МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФГБОУ ВПО "Новосибирский государственный педагогический университет"

А. И. Кузьмичёв

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА-1

Утверждено Редакционно-издательским советом НГПУ в качестве учебного пособия для самостоятельной работы

Новосибирск 2012

УДК 512(075.8)
ББК 22.14и73-4
К893

Н а у ч н ы й р е д а к т о р :
кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры НГПУ
М. П. Тропин

Р е ц е н з е н т ы :
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ИМ СО РАН
М. В. Нещадим,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры НГПУ
Ю. В. Сосновский

Кузьмичёв, А. И.

К893 Линейная алгебра-1: учебное пособие для самостоятельной работы/ А. И. Кузьмичёв. – Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012. – 120 с.

ISBN 978-5-85921-894-3.

Учебное пособие входит в серию «Учебно-дидактические комплексы кафедры алгебры» и содержит вопросы к экзамену, задачи к зачёту и индивидуальные задания по темам: «Матрицы и определители», «Системы линейных уравнений», «Арифметические векторные пространства и их применения» и «Общеалгебраические понятия». Один вариант индивидуального задания приведён с полными решениями.

Пособие предназначено для студентов 1-го курса НГПУ.

УДК 512(075.8)

ISBN 978-5-85921-894-3 **ББК 22.14и73-4**

К ЧИТАТЕЛЮ

Данное пособие дополняет курс лекций [3] и задачник-практикум [4].

Вопросы к экзамену могут быть полезны при изучении теоретического материала. Они дают разбивку материала курса лекций [3] на составные части.

Подготовку к зачёту и контрольным работам нужно проводить по задачнику-практикуму [4]: в нём приведено достаточное количество задач с решениями, разобраны основные методы. В списке задач к зачёту и экзамену данного пособия собраны типовые задачи, решение которых необходимо освоить для успешной сдачи зачёта.

Основной объём пособия составляют индивидуальные задания. Они охватывают весь изучаемый материал и могут предлагаться студентам для закрепления навыков решения задач, полученных на практических занятиях. Кроме того, они могут использоваться студентами для самостоятельной работы, т.к. один из вариантов разобран с решениями.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Матрицы: их запись, последовательности строк и столбцов, действия с матрицами.
2. Свойства действий с матрицами.
3. Перестановки: теорема о их количестве, понятие инверсии и чётности перестановки.
4. Транспозиции перестановок, теоремы о чётности, количество чётных и нечётных перестановок.
5. Подстановки, способы их задания, количество, чётность и знак подстановок.
6. Правильные произведения элементов матрицы, их знаки, понятие определителя.
7. Простейшие и основные свойства определителей.
8. Теоремы об определителях с почти нулевой строкой.
9. Разложение определителя по строке и по столбцу.
10. Сумма всех произведений элементов строки (столбца), умноженных на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца).
11. Способы вычисления определителей (по определению, приведением к треугольному виду, разложением по строкам или столбцам, комбинированным способом) с их обоснованием.
12. Обратная матрица, её единственность.
13. Присоединенная матрица, её свойства. Теорема об обратной матрице.
14. Системы линейных уравнений, основные понятия. Теорема о равносильности систем уравнений.
15. Правило Крамера.
16. Теорема об элементарных преобразованиях систем линейных уравнений.
17. Модифицированный метод Гаусса решения систем линейных уравнений с обоснованием.
18. Теорема о множестве всех решений ППС. Общее решение системы линейных уравнений и его нахождение.
19. Арифметические n-мерные векторы, действия с ними, свойства действий.

20. Линейные комбинации последовательности векторов, линейная выражаемость, ЛЗ и ЛНЗ последовательности. Теорема о свойствах ЛЗ и ЛНЗ.

21. Основная лемма о ЛЗ и следствия из неё.

22. Базис последовательности векторов, свойства базиса, ранг последовательности.

23. Нахождение ранга и базиса конечной ненулевой последовательности векторов.

24. Обращение матриц модифицированным методом Гаусса.

25. Подпространства. Теорема о существовании базиса ненулевого подпространства.

26. Теорема о множестве всех решений однородной системы.

27. Существование и нахождение ФСР однородной системы, имеющей ненулевые решения.

28. Ранги матрицы, теоремы о рангах.

29. Критерии совместности систем линейных уравнений и обратимости матриц.

30. Связь решения произвольной системы линейных уравнений с ФСР её ассоциированной однородной системы.

31. Ранг произведения матриц, теоремы о ранге произведения матриц.

32. Алгебраические операции, алгебры, изоморфизм алгебр. Бинарные алгебраические операции и их свойства.

33. Два определения группы и их равносильность. Простейшие свойства групп. Примеры.

34. Подгруппы, критерий подгруппы. Изоморфизм групп.

35. Поля, примеры полей, простейшие свойства. Подполя. Изоморфизм и вложение полей.

ЗАДАЧИ К ЗАЧЁТУ И ЭКЗАМЕНУ

1. Выполните действия:

а) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix};$$

б) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её индукцией по n, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель по определению:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & 0 \\ x & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & y \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 0 & b & a \\ 0 & a & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

4. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

5. Вычислите определитель модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

6. Найдите A^{-1} по формуле, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}13 & 20 & 3\\ 5 & 8 & 1\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

7. Решите матричные уравнения $A\cdot X=B$ и $Y\cdot A=B$, $C^{-1}\cdot X\cdot C=B$, если $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 2\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}$, и:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Известно, что числа 178, 267 и 445 делятся на 89. Не вычисляя определителя третьего порядка $\begin{vmatrix}1 & 7 & 8\\ 2 & 6 & 7\\ 4 & 4 & 5\end{vmatrix}$, докажите, что он делится на 89.

9. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную матрицу:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & a\\ a & 1 & a\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ b & a & 1\\ a & b & 1\end{pmatrix}$.

10. Решите систему по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

11. Найдите по правилу Крамера значения неизвестных x_1 и x_3 для системы:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$

12. Решите систему модифицированным методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

13. Найдите общее решение однородной системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

14. Выразите вектор b через последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если:

а) $b = (-1;\ 1;\ -1;\ 6)$, $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 2)$,

$a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ -1)$, $a_3 = (-1;\ 0;\ 1;\ 1)$;

б) $b = (1;\ -1;\ 3;\ 6)$, $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 2)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ -1)$, $a_3 = (0;\ 1;\ 2;\ 1)$, $a_4 = (-1;\ 1;\ 1;\ 0)$.

15. Проверьте, является ли последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимой или линейно независимой, если:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 0;\ 1;\ 2)$,

$a_3 = (0;\ 1;\ 1;\ -1)$, $a_4 = (1;\ -1;\ 2;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 3;\ 4;\ 3)$,

$a_3 = (1;\ -1;\ 1;\ -2)$, $a_4 = (3;\ 2;\ 8;\ 5)$;

в) $a_1 = (1;\ 2;\ 3;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 3;\ 0)$,

$a_3 = (2;\ 3;\ 7;\ 2)$, $a_4 = (1;\ 4;\ 6;\ 7)$;

г) $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ -1;\ 1)$,

$a_3 = (0;\ 1;\ 2;\ 3)$, $a_4 = (0;\ 0;\ 1;\ 0)$.

16. Найдите базис и ранг последовательности векторов и линейно выразите все векторы последовательности через найденный базис, если:

а) $a_1 = (1;\ -1;\ 1)$, $a_2 = (0;\ 1;\ -1)$, $a_3 = (2;\ 0;\ 1)$, $a_4 = (-1;\ 2;\ 2)$, $a_5 = (1;\ 1;\ 0)$;

б) $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (2;\ -1;\ 1;\ 0)$, $a_3 = (1;\ -1;\ 0;\ 1)$, $a_4 = (3;\ -2;\ 1;\ 1)$, $a_5 = (1;\ 1;\ -1;\ 0)$;

в) $a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (-1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (0;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_4 = (1;\ 1;\ -1;\ 0)$, $a_5 = (1;\ 4;\ -1;\ 2)$, $a_6 = (2;\ 3;\ 1;\ -2)$.

17. Найдите A^{-1} модифицированным методом Гаусса:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Исследуйте и решите систему с параметром:

а) $\begin{cases} x_1 + \lambda \cdot x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda \cdot x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 1, \\ \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + x_3 = \lambda^2 - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lambda \cdot x_1 + x_2 = 1, \\ \lambda \cdot x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \lambda \cdot x_1 + x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + \lambda^2 \cdot x_2 + x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

19. Пусть дана матрица A^{-1} – обратная к квадратной матрице A. Найдите обратную к A^{T}.

20. Что произойдет с матрицей A^{-1}, если в матрице A поменять местами i-ю и j-ю строки (столбцы)?

21. Найдите ФСР однородной системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$

22. При каких значениях параметра λ последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ является базисом пространства $\mathbb{R}^n$, если:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ \lambda)$, $a_2 = (1;\ \lambda;\ 1)$, $a_3 = (\lambda;\ 1;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (\lambda;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ \lambda)$;

в) $a_1 = (1;\ 1;\ \lambda;\ \lambda)$, $a_2 = (\lambda;\ 1;\ \lambda;\ 1)$, $a_3 = (1;\ \lambda;\ 1;\ \lambda)$, $a_4 = (\lambda;\ \lambda;\ 1;\ 1)$?

23. Найдите базис подпространства L, если:

а) $L = \left\{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 = 0\right\}$;

б) $L = \left\{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n \cdot \alpha_n = 0\right\}$;

в) $L = \left\{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha_1 - \alpha_2 + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n = 0\right\}$;

г) $L = \left\{(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0\right\}$.

24. Найдите базис линейной оболочки векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ 2)$, $a_3 = (1;\ 0;\ 1;\ 1)$, $a_4 = (3;\ 2;\ -1;\ 3)$;

б) $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ 1;\ 0)$, $a_4 = (0;\ 1;\ -1;\ 0)$.

25. Найдите базис суммы $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2, если $L_1 = L(a_1;\ \ldots;\ a_k)$, $L_2 = L(b_1;\ \ldots;\ b_m)$ и:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (1;\ 0;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (0;\ 1;\ -1;\ -2)$, $b_1 = (2;\ 1;\ 3;\ 0)$, $b_2 = (1;\ 0;\ 1;\ -1)$, $b_3 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (0;\ 1;\ 1;\ 1)$, $a_4 = (1;\ 2;\ 3;\ 2)$, $b_1 = (1;\ 3;\ 4;\ 3)$, $b_2 = (2;\ 3;\ 5;\ 3)$, $b_3 = (1;\ 1;\ 1;\ 0)$, $b_4 = (1;\ 2;\ 4;\ 3)$.

26. Найдите базис пересечения $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2, если $L_1 = L(a_1;\ \ldots;\ a_k)$, $L_2 = L(b_1;\ \ldots;\ b_m)$ и:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 2;\ 3)$, $a_3 = (0;\ 1;\ 2)$, $a_4 = (1;\ 1;\ 2)$, $b_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $b_2 = (1;\ 0;\ -1)$, $b_3 = (2;\ 1;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 2;\ 3;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ 2;\ 0)$, $a_4 = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $b_1 = (3;\ 2;\ 3;\ 2)$, $b_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $b_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $b_4 = (2;\ 1;\ 3;\ 1)$.

27. Выясните, будет ли множество L подпространством векторного пространства $\mathbb{R}^n$ над полем $\mathbb{R}$, если

а) $L = \left\{ (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R}^n \ и \ \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \right\}$;

б) $L = \left\{ (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R}^n \text{ и } \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 \right\}$;

в) $L = \left\{ (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R}^n \text{ и } \alpha_1^3 = \alpha_2^3 = \ldots = \alpha_n^3 \right\}$;

г) $L = \left\{ (\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R}^n \text{ и } \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 \right\}$.

28. Выразите решения неоднородной системы через её частное решение и ФСР ассоциированной однородной системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_4 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_4 + 8x_5 = 9. \end{cases}$

29. Найдите однородную систему линейных уравнений, множество решений которой совпадает с линейной оболочкой $L(a_1;\, a_2;\, \ldots; a_k)$, если:

а) $a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 0)$, $a_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 0;\ 2;\ 1)$;

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 0)$, $a_3 = (0;\ 1;\ 1;\ 1)$.

30. Найдите ранг матрицы A, если

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

31. Найдите ранг матрицы A в зависимости от параметра λ:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda+2 & \lambda & 2 & \lambda \end{pmatrix}$.

32. Выясните, является ли правило $\circ$ бинарной алгебраической операцией на множестве A, если:

а) $A = \mathbb{N}$, $x \circ y = x^y$;

б) $A = \mathbb{Q}$, $x \circ y = x^y$;

в) $A = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy + 1 - x - y$;

г) $A = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y - xy + 2$.

33. Проверьте ассоциативность и коммутативность бинарной алгебраической операции $\circ$ на $\mathbb{R}$, если:

а) $x \circ y = x \cdot y + 1 - x - y$;

б) $x \circ y = x + y + 2 - x \cdot y$;

в) $x \circ y = x^2 + y^2$.

34. Найдите нейтральный элемент относительно бинарной алгебраической операции $\circ$ на множестве $\mathbb{R}$ и симметричный к элементу $a \in \mathbb{R}$, если:

а) $x \circ y = xy + 2 - x - y$, $a = 5$;

б) $x \circ y = 2xy$, $a = 3$.

35. Проверьте, что множество $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = x + y + 4$ является группой.

36. Докажите, что множество $G = \left\{ 5^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ является группой относительно умножения.

37. Выясните, является ли множество $\mathbb{Z}$ группой относительно вычитания.

38. Докажите, что множество всех матриц из $\mathbb{R}_{n \times n}$ с определителем, равным 1, является группой относительно умножения.

39. Выясните, какие из следующих множеств образуют подгруппу группы всех целых чисел по сложению:

а) $2\mathbb{Z} = \left\{ 2k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

б) $2\mathbb{Z} + 1 = \left\{ 2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;

в) все неотрицательные целые числа;

г) все отрицательные целые числа;

д) $p\mathbb{Z} = \left\{ pk \mid k \in \mathbb{Z},\ p - \textit{простое} \right\}$;

е) $m \cdot \mathbb{Z} = \left\{ mk \mid k \in \mathbb{Z},\ m - \textit{составное} \right\}$.

40. Докажите, что группы $\langle 8\mathbb{Z};\ + \rangle$ и $\langle G;\ \cdot \rangle$ изоморфны, если $G = \left\langle 3^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\rangle$.

41. Докажите, что группы $\left\langle \mathbb{Q}^+;\ \cdot \right\rangle$ и $\langle \mathbb{Q};\ + \rangle$ не изоморфны.

42. Докажите, что множество $K = \left\{ (x;\ y) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ является кольцом относительно операций:

$$(x;\ y) + (a;\ b) = (x + a;\ y + b) \quad \text{и} \quad (x;\ y) \cdot (a;\ b) = (xa;\ yb).$$

Будет ли это кольцо областью целостности?

43. Докажите, что множество $\mathbb{Q}\left[\sqrt{7}\right]=\left\{a+b\sqrt{7}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ является полем относительно обычных операций сложения и умножения действительных чисел.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Вычислите

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(2,\ i,\ 3,\ 1,\ 5,\ k)$ была чётной;

б) перестановка $(6,\ 1,\ i,\ k,\ 3,\ 4)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & n+1 & \ldots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-3 & 2n-1 & 2 & \ldots & 2n \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$ и $a_{24}a_{41}a_{13}a_{32}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & x & 2 & 0 \\ x & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 & 3 \\ 7 & -4 & 3 & 5 \\ 8 & -9 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ по формуле.

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ имеет обратную.

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12, \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 22, \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (3;\ 3;\ 8)$, $a_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $a_2 = (-1;\ 1;\ 2)$, $a_3 = (2;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (1;\ -1;\ 1;\ 1),\ a_2 = (2;\ 1;\ -1;\ 1),\ a_3 = (1;\ 0;\ -1;\ 2),$$
$$a_4 = (2;\ 2;\ -3;\ 2).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (1;\ -1),\ a_2 = (2;\ 3),\ a_3 = (-1;\ 0),\ a_4 = (3;\ 4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 9 & 4 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (5;\ 2;\ -3;\ 1),\ a_2 = (4;\ 1;\ -2;\ 3),\ a_3 = (1;\ 1;\ -1;\ -2),$$
$$a_4 = (3;\ 4;\ -1;\ 2),\ a_5 = (8;\ 2;\ -4;\ 6).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 2a_1 - a_2 + a_3,\ b_2 = a_1 + a_2 - a_3,\ b_3 = a_1 + a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a^2, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^3. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 1;\ 1),\ a_2 = (2;\ 2;\ -1),\ a_3 = (1;\ 1;\ 0),$$

$$b_1 = (1;\ 1;\ -2),\ b_2 = (1;\ 1;\ -1),\ b_3 = (0;\ 1;\ 0).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{3}(3x + 3y - 6)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -8$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R}_+,\ x \circ y = 3xy.$$

26. Докажите, что множество K всех непрерывных из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

27. Докажите, что множество $P = \left\{ 2a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 2

1. Вычислите:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(5,\ i,\ 3,\ 1,\ k,\ 4)$ была чётной;

б) перестановка $(1,\ i,\ 3,\ k,\ 6,\ 4)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{24}a_{31}a_{13}a_{42}$ и $a_{13}a_{44}a_{21}a_{32}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & y & 0 & x \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 & 4 \\ 7 & 7 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 7 \\ 1 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 & -9 \\ 3 & 7 & 5 & -4 \\ -3 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 9x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b=(1;\ 6;\ 1)$, $a_1=(1;\ -1;\ 1)$, $a_2=(0;\ 1;\ 0)$, $a_3=(1;\ 2;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(0;\ -1;\ 1;\ 1),\ a_2=(1;\ 2;\ 1;\ -1),\ a_3=(1;\ 1;\ -1;\ 1),$$
$$a_4=(0;\ 0;\ 3;\ -1).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(1;\ 2),\ a_2=(2;\ 3),\ a_3=(2;\ 1),\ a_4=(3;\ 4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 7 & 9 & 5\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(2;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_2=(2;\ 2;\ 2;\ 4),\ a_3=(3;\ 1;\ 2;\ 3),$$
$$a_4=(5;\ 2;\ 3;\ 5),\ a_5=(1;\ 0;\ 1;\ 0).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=a_1+a_2+a_3,\ b_2=3a_1+7a_2+3a_3,\ b_3=a_1+6a_2+a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\, 2;\, 1),\ a_2 = (1;\, 3;\, 0),\ a_3 = (3;\, 7;\, 2),$$

$$b_1 = (1;\, -1;\, 1),\ b_2 = (2;\, 1;\, 2),\ b_3 = (3;\, 0;\, 3).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = x + y - 8$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 3$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \circ y = 3x + 3y - 3xy - 2.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \middle|\ a,\ \ b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a + b \cdot \sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 3

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 & 15 \\ -5 & 4 & 9 \\ 12 & 26 & 31 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$;

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(i,\ 3,\ 6,\ 5,\ k,\ 2)$ была чётной;

б) перестановка $(2,\ 1,\ i,\ 4,\ k,\ 3)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 5 & 1 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & n & n-1 \end{pmatrix}$, $n = 2k$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{22}a_{34}a_{41}a_{13}$ и $a_{14}a_{33}a_{21}a_{42}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & y & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & 0 & y & x \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 4 & 9 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ b & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 11. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 8x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 7, \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -11, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (1;\ 0;\ 0)$, $a_1 = (0;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (1;\ 1;\ 2)$, $a_3 = (2;\ 2;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 1),\ a_3 = (-1;\ 1;\ 0;\ 1),$$
$$a_4 = (0;\ 1;\ 1;\ 1).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (1;\ 1),\ a_2 = (3;\ 2),\ a_3 = (-1;\ 0),\ a_4 = (3;\ 0).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\11&4&3\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(3;\ 1;\ -1;\ 2),\ a_2=(5;\ 2;\ -3;\ 1),\ a_3=(2;\ 1;\ -2;\ 1),$$
$$a_4=(1;\ 0;\ 1;\ 1),\ a_5=(3;\ 1;\ -1;\ 1).$$

21. Последовательность векторов a_1,a_2,a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=3a_1+3a_2+a_3,\ b_2=9a_1+10a_2+3a_3,$$
$$b_3=7a_1+8a_2+2a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=1,\\x_1+x_2+ax_3=a.\end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1=(1;\ 1;\ 0;\ 0),\ a_2=(0;\ 1;\ 1;\ 0),\ a_3=(0;\ 0;\ 1;\ 1),$$

$$b_1=(1;\ 0;\ 1;\ 0),\ b_2=(0;\ 2;\ 1;\ 1),\ b_3=(1;\ 2;\ 1;\ 2).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x\circ y=\frac{1}{2}(x\cdot y+x+y-1)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a=-2$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Q}\,,\ \ x \circ y = x + y - \frac{1}{3}\,.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ 5a + b\sqrt{2}\ \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 4

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 10 & 2 & 3 \\ 14 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(6,\ 2,\ i,\ 3,\ 1,\ k)$ была чётной;

б) перестановка $(i,\ k,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 5 & 3 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $n = 4k$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & \ldots & n & n-1 & n-2 & n-3 \end{pmatrix}.$$

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{11}a_{42}a_{34}a_{23}$ и $a_{32}a_{24}a_{13}a_{41}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 0 \\ 0 & 0 & 3 & x \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 9 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -3 & 7 \\ -4 & -3 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} b & b & a \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 7x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 17, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 11, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 14, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 21, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -10. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b=(-1;\ 0;\ 2)$, $a_1=(2;\ 1;\ 1)$, $a_2=(-1;\ 1;\ 1)$, $a_3=(1;\ 1;\ 0)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(1;\ 2;\ -1;\ 1),\ a_2=(1;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_3=(-1;\ 1;\ 0;\ 1),$$
$$a_4=(1;\ 4;\ 1;\ 3).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(2;\ 1),\ a_2=(3;\ 1),\ a_3=(4;\ 5),\ a_4=(1;\ 3).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(-2;\ -3;\ 7;\ 5),\ a_2=(1;\ -2;\ 5;\ 4),\ a_3=(-3;\ -1;\ 2;\ 1),$$
$$a_4=(1;\ -1;\ 7;\ 3),\ a_5=(0;\ -6;\ 19;\ 12).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=3a_1+3a_2+a_3,\ b_2=6a_1+7a_2+2a_3,$$
$$b_3=4a_1+5a_2+a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = b, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = a. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 0),\ a_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 0),\ a_3 = (1;\ 0;\ 0;\ 1),$$

$$b_1 = (4;\ 3;\ 2;\ -1),\ b_2 = (3;\ 1;\ 1;\ 1),\ b_3 = (0;\ 1;\ -1;\ 0).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(x \cdot y - x - y + 3)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 10$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R},\ x \circ y = x + y - \frac{1}{2}.$$

26. Докажите, что множество K всех непрерывных из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ (f \cdot g)(x) = f(g(x)).$$

27. Докажите, что множество $P = \left\{2a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 5

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(3,\ 6,\ 2,\ i,\ 5,\ k)$ была чётной;

б) перестановка $(2,\ 1,\ i,\ k,\ 3,\ 4)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 & 5 & 3 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 4 & 2 & 3 & 1 & \dots & n & n-2 & n-1 & n-3 \end{pmatrix}$, $n = 4k$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{14}a_{32}a_{23}a_{41}$ и $a_{44}a_{13}a_{21}a_{32}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ x & 0 & 0 & y \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -4 & -7 & -8 & 5 \\ -3 & -5 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 6 & 6 \\ 7 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 11, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \\ 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 8. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (-1;\ 2;\ -1)$, $a_1 = (2;\ 0;\ 1)$, $a_2 = (1;\ 2;\ 0)$, $a_3 = (0;\ 1;\ 2)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 1),\ a_2 = (-1;\ 2;\ 1;\ 1),\ a_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),$$
$$a_4 = (1;\ -1;\ -1;\ -1).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(2;\ 3),\ a_2=(3;\ 3),\ a_3=(1;\ 4),\ a_4=(4;\ 4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}9 & 4 & 6\\ 8 & 3 & 5\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(1;\ 0;\ -1;\ 2),\ a_2=(2;\ 1;\ 1;\ 1),\ a_3=(1;\ 1;\ 2;\ -1),$$
$$a_4=(2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_5=(3;\ 2;\ 2;\ 0).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=a_1+a_2+2a_3,\ b_2=2a_1+3a_2+4a_3,$$
$$b_3=4a_1+7a_2+9a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=1,\\ x_2+x_3=b,\\ x_1+ax_2+x_3=a.\end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1=(4;\ 2;\ 1),\ a_2=(12;\ 7;\ 2),\ a_3=(4;\ 3;\ 0),$$

$$b_1=(1;\ -1;\ 1),\ b_2=(5;\ 1;\ 2),\ b_3=(6;\ 0;\ 3).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(x \cdot y + 3x + 3y + 3)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -4$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Q}, \; x \circ y = x + y - \frac{1}{4}.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 4b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 6

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 13 & 2 \\ -6 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(2, \; i, \; 6, \; 1, \; 4, \; k)$ была чётной;

б) перестановка $(6, \; i, \; k, \; 3, \; 4, \; 1)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 & \dots & 2k-1 & 2k \\ k & k-1 & k-2 & \dots & 1 & 2k & \dots & k+1 & k \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{34}a_{22}a_{13}a_{41}$ и $a_{23}a_{32}a_{41}a_{14}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & b \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & -1 \\ -9 & 7 & 5 & 2 \\ -6 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & a & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 14, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 6x_4 = -10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -6, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (3;\ 1;\ 2)$, $a_1 = (0;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (-1;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (2;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (-1;\ 1;\ -1;\ 0),\ a_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 2;\ 1;\ 1),$$
$$a_4 = (0;\ 2;\ 1;\ -1).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (1;\ -1),\ a_2 = (2;\ 3),\ a_3 = (-1;\ 2),\ a_4 = (2;\ 1).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (1;\ 5;\ 2;\ -3),\ a_2 = (3;\ 4;\ 1;\ -2),\ a_3 = (-2;\ 1;\ 1;\ -1),$$
$$a_4 = (2;\ 3;\ 4;\ -1),\ a_5 = (6;\ 8;\ 2;\ -4).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 3a_1 - 2a_2 + 4a_3\,,\ b_2 = 6a_1 + 5a_2 + 8a_3\,,$$
$$b_3 = 4a_1 + 4a_2 + 5a_3\,.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} bx_1 + x_2 + x_3 = b, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (3;\ 1;\ 1),\ a_2 = (3;\ 2;\ -1),\ a_3 = (2;\ 1;\ 0)\,,$$

$$b_1 = (0;\ 1;\ -2),\ b_2 = (2;\ 0;\ 1),\ b_3 = (1;\ 1;\ 0)\,.$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + 2x + 2y)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 4$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Q}\,,\ x \circ y = x + y + \frac{1}{2}\,.$$

26. Докажите, что множество K всех непрерывных из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ (f \cdot g)(x) = 3f(x)g(x)\,.$$

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 7

1. Вычислите:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -23 & 32 \\ 4 & -30 & 27 \\ 16 & -22 & 23 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(2, \ i, \ 5, \ k, \ 3, \ 1)$ была чётной;

б) перестановка $(1, \ i, \ 2, \ 5, \ k, \ 3)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 5 & 8 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & 1 & \ldots & n-2 & n-1 & n & n-3 \end{pmatrix}$, $n = 4k$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{11}a_{24}a_{43}a_{32}$ и $a_{21}a_{42}a_{34}a_{13}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & b & 0 & a \\ x & 0 & y & 0 \\ y & 0 & x & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & -1 \\ -9 & 7 & 5 & 2 \\ -5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \\ b & a & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -5, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ -9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -18, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = -9. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (-2;\ 2;\ 2)$, $a_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $a_2 = (2;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (-1;\ 1;\ 2)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(0;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_2=(-1;\ 2;\ 1;\ 1),\ a_3=(2;\ 1;\ -1;\ 1),$$
$$a_4=(1;\ 2;\ -1;\ 0).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(1;\ 3),\ a_2=(2;\ 1),\ a_3=(4;\ 2),\ a_4=(3;\ 1).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 2 & 8 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(2;\ 1;\ 1;\ 3),\ a_2=(1;\ -1;\ 1;\ 2),\ a_3=(1;\ 2;\ 0;\ 1),$$
$$a_4=(1;\ 1;\ 2;\ 0),\ a_5=(2;\ 0;\ 3;\ 2).$$

21. Последовательность векторов a_1,a_2,a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=10a_1+3a_2+9a_3,\ b_2=8a_1+2a_2+7a_3,$$
$$b_3=3a_1+a_2+3a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=1,\\ x_1+x_2+ax_3=1,\\ ax_1+x_2+x_3=a.\end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 1),\ a_2 = (2;\ 1;\ 2;\ 0),\ a_3 = (1;\ -1;\ 1;\ 0),$$

$$b_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),\ b_2 = (0;\ 1;\ -1;\ 1),\ b_3 = (3;\ 1;\ 2;\ 1).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = 2x + 2y - 2xy - 1$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -8$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Q} \setminus \{1\},\ x \circ y = 2x + 2y - 2xy - 1.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ 2a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 8

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(3,\ \ i,\ \ 5,\ \ k,\ \ 1,\ \ 6)$ была чётной;

б) перестановка $(6,\ \ 1,\ \ i,\ \ k,\ \ 3,\ \ 5)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix};$

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}.$

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ и $a_{43}a_{12}a_{24}a_{31}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ x & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & y & x \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 5 \\ -3 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 7 & 2 & -9 & 5 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 = -7, \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -14, \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (5;\ 1;\ 0)$, $a_1 = (1;\ 1;\ -1)$, $a_2 = (0;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (2;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (2;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_2 = (-1;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_3 = (1;\ 0;\ -1;\ 0),$$
$$a_4 = (0;\ 2;\ 4;\ 3).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (2;\ -3),\ a_2 = (3;\ 1),\ a_3 = (-1;\ 2),\ a_4 = (1;\ 1).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (-1;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_2 = (1;\ 2;\ 1;\ 2),\ a_3 = (2;\ 1;\ -1;\ 1),$$
$$a_4 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_5 = (1;\ 0;\ -1;\ 1).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 3a_1 + 7a_2 + 3a_3,\ b_2 = 2a_1 + 6a_2 + a_3,$$
$$b_3 = a_1 + 2a_2 + a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = a, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2 = (-1;\ 0;\ 1;\ 1),\ a_3 = (2;\ 1;\ -1;\ 0),$$

$$b_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 0),\ b_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 1),\ b_3 = (0;\ 0;\ 2;\ 1).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = 2(xy + 2x + 2y + 3)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 8$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \circ y = x + y + xy.$$

26. Докажите, что множество $K = \{(a;\ b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(x;\ y) + (a;\ b) = (x + a;\ y + b),$$

$$(x;\ y) \cdot (a;\ b) = (xa;\ 0).$$

27. Докажите, что множество $P=\left\{3a-b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 9

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 7 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & -\sin\alpha\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(2,\ 3,\ i,\ 5,\ k,\ 6)$ была чётной;

б) перестановка $(6,\ 2,\ 1,\ i,\ k,\ 3)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 8 & 7 & 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5\end{pmatrix}$;

б) $\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n\\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & 2n-3 & \ldots & 2 & 1\end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{33}a_{14}a_{21}a_{42}$ и $a_{14}a_{43}a_{21}a_{32}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & x & b & 0 \\ x & x & x & c \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -6 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 8 & -3 \\ 2 & 3 & -6 & 2 \\ 9 & 2 & -9 & 6 \\ 2 & 4 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ a & 1 & b \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 8, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (0;\ -1;\ -1)$, $a_1 = (2;\ 0;\ -1)$, $a_2 = (1;\ 2;\ 1)$, $a_3 = (-1;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(-2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2=(1;\ 0;\ 2;\ 1),\ a_3=(1;\ 1;\ -1;\ 2),$$
$$a_4=(0;\ 0;\ 1;\ 2).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(1;\ -3),\ a_2=(2;\ 1),\ a_3=(-1;\ 3),\ a_4=(2;\ 2).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(1;\ 1;\ 0;\ -1),\ a_2=(2;\ 1;\ 1;\ 1),\ a_3=(1;\ 0;\ 1;\ 2),$$
$$a_4=(-1;\ -1;\ 1;\ 1),\ a_5=(2;\ 1;\ 0;\ 1).$$

21. Последовательность векторов a_1,a_2,a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=7a_1-6a_2+2a_3,\ b_2=5a_1+4a_2+a_3,$$
$$b_3=3a_1+3a_2+a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=0, \\ x_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+x_3=b. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1 = (1;\, 1;\, -1),\ a_2 = (2;\, 1;\, 1),\ a_3 = (1;\, 2;\, -4),$$

$$b_1 = (2;\, 1;\, 3),\ b_2 = (3;\, 2;\, 1),\ b_3 = (1;\, 0;\, 2).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -7$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \circ y = 2x + 2y + 2xy + 1.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a - 2b\sqrt{5} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 10

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -5 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(6,\ i,\ 2,\ 3,\ 1,\ k)$ была чётной;

б) перестановка $(i,\ 3,\ k,\ 4,\ 2,\ 6)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 8 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{34}a_{21}a_{13}a_{42}$ и $a_{13}a_{31}a_{24}a_{42}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & y \\ y & 0 & x & 0 \\ 0 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 3 & -5 \\ -3 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ -3 & 9 & -3 & 12 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -7 & -5 \\ -6 & -4 & 5 & 3 \\ -6 & -3 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 10 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ 1 & b & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -5, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 12, \\ 7x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 5x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (1;\ 6;\ 1)$, $a_1 = (-1;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (0;\ 1;\ -1)$, $a_3 = (1;\ 2;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 1),\ a_2 = (-1;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 2;\ 1;\ 1),$$
$$a_4 = (-1;\ -1;\ 0;\ 2).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (3;\ 2),\ a_2 = (3;\ 4),\ a_3 = (2;\ -1),\ a_4 = (1;\ -3).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (2;\ 2;\ 0;\ 1),\ a_2 = (1;\ 1;\ -1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 1;\ 1;\ -1),$$
$$a_4 = (0;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_5 = (1;\ 2;\ 0;\ 4).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = a_1 + 4a_2 + 5a_3\,,\ b_2 = a_1 + 3a_2 + 3a_3\,,$$
$$b_3 = 2a_1 + 6a_2 + 7a_3\,.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ bx_1 + x_2 + bx_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 2),\ a_2 = (2;\ 2;\ 0;\ 1),\ a_3 = (1;\ 1;\ -1;\ -1),$$

$$b_1 = (0;\ 1;\ 0;\ 1),\ b_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 1),\ b_3 = (2;\ 1;\ 0;\ 0)\,.$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - 2x - 2y + 8)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 3$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ x \circ y = x + y - xy\,.$$

26. Докажите, что множество K всех непрерывных на отрезке $[-1;\ 1]$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)\,,\ (f \cdot g)(x) = -f(x) \cdot g(x)\,.$$

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a + 3b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 11

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^3 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(6,\ 5,\ 4,\ i,\ k,\ 3)$ была чётной;

б) перестановка $(2,\ i,\ 3,\ k,\ 4,\ 5)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{14}a_{23}a_{41}a_{32}$ и $a_{44}a_{12}a_{23}a_{31}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ a & b & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ -5 & -6 & -3 & 7 \\ -4 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 7x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 4, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 5x_4 = -2, \\ -6x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ -6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (1;\, -2;\, 2)$, $a_1 = (1;\, 1;\, -1)$, $a_2 = (-1;\, 2;\, 1)$, $a_3 = (1;\, 1;\, 2)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2=(1;\ -1;\ 1;\ 1),\ a_3=(-1;\ 1;\ 0;\ 1),$$
$$a_4=(-1;\ 4;\ -2;\ 0).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(2;\ 3),\ a_2=(3;\ 3),\ a_3=(1;\ -1),\ a_4=(2;\ 1).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}4&6&5\\5&9&8\\2&5&5\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(1;\ -3;\ 2;\ 5),\ a_2=(3;\ -2;\ 1;\ 4),\ a_3=(-2;\ -1;\ 1;\ 1),$$
$$a_4=(2;\ -1;\ 4;\ 3),\ a_5=(6;\ -6;\ 7;\ 12).$$

21. Последовательность векторов a_1,a_2,a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=a_1+3a_2+3a_3,\ b_2=2a_1+8a_2+7a_3,$$
$$b_3=3a_1+10a_2+9a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases}x_1+x_2+ax_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=1,\\ax_1+x_2+x_3=a.\end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ -1),\ a_2 = (2;\ 1;\ 2;\ 0),\ a_3 = (1;\ 1;\ 1;\ 1),$$

$$b_1 = (0;\ 1;\ 1;\ 0),\ b_2 = (2;\ 0;\ 1;\ 0),\ b_3 = (1;\ -1;\ 0;\ -1).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y - xy + 1)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -3$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Q}_+^*,\ x \circ y = \frac{1}{2}xy.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ 5a - 2b\sqrt{3}\ \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 12

1. Вычислите:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 11 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(1,\ \ i,\ \ 2,\ \ 5,\ \ k,\ \ 4)$ была чётной;

б) перестановка $(3,\ \ 2,\ \ i,\ \ k,\ \ 1,\ \ 4)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n-1 & n & 1 & \ldots & n-4 & n-3 & n-2 \end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{34}a_{41}a_{12}a_{23}$ и $a_{24}a_{32}a_{13}a_{41}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & b & 0 \\ b & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & a \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 7 & 5 \\ -4 & -1 & 8 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 10 & 9 & 5 & -9 \\ 7 & 6 & 4 & -5 \\ 8 & 5 & 5 & -8 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b & a \\ a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 8x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (2;\ 0;\ 0)$, $a_1 = (1;\ 1;\ 2)$, $a_2 = (2;\ 0;\ 1)$, $a_3 = (1;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2 = (1;\ 0;\ 2;\ -1),\ a_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 1),$$
$$a_4 = (1;\ 2;\ -4;\ 4).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (1;\ 4),\ a_2 = (2;\ 4),\ a_3 = (-1;\ 5),\ a_4 = (5;\ 4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (1;\ -1;\ 1;\ 0),\ a_2 = (2;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_3 = (1;\ 2;\ 1;\ 1),$$
$$a_4 = (-1;\ 1;\ 0;\ 2),\ a_5 = (1;\ 2;\ 2;\ 3).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 6a_1 + a_2 + 2a_3,\ b_2 = 2a_1 + a_2 + a_3,$$
$$b_3 = 7a_1 + 3a_2 + 3a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = a, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (0;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2 = (1;\ 0;\ 1;\ 2),\ a_3 = (1;\ -1;\ 1;\ 1),$$

$$b_1 = (1;\ 1;\ 2;\ 2),\ b_2 = (1;\ 0;\ 2;\ 1),\ b_3 = (2;\ 1;\ 3;\ 4).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = 2$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{Z},\ x \circ y = x + y - 1.$$

26. Докажите, что множество K всех непрерывных на отрезке $[-1;\ 1]$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f + g)(x) = 2f(x) + 2g(x),\ (f \cdot g)(x) = 2f(x) \cdot g(x).$$

27. Докажите, что множество $P=\left\{3a+b\sqrt{3}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 13

1. Вычислите:

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1&3&2\\1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2&0\\-3&2&-1\\-8&2&4\end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A=\begin{pmatrix}-1&8\\0&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&8\\0&1\end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(3,\ i,\ 5,\ 6,\ k,\ 2)$ была чётной;

б) перестановка $(3,\ i,\ 2,\ k,\ 5,\ 1)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi=\begin{pmatrix}4&2&3&1&5&6&7&8\\7&5&3&1&8&4&6&2\end{pmatrix}$;

б) $\varphi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&n-1&n\\n&n-1&3&4&\dots&1&2\end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{12}a_{41}a_{23}a_{34}$ и $a_{33}a_{11}a_{42}a_{24}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & y \\ 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & y & x \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 9 & 10 & -9 \\ 5 & 5 & 8 & -8 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 7 \\ 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A=\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2+6x_3=3, \\ 5x_1+7x_2+7x_3=4, \\ x_1+2x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+2x_4=1, \\ 10x_1+9x_2+5x_3-9x_4=-8, \\ 7x_1+6x_2+4x_3-5x_4=-4, \\ 8x_1+5x_2+5x_3-8x_4=-5. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b=(-2;\ 2;\ 1)$, $a_1=(1;\ 1;\ -1)$, $a_2=(2;\ 1;\ 1)$, $a_3=(-1;\ 2;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1=(1;\,1;\,-1;\,0),\ a_2=(2;\,0;\,1;\,1),\ a_3=(1;\,1;\,0;\,1),$$
$$a_4=(0;\,0;\,2;\,1).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1=(1;\,6),\ a_2=(4;\,3),\ a_3=(-1;\,4),\ a_4=(-3;\,4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX=B$ и $YA=B$, если:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&7&5\\3&5&2\\-1&4&4\end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1=(1;\,1;\,-1;\,2),\ a_2=(-2;\,-2;\,2;\,-4),\ a_3=(2;\,1;\,-1;\,3),$$
$$a_4=(3;\,2;\,0;\,5),\ a_5=(1;\,0;\,0;\,1).$$

21. Последовательность векторов a_1,a_2,a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1=7a_1+6a_2+2a_3,\ b_2=5a_1+4a_2+a_3,$$
$$b_3=3a_1+3a_2+a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=1,\\x_1+x_2+x_3=a.\end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1+\Lambda_2$, $\Lambda_1\cap\Lambda_2$, если $\Lambda_1=L(a_1,a_2,a_3)$, $\Lambda_2=L(b_1,b_2,b_3)$ и

$$a_1 = (1;\,1;\,1),\ a_2 = (2;\,2;\,-1),\ a_3 = (1;\,1;\,0),$$

$$b_1 = (1;\,1;\,-2),\ b_2 = (1;\,0;\,1),\ b_3 = (0;\,1;\,0).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -5$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R}_+^*,\ x \circ y = 8xy.$$

26. Докажите, что множество $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle|\ a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ a - b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 14

1. Вычислите:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(4,\ 5,\ i,\ 6,\ k,\ 2)$ была чётной;

б) перестановка $(2,\ i,\ 4,\ k,\ 6,\ 1)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & k & n & n-1 & k+1 & \ldots & n-2 \end{pmatrix}$, где $n > 3$, $1 \le k < n-2$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{43}a_{11}a_{32}a_{24}$ и $a_{22}a_{41}a_{33}a_{14}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y \\ x & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 9 & -9 \\ 4 & 6 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 8 & -8 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 11 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ b & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 9x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 3, \\ 8x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b = (2;\ 2;\ 1)$, $a_1 = (1;\ 2;\ -2)$, $a_2 = (2;\ 1;\ -1)$, $a_3 = (-1;\ 2;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 1),\ a_2 = (2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_3 = (-1;\ 2;\ 1;\ 0),$$
$$a_4 = (1;\ -1;\ -1;\ 0).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (4;\ 3),\ a_2 = (1;\ 4),\ a_3 = (-1;\ 2),\ a_4 = (2;\ -4).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (1;\ 1;\ 1;\ 3),\ a_2 = (2;\ 2;\ 1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 1;\ 0;\ -1),$$
$$a_4 = (1;\ 2;\ 1;\ 0),\ a_5 = (2;\ 3;\ 2;\ 3).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3,\ b_2 = a_1 + a_2 + 2a_3,\ b_3 = 7a_1 + 4a_2 + 9a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} ax_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (2;\ 1;\ 2;\ 0),\ a_2 = (1;\ 0;\ 1;\ -1),\ a_3 = (1;\ 1;\ 1;\ 1),$$

$$b_1 = (2;\ 0;\ 1;\ 0),\ b_2 = (1;\ -1;\ 0;\ -1),\ b_3 = (0;\ 1;\ 1;\ 0).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a = -3$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3).$$

26. Докажите, что множество $K = \mathbb{Z}_{3\times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle|\ \alpha_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$ относительно обычных операций сложения и умножения матриц является кольцом, но не полем.

27. Докажите, что множество $P=\left\{7a+b\sqrt{2}\ \middle|\ a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Вариант 15

1. Вычислите

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 7 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n (n – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(6,\ 2,\ 4,\ i,\ k,\ 1)$ была чётной;

б) перестановка $(1,\ i,\ 3,\ k,\ 2,\ 5)$ была нечётной.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8\end{pmatrix}$;

б) $\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n-3 & n-2 & n-1 & n\\ 4 & 5 & 6 & \ldots & n & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{32}a_{41}a_{13}a_{24}$ и $a_{31}a_{42}a_{14}a_{23}$.

6. Вычислите определитель по определению:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

7. Вычислите определитель третьего порядка по формуле:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

8. Вычислите определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислите определитель при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам:

$$\begin{vmatrix} 9 & -8 & 5 & 10 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & b\\ b & 1 & a\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_1+3x_2+2x_3=0,\\ 6x_1+2x_2+3x_3=2.\end{cases}$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x_1+9x_2+10x_3+9x_4=24,\\ 4x_1+6x_2+7x_3+5x_4=16,\\ 2x_1+3x_2+2x_3-2x_4=2,\\ 5x_1+5x_2+8x_3+8x_4=21.\end{cases}$$

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0,\\ x_1-2x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+2x_3-2x_4=0.\end{cases}$$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b=(-2;\ 3;\ -4)$, $a_1=(1;\ 2;\ -2)$, $a_2=(2;\ 2;\ 1)$, $a_3=(-2;\ 1;\ 1)$.

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (2;\ 1;\ 0;\ 1),\ a_2 = (-1;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_3 = (1;\ 2;\ 1;\ 0),$$
$$a_4 = (0;\ 0;\ 1;\ 2).$$

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (4;\ 4),\ a_2 = (1;\ 3),\ a_3 = (-1;\ 6),\ a_4 = (2;\ 6).$$

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (1;\ 1;\ -1;\ 2),\ a_2 = (2;\ 1;\ 1;\ 3),\ a_3 = (1;\ 0;\ 2;\ 1),$$
$$a_4 = (1;\ 2;\ -1;\ 1),\ a_5 = (2;\ 3;\ -2;\ 3).$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 2a_1 + 5a_2 + 6a_3,\ b_2 = 3a_1 + 7a_2 + 9a_3,\ b_3 = 2a_1 + 6a_2 + 7a_3.$$

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1; \end{cases}$$

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (0;\ 2;\ 1;\ 1),\ a_2 = (1;\ 2;\ 1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 0;\ 1;\ 0),$$

$$b_1=(0;\,0;\,1;\,1),\ b_2=(0;\,1;\,1;\,0),\ b_3=(1;\,0;\,-1;\,0).$$

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a=12$.

25. Докажите, что множество G является группой относительно операции $\circ$, если

$$G=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\},\ x\circ y=3xy+x+y.$$

26. Докажите, что множество $K=\{(a;\,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(x;\,y)+(a;\,b)=(x+a;\,y+b),\ (x;\,y)\cdot(a;\,b)=(xa;\,yb).$$

27. Докажите, что множество $P=\left\{-a+3b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ВАРИАНТА ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Вычислите:

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение матриц вычисляем отдельно. Для этого строки первой матрицы умножаем на столбцы второй:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-1)+3\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 2\\ (-1)\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 0 & (-1)\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 2\\ 3\cdot 2+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 3\cdot(-1)+0\cdot 2+1\cdot 0 & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 3 & 9\\ -3 & 5 & 3\\ 7 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

После этого подставляем результат в исходное выражение и вычисляем ответ. Сложение матриц и умножение матрицы на скаляр выполняется покомпонентно.

$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 4 & 2 & 2\\ 6 & -2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3 & 9\\ -3 & 5 & 3\\ 7 & -3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-3+1 & -2-3-1 & 4-9+1 \\ 4+3+2 & 2-5+0 & 2-3+1 \\ 6-7+3 & -2+3-2 & 4-5+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 9 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Выведите формулу для A^n $(n$ – натуральное число) и докажите её по индукции, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

Решение. а) Сначала вычислим несколько степеней матрицы A, чтобы сформулировать гипотезу об её формуле.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+4 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+6 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что, по всей вероятности, $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Доказываем это предположение индукцией по n.

При $n=1$ утверждение очевидно выполняется. Пусть оно выполняется для некоторого $n=k$, докажем его для $n=k+1$:

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+2k \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула для $(k+1)$ выполняется, поэтому, в силу метода математической индукции, формула верна для любого n.

б) Действуем аналогично предыдущему примеру.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = A\,.$$

Далее матрицы, очевидно, начнут повторяться. В результате получается, что

$$A^n = \begin{cases} E, \textit{ если } n - \textit{чётно}, \\ A, \textit{ если } n - \textit{нечётно}. \end{cases}$$

Для $n = 1$ и $n = 2$ эта формула выполняется. Пусть формула выполняется для некоторого $n = k$, докажем её для $n = k + 1$. Очевидно, нужно рассматривать два случая.

Если $n = k + 1$ – чётно, то $n = k$ – нечётно и:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A = E\,.$$

Если $n = k + 1$ – нечётно, то $n = k$ – чётно и:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = E \cdot A = A\,.$$

3. Подберите значения i и k так, чтобы:

а) перестановка $(3,\ \ i,\ \ k,\ \ 1,\ \ 4,\ \ 5)$ была чётной;

б) перестановка $(2,\ \ i,\ \ 1,\ \ k,\ \ 5,\ \ 6)$ была нечётной.

Решение. а) Очевидно, $i, k \in \{2,\ 6\}$. Если $i = 2,\ k = 6$, то перестановка $(3,\ \ 2,\ \ 6,\ \ 1,\ \ 4,\ \ 5)$ имеет шесть инверсий:

$$3 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 4,\ 6 \leftrightarrow 5\,,$$

т.е. является чётной, что и требуется.

Если же $i=6$, $k=2$, то перестановка $(3,\ 6,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5)$ имеет семь инверсий:

$$3 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 2,\ 6 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 4,\ 6 \leftrightarrow 5,\ 2 \leftrightarrow 1,$$

является нечётной и этот случай не подходит.

б) Очевидно, $i, k \in \{3,\ 4\}$. Если $i=3,\ k=4$, то перестановка $(2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6)$ имеет две инверсии:

$$2 \leftrightarrow 1,\ 3 \leftrightarrow 1,$$

т.е. является чётной. Если переставить 3 и 4 местами, то, согласно теореме о том, что транспозиция меняет чётность перестановки, получим нечётную подстановку. Следовательно $i=4,\ k=3$.

4. Найдите знаки подстановок:

а) $\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ n-2 & n-1 & n & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $n = 3k$.

Решение. а) Сначала приведём подстановку к каноническому виду, переставляя столбцы так, чтобы в верхней строке числа были расположены по возрастанию.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

После этого достаточно подсчитать количество инверсий в нижней строке:

$$5 \leftrightarrow 3,\ 5 \leftrightarrow 2,\ 5 \leftrightarrow 1,\ 5 \leftrightarrow 4,\ 6 \leftrightarrow 3,\ 6 \leftrightarrow 2,\ 6 \leftrightarrow 1,\ 6 \leftrightarrow 4,$$

$$7 \leftrightarrow 3,\ 7 \leftrightarrow 2,\ 7 \leftrightarrow 1,\ 7 \leftrightarrow 4,\ 3 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 1,\ 8 \leftrightarrow 1,\ 8 \leftrightarrow 4.$$

Количество инверсий равно 17, поэтому знак подстановки равен (-1).

б) Элементы верхней строки подстановки расположены по порядку, инверсий не образуют. В нижней строке элементы разбиты на тройки, первая и последняя тройки переставлены, в внутри каждой тройки элементы идут в обратном порядке. Подсчитаем количество инверсий последней строки.

Согласно последнему условию, в каждой тройке три инверсии, всего строка имеет k троек, значит таких инверсий $3k$. Согласно первому условию, каждый элемент первой и последней троек образует инверсии с элементами остальных троек. Это даёт $3(3k-3)+(3k-6)3=3(6k-9)$ инверсий. Итого в нижней строке $3k+3(6k-9)=3(7k-9)$ инверсий.

При чётном k подстановка будет нечётной, а при нечётном k – чётной.

5. Определите, с каким знаком входят в определитель четвертого порядка правильные произведения $a_{43}a_{21}a_{32}a_{14}$ и $a_{31}a_{22}a_{14}a_{43}$.

Решение. Составим подстановку, соответствующую данному правильному произведению:

$$a_{43}a_{21}a_{32}a_{14} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению, знак правильного произведения в определителе совпадает со знаком этой подстановки. Наша подстановка имеет три инверсии, значит, это правильное произведение входит в определитель со знаком минус.

Второму правильному произведению $a_{31}a_{22}a_{14}a_{43}$ соответствует подстановка $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, имеющая четыре инверсии. Значит, это правильное произведение входит в определитель со знаком плюс.

6. Вычислите по определению определитель

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}.$$

Решение. Будем пользоваться исходным определением определителя как суммы всех правильных произведений, взятых с соответствующим знаком. Очевидно, имеет смысл рассматривать только ненулевые правильные произведения.

Из четвёртого столбца в ненулевое произведение может попасть только y. Из третьего столбца могут попасть a или b. Если в произведение попало b, то из первого столбца попадёт только x, а из второго – b (мы пользуемся тем, что из каждого столбца и каждой строки должно быть взято равно по одному элементу).

Если из третьего столбца в произведение попало a, то из второго столбца попадёт только y, а из первого – a. В результате в первом случае получилось произведение $xbby$. Ему соответствует подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, знак которой равен (-1). Во втором случае получилось произведение $ayay$, которому соответствует подстановка $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ также со знаком (-1).

В результате $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} = -xyb^2 - y^2b^2$.

7. Вычислите по формуле определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 9 & 8 & 3 \end{vmatrix} = (7\cdot 1\cdot 3 + 4\cdot 5\cdot 9 + 6\cdot 2\cdot 8) - (2\cdot 1\cdot 9 + 6\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 5\cdot 8) =$$

$$= 21 + 180 + 96 - 18 - 72 - 280 = -73.$$

8. Вычислите приведением к треугольному виду определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (-1)(-2) \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & -3 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-2)(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -7 & -2 & 7 \\ 0 & -4 & -4 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ (2)(1) \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&3&0&-5\\0&-1&-2&-3\\0&-1&-4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&3&0&-5\\0&-1&-4&1\end{vmatrix}(3)(-1)=$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&-6&-14\\0&0&-2&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&-2&4\\0&0&-6&-14\end{vmatrix}(-3)=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&-2&4\\0&0&0&-26\end{vmatrix}=-1(-1)(-2)(-26)=52.$$

9. Вычислите при помощи элементарных преобразований и разложения по строкам или столбцам определитель

$$\begin{vmatrix}4&7&6&-5\\5&10&9&-8\\5&8&5&-8\\2&2&3&2\end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix}4&7&6&-5\\5&10&9&-8\\5&8&5&-8\\2&2&3&2\end{vmatrix}(-1)=\begin{vmatrix}4&7&6&-5\\1&3&3&-3\\1&1&-1&-3\\2&2&3&2\end{vmatrix}(-1)(-4)(-2)=$$

$$=\begin{vmatrix}0&3&10&7\\0&2&4&0\\1&1&-1&-3\\0&0&5&8\end{vmatrix}=1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&10&7\\2&4&0\\0&5&8\end{vmatrix}\left(-\tfrac{3}{2}\right)=\begin{vmatrix}0&4&7\\2&4&0\\0&5&8\end{vmatrix}=$$

$$=2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 7\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-2(32-35)=6\,.$$

10. Найдите матрицу A^{-1} по формуле, если:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления A^{-1} воспользуемся формулой $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$, где $A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента матрицы A, стоящего в i-й строке и j-м столбце.

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{vmatrix}(2)=\begin{vmatrix}6 & 0 & 5\\ 1 & -1 & 1\\ 8 & 0 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix}=-(42-40)=-2\neq 0\,,$$

т.е. обратная матрица существует.

Вычисляем все алгебраические дополнения.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-7;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-4\,;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=1\,;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{vmatrix}=2;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\,;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=8;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 6 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-6.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -1\\ 8 & 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/2 & 2 & -5/2\\ -1/2 & -1 & 1/2\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -1\\ 8 & 4 & -6\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -4 & 5\\ 1 & 2 & -1\\ 8 & 4 & -6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4(-7)+2\cdot 1+3\cdot 8 & 4(-4)+2\cdot 2+3\cdot 4 & 4\cdot 5+2(-1)+3(-6)\\ 1(-7)+(-1)1+1\cdot 8 & 1(-4)+(-1)2+1\cdot 4 & 1\cdot 5+(-1)(-1)+1(-6)\\ 6(-7)+2\cdot 1+5\cdot 8 & 6(-4)+2\cdot 2+5\cdot 4 & 6\cdot 5+2(-1)+5(-6)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Матрица A^{-1} найдена верно.

11. Найдите значения параметров a и b, при которых матрица A имеет обратную:

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ b & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно критерию, квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} b & a & a \\ b & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (-b) \end{array} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a-b & a-b \\ a-b & 0 \end{vmatrix} = -(a-b)^2.$$

$$|A| \neq 0 \;\Leftrightarrow\; -(a-b)^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a-b \neq 0 \;\Leftrightarrow a \neq b.$$

12. Решите систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 17. \end{cases}$$

Решение. Система линейных уравнений может быть решена по правилу Крамера тогда и только тогда, когда количество неизвестных системы равно количеству уравнений, а определитель Δ основной матрицы системы не равен нулю. При этом система имеет единственное решение $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

В нашей системе $n = k = 3$. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 9 & 6 \end{vmatrix} (3)(9) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 2 \\ 25 & 0 & 24 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 25 & 24 \end{vmatrix} (-2) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(60-45) = -15 \neq 0\,,$$

значит, система может быть решена по правилу Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 17 & 9 & 6 \end{vmatrix} (3)(9) = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 26 & 0 & 24 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 26 & 24 \end{vmatrix} (-2) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 11 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(66-36) = -30\,;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 17 & 6 \end{vmatrix} (-8)(-17) = \begin{vmatrix} -12 & 0 & -13 \\ 2 & 1 & 2 \\ -27 & 0 & -28 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -12 & -13 \\ -27 & -28 \end{vmatrix} (-2) =$$

$$= \begin{vmatrix} -12 & -13 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 24 - 39 = -15\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 9 & 17 \end{vmatrix} (3)(9) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 2 \\ 25 & 0 & 26 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 25 & 26 \end{vmatrix} (-2) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(40-55) = 15\,.$$

В результате

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-15} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{15}{-15} = -1\,.$$

13. Решите систему линейных уравнений модифицированным методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9. \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приводим её к конечной матрице.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 14 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right) \end{array} (-1)(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & \mathbf{1} & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -5 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & 0 & 9 \end{array}\right) (-1)(3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & 14 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & 0 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times\left(-1/5\right) \\ \\ \times(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & 14 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ \mathbf{1} & 0 & -5 & 0 & -9 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & 14 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ \mathbf{1} & 0 & -5 & 0 & -9 \end{array}\right) \times\left(1/3\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & 14 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & -5 & 0 & -9 \end{array}\right) (-14)(5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right).$$

В результате получилось, что $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$.

14. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приводим её к конечной матрице.

$$\begin{array}{l} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \;\; x_4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)(-1)(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \mathbf{1} & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \;\; x_4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -3 & 0 \end{array}\right). \end{array}$$

Этой конечной матрице соответствует полностью преобразованная система

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \quad 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ \qquad \mathbf{x_2} - 3x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases}$$

которая имает общее решение $\begin{cases} \mathbf{x_1} = -5x_3 - 4x_4, \\ \mathbf{x_2} = 3x_3 + 3x_4. \end{cases}$

15. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению матрицы A и B перестановочны, если выполняется равенство $AB = BA$. При этом, по определению умножения, матрица B имеет размерность 2×2. Возьмём $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и запишем условие перестановочности:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1+x_3 & x_2+x_4 \\ 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+2x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+2x_4 & x_3+x_4 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению равенства матриц получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_3=x_1+2x_2, \\ x_2+x_4=x_1+x_2, \\ 2x_1+x_3=x_3+2x_4, \\ 2x_2+x_4=x_3+x_4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2-x_3=0, \\ -x_1+x_4=0, \\ 2x_1-2x_4=0, \\ 2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Общее решение будет иметь вид $\begin{cases} \mathbf{x_1}=x_4, \\ \mathbf{x_3}=2x_2, \end{cases}$ поэтому $B=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ 2x_2 & x_4 \end{pmatrix}$, где x_2, x_4 – произвольные действительные числа.

16. Вектор b линейно выразите через последовательность векторов a_1, a_2, a_3, если $b=(11;\,4;\,-9)$, $a_1=(1;\,2;\,-3)$, $a_2=(3;\,2;\,-1)$, $a_3=(-2;\,1;\,2)$.

Решение. Записываем расширенную матрицу системы линейных уравнений, равносильной векторному уравнению $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3=b$:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & 2 & -9 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & b \end{array} \end{array} \begin{array}{c} (-2)(3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 11 \\ 0 & -4 & 5 & -18 \\ 0 & 8 & -4 & 24 \end{array}\right) \times\left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & -2 & 11 \\ 0 & -4 & 5 & -18 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-5)(2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -6 \end{array}\right) \times\left(\tfrac{1}{6}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -6 \end{array}\right) (1)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right).$$

В результате $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ и

$$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 1a_1 + 2a_2 - 2a_3 .$$

Проверка:

$$1a_1 + 2a_2 - 2a_3 = (1;\ 2;\ -3) + 2(3;\ 2;\ -1) - 2(-2;\ 1;\ 2) =$$

$$= (1;\ 2;\ -3) + (6;\ 4;\ -2) + (4;\ -2;\ -4) = (11;\ 4;\ -9) = b .$$

17. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно независимой:

$$a_1 = (2;\ 1;\ 3;\ 1),\ a_2 = (1;\ 1;\ 0;\ 2),\ a_3 = (1;\ 0;\ 1;\ 1),$$
$$a_4 = (1;\ 1;\ 1;\ 2).$$

Решение. Согласно определению, необходимо решить однородное векторное уравнение $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 = \overline{0}$ и убедиться, что оно имеет единственное решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$. Уравнение сводится к однородной системе. Решаем эту систему методом Гаусса.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)(-1)(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)(-1)(-3)(1) \sim$$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \times \left(\tfrac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right)(2)(1)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

В результате получилось единственной решение $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$, что и требовалось.

18. Проверьте, будет ли последовательность векторов линейно зависимой; если – да, то объясните почему:

$$a_1 = (2;\,-1),\ a_2 = (-1;\,3),\ a_3 = (3;\,5),\ a_4 = (5;\,5).$$

Решение. Как и в предыдущей задаче решаем однородное векторное уравнение $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = \overline{0}$, которое равносильно однородной системе со следующей расширенной матрицей:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 & 0 \\ \mathbf{-1} & 3 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)(2) \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 5 & 13 & 15 & 0 \\ \mathbf{-1} & 3 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \times (-1) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0 & 5 & 13 & 15 & \vert & 0\\ \mathbf{1} & -3 & -5 & -5 & \vert & 0\end{pmatrix}\times\left(1/5\right)\sim\begin{pmatrix}0 & \mathbf{1} & 13/5 & 3 & \vert & 0\\ \mathbf{1} & -3 & -5 & -5 & \vert & 0\end{pmatrix}(3)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0 & \mathbf{1} & 13/5 & 3 & \vert & 0\\ \mathbf{1} & 0 & 14/5 & 4 & \vert & 0\end{pmatrix}\updownarrow\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & &\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 14/5 & 4 & \vert & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 13/5 & 3 & \vert & 0\end{pmatrix}\end{array}.$$

$$\begin{cases}\mathbf{x_1}+\dfrac{14}{5}x_3+4x_4=0,\\ \mathbf{x_2}+\dfrac{13}{5}x_3+3x_4=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{x_1}=-\dfrac{14}{5}x_3-4x_4,\\ \mathbf{x_2}=-\dfrac{13}{5}x_3-3x_4.\end{cases}$$

Полученная система имеет ненулевые решения. Например, при $x_3=0,\ x_4=1$, получаем $x_1=-4,\ x_2=-3$. Исходная последовательность векторов будет линейно зависима, т.к. одни векторы последовательности будут выражаться через другие. Например, подставив найденное выше решение в векторное уравнение, получим:

$$-4a_1-3a_2+a_4=\overline{0}\ \Rightarrow\ a_4=4a_1+3a_2.$$

Эти линейные зависимости можно выписывать сразу, как только получена конечная матрица. А именно:

1) векторы, соответствующие столбцам, в которых ведущие элементы, являются линейно независимыми; в нашем случае - это a_1, a_2;

2) в столбцах стоят коэффициенты разложения векторов через векторы a_1, a_2; в нашем случае:

$$a_1=1a_1+0a_2,$$

$$a_2=0a_1+1a_2,$$

$$a_3=\frac{14}{5}a_1+\frac{13}{5}a_2\ \text{и}$$

$$a_4 = 4a_1 + 3a_2 .$$

Полученный результат есть следствие более общего результата: так как векторы a_1, a_2, a_3, a_4 принадлежат двумерному арифметическому пространству $\mathbb{R}^2$, то любая последовательность, состоящая более чем из двух векторов, линейно зависима.

19. Найдите A^{-1} при помощи элементарных преобразований и решите уравнения $AX = B$ и $YA = B$, если:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для нахождения матрицы A^{-1} записываем матрицу $(A|E)$ и преобразуем её с помощью элементарных преобразований строк к конечному виду. Если слева от черты получится матрица E, то тогда справа от черты будет матрица A^{-1}. Если же до черты получится матрица, содержащая нулевую строку, то исходная матрица не имеет обратной.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)(-1)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}(-3)(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & \mathbf{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -11 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 4 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ (11)(-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \mathbf{1} & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -25 & -7 & 11 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -25 & -7 & 11 \end{array}\right) = \left(E \middle| A^{-1}\right).$$

В результате $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -25 & -7 & 11 \end{pmatrix}$.

Чтобы найти матрицы X и Y достаточно умножить данные уравнения на A^{-1} соответственно слева и справа:

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\Leftrightarrow\; EX = X = A^{-1}B;$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -25 & -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -5 \\ -36 & -3 & 18 \end{pmatrix};$$

$$YA = B \;\Leftrightarrow\; YAA^{-1} = BA^{-1} \;\Leftrightarrow\; YE = Y = BA^{-1};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \\ -25 & -7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 6 & -10 \\ -11 & -3 & 5 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

20. Найдите базис последовательности векторов и выразите линейно все векторы через найденный базис:

$$a_1 = (1;\ 2;\ 1;\ 3),\ a_2 = (2;\ 1;\ 2;\ 2),\ a_3 = (1;\ -1;\ 1;\ -1),$$
$$a_4 = (3;\ 1;\ 2;\ 1),\ a_5 = (6;\ 4;\ 5;\ 6).$$

Решение. Действуем согласно алгоритму [3, с.84-87]. Для этого записываем матрицу, столбцами которой являются компоненты векторов данной последовательности и преобразуем её к конечному виду.

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}
\end{array}
\begin{matrix} \\ \\ (1)(-1) \\ \\ \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}
\begin{matrix} (-3)(-2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \times\left(\frac{1}{3}\right) \\ \\ \times\left(\frac{1}{4}\right) \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \mathbf{1} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}
\sim
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}
\end{array}.
$$

В результате базисом исходной последовательности является подпоследовательность $Б = \langle a_1, a_3, a_4 \rangle$ (в базис включаем все векторы, которые соответствуют столбцам с ведущими элементами в конечной матрице). В каждом столбце конечной матрицы стоят коэффициенты разложения соответствующего вектора по найденному базису, причём каждый коэффициент умножается на тот вектор, который соответствует ведущему элементу в строке, откуда взят коэффициент.

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4, \quad a_2 = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4,$$

$$a_3 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3 + 0 \cdot a_4, \quad a_4 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4,$$

$$a_5 = 2 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3 + 1 \cdot a_4.$$

21. Последовательность векторов a_1, a_2, a_3 линейно независима. Выясните, является ли линейно независимой последовательность векторов

$$b_1 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3\,,\; b_2 = 7a_1 + 9a_2 + 4a_3\,,\; b_3 = a_1 + 2a_2 + a_3\,.$$

Решение. Согласно определению, нужно решить однородное векторное уравнение с векторами b_1, b_2, b_3 и убедиться, что оно имеет только нулевое решение.

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1\left(3a_1 + 4a_2 + 2a_3\right) + x_2\left(7a_1 + 9a_2 + 4a_3\right) +$$

$$+x_3\left(a_1 + 2a_2 + a_3\right) = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3x_1 + 7x_2 + x_3\right)a_1 + \left(4x_1 + 9x_2 + 2x_3\right)a_2 +$$

$$+\left(2x_1 + 4x_2 + x_3\right)a_3 = \overline{0}\,.$$

Так как исходная последовательность векторов a_1, a_2, a_3 – линейно независима, то все коэффициенты данного равенства равны нулю:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем полученную систему линейных уравнений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)(-2)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right)(-3)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{array}\right).$$

Получилось, что исходное однородное векторное уравнение имеет только нулевое решение. Следовательно, векторы b_1, b_2, b_3 – линейно независимы.

22. Решите систему линейных уравнений с параметрами:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

Решение. Данную систему решаем обычным образом – при помощи элементарных преобразований. В качестве ведущих элементов стараемся выбирать такие, которые заведомо не могут равняться нулю. Если это становится невозможным, тогда рассматриваем возможные случаи.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & \mathbf{1} & 1 \\ a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & \mathbf{1} & 1 \\ a-1 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

В основной матрице системы во второй и третьей строке не осталось элементов, которые заведомо не равняются нулю, поэтому рассматриваем случаи.

1-й случай: $a=1$. В этом случае матрица приобретает вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

Если $b \neq 1$, то система не имеет решений, т.к. второе уравнение получается противоречивым. Если $b = 1$, система имеет бесконечно много решений. Общее решение будет иметь вид: $\{\mathbf{x_3} = 1 - x_1 - x_2$.

2-й случай: $a \neq 1$. Тогда

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & \mathbf{1} & 1 \\ a-1 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a & 0 & b-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times\left(1/_{1-a}\right) \\ \times\left(1/_{1-a}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & \mathbf{1} & 1 \\ -1 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{b-1}{1-a} \end{array}\right) (-a)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 0 & \mathbf{1} & a+1 \\ -1 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \dfrac{b-a}{1-a} \end{array}\right) (1)(-1-a) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \mathbf{1} & \dfrac{(a+1)(1-b)}{1-a} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \dfrac{b-1}{1-a} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & \dfrac{b-a}{1-a} \end{array}\right).$$

В этом случае получилось единственное решение:

$$x_1 = \frac{b-a}{1-a},\ x_2 = \frac{b-1}{1-a},\ x_3 = \frac{(a+1)(1-b)}{1-a}.$$

Ответ: Если $a = 1, b = 1$, то система имеет бесконечно много решений $\{x_3 = 1 - x_1 - x_2$; если $a = 1, b \neq 1$, то система решений не имеет; если $a \neq 1$, то система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{b-a}{1-a}, x_2 = \dfrac{b-1}{1-a}, x_3 = \dfrac{(a+1)(1-b)}{1-a}$.

23. Найдите базисы подпространств Λ_1, Λ_2, $\Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$, если $\Lambda_1 = L(a_1, a_2, a_3)$, $\Lambda_2 = L(b_1, b_2, b_3)$ и

$$a_1 = (1;\ 0;\ 1;\ 1),\ a_2 = (0;\ -1;\ 1;\ 2),\ a_3 = (1;\ 1;\ 0;\ -1),$$

$$b_1 = (1;\ 2;\ 0;\ 0),\ b_2 = (1;\ 1;\ 1;\ 2),\ b_3 = (0;\ 1;\ 0;\ 1).$$

Решение. Сначала находим базисы Λ_1 и Λ_2.

$$
\Lambda_1:\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}a_1 & a_2 & a_3\end{array}\end{array}
\begin{array}{l}(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 1\\ 0 & -1 & \mathbf{1}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ (-1)(1)(2)\\ \\ \\ \end{array}
\sim
$$

$$
\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 1 & 0\\ 0 & -1 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim
\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 1 & 0\\ 0 & -1 & \mathbf{1}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}a_1 & a_2 & a_3\end{array}\end{array}.
$$

Базис Λ_1 – это $Б_1=\langle a_1,\, a_3\rangle$, $\dim\Lambda_1=2$.

$$
\Lambda_2:\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}b_1 & b_2 & b_3\end{array}\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ (-1)(-2)\\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\begin{array}{l}(-2)\\ \\ \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ (-1)\end{array}
\sim
$$

$$
\sim\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}\sim
\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}b_1 & b_2 & b_3\end{array}\end{array}.
$$

Базис Λ_2 – это $Б_2=\langle b_1,\, b_2,\, b_3\rangle$, $\dim\Lambda_2=3$.

Найдём базис $\Lambda_1+\Lambda_2$. Воспользовавшись равенством $\Lambda_1+\Lambda_2=L(a_1,a_3,b_1,b_2,b_3)$, найдём базис объединения.

$$
\Lambda_1+\Lambda_2:\ \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{1}\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}a_1 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3\end{array}\end{array}
\begin{array}{l} \\ (-1)\\ \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ (-1)\\ \\ \end{array}
\sim
$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)(2) \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array}.$$

Базис $\Lambda_1 + \Lambda_2$ – это $Б_3 = \langle a_1, a_3, b_3 \rangle$, $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2) = 3$.

Согласно формуле

$$\dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) =$$

$$= \dim(\Lambda_1) + \dim(\Lambda_2) - \dim(\Lambda_1 + \Lambda_2) = 2 + 3 - 3 = 2.$$

Для нахождения базиса $(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ заметим, что $c \in (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, что

$$c = \lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3.$$

Ввиду этого, достаточно решить однородное векторное уравнение $\lambda_1 a_1 + \lambda_3 a_3 - \beta_1 b_1 - \beta_2 b_2 - \beta_3 b_3 = \overline{0}$ и затем найти c.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_3 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{matrix} \end{array} (-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times(-1) \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&1&-1&0&0\\0&1&-2&-1&-1\\\mathbf{1}&0&0&-1&0\\0&\mathbf{1}&0&1&1\end{pmatrix}(-1)\sim\begin{pmatrix}0&0&-1&-1&-1\\0&0&-2&-2&-2\\\mathbf{1}&0&0&-1&0\\0&\mathbf{1}&0&1&1\end{pmatrix}\times(-1)\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&0&1&1&\mathbf{1}\\0&0&-2&-2&-2\\\mathbf{1}&0&0&-1&0\\0&\mathbf{1}&0&1&1\end{pmatrix}(2)(-1)\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\lambda_1&\lambda_3&\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{matrix}\\\begin{pmatrix}0&0&1&1&\mathbf{1}\\0&0&0&0&0\\\mathbf{1}&0&0&-1&0\\0&\mathbf{1}&-1&0&0\end{pmatrix}\end{array}.$$

Данной матрице соответствует система:

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2+\boldsymbol{\beta_3}=0,\\ \boldsymbol{\lambda_1}-\beta_2=0,\\ \boldsymbol{\lambda_3}-\beta_1=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{\beta_3}=-\beta_1-\beta_2,\\ \boldsymbol{\lambda_1}=\beta_2,\\ \boldsymbol{\lambda_3}=\beta_1.\end{cases}$$

Найдём фундаментальную систему решений.

$\boldsymbol{\lambda_1}$	$\boldsymbol{\lambda_3}$	β_1	β_2	$\boldsymbol{\beta_3}$
0	1	**1**	**0**	–1
1	0	**0**	**1**	–1

Для первого решения $c_1=\lambda_1a_1+\lambda_3a_3=0a_1+1a_3=a_3$, для второго – $c_2=\lambda_1a_1+\lambda_3a_3=1a_1+0a_3=a_1$.

Базис $\Lambda_1\cap\Lambda_2$ – это $Б_4=\langle a_1,a_3\rangle$, $\dim(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=2$.

24. Во множестве $\mathbb{R}$ относительно операции $x\circ y=\frac{1}{2}(3xy+6x+6y+8)$ найдите нейтральный элемент и симметричный для $a=10$.

Решение. Согласно определению, для нахождения нейтрального элемента в $\mathbb{R}$ относительно данной операции нужно найти такой элемент $e\in\mathbb{R}$, чтобы равенства $a\circ e=e\circ a=a$ выполнялись для любого $a\in\mathbb{R}$. Заметим, что

$$a \circ e = \frac{1}{2}(3ae + 6a + 6e + 8) = \frac{1}{2}(3ea + 6e + 6a + 8) = e \circ a,$$

поэтому достаточно рассмотреть равенство $a \circ e = a$:

$$\frac{1}{2}(3ae + 6a + 6e + 8) = a \Leftrightarrow 3ae + 6a + 6e + 8 = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(3a + 6) = -8 - 4a \Leftrightarrow e(a + 2) = -\frac{4}{3}(a + 2).$$

Очевидно, последнее равенство выполняется для любого $a \in \mathbb{R}$ при $e = -\frac{4}{3}$.

Для нахождения симметричного элемента для $a \in \mathbb{R}$, согласно определению, необходимо решить уравнения $a \circ x = x \circ a = e$. Заметим, что $a \circ x = x \circ a$, поэтому достаточно решить только уравнение $a \circ x = e$. Так как $a = 10$, то

$$a \circ x = e \Leftrightarrow \frac{1}{2}(30x + 60 + 6x + 8) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90x + 180 + 18x + 24 = -8 \Leftrightarrow 108x = -212 \Leftrightarrow x = -\frac{53}{27}.$$

25. Докажите, что множество $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ является группой относительно операции $\circ$, если

$$x \circ y = \frac{1}{3}(xy + x + y - 2).$$

Решение. Во-первых, множество должно быть замкнуто относительно операции, т.е. если $x, y \in G$, то $x \circ y \in G$.

Пусть напротив $x, y \in G$, но $x \circ y = -1$. Тогда получаем, что:

$$x \circ y = -1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}(xy + x + y - 2) = -1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; xy + x + y - 2 = -3 \;\Leftrightarrow\; x(y+1) + (y+1) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (y+1)(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ y = -1 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x \notin G \text{ или } y \notin G\,.$$

Противоречие.

Во-вторых, нужно проверить, что для данной операции выполняются все аксиомы группы.

Ассоциативность. Пусть $a, b, c \in G$ – произвольные элементы, тогда:

$$(a \circ b) \circ c = \left(\frac{1}{3}(ab + a + b - 2)\right) \circ c =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(ab + a + b - 2)c + \frac{1}{3}(ab + a + b - 2) + c - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}abc + \frac{1}{3}ac + \frac{1}{3}bc - \frac{2}{3}c + \left(\frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}\right) + c - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}abc + \frac{1}{3}ac + \frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - \frac{8}{3}\right);$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ \left(\frac{1}{3}(bc + b + c - 2)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a(bc + b + c - 2) + a + \frac{1}{3}(bc + b + c - 2) - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}abc + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}ac - \frac{2}{3}a + a + \left(\frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}\right) - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}abc + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{3}ac + \frac{1}{3}bc + \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c - \frac{8}{3}\right).$$

Сравнив полученные результаты, получаем, что $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для любых $a, b, c \in G$.

Существование нейтрального элемента. Необходимо найти такой элемент $e \in G$, что для любого $a \in G$ выполняется равенство $a \circ e = e \circ a = a$. Так как, очевидно, $a \circ e = e \circ a$, то достаточно рассмотреть равенство $a \circ e = a$.

$$a \circ e = a \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}(ae + a + e - 2) = a \;\Leftrightarrow\; ae + a + e - 2 = 3a \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; a(e-2) + e - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a+1)(e-2) = 0 .$$

Поскольку $a \neq -1$, то $e = 2$.

Существование симметричных элементов. Докажем, что для каждого $a \in G$ существует такой $a' \in G$, что $a \circ a' = a' \circ a = e$, где $e = 2$. Так как, очевидно, $a \circ a' = a' \circ a$, то достаточно решить уравнение $a \circ a' = e$. Цепочка равносильностей

$$a \circ a' = e \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}(aa' + a + a' - 2) = 2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow aa' + a + a' - 2 = 6 \;\Leftrightarrow\; a'(a+1) = 8 - a$$

и неравенство $a \neq -1$, позволяют найти $a' = \dfrac{8-a}{a-1}$. Кроме того $a' \in G$, т.к.

$$\frac{8-a}{a-1} \neq -1 \;\Leftrightarrow\; 8 - a \neq 1 - a \;\Leftrightarrow\; 8 \neq 1 .$$

В результате все аксиомы группы выполняются, значит $\langle G; \circ \rangle$ – группа.

26. Докажите, что множество K всех непрерывных на отрезке $[-1;\ 1]$ функций относительно операций $+$ и $\cdot$ является кольцом, но не полем, если

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x)=f(x)g(x).$$

Решение. Согласно свойствами непрерывности, сумма и произведение непрерывных функций снова являются непрерывными, поэтому сложение и умножение функций являются алгебраическими операциями на множестве K. Кроме того, функции $\mathbf{1}(x)=1$, $\mathbf{0}(x)=0$ также принадлежат K.

Проверим аксиомы кольца.

1) Сложение функций ассоциативно и коммутативно: $f+g=g+f$ и $f+(g+h)=(f+g)+h$ для любых $f,g,h\in K$.

Эти два свойства очевидным образом следуют из определения.

2) Множество K имеет нейтральный элемент - функцию $\mathbf{0}(x)$.

Действительно, для любой функции $f\in K$ имеем $(f+\mathbf{0})(x)=f(x)+\mathbf{0}(x)=f(x)+0=f(x)$, т.е. $f+\mathbf{0}=f$. Аналогично проверяется, что $\mathbf{0}+f=f$.

3) Для любой $f\in K$ определим функцию $-f$ по правилу $(-f)(x)=-f(x)$. Очевидно, эта функция является непрерывной на отрезке $[-1;\,1]$ и является симметричной для f. Действительно, т.к. $(f+(-f))(x)=f(x)-f(x)=0=\mathbf{0}(x)$, то $f+(-f)=\mathbf{0}$.

4) Для любых $f,g,h\in K$ выполняются свойства дистрибутивности: $f(g+h)=fg+fh$ и $(g+h)f=gf+hf$.

Действительно,

$$(f\cdot(g+h))(x)=f(x)(g+h)(x)=f(x)\Big(g(x)\ \ +h(x)\Big)=$$

$$= f(x)g(x) + f(x)h(x) = (f \cdot g)(x) + (f \cdot h)(x) = (f \cdot g + f \cdot h)(x).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

Таким образом, основные аксиомы кольца доказаны. Можно ещё доказать, ассоциативность и коммутативность умножения, наличие нейтрального относительно умножения элемента $\mathbf{1}(x)$. Из аксиом поля невозможно будет доказать аксиому существования обратного элемента.

Например, функция $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1; \end{cases}$ принадлежит K, т.к. является непрерывной. Однако, она не имеет обратной, т.к. не является взаимно однозначной.

27. Докажите, что множество $P = \left\{ 2a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ относительно сложения и умножения является подполем поля $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Решение. Согласно критерию подполя достаточно проверить, что $0, 1 \in P$ и для любых чисел $x, y \in P$

$$x + y,\ -x,\ xy \in P \text{ и, если } x \ne 0, \text{ то } x^{-1} \in P.$$

Имеем $0 = 2 \cdot 0 + 0\sqrt{7}$, $1 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 0\sqrt{7} \in P$.

Пусть $x = 2a + b\sqrt{7}$, $y = 2c + d\sqrt{7}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

$x + y = 2a + b\sqrt{7} + 2c + d\sqrt{7} = 2(a + c) + (b + d)\sqrt{7} \in P$, т.к. $2(a + c),\ b + d \in \mathbb{Q}$;

$-x = -2a - b\sqrt{7} \in P$, т.к. $-2a,\ -b \in \mathbb{Q}$;

$$xy = \left(2a + b\sqrt{7}\right)\left(2c + d\sqrt{7}\right) = 2\left(2ac + \frac{7}{2}bd\right) + (2bc + 2ad)\sqrt{7} \in P,$$

т.к. $2\left(2ac+\frac{7}{2}bd\right), \left(2bc+2ad\right)\in\mathbb{Q}$.

Пусть $x=2a+b\sqrt{7}\neq 0$, $a,b\in\mathbb{Q}$, тогда

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2a+b\sqrt{7}}=\frac{\left(2a-b\sqrt{7}\right)}{\left(2a+b\sqrt{7}\right)\left(2a-b\sqrt{7}\right)}=\frac{\left(2a-b\sqrt{7}\right)}{4a^2-7b^2}=$$

$$=2\frac{a}{4a^2-7b^2}-\frac{b}{4a^2-7b^2}\sqrt{7}.$$

Это число принадлежит P, если дроби определены и лежат в $\mathbb{Q}$, т.е. если знаменатель $4a^2-7b^2\neq 0$.

Пусть, напротив, $4a^2-7b^2=0$. Если $b=0$, то $a=0$ и получим противоречие с условием $x=2a+b\sqrt{7}\neq 0$. Если $b\neq 0$, то $7=\frac{4a^2}{b^2}=\left(\frac{2a}{b}\right)^2$. Последнее равенство также невозможно, т.к. получится, что $\sqrt{7}=\left|\frac{2a}{b}\right|$ является рациональным числом, а это – не так.

В результате все условия критерия подполя проверены и, следовательно, P является подполем поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. СПб.: Лань, 2008.

2. *Винберг Э. Б.* Алгебра многочленов. М.: Просвещение, 1980.

3. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-1: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2007.

4. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-1: задачник-практикум для студентов 1-го курса математического факультета. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2009.

5. *Кузьмичёв А. И.* Линейная алгебра-2: курс лекций для студентов 1-го курса математического факультета. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2008.

6. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979.

7. *Куликов Л. Я. и др.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993.

8. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2008.

9. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2010.

10. *Солодовников А. С., Родина М. А.* Задачник-практикум по алгебре. Часть IV. М.: Просвещение, 1985.

11. *Урман А. А.* Основы линейной и общей алгебры: курс лекций по алгебре для студентов 1-го курса ОЗО математического факультета. Новосибирск: Изд. НГПУ, 2004.

12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. СПб: Лань, 2008.

13. *Шнеперман Л. Б.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. СПб.: Лань. – 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е   и з д а н и е

Кузьмичёв Анатолий Иванович

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА-1

Учебное пособие для самостоятельной работы

В авторской редакции

Компьютерная вёрстка *А. Я. Саянская*

Подписано к печати 05.15.2012. Формат бумаги 60х84/16

Печать RISO. Уч.-изд.л. 7,5. Усл.печ.л. 6,97. Тираж 100 экз.

Заказ №

Педуниверситет, 630126, Новосибирск, 126, Вилюйская, 28