность линейно независима;

2) каждый вектор последовательности (*) линейно выражается через векторы подпоследовательности $Б$.

Если базис $Б$ состоит из векторов $a_1, \ldots, a_s$, то будем писать $Б = \langle a_1; \ \ldots; \ a_s \rangle$.

ТЕОРЕМА 23 (свойства базиса последовательности векторов). *1) Конечная последовательность векторов, содержащая хотя бы один ненулевой вектор, имеет базис.*

2) Количество векторов в любых двух базисах одной и той же последовательности векторов одинаково.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Индукция по количеству ненулевых векторов в последовательности.

Если в последовательности (*) $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k$ только вектор $a_i \neq \theta$, а остальные нулевые, то $Б = \langle a_i \rangle$, так как подпоследовательность, состоящая из одного ненулевого вектора линейно независима и все векторы последовательности выражаются через a_i:

$$\theta = 0 \cdot a_i, \ \ a_i = 1 \cdot a_i .$$

Пусть утверждение верно для натурального числа $m = n$. Докажем, что утверждение теоремы верно и для $m = n + 1$, т.е. что любая конечная последовательность, содержащая ровно $n + 1$ ненулевой вектор, имеет базис.

Пусть в последовательности (*) $a_1, a_2, \ldots, a_s \quad (s \ge n+1)$ векторы (**) $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n+1}$ и только они ненулевые.

Если векторы последовательности (**) линейно независимы, то они образуют базис последовательности (*).

Если же последовательность (**) линейно зависима, то хотя бы один из её векторов линейно выражается через остальные. Не теряя общности, можно считать, что это вектор $a'_{n+1} = \beta_1 \cdot a'_1 + \ldots + \beta_n \cdot a'_n$. По предположению индукции последовательность

$$a'_1, \ldots, a'_n \qquad (***)$$

имеет базис $Б = \left\langle a''_1;\ a''_2;\ \ldots;\ a''_m \right\rangle$. Этот базис $Б$ и будет базисом всей последовательности (*). Действительно, каждый нулевой вектор, входящий в (*), выражается через $Б$:

$$\theta = 0 \cdot a''_1 + \ldots + 0 \cdot a''_m .$$

Если вектор ненулевой из (***), то он выражается через $Б$ по определению:

$$a'_1 = \lambda_{11} \cdot a''_1 + \ldots + \lambda_{1m} \cdot a''_m,\ \ldots,\ a'_n = \lambda_{n1} \cdot a''_1 + \ldots + \lambda_{nm} \cdot a''_m .$$

Вектор a'_{n+1} также линейно выражается через последовательность (***):

$$a'_{n+1} = \beta_1 \cdot a'_1 + \ldots + \beta_n \cdot a'_n =$$
$$= \beta_1 \cdot \left(\lambda_{11} \cdot a''_1 + \ldots + \lambda_{1m} \cdot a''_m\right) + \ldots + \beta_n \cdot \left(\lambda_{n1} \cdot a''_1 + \ldots + \lambda_{nm} \cdot a''_m\right) =$$
$$= \gamma_1 \cdot a''_1 + \ldots + \gamma_m \cdot a''_n ,$$

Таким образом, каждый вектор последовательности (*) линейно выражается через $Б$. Кроме того $Б$ линейно независима как базис последовательности (**).

2) Пусть $Б_1 = \left\langle a_1;\ \ldots;\ a_k \right\rangle$ и $Б_2 = \left\langle b_1;\ \ldots;\ b_m \right\rangle$ – базисы одной и той же последовательности векторов. Тогда

они линейно независимы, являются подпоследовательностями всей последовательности и каждый вектор всей последовательности линейно выражается и через $Б_1$, и через $Б_2$. В частности, каждый вектор из $Б_1$ линейно выражается через векторы $Б_2$ и, наоборот, каждый вектор из $Б_2$ линейно выражается через векторы $Б_1$. По следствию к теореме 22 случаи $k > m$ и $m > k$ для чисел k и m приводят к противоречию (либо $Б_1$ – ЛЗ, либо $Б_2$ – ЛЗ). Значит, $k = m$. ▲

Замечание. В ходе доказательства теоремы показано, что если вектор b линейно выражается через последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k$, содержащую ненулевые векторы, то он линейно выражается и через её базис.

Определение. *Рангом* конечной последовательности, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется количество векторов в любом её базисе. *Ранг* последовательности нулевых векторов считается равным нулю.

Определение. *Базисом* арифметического векторного пространства P^n называется последовательность векторов из P^n, которая линейно независима и через которую линейно выражается каждый вектор из P^n.

Пример. Последовательность единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является базисом пространства P^n, так как она линейно независима, и если $a = (\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \ldots;\ \ \alpha_n) \in P^n$, то

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n .$$

Как и для последовательностей, легко показать, что количество векторов в разных базисах пространства P^n одинаково.

Размерностью арифметического векторного пространства P^n называется количество векторов в любом его базисе, т.е. число n.

Из следствия к теореме 22 получаем, что любая последовательность векторов из P^n, содержащая более n векторов, является линейно зависимой.

Нахождение базиса и ранга конечной последовательности векторов

Пусть дана последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_k \in P^n$. Чтобы найти её базис начнём решать векторное уравнение

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_k \cdot a_k = \theta.$$

Как отмечалось ранее, это уравнение равносильно однородной системе, матрица которой получается, если данные векторы записать в качестве её столбцов. Решая систему модифицированным методом Гаусса, преобразуем элементарными преобразованиями строк её матрицу к конечной. Пусть в этой матрице осталось $s \le n$ строк. Для простоты обозначений можно считать, что ведущие коэффициенты выбирались в первых s столбцах (в общем случае этого можно добиться, переименовав исходные векторы). Конечная матрица будет иметь вид:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,s+1} & \cdots & b_{1,k} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,s+1} & \cdots & b_{2,k} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{s,s+1} & \cdots & b_{s,k} & 0 \end{array}\right). \qquad (*)$$

Можно доказать следующее.

1) Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ линейно независимы.

Действительно, если взять уравнение $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_s \cdot a_s = \theta$, свести его к системе и преобразовать её к конечному виду теми же преобразованиями, что и выше, то получим конечную матрицу следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_s = 0$.

2) Векторы $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_k$ линейно выражаются через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$, причём в *i*-том столбце (*) получатся коэффициенты соответствующей линейной комбинации.

Действительно, если взять уравнение

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_s \cdot a_s = a_i, \qquad s + 1 \le i \le k,$$

свести его к системе и преобразовать её к конечному виду теми же преобразованиями, что и выше, то получим конечную матрицу следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,i} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{s,i} \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $x_1 = b_{1,i},\ x_2 = b_{2,i}, \ldots, x_s = b_{s,i}$ или

$$a_i = b_{1,i} \cdot a_1 + b_{2,i} \cdot a_2 + \ldots + b_{s,i} \cdot a_s.$$

Из пунктов 1) и 2) следует, что подпоследовательность $a_1, a_2, \ldots, a_s$ является базисом последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Суть метода состоит в том, что для доказательства линейной независимости и доказательства линейной выражаемости мы одновременно, при помощи одинаковых преобразований решаем $1+(n-s)$ систем (векторных уравнений). Результаты решения этих систем (векторных уравнений) записаны в матрице (*).

Пример. Найти базис и ранг последовательности векторов и выразить все векторы последовательности через найденный базис:

$$a_1=(1;\ \ -1;\ \ 1;\ \ 1),\ a_2=(2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 3),\ a_3=(1;\ \ 3;\ \ 1;\ \ 2),$$

$$a_4=(3;\ \ 1;\ \ 3;\ \ 4),\ a_5=(3;\ \ 5;\ \ 3;\ \ 5).$$

Запишем матрицу, столбцами которой являются коэффициенты данных векторов и модифицированным методом Гаусса преобразуем её к конечной матрице.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ a_5\end{array}\begin{matrix}(1)(-1)\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 4 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ (-4)(-1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 2\end{pmatrix}.\\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ a_5\end{array}$$

Последовательность имеет базис $Б=\langle a_1;\ \ a_3\rangle$. Ранг последовательности равен 2.

В каждом столбце конечной матрицы (причем и для базисных векторов тоже) стоят коэффициенты разложения по найденному базису. Например, в четвертом столбце, соответствующем вектору a_4, стоят числа 2 и 1. Число 2 стоит в первой строке. Ищем в этой строке ведущий. Он стоит в первом столбце и ему соответствует вектор a_1. Поэтому 2 – коэффициент при a_1 в разложении a_4 по найденному базису и т.д.

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_3, \quad a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3, \quad a_3 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3,$$
$$a_4 = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3, \quad a_5 = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_3.$$

§2. Обращение матриц модифицированным методом Гаусса

Разобранные выше алгоритмы позволяют достаточно быстро находить обратную матрицу, если она существует, или доказывать, что её нет.

Для нахождения обратной матрицы нужно решить матричное уравнение $A \cdot X = E$, где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & z_2 \\ . & . & \dots & . \\ x_n & y_n & \dots & z_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \dots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & z_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & \cdots & z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы A и X и приравнивая произведение к матрице E поэлементно, получим n систем линейных уравнений с основной матрицей A:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = 1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \cdot x_1 + \alpha_{n2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot x_n = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot y_1 + \alpha_{12} \cdot y_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot y_n = 0, \\ \alpha_{21} \cdot y_1 + \alpha_{22} \cdot y_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot y_n = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \cdot y_1 + \alpha_{n2} \cdot y_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot y_n = 0, \end{cases}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot z_1 + \alpha_{12} \cdot z_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot z_n = 0, \\ \alpha_{21} \cdot z_1 + \alpha_{22} \cdot z_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \cdot z_1 + \alpha_{n2} \cdot z_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot z_n = 1. \end{cases}$$

Столбцы свободных членов этих систем равны соответствующим столбцам матрицы E. Чтобы решить все эти системы одновременно, записываем расширенную матрицу, которая имеет вид $\left(A \middle| E\right)$, и преобразуем её модифицированным методом Гаусса к конечной матрице. Если при этом получится, что хотя бы одна из систем не имеет решения (до черты вся строка нулевая, а за чертой в этой строке существует ненулевой элемент), то для матрицы A обратной не существует. Если же решения всех систем существуют, то эти решения единственны в силу единственности обратной. Поэтому конечная матрица будет иметь вид $\left(E \middle| A^{-1}\right)$.

Пример. Выяснить, существует ли обратная для матрицы A и найти её, если она существует:

$$A=\begin{pmatrix}15 & 2 & 12\\ 7 & 1 & 6\\ 24 & 3 & 19\end{pmatrix}.$$

Применяем описанный выше алгоритм.

$$\left(A\middle|E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}15 & 2 & 12 & 1 & 0 & 0\\ 7 & \mathbf{1} & 6 & 0 & 1 & 0\\ 24 & 3 & 19 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ (-2)\,(-3)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 7 & \mathbf{1} & 6 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}(-7)\,(-3)\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 6 & -7 & 15 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \sim\\ (-6)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 11 & -3 & -6\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 3 & 1\end{array}\right)=\left(E\middle|A^{-1}\right).$$

Обратная для A существует и равна $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 11 & -3 & -6\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Пример. Выяснить, существует ли обратная для матрицы A и найти её, если она существует: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 12 & -11\end{pmatrix}$.

$$\left(A|E\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 12 & -11 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}(-2)\,(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 5 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -10 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2/5 & -1/5 & 0\\ 0 & 10 & -10 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{c}(-10)\,(-2)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}\mathbf{1} & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 2/5 & -1/5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 & 1\end{array}\right).$$

Последняя строка конечной матрицы до черты нулевая, а после черты есть ненулевые элементы. Значит, какие-то из систем линейных уравнений при решении матричного уравнения $A\cdot X=E$ решений не имеют. Матрица A необратима.

Подпространства арифметического пространства

Определение. П*одпространством* арифметического векторного пространства P^n называется непустое подмножество L, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых векторов $a,b\in P^n$, если $a,b\in L$, то $a+b\in L$;

2) для любых $\lambda\in P$, $a\in P^n$, если $a\in L$, то $\lambda\cdot a\in L$.

Условия 1) и 2) означают, что множество L *замкнуто* относительно сложения векторов и умножения векторов на скаляры из P.

Пример. Самым маленьким подпространством является $L = \{\theta\}$. Это подпространство называется *нулевым*.

Действительно, оно удовлетворяет условиям 1) и 2):

$$\theta + \theta = \theta \in L, \quad \lambda \cdot \theta = \theta \in L.$$

Замечание. Легко видеть, что если L – подпространство арифметического векторного пространства, то для L выполняются все свойства теоремы 20.

Теорема 24. *Если L – ненулевое подпространство арифметического векторного пространства P^n, то оно имеет базис с количеством векторов меньшим или равным n.*

Доказательство. Согласно замечанию к теореме 23, любая последовательность из P^n, а значит и из L, содержащая больше n векторов, является линейно зависимой. Следовательно, такая последовательность не может быть базисом.

Докажем, что базис существует. Так как $L \neq \{\theta\}$, то существует $\theta \neq a_1 \in L$. Рассмотрим $L_1 = \{\lambda \cdot a_1 \mid \lambda \in P\}$. Тогда $L_1 \subset L$ и, если $L_1 = L$, то $Б_1 = \langle a_1 \rangle$– базис L. Пусть $L_1 \neq L$. Тогда существует $a_2 \in L$ и $a_2 \notin L_1$. Докажем, что последовательность векторов a_1, a_2 – ЛНЗ.

Пусть, напротив, $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 = \theta$ и $\lambda_1 \neq 0$ или $\lambda_2 \neq 0$. Если $\lambda_2 \neq 0$, то $a_2 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot a_1$ и получаем противоречие с условием $a_2 \notin L_1$. Если же $\lambda_2 = 0$, то $\lambda_1 \cdot a_1 = \theta$, а так как $a_1 \neq \theta$, то $\lambda_1 = 0$, что противоречит предположению. В обоих случаях получилось противоречие.

Значит, последовательность a_1, a_2 является линейно независимой.

Далее рассмотрим $L_2 = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in P\}$. Если $L_2 = L$, то $Б_2 = \langle a_1;\ a_2 \rangle$ – базис L. Если же $L \neq L_2$, то существует $a_3 \in L$, $a_3 \notin L_2$ и последовательность a_1, a_2, a_3 – линейно независима. (Доказательство снова от противного: если a_1, a_2, a_3 – ЛЗ и по условию a_1, a_2 – ЛНЗ, то a_3 линейно выражается через a_1, a_2 (теорема 21, свойство 8). Значит, $a_3 \in L_2$, что не так.).

Далее рассмотрим

$$L_3 = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in P\} \text{ и т.д.}$$

В результате получим последовательность линейно независимых векторов $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Она не может содержать более чем n векторов, поэтому для какого-то $1 \leq k \leq n$ будет выполняться равенство $L_k = L$. В этом случае последовательность $Б = \langle a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_k \rangle$ будет базисом подпространства L.▲

§3. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальные системы решений (ФСР)

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю, т.е. она имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = 0, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \alpha_{k2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = 0. \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Замечание. Множество M всех решений однородной СЛУ не пусто, так как упорядоченная n-ка $(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ является её решением.

Теорема 25. *Множество M всех решений однородной системы линейных уравнений является подпространством арифметического векторного пространства P^n.*

Доказательство. По замечанию выше $M \neq \varnothing$. По определению множества M имеем $M \subset P^n$. Осталось проверить условия из определения подпространства.

1) Пусть $b, c \in M$. Тогда

$$b = (\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n),\quad c = (\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$$

и для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ выполняются равенства:

$$\alpha_{i1} \cdot \beta_1 + \alpha_{i2} \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \beta_n = 0$$

и

$$\alpha_{i1} \cdot \gamma_1 + \alpha_{i2} \cdot \gamma_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \gamma_n = 0.$$

Складывая почленно два этих равенства, получаем верное равенство:

$$\alpha_{i1} \cdot (\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_{i2} \cdot (\beta_2 + \gamma_2) + \ldots + \alpha_{in} \cdot (\beta_n + \gamma_n) = 0,$$

т.е. вектор $(\alpha_1 + \beta_1;\ \alpha_2 + \beta_2;\ \ldots;\ \alpha_n + \beta_n) = a + b \in M$, так как является решением каждого уравнения системы (III).

2) Пусть $\alpha \in P$ и $b = (\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n) \in M$, т.е. для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ верно равенство:

$$\alpha_{i1} \cdot \beta_1 + \alpha_{i2} \cdot \beta_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \beta_n = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на α и переставляя скобки, получаем

$$\alpha_{i1}\cdot(\alpha\cdot\beta_1)+\alpha_{i2}\cdot(\alpha\cdot\beta_2)+\ldots+\alpha_{in}\cdot(\alpha\cdot\beta_n)=0\,,$$

т.е. упорядоченная n-ка $(\alpha\cdot\beta_1;\ \alpha\cdot\beta_2;\ \ldots;\ \alpha\cdot\beta_n)=\alpha\cdot b$ является решением каждого уравнения системы (III). Следовательно, $\alpha\cdot b\in M$.

Из доказанных свойств 1) и 2) следует, что M – подпространство арифметического векторного пространства P^n .▲

Определение. *Фундаментальной системой решений* (сокращённо ФСР) однородной системы линейных уравнений называется базис подпространства M её решений.

Замечание. По теореме 24, если $M\neq\{\theta\}$, то M имеет базис и, следовательно, система (III) имеет ФСР. Согласно определению базиса каждое решение системы (III) является линейной комбинацией векторов ФСР.

Алгоритм построения ФСР

Пусть $M\neq\{\theta\}$, т.е. СЛУ (III) имеет ненулевое решение. Тогда по теоремам 18 и 19 она приводится к равносильной однородной полностью преобразованной системе, имеющей свободные (независимые) неизвестные. Не теряя общности можно считать, что первые r неизвестных в ППС – зависимые, а последние $(n-r)$– свободные. В этом случае общее решение системы (III) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1=\gamma_{1r+1}\cdot x_{r+1}+\ldots+\gamma_{1n}\cdot x_n, \\ x_2=\gamma_{2r+1}\cdot x_{r+1}+\ldots+\gamma_{2n}\cdot x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\gamma_{rr+1}\cdot x_{r+1}+\ldots+\gamma_{rn}\cdot x_n. \end{cases} \tag{A}$$

Найдём частные решения системы (A), придавая последовательно значение 1 одной из независимых неизвестных, а 0 – всем остальным. Затем находим значения зависимых неизвестных. Эти частные решения удобно записывать в таблице:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_r}$	x_{r+1}	x_{r+2}	…	x_n
γ_{1r+1}	γ_{2r+1}	…	γ_{rr+1}	1	0	…	0
γ_{1r+2}	γ_{2r+2}	…	γ_{rr+2}	0	1	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…
γ_{1n}	γ_{2n}	…	γ_{rn}	0	0	…	**1**

При этом получим последовательность из $(n-r)$ векторов:

$$\begin{cases} c_1 = (\gamma_{1r+1};\ \gamma_{2r+1};\ \ldots;\ \gamma_{rr+1};\ 1;\ 0;\ \ldots;\ 0), \\ c_2 = (\gamma_{1r+2};\ \gamma_{2r+2};\ \ldots;\ \gamma_{rr+2};\ 0;\ 1;\ \ldots;\ 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r} = (\gamma_{1n};\ \gamma_{2n};\ \ldots;\ \gamma_{rn};\ 0;\ 0;\ \ldots;\ 1). \end{cases} \qquad (Б)$$

Теорема 26. *Последовательность векторов (Б) является фундаментальной системой решений системы (III).*

В силу выбора последних $n-r$ компонент последовательности (Б) легко доказать, что она линейно независима. Действительно,

$$x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \ldots + x_{n-r} \cdot c_{n-r} = \theta \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x_1 \cdot \gamma_{1r+1} + x_2 \cdot \gamma_{1r+2} + \ldots + x_{n-r} \cdot \gamma_{1n};\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-r}\right) =$$
$$= (0;\ 0;\ \ldots;\ 0).$$

Из этого равенства следует, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-r} = 0$, т.е. однородное векторное уравнение для последовательности векторов (Б) имеет только нулевое решение. Значит, последовательность (Б) линейно независима. Заметим, что все векторы $c_i \in M$.

Докажем, что каждый вектор из M является линейной комбинацией векторов из (Б). Пусть $a \in M$, $a = \left(\alpha_1;\ \ \alpha_2;\ \ \dots;\ \ \alpha_n\right)$, и a является решением системы (III), а значит и равносильной ей системы (А). Поэтому

$$\begin{cases} \alpha_1 = \gamma_{1\,r+1} \cdot \alpha_{r+1} + \gamma_{1\,r+2} \cdot \alpha_{r+2} + \ldots + \gamma_{1n} \cdot \alpha_n, \\ \alpha_2 = \gamma_{2\,r+1} \cdot \alpha_{r+1} + \gamma_{2\,r+2} \cdot \alpha_{r+2} + \ldots + \gamma_{2n} \cdot \alpha_n, \\ \dotfill \\ \alpha_r = \gamma_{r\,r+1} \cdot \alpha_{r+1} + \gamma_{r\,r+2} \cdot \alpha_{r+2} + \ldots + \gamma_{rn} \cdot \alpha_n, \end{cases}$$

Но тогда $a = \alpha_{r+1} \cdot c_1 + \alpha_{r+2} \cdot c_2 + \ldots + \alpha_n \cdot c_{n-r}$, т.е. любое решение СЛУ (III) является линейной комбинацией векторов $Б = \left\langle c_1;\ \ c_2;\ \ \dots;\ \ c_{n-r}\right\rangle$. Следовательно, $Б$ – базис подпространства решений M, т.е. ФСР системы (III). ▲

Пример. Найти ФСР однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение заданной однородной СЛУ:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \; (-1)\ (1) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) (2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right).$$

Тогда ППС, равносильная исходной, и общее решение имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x_2} + x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_3 + \mathbf{x_4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{x_2} = -x_3 \\ \mathbf{x_4} = x_1 + 3x_3 \end{cases}.$$

Так как общее решение имеет два независимых неизвестных, то и в ФСР будет два вектора. Записываем последовательное построение таблицы для нахождения ФСР:

x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	$\mathbf{x_4}$
1		0	
0		1	

x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	$\mathbf{x_4}$
1	0	0	1
0	–1	1	3

Поэтому $c_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $c_2 = (0;\ -1;\ 1;\ 3)$ образуют ФСР исходной системы и $M = \{\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$.

§ 4. *Ранги матрицы, их применение*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Строчечным рангом* ненулевой матрицы $A_{k\times n}$ называется количество векторов в базисе последовательности её строк, рассматриваемых как арифметические вектор-строки.

Столбцовым рангом ненулевой матрицы $A_{k\times n}$ называется количество векторов в базисе последовательности её столбцов, рассматриваемых как арифметические вектор-столбцы.

Столбцовый и строчечный ранги нулевой матрицы полагаются равными нулю.

Обозначение. $r(A)$– строчечный, $\rho(A)$– столбцовый ранги матрицы A.

Замечания. Для произвольной матрицы $A_{k\times n}$ выполняются следующие соотношения:

$$0 \le r(A) \le k, \quad 0 \le \rho(A) \le n\,.$$

Если матрица A ненулевая, то

$$r(A) > 0,\ \ \rho(A) > 0 \ \text{ и } \ r\left(A^T\right) = \rho(A), \quad \rho\left(A^T\right) = r(A).$$

Из определения строчечного и столбцового рангов матрицы и алгоритма нахождения базиса последовательности арифметических векторов следует, что столбцовый ранг матрицы A равен количеству ведущих коэффициентов конечной матрицы, которая получается из матрицы A при помощи элементарных преобразований строк. А строчечный ранг - числу ведущих коэффициентов конечной матрицы, полученной из A^T.

Определение. *Подматрицей* матрицы $A = A_{k\times n} = \left(\alpha_{ij}\right)$ порядка s, где $1 \le s \le \min(k;n)$, называется любая матрица, которая получается из A после вычеркивания $(k-s)$ её строк и $(n-s)$ её столбцов. Она имеет размерность $s\times s$. Определитель подматрицы s-го порядка называется *минором* s-го порядка матрицы A.

Минорным рангом матрицы называется наибольший из порядков её ненулевых миноров. Минорный ранг обозначим через $m(A)$.

Замечание. Из свойств определителей следует, что минорный ранг матрицы не изменяется при удалении нулевой строки, умножении любой строки на ненулевой скаляр и $m(A) = m\left(A^T\right)$.

Теорема 27. *Минорный ранг матрицы не уменьшается, если к её i-ой строке прибавить j-ую строку, умноженную на произвольный скаляр.*

Доказательство. Для нулевой матрицы утверждение теоремы верно. Пусть $A = A_{k\times n} = \left(\alpha_{ij}\right)$ - ненулевая матрица, $m\left(A\right) = s$ и Δ - ненулевой минор s-того порядка. Минорный ранг может уменьшиться только в том случае, если к i-ой строке, часть которой входит в Δ, прибавляется j-ая строка, которая не входит в Δ, умноженная на $\lambda \neq 0$. Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(i)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix},$$ где $\overline{A}_{(t)}$ - часть строки $A_{(t)}$, входящая в Δ,

то

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(i)} + \lambda \cdot \overline{A}_{(j)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix} = \Delta + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(j)} \\ \dots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix} = \Delta + \lambda \cdot \Delta_2.$$

Так как $\Delta \neq 0,$ $\lambda \neq 0$ и $\Delta_1 = 0,$ то $\Delta_2 \neq 0.$

Но тогда в полученной после преобразования матрице найдётся ненулевой минор s-того порядка. А именно, из Δ_1 нужно удалить строку $\overline{A}_{(i)} + \lambda \cdot \overline{A}_{(j)}$ и включить вместо неё j-ую строку. Этот минор равен Δ_2 или $-\Delta_2$, следовательно, он не равен нулю и его порядок равен s.

Таким образом, после прибавления к i-ой строке матрицы её j-ой строки, умноженной на произвольный скаляр, её минорный ранг уменьшиться не может.

Теорема 28. *Минорный ранг матрицы не увеличится, если к её i-ой строке прибавить j-ую строку, умноженную на произвольный скаляр.*

Доказательство. Для нулевой матрицы утверждение теоремы верно. Пусть $A = A_{k\times n} = \left(\alpha_{ij}\right)$ - ненулевая матрица, $m\left(A\right) = s$ и после прибавления к i-ой строке матрицы её j-ой строки, умноженной на ненулевой скаляр λ (иначе матрица не изменится), получился ненулевой минор $s+1$-го порядка. Тогда этот минор имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(i)} + \lambda \cdot \overline{A}_{(j)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

По свойствам определителя в этом случае имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(i)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \overline{A}_{(p)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(j)} \\ \ldots \\ \overline{A}_{(r)} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \lambda \cdot \Delta_2.$$

Если $\Delta_2 = 0$, то $\Delta_1 \neq 0$ и матрица А содержит ненулевой минор порядка $s+1$, что противоречит условию $m\left(A\right) = s$. Если $\Delta_2 \neq 0$, то исключая из Δ_2 строку $\overline{A}_{(j)}$ на i-ом месте и включая вместо неё строку $\overline{A}_{(j)}$ на её месте, получим минор порядка $s+1$, который равен Δ_2 или $-\Delta_2$. Следовательно этот минор не равен нулю и причём является минором исходной матрицы А. Снова получилось противоречие с условием $m\left(A\right) = s$.

Таким образом, после прибавления к i-ой строке матрицы её j-ой строки, умноженный на произвольный скаляр, её минорный ранг увеличиться не может.

ТЕОРЕМА 29. *Минорный ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях её строк.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одна матрица получается из другой при помощи n элементарных преобразований и при каждом элементарной преобразовании минорный ранг не изменяется, то, очевидно, минорные ранги первой и последней матриц совпадают. Строгое доказательство проводится индукцией по количеству элементарных преобразований.

ТЕОРЕМА 30. *Минорный ранг матрицы равен её столбцовому и строчечному рангам, т.е.* $m(A) = r(A) = \rho(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нулевой матрицы утверждение теоремы верно. Приведём данную ненулевую матрицу A к конечной при помощи преобразований её строк модифицированным методом Гаусса. Минорный ранг конечной матрицы равен числу k ведущих элементов, т.к. в каждой строке есть ровно один ведущий коэффициент и нужно взять минор, составленный из k столбцов с ведущими коэффициентами. По теореме 29 минорный ранг исходной и конечной матрицы равны. Кроме того, столбцовый ранг исходной матрицы также равен k. В результате

$$m(A) = \rho(A).$$

Кроме того, $m(A) = m\left(A^T\right)$, $\rho\left(A^T\right) = r(A)$. В результате

$$\rho(A) = m(A) = m\left(A^T\right) = \rho\left(A^T\right) = r(A). \blacktriangle$$

Определение. *Рангом матрицы* A называется её столбцовый, строчечный или минорный ранги и обозначается через $\operatorname{rang} A$, *т.е.* $\operatorname{rang} A = m(A) = r(A) = \rho(A)$.

Критерии совместности СЛУ и обратимости матрицы

Теорема 31 (Кронекера-Капелли или критерий совместности систем линейных уравнений). *Система линейных уравнений (I) совместна тогда и только тогда, когда ранг её расширенной матрицы равен рангу основной матрицы.*

Доказательство. Напомним обычные обозначения и равносильности:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \tag{I}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kn} & \beta_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \ldots & A^{(n)} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} & \ldots & A^{(n)} & B \end{pmatrix},$$

$$(I) \;\Leftrightarrow\; A \cdot X = B \;\Leftrightarrow\; x_1 \cdot A^{(1)} + x_2 \cdot A^{(2)} + \ldots + x_n \cdot A^{(n)} = B .$$

Если СЛУ (I) совместна, то существует упорядоченная n-ка $(\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$, являющаяся её решением. Тогда

$$\gamma_1 \cdot A^{(1)} + \gamma_2 \cdot A^{(2)} + \ldots + \gamma_n \cdot A^{(n)} = B$$

и последний столбец матрицы $\overline{A}$ линейно выражается через предыдущие столбцы, а, значит, и через их базис. Ввиду этого, базис столбцов матрицы A является базисом столбцов матрицы $\overline{A}$, т.е. $\rho(A)=\rho(\overline{A})$ и $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} \overline{A}$.

Наоборот, если $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} \overline{A}$, то столбец B матрицы $\overline{A}$ линейно выражается через базис последовательности столбцов матрицы A (теорема 21, свойство 8), а значит, и через последовательность всех столбцов матрицы A. Поэтому существуют коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ такие, что

$$\gamma_1 \cdot A^{(1)}+\gamma_2 \cdot A^{(2)}+\ldots+\gamma_n \cdot A^{(n)}=B,$$

т.е. упорядоченная n-ка $(\gamma_1;\ \gamma_2;\ \ldots;\ \gamma_n)$ является решением СЛУ (I) и эта система совместна.▲

Теорема 32 (критерий обратимости квадратных матриц). *Квадратная матрица* $A=A_{n\times n}$ *обратима тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) $|A|\neq 0$*;*

2) $r(A)=\rho(A)=m(A)=\operatorname{rang} A=n$.

Доказательство. Ранее было доказано, что матрица A обратима тогда и только тогда, когда $|A|\neq 0$. Но $|A|\neq 0 \Leftrightarrow m(A)=n$. А так как $m(A)=\rho(A)=r(A)=\operatorname{rang} A$, то A обратима тогда и только тогда, когда $r(A)=\rho(A)=\operatorname{rang} A=m(A)=n$.▲

§5. Связь решений неоднородной системы с ФСР ассоциированной однородной

Рассмотрим две СЛУ:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \alpha_{k2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = \beta_k, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x_n = 0, \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1} \cdot x_1 + \alpha_{k2} \cdot x_2 + \ldots + \alpha_{kn} \cdot x_n = 0, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

где однородная СЛУ (III) получена из (I) заменой столбца свободных членов $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$ на нулевой столбец.

Определение. Однородная СЛУ (III) называется *однородной ассоциированной системой для системы (I).*

Обозначим через M_1 множество всех решений СЛУ (I), M_2 – множество всех решений однородной ассоциированной СЛУ (III).

Теорема 33 (о связи решений неоднородной системы с ФСР ассоциированной однородной системы).

1) Если $b, a \in M_1$, *то* $b - a \in M_2$.

2) Если $a \in M_1, Б = \langle c_1; \ c_2; \ \ldots; \ c_r \rangle$ *– ФСР системы (III), то любое решение b системы (I) есть сумма вектора a и некоторой линейной комбинации векторов ФСР:*

$$b = a + \gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_2 + \ldots + \gamma_r \cdot c_r, \quad \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in P.$$

Доказательство.

1) Пусть $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$, $b = (\delta_1; \delta_2; \dots; \delta_n) \in M_1$ - два решения системы (I). Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, k$ выполняются равенства:

$$\alpha_{i1} \cdot \delta_1 + \alpha_{i2} \cdot \delta_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \delta_n = \beta_i$$

и

$$\alpha_{i1} \cdot \alpha_1 + \alpha_{i2} \cdot \alpha_2 + \ldots + \alpha_{in} \cdot \alpha_n = \beta_i \, .$$

Для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ вычтем из первого равенства второе и получим равенство:

$$\alpha_{i1} \cdot (\delta_1 - \alpha_1) + \alpha_{i2} \cdot (\delta_2 - \alpha_2) + \ldots + \alpha_{in} \cdot (\delta_n - \alpha_n) = 0 \, ,$$

т.е. упорядоченная n-ка $b - a = (\delta_1 - \alpha_1; \delta_2 - \alpha_2; \dots; \delta_n - \alpha_n;)$ является решением каждого уравнения системы (III), а значит, $b - a \in M_2$.

2) Зафиксируем решение a системы (I), и пусть b – произвольное её решение. Тогда $b - a \in M_2$, т.е. $b - a$ - решение системы (III), и, следовательно, является линейной комбинацией векторов ФСР этой системы. Поэтому существуют коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r \in Б$ такие, что

$$b - a = \gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_2 + \ldots + \gamma_r \cdot c_r \, ,$$

откуда

$$b = a + \gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_2 + \ldots + \gamma_r \cdot c_r \, . \; \blacktriangle$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 33 дает алгоритм нахождения решений произвольной системы. А именно, из *общего решения* СЛУ (I) можно получить не только частное её решение, но и общее решение ассоциированной однородной СЛУ (III). Для этого достаточно в правой части общего решения системы (I) заменить все свободные члены на нули. Отсюда находим ФСР системы (III) и записываем произвольное решение СЛУ (I) как сумму её частного решения и линейной комбинации векторов ФСР системы (III).

Пример. Записать так, как указано в теореме 33, решение некоторой системы (X), если её общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad -3x_4, \\ x_2 = 1 + x_3 - 4x_4. \end{cases} \qquad (A)$$

Найдем частное решение a системы (X). Для этого зададим значения независимым неизвестным:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4
0	1	0	0

Таким образом упорядоченная четверка $a = (0;\ 1;\ 0;\ 0)$ – частное решение системы (X).

Зануляя в (A) свободные члены, получим общее решение ассоциированной однородной системы:

$$\begin{cases} x_1 = \qquad -3x_4, \\ x_2 = x_3 - 4x_4. \end{cases} \qquad (Б)$$

По ($Б$) находим ФСР ассоциированной системы:

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	x_4
0	1	1	0
-3	-4	0	1

Значит, $c_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0), c_2 = (-3;\ -4;\ 0;\ 1)$ - ФСР ассоциированной системы. Тогда всякое решение системы (X) можно записать в виде: $b = a + \gamma_1 \cdot c_1 + \gamma_2 \cdot c_2$, где γ_1, γ_2 – некоторые скаляры.

Ранг произведения матриц

Из свойств определителей и критерия обратимости квадратных матриц следует, что если $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, то $|A \cdot B| \neq 0$ и $\operatorname{rang}(A \cdot B) = \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = n$. Если же одна из матриц вырождена, то данное равенство может не выполняться, как видно из примеров ниже:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц ранга 1 имеет в первом случае ранг 1, а во втором – ранг 0.

Теорема 34. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.*

Доказательство. Достаточно доказать эту теорему для случая двух сомножителей. Пусть даны матрицы A, B, для которых произведение $A \cdot B$ имеет смысл и $A \cdot B = C$. По определению умножения матриц m-й столбец матрицы C имеет вид: $\begin{pmatrix} A^{(1)} \cdot B^{(m)} \\ A^{(2)} \cdot B^{(m)} \\ \vdots \\ A^{(k)} \cdot B^{(m)} \end{pmatrix}$, т.е. для $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ получается система равенств:

$$\begin{cases} \gamma_{1m} = \alpha_{11} \cdot \beta_{1m} + \alpha_{12} \cdot \beta_{2m} + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \beta_{nm}, \\ \gamma_{2m} = \alpha_{21} \cdot \beta_{1m} + \alpha_{22} \cdot \beta_{2m} + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \beta_{nm}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{km} = \alpha_{k1} \cdot \beta_{1m} + \alpha_{k2} \cdot \beta_{2m} + \ldots + \alpha_{kn} \cdot \beta_{nm}, \end{cases}$$

где $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$, $C = (\gamma_{ij})$. Но это означает, что

$$C^{(m)} = A^{(1)} \cdot \beta_{1m} + A^{(2)} \cdot \beta_{2m} + \ldots + A^{(n)} \cdot \beta_{nm},$$

т.е. m-й столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Тогда по замечанию к теореме 23 каждый столбец матрицы C линейно выражается через базис столбцов матрицы A. Поэтому $\operatorname{rang} C \le \operatorname{rang} A$.

Аналогично показывается, что каждая строка матрицы C является линейной комбинацией строк матрицы B, поэтому $\operatorname{rang} C \le \operatorname{rang} B$. Таким образом,

$$\operatorname{rang} C \le \min\left\{ \operatorname{rang} A; \quad \operatorname{rang} B \right\}. \blacktriangle$$

Теорема 35. *Ранг произведения произвольной матрицы A на невырожденную матрицу Q равен рангу матрицы A.*

Доказательство. Матрицу A можно умножать на Q как слева, так и справа, если это возможно из соотношения размерностей. Так как переместительный закон умножения для матриц не выполняется, будут получаться разные матрицы. Доказательства для обоих случаев аналогичны.

Пусть $\left|Q\right| \ne 0$ и, для определённости, $A \cdot Q = C$. Тогда, умножая обе части этого равенства на Q^{-1} справа, получим $A = C \cdot Q^{-1}$. По предыдущей теореме из первого равенства следует, что $\operatorname{rang} C \le \operatorname{rang} A$, а из второго $-\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} C$, что влечёт $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} C$. Аналогичное доказательство проводится и в случае $Q \cdot A = C$. $\blacktriangle$

Тема 4. Общеалгебраические понятия

§ 1. Алгебраические операции

Определение. *n-арной алгебраической операцией*, заданной на непустом множестве A, называется правило, которое каждой упорядоченной n-ке элементов из A ставит в соответствие единственный элемент из множества A. n-арная операция иногда ещё называется *n-местной операцией.*

Обычное обозначение n-арных операций:

$$\rho : (a_1, a_2, \ldots, a_m) \to b, \quad \rho : A^n \to A$$

или

$$\rho(a_1, a_2, \ldots, a_m) = b.$$

Пример. Если $A = \mathbb{R}$,

$$\rho(x, y, z) = \frac{x \cdot y \cdot z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$, то ρ - тернарная (трёхместная) операция на Р.

Для некоторых n вводятся особые названия n-арных операций.

1) $n = 0$ – нульарная операция. Эта операция состоит в выделении одного элемента (например, для действительных чисел выделение нуля или единицы). Обычно нульарные операции выделяются в отдельную группу и называются *выделенными элементами.*

2) $n = 1$ – унарная или одноместная операция. Она одному элементу сопоставляет один элемент. Например, таковой является операция взятия противоположного.

3) $n=2$ – бинарная или двухместная операция. Это наиболее часто встречающийся вид n-арных операций. К ним относятся, например, сложение чисел, матриц или векторов; умножение чисел, умножение квадратных матриц одной и той же размерности.

4) $n=3$ – тернарная операция.

Число n называется *рангом* n-арной операции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Алгеброй* называется непустое множество с заданными на нем алгебраическими операциями. Обозначаются алгебры следующим образом: $\langle A;\ \rho_1,\rho_2,...;\ c_1,c_2,...\rangle$, где А – основное множество, $\rho_1,\rho_2,...,$ - алгебраические операции, а $c_1,c_2,...$ - выделенные элементы.

Непустое подмножество $B\subseteq A$ называется *подалгеброй* алгебры $\langle A;\rho_1,\rho_2,...;\ c_1,c_2,...\rangle$, если $\langle B;\rho_1,\rho_2,...;\ c_1,c_2,...\rangle$ – также алгебра, т.е ρ_i являются алгебраическими операциями на множестве B и $c_1,c_2,...\in B$.

Говорят, что алгебра $\langle A;\rho_1,\rho_2,...;\ c_1,c_2,...\rangle$ *изоморфна* алгебре $\langle B;\mu_1,\mu_2,...;\ b_1,b_2,...\rangle$, если

1) для любого $1\le i\le k$ ранги алгебраических операций ρ_i и μ_i совпадают;

2) существует взаимно однозначное отображение f множества A на множество B такое, что для любых элементов $a_1,a_2,\dots,a_m\in A$ верно равенства

$$f\left(\rho_i\left(a_1,a_2,\dots,a_m\right)\right)=\mu_i\left(f\left(a_1\right),f\left(a_2\right),\dots,f\left(a_m\right)\right),$$

$$f\left(c_i\right)=b_i$$

(здесь m – ранг алгебраических операций ρ_i и μ_i).

Для наиболее частого случая бинарной алгебраической операции определение можно переформулировать следующим образом: *бинарной алгебраической операцией* (сокращённо БАО), заданной на непустом множестве *A*, называется правило, которое каждой упорядоченной паре элементов из *A* ставит в соответствие единственный элемент из *A*.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: Бинарные алгебраические операции обычно обозначаются символами $*$, $\circ$, $+$, $\square$, $\top$, $\perp$, и т.п., а результат применения этих операций к элементам a и b обозначаются $a*b$, $a \circ b$, $a \square b$ и т.д.

Бинарная операция $*$ называется *коммутативной* на *A*, если для любых $a, b \in A$ выполняется равенство

$$a*b=b*a .$$

По-другому это свойство называется *перестановочным законом* для операции $*$.

БАО $*$ называется *ассоциативной* на *A*, если для любых $a, b, c \in A$ выполняется равенство

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

(это – *сочетательный закон* для операции $*$). Если операция $*$ ассоциативна, то можно опускать скобки и писать $a*b*c$ вместо $(a*b)*c$ или $a*(b*c)$.

ПРИМЕРЫ. Сложение и умножение действительных чисел или квадратных матриц одного порядка коммутативно и ассоциативно.

Операция вычитания на множестве целых чисел некоммутативна и не ассоциативна, т.к. $a-b \neq b-a$ и $a-(b-c) \neq (a-b)-c$.

Элемент $e \in A$ называется *нейтральным* элементом относительно операции $*$ на A, если для любого элемента $a \in A$ выполняются равенства

$$a * e = e * a = a .$$

Элемент $a' \in A$ называется *симметричным* к элементу $a \in A$ относительно операции $*$ с нейтральным элементом e, если выполняются равенства

$$a * a' = a' * a = e .$$

ТЕОРЕМА 36. *1) Если для бинарной операции $*$ на множестве A существует нейтральный, то он единственен.*

2) Если для элемента $a \in A$ относительно ассоциативной операции $*$ с нейтральным элементом e существует симметричный, то он единственен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть e_1, e_2 – нейтральные элементы относительно операции $*$. Тогда $e_1 * e_2 = e_1$ и $e_1 * e_2 = e_2$. Из этого получаем, что $e_1 = e_2$.

2) Пусть a', a'', – симметричные к a элементы относительно операции $*$ с нейтральным элементом e. Рассмотрим элемент $(a' * a) * a''$. В силу ассоциативности операции $*$: $(a' * a) * a'' = a' * (a * a'')$.

С другой стороны, используя определения, получаем:

$$(a' * a) * a'' = e * a'' = a'' ,$$

$$a' * (a * a'') = a' * e = a' .$$

Следовательно, $a' = a''$. ▲

Рассмотрим наиболее распространённые варианты терминологии и обозначения бинарных операций.

	Операция	Нейтральный элемент	Симметричный элемент
Общий случай	$*$, ∇, ρ	e	a'
Аддитивная форма записи	**+**, сложение	0, θ, O, нулевой элемент	$-a$, противоположный элемент
Мультипликативная форма записи	$\sqcup$, умножение	1, E, $\mathbf{1}$, единица или единичный элемент	$a^{-1}, \dfrac{1}{a}$, обратный элемент

§2. *Группы*

Определение.

Вариант 1. Непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция $*$ ассоциативна;

2) существует $e \in G$ – нейтральный относительно операции $*$ элемент;

3) для любого $a \in G$ существует симметричный элемент $a' \in G$.

Вариант 2. Непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция $*$ ассоциативна;

2) для любых элементов $a, b \in G$ уравнения $a * x = b$ и $y * a = b$ имеют решение в G.

Группа называется *коммутативной* или *абелевой*, если операция $*$ коммутативна.

Теорема 37. *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Действительно, элементы $x_0 = a' * b$ и $y_0 = b * a'$, где $a' \in G$ – симметричный к a элемент, являются решениями соответствующих уравнений:

$$a * x_0 = a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b,$$

$$y_0 * a = (b * a') * a = b * (a' * a) = b * e = b.$$

Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Для этого достаточно доказать, что существует нейтральный элемент $e \in G$, и для каждого $a \in G$ существует симметричный к a элемент $a' \in G$.

По условию $G \neq \varnothing$. Поэтому существует $a \in G$. Рассмотрим уравнения $a * x = a$ и $y * a = a$. Из аксиомы 2 определения 2 следует, что существуют решения этих уравнений, которые обозначим $e_П, e_Λ \in G$. Докажем, что для любого $c \in G$ выполняются равенства

$$c * e_П = c \quad \text{и} \quad e_Λ * c = c.$$

Рассмотрим уравнения $a * x = c$ и $y * a = c$. По условию существуют их решения $x_0, y_0 \in G$. Тогда

$$c * e_П = (y_0 * a) * e_П = y_0 * (a * e_П) = y_0 * a = c \quad \text{и}$$

$$e_Λ * c = e_Λ * (a * x_0) = (e_Λ * a) * x_0 = a * x_0 = c,$$

т.е. равенства $c * e_П = c$ и $e_Λ * c = c$ выполняются для любого элемента $c \in G$. В частности, они должны выполняться и для самих элементов $e_Λ$ и $e_П$:

$$e_{Ë} * e_{Ï} = e_{Ë} \text{ и } e_Λ * e_П = e_П.$$

Отсюда следует $e_Λ = e_П$.

Обозначим этот элемент через $e \in G$. Тогда по доказанному выше, для любого $a \in G$ выполняются равенства $a * e = e * a = a$, т.е. e – нейтральный элемент относительно операции $*$. По теореме 36 он единственен.

Далее рассмотрим уравнения $a * x = e$ и $y * a = e$ для любого $a \in G$. Существуют $a', a'' \in G$ – решения этих уравнений, для которых выполняются равенства $a * a' = e$ и $a'' * a = e$. Докажем, что $a' = a''$. Это следует из того, что

$$a'' * (a * a') = (a'' * a) * a',$$

$$a'' * (a * a') = a'' * e = a'' \text{ и } (a'' * a) * a' = e * a' = a'.$$

Таким образом элемент $a' = a''$ будет симметричным к *a,* причём он единственен, так как операция $*$ ассоциативна.▲

ТЕОРЕМА 38 (простейшие свойства групп). *Пусть* $\langle G;\ * \rangle$ *– группа. Тогда выполняются следующие свойства.*

1) Уравнения $a * x = b$ *и* $y * a = b$ *имеют единственные решения в G для любых её элементов a и b.*

2) Если $a * c = b * c$*, то* $a = b$*. Если* $c * a = c * b$*, то* $a = b$*.*

3) Если $a * b = a$ *или* $c * a = a$*, то* $b = e$ *или* $c = e$*.*

4) $(a')' = a$*, т. е. симметричный к* a' *есть a.*

5) Если $a * b = e$*, то* $a' = b$ *и* $b' = a$*.*

6) $(a * b)' = b' * a'$*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если y_0 – решение уравнения $y * a = b$, то

$$(y_0 * a) * a' = b * a' \;\Rightarrow\; y_0 * e = b * a' \Rightarrow\; y_0 = b * a',$$

т.е. $b * a'$ – единственное решение уравнения $y * a = b$.

Аналогично доказывается единственность решения первого уравнения.

2) Пусть $c * a = c * b$. Тогда

$$c' * (c * a) = c' * (c * b) \;\Rightarrow\; (c' * c) * a = (c' * c) * b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; e * a = e * b \;\Rightarrow\; a = b.$$

Аналогично доказывается и первое из свойств. Свойство 2) принято называть *законом сокращения*.

3) Если $a * b = a$, то $a * b = a * e$ и по закону сокращения $b = e$.

4) По определению a' и $(a')'$

$$a' * (a')' = e = a' * a.$$

По закону сокращения $(a')' = a$.

5) a и b' (аналогично b и a') являются решениями соответствующего уравнения $(a * x = e)$ и $y * b = e$. Значит, $a = b'$ ($b = a'$) по пункту 1) данной теоремы.

6) В силу единственности симметричного элемента достаточно проверить, что $(a * b) * (b' * a') = e$:

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * e * a' = a * a' = e. \blacktriangle$$

Переформулируем понятия изоморфизма и подалгебры для случая групп.

Подгруппой группы $\langle G;\ * \rangle$ называется непустое подмножество H группы G, которое само является группой относительно той же операции $*$ (т.е. $\langle H;\ * \rangle$ – группа).

Теорема 39 (критерий подгруппы). *Непустое подмножество H группы G является её подгруппой, если выполняются условия:*

1) для любых $a, b \in H$ элемент $a * b \in H$;

2) для любого $a \in H$ симметричный элемент $a' \in H$.

Доказательство. Докажем, что если $\langle H;\ * \rangle$ – подгруппа, то условия 1) и 2) выполняются. Действительно, если $\langle H;\ * \rangle$ – подгруппа, то $\langle H;\ * \rangle$ – группа и по определению операции и группы следует, что условия 1) и 2) выполняются.

Обратно, пусть для непустого подмножества $H \subseteq G$ условия 1) и 2) выполняются. Тогда $*$ является операцией на H и так как $*$ ассоциативна на всем G, то она ассоциативна на любом подмножестве G, в частности, на H. Так как $H \neq \varnothing$, то существует $a \in H$ и по условию 1) $a' \in H$. По условию 2) $a * a' \in H$, и т.к. $a * a' = e$, то $e \in H$. В результате все аксиомы группы выполняются, следовательно, $\langle H;\ * \rangle$ является группой и будет подгруппой группы $\langle G;\ * \rangle$.▲

Пример. Множество всех целых чётных чисел по сложению является подгруппой группы всех целых чисел по сложению.

Группа $\langle G;\ * \rangle$ *изоморфна* группе $\langle H;\ \circ \rangle$, если существует взаимно однозначное отображение f множества G на множество H такое, что для любых элементов $a, b \in G$ выполняется равенство:

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b).$$

Изоморфизм групп $\langle G;\ *\rangle$ и $\langle H;\ \mathbf{o}\rangle$ будем обозначать так:

$$\langle G;\ *\rangle \cong \langle H;\ \mathbf{o}\rangle \text{ или } G \cong H .$$

Пример. Группа $\langle \mathbb{R}^{+};\ \cdot\rangle$ всех положительных действительных чисел с операцией умножения изоморфна группе $\langle \mathbb{R};\ +\rangle$ действительных чисел с операцией сложения. В качестве взаимно однозначного отображения множества $\mathbb{R}^{+}$ на Р можно взять логарифмическую функцию по любому действительному ненулевому основанию.

Для изоморфизма групп выполняются следующие свойства. Пусть $\langle G;\ *\rangle$, $\langle H;\ \mathbf{o}\rangle$ и $\langle M;\ \text{т}\rangle$ – некоторые группы, тогда:

1) $\langle G;\ *\rangle \cong \langle G;\ *\rangle$ (свойство *рефлексивности*);

2) если $\langle G;\ *\rangle \cong \langle H;\ \mathbf{o}\rangle$, то $\langle H;\ \mathbf{o}\rangle \cong \langle G;\ *\rangle$ (свойство *симметричности*);

3) если $\langle G;\ *\rangle \cong \langle H;\ \mathbf{o}\rangle$ и $\langle H;\ \mathbf{o}\rangle \cong \langle M;\ \text{т}\rangle$, то $\langle H;\ *\rangle \cong \langle M;\ \text{т}\rangle$ (свойство *транзитивности*).

§3. Кольца и поля

Кольца

Определение. Непустое множество K с заданными на нем двумя бинарными алгебраическими операциями + и $\cdot$ называется *кольцом*, если выполняются свойства:

1) $\langle K;\ +\rangle$ – коммутативная (абелева) группа;

2) для любых $a,\ b,\ c \in K$:

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c \quad \text{и} \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c .$$

Операции + и $\cdot$ обычно называются *сложением* и *умножением* соответственно. Пользуясь существованием противоположного элемента, в каждом кольце можно определить *разность*:

$$a - b = a + (-b).$$

Кольцо называется *ассоциативным*, если операция умножения ассоциативна на *K*; *коммутативным* - если операция умножения коммутативна на *K*; *кольцом с единицей* - если существует нейтральный элемент относительно умножения $1 \in K$.

Элементы $a, b \in K$ называются *делителями нуля*, если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $a \cdot b = 0$ или $b \cdot a = 0$.

Кольцо $\langle K;\ +;\ \cdot \rangle$ называется *областью целостности*, если оно коммутативно, $0 \neq 1$ и для любых $a, b \in K$ из условия $a \cdot b = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$.

Замечание. По определению область целостности не содержит делителей нуля.

Примеры. 1) Множества целых, рациональных и действительных чисел, относительно обычных операций сложения и умножения $\langle \mathbb{Z};\ +;\ \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q};\ +;\ \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R};\ +;\ \cdot \rangle$ являются областями целостности.

2) Множество всех отображений из Р в Р с операциями:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

образуют коммутативное, ассоциативное кольцо с делителями нуля и с единицей.

3) Множество всех квадратных матриц размерности $n \times n$ с обычными операциями сложения и умножения

образуют ассоциативное, но не коммутативное (при $n \geq 2$) кольцо с делителями нуля.

Например, при $n = 2$ следующие две матрицы будут делителями нуля:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 40 (простейшие свойства колец). *Пусть $\langle K;\ +;\ \cdot \rangle$ – некоторое кольцо. Тогда для любых его элементов выполняются следующие свойства.*

1) Уравнения $a + x = b$ и $y + a = b$ имеют единственные решения.

2) Если $a + c = b + c$, то $a = b$.

3) Если $a + b = a$ или $b + a = a$, то $b = 0$.

4) $-(-a) = a$, т.е. противоположным к $-a$ является элемент a.

5) Если $a + b = 0$, то $b = -a$ и $a = -b$.

6) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

7) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab, (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

8) $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

9) $-a = (-1) \cdot a$ (если в кольце есть единица).

10) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$, $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, где $a - b = a + (-b)$.

Доказательство. Так как $\langle K;\ + \rangle$ – коммутативная группа, то свойства 1) – 5) доказаны в теореме 38.

6) Заметим, что $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$, т.е. $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$. Тогда по пункту 3 данной теоремы получаем, что $a \cdot 0 = 0$. Аналогично доказывается, что $0 \cdot a = 0$.

7) $a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot 0 = 0$. По пункту 5 $a \cdot (-b) = -ab$. Аналогично доказывается, что $(-a) \cdot b = -ab$. Далее, $(-a) \cdot (-b) = -a \cdot (-b) = -(-a \cdot b) = a \cdot b$ по п.п.7 и 4.

8) Так как

$$(a + b) + (-a) + (-b) = (a + b) + (-b) + (-a) =$$

$$= a + (b + (-b)) + (-a) = a + 0 + (-a) = a + (-a) = 0,$$

то элемент $(-a) + (-b)$ является противоположным к $(a + b)$.

9) Действуем так же, как и в предыдущем пункте:

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

10) Воспользуемся определением разности и п.7:

$$(a - b) \cdot c = (a + (-b)) \cdot c = a \cdot c + (-b) \cdot c =$$
$$= a \cdot c + (-b \cdot c) = a \cdot c - b \cdot c.$$

Аналогично доказывается и вторая часть пункта 10.▲

Поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Коммутативное ассоциативное кольцо $\langle P;\ +;\ \cdot \rangle$ с единицей, в котором $0 \neq 1$ и для каждого ненулевого элемента $a \in P$ существует обратный $a^{-1} \in P$, называется *полем*.

Подполем поля $\langle P; +; \cdot \rangle$ называется непустое подмножество $F \subseteq P$ такое, что $\langle F; +; \cdot \rangle$ – поле. При этом поле P называется *расширением* поля F.

Подполе поля $\langle P; +; \cdot \rangle$, отличное от P, называется его *собственным подполем*. Поле называется *простым*, если оно не имеет собственных подполей.

Заметим, что поле является кольцом, а значит, все свойства теоремы 40 выполняются для любого поля.

Если $\langle P; +; \cdot \rangle$ – поле, $a, b \in P$ и $b \neq 0$, то уравнение $b \cdot x = a$ имеет в поле единственное решение, т.к. множество $P^* = P \setminus \{ 0 \}$ является коммутативной группой относительно операции умножения. Элемент $a \cdot b^{-1}$, который является решением данного уравнения, обозначается символом $\frac{a}{b}$. Тем самым определено деление:

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}, \ b \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 41 (простейшие свойства поля). *Пусть $\langle P; +; \cdot \rangle$ – некоторое поле. Тогда для любых элементов $a, b, c \in P$ выполняются свойства:*

1) Если $a \cdot b = 1$, то $a \neq 0$ и $b = a^{-1}$.

2) Если $a \cdot c = b \cdot c$ и $c \neq 0$, то $a = b$.

3) Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$ (в поле нет делителей нуля).

4) Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a \cdot b \neq 0$.

5) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *тогда и только тогда, когда* $\begin{cases} a\cdot d=b\cdot c, \\ b\neq 0, \\ d\neq 0. \end{cases}$

6) $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm b\cdot c}{b\cdot d}$.

7) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

8) $\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=0$ и $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}$.

9) Если $a\neq 0$ и $b\neq 0$*, то* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}$.

10) $\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$*, если* $b\neq 0$ и $c\neq 0$.

Доказательство. Так как $\langle P^*;\ \cdot\rangle$ – коммутативная группа, то свойства 1 и 2 следуют из теоремы 38.

3) Если $a\neq 0$, то существует a^{-1} и

$$b=e\cdot b=\left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot b=a^{-1}\cdot(a\cdot b)=a^{-1}\cdot 0=0.$$

Если $a=0$, то свойство выполняется.

4) Доказывается из свойства 3) методом от противного.

5) Пусть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, т.е. $a\cdot b^{-1}=c\cdot d^{-1}$. Тогда $b\neq 0$ и $d\neq 0$ и

$$a\cdot b^{-1}=c\cdot d^{-1}\ \Rightarrow\ \left(a\cdot b^{-1}\right)\cdot(b\cdot d)=\left(c\cdot d^{-1}\right)\cdot b\cdot d\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot\left(b^{-1}\cdot b\right)\cdot d=c\cdot d^{-1}\cdot b\cdot d=c\cdot\left(d^{-1}\cdot d\right)\cdot b\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot e\cdot d=c\cdot e\cdot b\ \Rightarrow\ a\cdot d=c\cdot b.$$

Обратно, пусть $a\cdot d=c\cdot b$ и $b\neq 0,\ d\neq 0$. Тогда умножив это равенство на $b^{-1}\cdot d^{-1}$, получим:

$$a\cdot d\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}=c\cdot b\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}\quad\Rightarrow\quad a\cdot b^{-1}=c\cdot d^{-1}.$$

6) Так как $\frac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$ и $\frac{c}{d}=c\cdot d^{-1}$, то

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\ a\cdot b^{-1}\pm c\cdot d^{-1}=\ a\cdot\left(d\cdot d^{-1}\right)\cdot b^{-1}\pm c\cdot\left(b\cdot b^{-1}\right)\cdot d^{-1}=$$

$$=\left(ad\pm bc\right)\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}=\left(ad\pm bc\right)\cdot\left(db\right)^{-1}=\frac{ad\pm bc}{bd}.$$

7) При $b\neq 0$ и $d\neq 0$ имеем

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\ ab^{-1}\cdot cd^{-1}=\ a\cdot c\cdot b^{-1}\cdot d^{-1}=\ ac\cdot\left(db\right)^{-1}=\ \frac{ac}{bd}.$$

8) При $b\neq 0$:

$$\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b}=a\cdot b^{-1}+\left(-a\right)\cdot b^{-1}=\left(a-a\right)\cdot b^{-1}=0\cdot b^{-1}=0.$$

9) Если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\left(a\cdot b^{-1}\right)^{-1}=\left(b^{-1}\right)^{-1}\cdot a^{-1}=b\cdot a^{-1}=\frac{b}{a}.$$

10) При $b\neq 0$ и $c\neq 0$:

$$\frac{ac}{bc}=ac\cdot\left(bc\right)^{-1}=a\cdot c\cdot c^{-1}\cdot b^{-1}=a\cdot b^{-1}=\frac{a}{b}.\blacktriangle$$

Примеры. Множества рациональных и действительных чисел, относительно обычных операций сложения и умножения $\langle \mathbb{Q};\ +;\ \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R};\ +;\ \cdot \rangle$ являются полями, причём $\langle \mathbb{Q};\ +;\ \cdot \rangle$ является подполем поля $\langle \mathbb{R};\ +;\ \cdot \rangle$, т.к. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Между полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ имеется бесконечное множество полей F (таких, что $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{R}$). Например, полем будет множество $F = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ с обычными операциями сложения и умножения чисел.

Уточним понятие изоморфизма для случая полей. Для простоты обозначений операции на каждом поле будем обозначать одинаково: $+$ и $\cdot$.

Поле $\langle P;\ +;\ \cdot \rangle$ называется *изоморфным* полю $\langle F;\ +;\ \cdot \rangle$, если существует взаимно однозначное отображение f множества P на множество F такое, что для любых $a, b \in P$ выполняются равенства

$$f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Изоморфизм полей будем обозначать так: $P \cong F$. Для изоморфизма произвольных полей P, F, H выполняются следующие свойства:

1) $P \cong P$;

2) если $P \cong F$, то $F \cong P$;

3) если $P \cong F$ и $F \cong H$, то $P \cong H$.

Если поле P изоморфно некоторому подполю поля F, то говорят, что поле *P изоморфно вкладывается в поле F*. Этот факт обозначается так: $P \leq F$.

Литература

Основная:

1. *Варпаховский, Ф.Л.* Алгебра: учеб. пособие для студ.-заочников 1 курса физ.-мат. фак-ов. пед. ин-тов/ Ф.Л.Варпаховский, А.С.Солодовников. – М.: Просвещение, 1981.

2. *Громов, А.П.* Учебное пособие по линейной алгебре: для студ. заочных отд. физ.-мат. фак-ов. пед. ин-тов по курсу высш. алгебры/ А.П.Громов. – М.: Просвещение, 1971.

3. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру/ А.И.Кострикин. – М.: Наука, 1977.

4. *Куликов, Л.Я.* Алгебра и теория чисел/ Л.Я.Куликов. – М.: Высшая школа, 1979.

5. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры /А.Г.Курош. – М.: Наука, 1975.

6. *Мальцев, И.А.* Линейная алгебра/ И.А.Мальцев. – Новосибирск: Изд. Ин-та математики, 2001.

7. Методическая разработка занятий по алгебре и теории чисел: для студ. 1 курса ФМФ/ Сост. А.М.Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ,1985.

8. Методическая разработка занятий по линейной алгебре: для студ. 1 курса мат. фак-та пед. ин-та/ Сост. А.М.Иванов и др. – Новосибирск: Изд. НГПИ, 1988.

Дополнительная:

1. *Глухов, М.М.* Задачник-практикум по высщей алгебре/ М.М.Глухов. – М., 1969.

2. *Кострикин, А.И.* Сборник задач по алгебре/ А.И.Кострикин и др. – М.: Наука, 1987.

3. *Куликов, Л.Я.* Сборник задач по алгебре и теории чисел/ Л.Я.Куликов, Л.И.Москаленко, А.А.Фомин. – М.: Просвещение, 1993.

4. *Нечаев, В.А.* Задачник-практикум по алгебре: учеб. пособие для студ.-заочников 2 курса физ.-мат. фак-ов пед. ин-тов/ В.А.Нечаев. – М.: Просвещение, 1983.

5. *Шнеперман, Л.Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел/ Л.Б.Шнеперман. – Минск, 1982.

Предметный указатель

Содержание

Учебное издание

Кузьмичёв Анатолий Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА–1

Курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета

В авторской редакции

Компьютерная вёрстка А.Ю.Пугач

Лицензия ЛР№020059 от 24.03.97 г.

Гигиенический сертификат №54.НК.05.953.П.000149.12.02 от 27.12.02 г.

Подписано в печать 23.03.07 г. Формат бумаги 60х84/16.

Печать RISO. Уч.-изд.л. 8,3. Усл.п.л. 7,3. Тираж 100 экз.

Заказ № 32

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, Вилюйская, 28