УДК 51.77+371+37.015.31+37.03
DOI: 10.15293/2658-6762.2602.07

Научная статья / Research Full Article
Язык статьи: русский / Article language: Russian

Изучение школьного курса математики на основе компетентностного подхода: делимость целых чисел (часть 2)

А. Ж. Жафяров[1]

[1] Новосибирский государственный педагогический университет,
Новосибирск, Россия

Проблема и цель. *В статье рассматривается проблема повышения качества математического образования в средней школе. Цель исследования – построить изучение школьного курса математики на основе технологии компетентностного подхода, разработанного и уточненного автором, продемонстрировать сказанное на примере последних трех базисных компетенций темы «Делимость целых чисел».*

Методология. *Основой методологии является интеграция непротиворечивой теории и технологии автора о компетентностном подходе и многолетней практики по преподаванию указанной темы.*

Результаты. *Научная работа является продолжением исследований автора, также нацелена на повышение уровня математического образования учащихся с физико-математическим уклоном и детей с ограниченными возможностями здоровья на основе компетентностного подхода. Многие ученики, обученные по предложенной технологии, стали достойными гражданами России. Целесообразность выбора этой темы обусловлена тем, что она вызывает большие трудности у учителей (не только российских), студентов педвузов и, как следствие, у старшеклассников, теряющих баллы на ЕГЭ.*

Заключение. *Внедрение компетентностного подхода в процесс изучения школьного курса математики будет способствовать повышению качества математического образования и личностного развития учащихся, тем самым содействовать подготовке кадров для решения глобальной проблемы, поставленной Президентом Российской Федерации: развивать качественную экономику, опережающую зарубежную.*

Ключевые слова: *компетентностный подход; компетенция; компетентность; повышение уровня математического образования учащихся; интеграция теории и практики.*

Финансирование проекта: Исследование выполнено в рамках реализации государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации № 073-03-2025-062/1 по теме «Содержание и технология обучения школьников, испытывающих трудности в изучении математики в школе».

Библиографическая ссылка: Жафяров А. Ж. Изучение школьного курса математики на основе компетентностного подхода: делимость целых чисел (часть 2) // Science for Education Today. – 2026. – Т. 16, № 2. – С. 143–163. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2602.07

Автор для корреспонденции: Акрям Жафярович Жафяров, akram39@yandex.ru

Постановка проблемы

В статье рассматривается проблема повышения качества математического образования в средней школе. Научная работа является продолжением исследований автора [1; 2], также нацелена на повышение уровня математического образования учащихся с физико-математическим уклоном и детей с ограниченными возможностями здоровья на основе компетентностного подхода.

Как уже было отмечено, перед страной поставлена очень важная глобальная проблема: развивать качественную экономику, опережающую зарубежную. Ее решение напрямую связано: быть России или нет.

При этом кадры решают все. Большая сила в составе педагогики и психологии должна результативно участвовать в подготовке кадров [3; 4], компетентных участвовать в решении как отраслевых проблем экономики [5–7], так и государственных задач [8; 9] в условиях цифровых трансформаций [10–13].

Цель исследования – построить изучение школьного курса математики на основе технологии компетентностного подхода, разработанного и уточненного автором, продемонстрировать сказанное на примере последних трех базисных компетенций темы «Делимость целых чисел».

Методология. Результаты исследования

Вашему вниманию будет представлена краткая теория КП – компетентностного подхода [14–17]. Ключевыми понятиями КП являются компетенция и компетентность [18–22]. Далее приведены определения этих понятий, сформулированные автором [23; 24].

Определение 1. Компетенция в данной реалии – это название функционирующих и будущих видов деятельности человечества и требования к ним.

Требования к компетенциям выражены четырьмя глаголами: знать, уметь, владеть и развивать, – которые составляют методологическую основу для разработки конкретных технологий подготовки компетентных и креативно компетентных специалистов по основным компетенциям данной профессии. Поэтому основной проблемой системы образования является разработка указанной технологии и ее реализация.

Определение 2. Компетентностью индивидуума в данной области деятельности человечества назовем владение им соответствующими компетенциями.

Технология внедрения КП в учебный процесс состоит из трех этапов.

Первый – формирование базисных компетенций ОИ – объекта изучения (темы, дисциплины, УДЕ –укрупненной дидактической единицы).

Второй этап – формирование базисной компетентности, т. е. компетентности по всем базисным компетенциям ОИ. Состоит из двух шагов: шаг 1 – «Учим мыслям» – реализуется на основе теории и практики; шаг 2 – «Учим мыслить!» – достигается на основе самостоятельного решения задач специального набора и выполнения творческих заданий, активного участия на олимпиадах, конкурсах и т. д. (здесь автором уточнено высказывание И. Канта: «Учить не мыслям, а мыслить»).

Третий этап – повышение компетентности в целом. Имеются два вида повышения компетентности по данной базисной компетенции: первый – «внутренний», реализуется в области темы и дисциплины; второй – «внешний» достигается за счет интеграции данной базисной компетенции с дисциплинами как по профилю, так и вне профиля.

Первый этап – формирование базисных компетенций.

Базисной компетенцией данного понятия назовем набор требований, выраженных указанными выше четырьмя глаголами.

Смысл этих требований отражают особенности самого понятия, ниже это объяснено на математических понятиях.

Обучающийся должен:

а) знать определения и свойства базисных понятий, на основе которых создана данная базисная компетенция;

б) уметь применять данные знания для решения учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

в) владеть в целом знаниями и умениями для решения стандартных и нестандартных задач, для постановки проблем и их решения;

г) развивать навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, непрерывно совершенствуя свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью в процессе изучения последующих тем данной и смежных дисциплин.

Определение 3. Обучающийся считается компетентным по данной базисной компетенции, если он владеет компетенциями а)–г) по отношению к этой компетенции.

Сформулирована теория и технология КП. Сказанное продемонстрируем на примере четвертой базисной компетенции указанной темы.

БК-4 – Простые, взаимно простые и составные числа

Рассмотрим суть микрокомпетенций БК-4. *Обучающийся должен:*

БК-4.1 – знать определения и свойства простых, взаимно простых и составных чисел;

БК-4.2 – уметь доказывать истинность этих свойств и применять их для решения стандартных, учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

БК-4.3 – владеть в целом знаниями и умениями для решения стандартных и нестандартных задач, для постановки проблем и их решения;

БК-4.4 – развивать навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, непрерывно совершенствуя свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью.

Приступим к формированию компетентности по БК-4, начнем с изучения теории. Первым этапом является реализация первого шага «Учим мыслям» (автор, как уже отмечено, придерживается принципа: учить и мыслям, и мыслить). Достигается за счет усвоения соответствующей теории и приобретения навыков ее применения на практике.

1. Краткая теория

1.1. Натуральное число p называется **простым**, если p > 1 и p не имеет отличных от 1 и p натуральных делителей.

1.2. Натуральные числа a и b называются **взаимно простыми**, если 1 их единственный общий делитель.

1.3. Натуральное число n называется **составным**, если n > 1 и n имеет по крайней мере один натуральный делитель, отличный от 1 и n.

Замечание. Множество всех натуральных чисел делится на три класса: простые, составные и 1. Число 1 не является ни простым, ни составным.

Свойства

1) если a, b $\in N$ и (a·b) ⋮ p, где p – простое число, то один из сомножителей делится на p;

2) если c ⋮ (a·b), где a и b – взаимно простые числа, то c ⋮ a и c ⋮ b;

3) любое натуральное число n > 1 делится хотя бы на одно простое число;

4) наименьший простой делитель любого составного натурального числа n не превосходит $\sqrt{n}$;

Следствие: если натуральное число n не делится ни на одно простое число, не превосходящее $\sqrt{n}$, то n – простое число.

5) **Основная теорема арифметики**: любое составное натуральное число представимо единственным образом в виде произведения степеней простых чисел.

2. Практика

2.1. Доказательство некоторых свойств

1) Докажем истинность первого свойства. Применим метод от противного. Пусть $a \not\vdots p$, тогда $a = p \cdot k + r$, $k \in Z$, $r \in N, 0 < r < p$. Если $b \not\vdots p$, то $b = p \cdot m + q$, $m \in Z$, $q \in N, 0 < q < p$. Вычислим произведение $a \cdot b = (p \cdot k + r) \cdot (p \cdot m + q) = p \cdot z + r \cdot q$, где $z \in Z, r \cdot q \in N$ – это с одной стороны. С другой – по условию $(a \cdot b) \vdots p$, т. е. остаток при делении произведения на p равен 0. На основе свойства о единственности деления целых чисел с остатком получим равенство $r \cdot q = 0$, что противоречит $r \cdot q \in N$.

2) Докажем истинность свойства 3): **любое натуральное число n > 1 делится хотя бы на одно простое число.**

Доказательство проведем методом математической индукции: a) для n = 2 истинность утверждений очевидна; пусть b) она верна для любого n, $2 < n \leq k$; c) докажем истинность для $n = k + 1$. Если n простое число, то свойство b) доказано. Если же n составное число, то $n = m \cdot q$, m; $q \in N$, $m > 1$; $q > 1$. Тогда $m < n = k + 1$, поэтому число m делится (на основе пункта b) хотя бы на одно простое число. Отсюда следует, что $n = k + 1$ также делится хотя бы на одно простое число.

3) Перейдем к доказательству свойства 4). Пусть p – наименьший простой делитель числа n, $n = p \cdot k$, $k \in N$, $k > 1$ (при k = 1 число n = p, что противоречит условию: n – составное число). Тогда $k < n$. Сравним два числа: p и k. Возможны два случая: 1) $p > k$; 2) $p \leq k$. Рассмотрим первый случай. Число k по свойству 3) имеет простой делитель q, $q \leq k$. Тогда $p > q$, что противоречит условию p – наименьший делитель числа n. Поэтому этот случай исключается. Во втором случае обе части неравенства $p \leq k$ умножим на $n = p \cdot k$: $p \cdot (p \cdot k) \leq k \cdot n \Leftrightarrow p^2 \leq n$. Отсюда следует: $p \leq \sqrt{n}$.

4) Доказательство свойства 5) проводится так же, как и предыдущее.

2.2. Демонстрационные примеры

Пример 1. Даны 5 чисел: a) p; b) $6 \cdot p + 7$; c) $3 \cdot p + 2$; d) $2 \cdot p + 1$; e) $p + 26$. Найдите все простые числа p, при которых все эти числа являются простыми.

Решение. Сначала отметим, что простые числа: 2 и 3 не удовлетворяют требованиям данной задачи. Действительно, при: p = 2 число c) является составным; если p = 3, то составным становится число b). Далее, если p = 5, то указанными числами будут: 5; 37; 17; 11; 31. Все являются простыми, следовательно, p = 5 – одно из решений. Интерес представляет вопрос: есть ли другие решения и сколько их?

Из сказанного выше следует, что искомые решения необходимо искать среди простых чисел $p \geq 7$. Новые решения будем искать по следующим формулам:

$$\mathbf{p = 5 \cdot k + r, k \geq 1, r \in \{1, 2, 3, 4\}, k \in N.} \quad \mathbf{(1)}$$

Эти формулы назовем многообразием способов для поиска таких простых чисел p, при которых простыми являются и остальные данные числа.

Используя указанные сведения, докажем, что других решений нет. Пусть r = 1. Тогда $p = 5 \cdot k + 1$, число c): $3 \cdot p + 2 = 3 \cdot (5 \cdot k + 1) + 2 = 15 \cdot k + 5$ является составным. Следовательно, простые числа вида $p = 5 \cdot k + 1$ не могут быть решениями данной задачи. К такому же выводу приходим и при других случаях. Если $p = 5 \cdot k + 2$, то число $2 \cdot p + 1 = 10 \cdot k + 5$ является составным, поэтому $p \neq 5 \cdot k + 2$.

Аналогично доказывается не допустимость равенств: $p = 5 \cdot k + 3$ и $p = 5 \cdot k + 4$.

Ответ: задача имеет единственное решение $p = 5$.

Пример 2. Даны три числа: p, $2 \cdot p + 3$, $p + 2036$. Найдите хотя бы одно значение простого числа p, при которых простыми являются все данные числа.

Решение. Сначала отметим, что простые числа 2 и 3 не удовлетворяют требованиям данной задачи. Действительно, при: $p = 2$ число $p + 2036$ является составным; $p = 3$ составным становится число $2 \cdot p + 3$. Далее, если $p = 5$, то указанными числами будут: 5; 13; $2041 = 13 \cdot 157$. Не все являются простыми, следовательно, $p = 5$ не может быть принято за решение данной задачи.

Рассмотрим значение $p = 7$. В этом случае указанными числами являются: 7; 17; 2043. Докажем, что 2043 – простое число на основе следствия к свойству 4. Так как $\sqrt{2043} = 45{,}199$, то предстоит проверка: имеются ли среди простых чисел 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43 делители числа 2043. Легко убедиться, что эти простые числа не являются делителями 2043, т. е. 2043 – простое число, следовательно, число $p = 7$ – решение данной задачи.

Ответ: $p = 7$.

Пример 3. Даны три числа: $3 \cdot p + 2$, $2 \cdot p + 3$, $p + 2026$. Найдите две формулы для вычисления значений простого числа p, при которых простыми являются все данные числа.

Решение. Легко убедиться, что простые числа 2 и 3 не являются решениями данной задачи. Если $p = 5$, то данными числами будут: 17; 13; 2031. Докажем, что число 2031 является простым. Составим ряд простых чисел, не превосходящих $\sqrt{2031} = 45{,}06$:

7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43 (*)

На основании следствия к свойству 5 число 2031 будет простым, если ни одно число ряда (*) не является делителем этого числа. Легко убедиться в справедливости сказанного. Поэтому число 2031 будет простым, а $p = 5$ – решением данной задачи.

Поищем другие решения и найдем формулу, указанную в данном примере. Ясно, что искомые простые числа $p \geq 7$, поэтому новые решения будем искать по формулам (1):

$$\mathbf{p = 5 \cdot k + r,\ k \geq 1,\ r \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ k \in \mathbb{N}.} \qquad (1)$$

На самом деле только некоторые из этих формул пригодны для поиска искомых простых чисел p. Например, бесполезно искать искомые простые числа p, пользуясь формулой 1), так как в этом случае первое данное число $3 \cdot p + 2 = 3 \cdot (5 \cdot k + 1) + 2 = 15 \cdot k + 5$ является составным. Аналогично обстоит дело, если пользоваться формулой 4). Составным является число $p + 2026 = 5 \cdot k + 4 + 2026 = 5 \cdot k + 2030$.

Формула 2) $p = 5k + 2$ в отличии от рассмотренных позволяет находить новые искомые значения простого числа p и сформулировать требования на параметры этих формул. Пользуясь указанной формулой, найдем такие простые значения p, при которых простыми будут и данные три числа. **В этом случае такие формулы назовем формулами ПИР – формулами поиска искомых решений данной задачи.**

Требования к формулам поиска искомых решений (в данном случае требования к параметрам p и k) предназначены для обеспечения простоты числа p и трех данных чисел.

Итак, требования на поисковую формулу 2) (в данном случае на натуральные числа $k \geq$

1 и p ≥ 7) состоят в следующем: p и k – нечетные числа, k не делится на 2 и на 1013. (**)

Ищем искомые значения (в (**) указаны только необходимые условия). При k = 1 число p = 7, но оно не является решением, так как число p + 2026 = 2033 = 19·107 – составное. Если k = 3, то простыми будут следующие числа: p = 17, 3·p + 2 = 53, p + 2026 = 2043. Поэтому p = 17 – решение данной задачи. Тогда формула **p = 5k + 2 является формулой ПИР – поиска искомых решений.**

Далее, при k = 9 число p = 47 – простое, но число 3·p + 2 = 143 = 11·13 – составное. Следовательно, p = 47 не является решением.

Продолжая этот процесс, получим и другие решения.

Рассмотрим следующую формулу p = 5·k + 3. Число p может быть простым только при k четном. При k = 2 число p = 13, 3·p + 2 = 41, 2·p + 3 = 29, p + 2026 = 2039. Все полученные числа являются простыми. Поэтому число p = 13 – решение данной задачи. Далее, при k = 4 число p = 23, оно не является решением, так как число 2·p + 3 = 49 – составное. Если k = 6, то число p = 5k + 3 = 33 – составное. В этом случае решения нет.

Рассмотрим еще один пример, пусть k = 8. Тогда p = 43, 3·p + 2 =131, 2·p + 3 = 89, p + 2026 = 2069. Все полученные числа являются простыми. Поэтому число p = 43 – решение данной задачи.

Продолжая этот процесс, можно найти новые решения.

Ответ. Решениями являются простые числа: 5, 13, 17, 43 и т. д. Задача имеет две формулы ПИР: p = 5·k + 2 и p = 5·k + 3, p; k ∈ $N, k \geq 1, p \geq 7$ для поиска искомых значений p.

Замечание. **Требования к параметрам этих формул ПИР определяются на основании текста данной задачи**.

Пример 4. Найдите натуральное число n, если оно имеет два простых различных делителя, число его натуральных делителей равно 4, а их сумма равна 2030.

Решение. Пусть p и q – простые делители числа n. Тогда это число имеет 4 делителя: 1, p, q, p·q, причем n = p·q и 1 + p + q + p·q = 2030. Тогда (1 + p)·(1 + q) = 2·5·7·29. Убедитесь, что полученное уравнение не имеет решения во множестве простых чисел.

Ответ: нет такого натурального числа.

Пример 5. Решите в натуральных числах уравнение $2x^3 + x^5 = 408$.

Решение. Представим уравнение в виде: x^3·(2 + x^2) = 8·51. Числа 8 и 51 являются взаимно простыми. Поэтому x^3·(2 + x^2) ⋮ 8 и x^3·(2 + x^2) ⋮ 51. Это возможно тогда и только тогда, если $x^3 = 8$ и 2 + x^2 = 51. Отсюда следует: x = 2 и x = 7.

Ответ: x = 2 и x = 7.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Даны 4 числа:

a) 2·p + 3; b) 3·p + 4; c) 4·p + 9; d) 7·p + 8.

Найдите хотя бы три простых числа p, при которых все эти числа являются простыми. Укажите формулу поиска решений, предварительно убедившись, что значения **равные** 5 и 53, являются решениями.

ЦУ: поскольку два решения уже известны, в частности p = 5, убедитесь, что для p ≥ 7 формулой поиска искомых решений является p = 5·k + 3, только для некоторых четных натуральных k.

2. Даны три числа: 5·p + 3, 6·p + 7, p + 2027. Найдите все значения простого числа p, при которых простыми являются все данные числа.

3. Даны три числа: 3·p + 2, 2·p + 3, p + 2028. Найдите хотя бы одно значение простого числа p, при котором простыми являются все данные числа.

Science for Education Today
2026. Том 16. № 2 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

4. Найдите все целочисленные решения уравнения $2x^2 + 19y^2 = 243$.

ЦУ: убедитесь, что y может быть только нечетным и меньшим 5.

Ответ: x = 6 и y = 3.

2.4. Творческие задания

1. Докажите истинность свойств 2 и 3.

2. Докажите истинность следствия к свойству 4.

ЦУ: используйте определение простого числа и свойство 4.

3. Придумайте исследовательскую задачу, аналогичную задаче примера 3.

БК-5

НОД – наибольший общий делитель

Рассмотрим суть компетенции БК-5. **Обучающийся должен:**

БК-5.1 – **знать** определения и свойства общего и наибольшего общего делителя натуральных чисел;

БК-5.2 – **уметь** доказывать истинность этих свойств и применять их для решения стандартных, учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

БК-5.3 – **владеть** в целом знаниями и умениями для решения стандартных и нестандартных задач, для постановки проблем и их решения;

БК-5.4 – **развивать** навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, непрерывно совершенствуя свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью.

Приступим к формированию компетентности по БК-5, начнем с изучения теории. Первым этапом является реализация первого шага «Учим мыслям». Достигается за счет усвоения соответствующей теории и приобретения навыков ее применения на практике.

1. Краткая теория

Число d называется общим делителем (ОД) натуральных чисел a и b, если каждое из этих чисел делится на d.

Множество всех общих делителей чисел a и b обозначим так: ОД (a, b).

Число d называется наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел a и b, если: 1) d ∈ ОД (a, b), 2) d делится на любой общий делитель чисел a и b. Обозначение НОД (a, b) : (a, b).

Нахождение наибольшего общего делителя натуральных чисел a и b основано на следующих четырех свойствах:

1) если $\mathbf{a} \vdots \mathbf{b}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$;

2) **если a = b·p + r, 0 < r < b, то (a, b) = (b, r);**

3) **(алгоритм Евклида). Пусть для натуральных чисел a и b верны равенства:**

a = b·$p_0 + r_1$, p_0 и r_1 – целые числа, 0 < $r_1 < b$;

b = $r_1 \cdot p_1 + r_2$, p_1 и r_2 – целые числа, 0 < $r_2 < r_1$;

$r_1 = r_2 \cdot p_2 + r_3$, p_2 и r_3 – целые числа, 0 < $r_3 < r_2$;

$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot p_{n-1} + r_n$, p_{n-1} и r_n – целые числа, 0 < $r_n < r_{n-1}$;

$r_{n-1} = r_n \cdot p_n$, где p_n – натуральное **число.**

Тогда (a, b) = r_n.

4) **алгоритм (школьный) нахождения НОД (a, b)**. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – простые числа, являющиеся делителями хотя бы одного из натуральных чисел a и b, причем a = $\alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k}$; b = $\alpha_1^{q_1} \cdot \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k}$, где p_i и q_i – либо нуль, либо натуральное число в зависимости от того число α_i является делителем или нет, **i ∈{1, 2, …, k}. Тогда НОД (a, b)** = $\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \ldots \alpha_k^{n_k}$, где $n_i = \min\{p_i, q_i\}$, **i ∈{1, 2, …, k}.**

2. Практика

2.1. Доказательство истинности некоторых свойств.

2.1.1. Докажем истинность второго свойства. Метод, которым будет доказано это свойство, применим для доказательства остальных свойств и решения многих задач.

Пусть d = (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b. Докажем, что d – наибольший общий делитель чисел b и r, где

a = b·p + r, 0< r < b, p ∈ Z. **(1)**

Доказательство проведем на основе определения НОД: первая часть d – общий делитель b и r. Действительно, b⁝d, так как d = НОД (a, b), r ⁝ d – это следует из равенства (1). Теперь убедимся в достоверности второй части определения НОД: d ⁝ p, где p – произвольный общий делитель пары b и r. Из равенства (1) следует, что a ⁝ p, поэтому p – общий делитель пары a и b. Тогда d ⁝ p, так как d – НОД (a, b).

Следовательно, d – НОД (b, r).

2.1.2. Докажем истинность алгоритма Евклида. Доказательство проведем на основе определения НОД. Первая часть: убедимся, что r_n – общий делитель a и b. Действительно, r_{n-1} ⁝ r_n – это следует из последней строчки алгоритма Евклида. Следовательно, r_n – общий делитель пары (r_{n-1}, r_n). Точно так же, используя предпоследнюю строчку этого алгоритма, приходим к выводу: r_n – общий делитель пары (r_{n-2}, r_{n-1}) и т. д. За счет первой строчки получим, что r_n – общий делитель пары (a, b).

Теперь убедимся в достоверности второй части определения НОД: r_n ⁝ p, где p – произвольный общий делитель пары a и b. Из первой строчки алгоритма следует, что r_1 ⁝ p, поэтому p – общий делитель пары b и r_1. Тогда из второй строчки следует: r_2 ⁝ p и т. д. Наконец, из предпоследней строчки r_n ⁝ p.

Следовательно, r_n = НОД (a, b).

2.2. Демонстрационные примеры

Пример 1. Во множестве натуральных чисел найдите решение системы

(x, y) = 5; $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

Решение. Из первого равенства следует: x = 5 · x_1 и y = 5 · y_1, (x_1, y_1) = 1.

Подставим полученные значения x и y во второе равенство:

$\frac{x}{y} = \frac{5 \cdot x_1}{5 * y_1} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{2}{3}$; $3x_1 = 2 \cdot y_1$.

Из последнего равенства следует: y_1 ⁝ 3, y_1 = 3·k, x_1 = 2·k, k ∈ { 1, 2, …}. Так как числа x_1 и y_1 являются взаимно простыми, то k = 1, x_1 = 2, y_1 = 3, x = 10, y = 15.

Ответ: x = 10, y = 15.

Пример 2. Найдите наибольший общий делитель (НОД) наименьшего и наибольшего значений числа A = $\overline{2026ab}$, делящегося на 12.

Решение. Представим число A следующим образом:

A = 202600 + $\overline{ab}$ **= 12 · 16883 + (4 +** $\overline{ab}$**).**

Отсюда следует: наименьшее значение рассматриваемого числа A_{min} = 202608, **а** наибольшее A_{max} = 202692. НОД этих чисел целесообразнее найти на основе свойства 2):

202692 = 202608 · 1 + 84; 202608 = 84 · 2412 + 0.

Следовательно, НОД (A_{min}, A_{max}) = 84.

Ответ: 84.

Пример 3. Сократимы ли следующие дроби:

a) $\frac{252}{2295}$, **b)** $\frac{2026}{406}$, **c)** $\frac{3a+2b}{2a+3b}$,

где **a** и **b** – взаимно простые числа, причем укажите:

c_1) **хотя бы одну пару;** c_2) все пары чисел a и ***b*,** при которых дробь не **сократима;** c_3) формулу **поиска искомых пар.**

Решение. Все три задачи решаются одним и тем же способом: 1) найти наибольший

Science for Education Today

2026. Том 16. № 2 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

общий делитель числителя и знаменателя; 2) сократить их на это число. Для решения a) применим основную теорему арифметики: представим числа в виде произведения степеней простых чисел: 252 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; 2295 = $3^3 \cdot 5 \cdot 17$. Отсюда следует: НОД (252, 2295) = 9.

Ответ: после сокращения на 9 получаем несократимую дробь $\frac{28}{255}$.

Для решения задачи b) примененный выше способ нахождения НОД не подходит, так как представление числа 2026 = 2·1013 в виде произведения степеней простых чисел является громоздким. Здесь целесообразно вычислить НОД искомых чисел на основе алгоритма Евклида:

2026 = 406 · 4 + 402; 406 = 402 · 1 + 4; 402 = 4 · 100 + 2; 4 = 2· 2 + 0.

Последним неравным 0 остатком является 2. Следовательно, (2026, 406) = 2.

Ответ: дробь сократима, после сокращения на 2 получаем несократимую дробь $\frac{1013}{203}$.

Решение задачи c). Для нахождения НОД числителя и знаменателя воспользуемся свойством 2): (3a + 2b, 2a + 3b) = (2a + 3b, a – b) = (a – b, 5b).

Докажем, что НОД (a – b, 5b) = 5. Предположим противное, т. е. пусть (a – b, 5b) = 5k, k ≠ 1, k ∈ N. Тогда $5b$ ⋮5k, b ⋮ k; a – b =5k·p, p ∈ N. Из полученного равенства следует, что a⋮k – это противоречит условию о взаимной простоте чисел a и b. Полученное противоречие подтверждает достоверность равенства

НОД (a – b, 5b) = 5. **(*)**

Теперь осталось для завершения решения рассматриваемой задачи: 1) числитель и знаменатель разделить на 5; 2) убедиться в не сократимости полученной дроби. Из равенства (*) следует: a – b = 5m, 5b = 5n, b = n, m и n – натуральные числа, причем (m, n) = (m, b) = 1, в противном случае число 5 не было бы НОД (см. (*)). Тогда a = b + 5m,

$$\frac{3a+2b}{2a+3b} = \frac{3b+2b+15m}{2b+3b+10m} = \frac{b+3m}{b+2m}, (m,b)=1, \quad m, \quad b \in N \quad (**)$$

Докажем, что полученная после соответствующего сокращения дробь (**) является не сократимой. Предположим противное, пусть она сократима на натуральное число p > 1, причем p = (b + 3m, b + 2m) = (b + 2m, m) = (m, b) = 1. Полученное противоречие подтверждает не сократимость дроби (**).

Формула (**) является формулой поиска искомых решений данной задачи. Ответим на оставшиеся вопросы, для этого приведем примеры, учитывая, что a и b – взаимно простые натуральные числа, (a, b) = 1. Их можно указать по формуле (**), но в условии предложено указать именно искомую пару a и b.

Пусть: 1) m = 3, b = 2, a = b + 5m = 17; данная дробь имеет вид:

$\frac{3a+2b}{2a+3b} = \frac{3\cdot17+22}{2\cdot17+3\cdot2} = \frac{55}{40} = \frac{11}{8}$ – не сократимая дробь.

Ответ: a = 17 и b = 2 – искомая пара, условие (**) – формула поиска всего многообразия не сократимых дробей.

Пример 4. Найдите пары взаимно простых натуральных чисел a = $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ и b= $\overline{b_1 b_2 \dots b_k}$, удовлетворяющих равенству a, $\overline{b_1 b_2 \dots b_k} = \frac{b}{a}$.

Решение. Представим указанное равенство в следующем виде:

$$\mathbf{a} + \frac{b}{10^k} = \frac{b}{a} \iff 10^k \cdot a^2 + \mathrm{ab} = 10^k \cdot \mathrm{b}.$$

Из последнего равенства следует, что ab делится на 10^k. Это возможно, например, при $a = 2^k$ и b =5^k (здесь учтено, что b > a, a и b – взаимно простые числа). Подставляя полученные значения a и b в указанное равенство, приходим к выводу, что k = 1.

Ответ: a =2, b = 5.

Пример 5. Докажите, что дробь $\frac{x}{y}$ не сократима, где x и y – целочисленные решения системы

$$2x - 3 = \frac{7y-4}{2} = 28 \cdot t - 9, t \in N. \quad (*)$$

Решение. 1. Вычислим значения x и y: x = 14t – 3; y = 8t – 2. На основе свойства 2) найдем НОД этих переменных:

(x, y) = (14t – 3, 8t – 2) = (8t – 2, 6t – 1) = (6t – 1, 2t – 1) = (2t – 1, 2) = 1.

Последнее равенство поясним: при натуральных значениях t число 2t – 1 является нечетным, поэтому НОД рассматриваемых чисел равен 1.

Следовательно, указанная дробь не сократима.

Пример 6. Во множестве простых и взаимно простых натуральных чисел решите уравнение

$$x^2 \cdot z + x \cdot y^2 + y \cdot z^2 = xyz.$$

Решение. Правая часть данного уравнения делится на x·y·z. Докажем, что левая часть не делится на это число. Предположим противное, т. е. $x^2 \cdot z + x \cdot y^2 + y \cdot z^2 = k \cdot xyz$, k ∈ N. Полученное уравнение представим следующим образом: $x \cdot y^2 + y \cdot z^2 = k \cdot xyz - x^2 \cdot z$ $\Leftrightarrow$ **$y \cdot (x \cdot y + z^2) = x \cdot z \cdot (k \cdot y - x)$.** Отсюда следует: x·z·(k·y – x) делится на простое число y, но это невозможно из-за взаимной простоты чисел x, y, z. Полученное противоречие свидетельствует о том, что задача не имеет решения.

Ответ: решения нет.

3. Задачи для самостоятельного решения

1. Решите во множестве натуральных чисел систему

$(x, y) = 4; \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Ответ: x = 12, y = 8.

2. Найдите наибольший общий делитель (НОД) наименьшего и наибольшего значений числа A = $\overline{2026ab}$, делящегося на 52.

3. Сократима ли дробь

$$\frac{\boldsymbol{5a+2b}}{\boldsymbol{4a+3b}},$$

где a и $\boldsymbol{b}$ – взаимно простые числа; укажите: **а) хотя бы одну пару;** б) все пары указанных чисел, при которых дробь не **сократима;** в) формулу **поиска искомых пар.**

4. Найдите пары взаимно простых натуральных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a - \frac{b}{24^n} = 1 + \frac{b}{a}$, n $\in N$, a < b.

5. Сократима ли дробь $\frac{x}{y}$, где x и y – целочисленные решения системы

$$2x - 3 = \frac{7y-4}{2} = 14t - 9, t \in N.$$

6. Во множестве простых и взаимно простых натуральных чисел решите уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2026$.

4. Творческие задания

1. Докажите свойства 1) и 4).

2. Сократима ли дробь

$$\frac{\boldsymbol{a+2b}}{\boldsymbol{2a+7b}},$$

где a и $\boldsymbol{b}$ – взаимно простые числа, причем укажите : **а) хотя бы одну пару;** б) все пары указанных чисел, при которых дробь не **сократима;** в) формулу **поиска искомых пар.**

3. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a = $\overline{\boldsymbol{a_1 a_2 \dots a_n}}$ и b= $\overline{b_1 b_2 \dots b_k}$, удовлетворяющих равенству **b – a,** $\overline{\boldsymbol{b_1 b_2 \dots b_k}} = \frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{a}}$**.**

4. Докажите, что дробь $\frac{2x-y}{x+2y}$ сократима, где x и y – целочисленные решения системы

$$\boldsymbol{2x - 3 = \frac{7y-4}{2} = 14t - 9, t \in N.}$$

5. Во множестве простых и взаимно простых натуральных чисел решите уравнение $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}=2026$.

БК-6

НОК – наименьшее общее кратное

Отметим суть компетенции БК-6. **Обучающийся должен:**

БК-6.1 – **знать** определение и свойства общего и наименьшего общего кратного натуральных чисел a и b;

БК-6.2 – **уметь** доказывать истинность этих свойств и применять их для решения стандартных, учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

БК-6.3 – **владеть** в целом знаниями и умениями для решения стандартных и нестандартных задач, для постановки проблем и их решения;

БК-6.4 – **развивать** навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, непрерывно совершенствуя свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью.

Приступим к формированию компетентности по БК-6, начнем с изучения теории.

1. **Краткая теория**

Определение 1. Натуральное число M называется общим кратным натуральных чисел a и b, если M делится на каждое из этих чисел.

Обозначение: ОК (a, b) – множество всех общих кратных чисел a и b.

Определение 2. Натуральное число m называется наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b, если:

1) m ∈ ОК (a, b); 2) на m делится любое кратное этих чисел.

Обозначение: [a, b] = НОК (a, b).

Свойства

1) Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$[a, b] = \frac{a \cdot b}{(a,b)}. \quad (1)$$

2) Алгоритм (школьный) для нахождения НОК (a, b). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – простые числа, являющиеся делителями хотя бы одного из натуральных чисел a и b, причем a = $\alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k}$; b= $\alpha_1^{q_1} \cdot \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k}$, где p_i и q_i – либо нуль, либо натуральное число в зависимости от того число α_i является делителем или нет, **i ∈{ 1, 2, …, k}. Тогда НОК (a, b) =** $\alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \ldots \alpha_k^{n_k}$, где $n_i = \max\{p_i, q_i\}$, **i ∈ {1, 2, …, k}.**

2. Практика

2.1. Доказательство истинности первого свойства. Пусть d = (a, b), a = x·d, b = y·d, (x, y) = 1, x; y ∈ N. Докажем, что число m = $\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ **является НОК (a, b). Для этого достаточно убедиться, что число m обладает двумя свойствами: 1) m ⋮ a, m ⋮ b; 2) на m делится любой ОК (a, b). Из равенства m** $=\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ получим**:** **m** $=\frac{a \cdot b}{d}$ **= x·b = y·a**. Отсюда следует достоверность свойства 1). Далее, пусть M – произвольное ОК (a, b). Тогда M ⋮ ***a*, *M*** ⋮ **b; M = a·k = x·d·k, M =b·n = y·d·n, где k и n – натуральные числа. Из равенств x·d·k = y·d·n ⇔ x·k = y·n получим, что k ⋮ y,** то есть $\boldsymbol{k = y \cdot p, p \in}$ **N.** Тогда **M = x·d·y·p = a·y ·p = x·b·p.** Отсюда следует, что **достоверно и второе свойство. Следовательно, m =** $\frac{a \cdot b}{(a,b)}$ – **НОК (a, b) = [a, b].**

2.2. Демонстрационные примеры

Пример 1. Во множестве натуральных чисел решите систему

(x, y) =7, [x, y] =231, x <y.

Решение. Из равенства (x, y) = 7 следует: x = 7k, y = 7p, (k, p) = 1, k; p ∈ *N*. Тогда x·y =

$49k \cdot p$ – с одной стороны; с другой – $x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y] = 7 \cdot 231$; $49k \cdot p = 7 \cdot 7 \cdot 33$; $k \cdot p = 1 \cdot 3 \cdot 11$. Так как $x < y$, то $k < p$, поэтому имеются только две возможности: $k = 1$, $p = 33$ или $k = 3$, $p = 11$. Следовательно: $x = 7$, $y = 231$ или $x = 21$, $y = 77$.

Ответ: $x = 7$; $y = 231$ или $x = 21$; $y = 77$.

Пример 2. Во множестве натуральных чисел решите систему

$$x \cdot y = 6468,\ [x, y] = 924,\ x < y.$$

Решение. Из равенства $x \cdot y = (x, y) \cdot [x, y]$ следует, что наибольший общий делитель $(x, y) = \frac{6468}{924} = 7$. Тогда: $x = 7k$, $y = 7p$, $(k, p) = 1$, $k; p \in N$; $6468 = x \cdot y = 49k \cdot p \Leftrightarrow k \cdot p = 1 \cdot 11 \cdot 12$. Так как $x < y$, то $k < p$, поэтому имеются только две возможности решения полученного уравнения: $k = 11$, $p = 12$ и $k = 1$, $p = 132$. Следовательно: $x = 77$, $y = 84$ и $x = 7$, $y = 924$.

Ответ: $x = 77$, $y = 84$ и $x = 7$, $y = 924$.

Пример 3. Во множестве натуральных чисел решите систему

$[x, y] = 462$, $x + y = 43$, $x < y$, x – нечетное число.

Решение. Значение x является делителем НОК $[x, y] = 462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, поэтому $x \in \{3, 7, 11, 21\}$ (здесь учтены все ограничения на x, в том числе и $x \leq 21$). Указанные значения для x являются только необходимыми, проверим их на достаточность. Для этого по предполагаемому значению x (например $x = 3$) найдем соответствующие значения y ($y = 43 - 3 = 40$) и НОК $[x, y] = 120$). Отсюда следует, что пара $x = 3$ и $y = 40$ не является решением, так как выполнены не все требования. Аналогично проверяются на достаточность все оставшиеся значения x и y. Убеждаемся, что задача имеет единственное решение $x = 21$ и $y = 22$.

Ответ: $x = 21$ и $y = 22$.

Пример 4. Произведение пяти натуральных чисел меньше, чем их сумма, а сумма четырех из этих чисел равна 43. Найдите НОД и НОК этих чисел.

Решение. Пусть для пяти натуральных чисел имеет место неравенство

$$a + b + c + d + e > a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e. \qquad (*)$$

1. Рассмотрим частный случай, когда $a = 40$, тогда остальные могут быть только единицами. В этом случае НОД = 1, НОК = 40.

2. Докажем, что при $a < 40$ задача не имеет решения. Если $a = 39$, то среди тройки оставшихся от указанной четверки чисел должно быть число, не меньшее 2 – двойки. В этом случае нарушается неравенство (*). Аналогично обстоит дело и при других значениях $a < 39$ (убедитесь самостоятельно).

Ответ: НОД = 1, НОК = 40.

Пример 5. Найдите НОК (x, y) и НОД (x, y), если x и y – решения во множестве натуральных чисел системы

$$3 \cdot x + p - 11 \cdot q = 2 \cdot y + p + 6 \cdot q = 7 \cdot p - 2 \cdot q, \qquad (1)$$

где p и q – простые и взаимно простые натуральные числа.

Решение. 1. Выразим значения x и y через p и q: $x = 2p + 3q$, $y = 3p - 4q$, $(3p > 4q)$. Тогда НОД $(x, y) = (2p + 3q, 3p - 4q) = (2p + 3q, p - 7q) = (17q, p - 7q)$.

Докажем, что НОД $(17q, p - 7q) = 17$. Доказательство от противного, пусть $(17q, p - 7q) = 17 \cdot k$, $k \neq 1$, $k \in N$. Отсюда следует: $17q \vdots 17k$, $q \vdots k$ $p - 7q = 17k \cdot r$, $r \in N$, поэтому $p \vdots k$, что противоречит взаимной простоте чисел p и q.

Следовательно,

$$(17q, p - 7q) = 17. \qquad (2)$$

2. Вычислим значение НОК (x, y). Воспользуемся первым свойством:

$$[x, y] = \frac{xy}{(x, y)} = \frac{(2p+3q)\cdot(3p-4q)}{17}.$$

Ответ: НОД $(x, y) = 17$, НОК $[x, y] = \frac{(2p+3q)\cdot(3p-4q)}{17}$.

2026. Том 16. № 2 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

Пример 6. Найдите несократимую дробь $\frac{a}{b} = \frac{123456\ldots\qquad\ldots654321}{1234567\ldots\ldots\ldots7654321}$,

где повторяются: в числителе цифра 6 в 2026 раз, а в знаменателе цифра 7 в 2025 раз.

Решение. 1. Вычислим значения следующих двух разностей b – a, b – 10a:

b – a = 1 2 3 4 5 6 7. . . . . . 7 6 5 4 3 2 1
-- 1 2 3 4 5 6. . . . . 6 6 5 4 3 2 1
= 1 1 1 1 1 1 1 . . . 1 0 0 0 0 0 0,

где в числе А = 11…1 число 1 – единиц равно 6 + 2025 = 2031, а число нулей равно 6. Следовательно, b—a = А·10^6.

Составим вторую разность

b – 10a = 1 2 3 4 5 6 7. . . . . . 7 6 5 4 3 2 1
-- 1 2 3 4 5 6 6 . . . 6 5 4 3 2 1
= 0 0 0 0 0 0 1 . . . 1 1 1 1 1 1 1

где в числе А = 11…1 число 1 – единиц равно 6 + 2025 = 2031, а число нулей в строке равно 6. Следовательно: b – 10a = А.

2. Используя полученные результаты, найдем несократимую дробь. Легко убедиться, что

$\frac{b-a}{b-10a} = 10^6$, $(10^6 - 1)\cdot b = (10^7 - 1)\cdot a$, $\frac{a}{b} = \frac{10^6-1}{10^7-1} = \frac{999999}{9999999}$.

Тогда $\frac{a}{b} = \frac{111111}{1111111}$. Докажем, что полученная дробь несократима. Для этого достаточно убедиться, что НОД числителя и знаменателя равна 1. Применим алгоритм Евклида:

1111111 = 10·111111 + 1; 111111 = 1·111111 + 0.

Последний не равный нулю остаток равен 1, следовательно, полученная дробь несократима.

Ответ: $\frac{111111}{1111111}$.

Пример 7. Найдите наибольшую группу делителей числа А, состоящую из пар не взаимно простых чисел. Натуральное число А обладает двумя свойствами: 1) не является полным квадратом натурального числа, 2) наименьший общий кратный всех его делителей равен 210.

Решение. 1. Найдем всех делителей числа А, учитывая, что все они являются сомножителями НОК, равного 210 = 1·2·3·5·7. Отсюда следует, что делителями числа А могут быть только следующие 16 чисел:

1, 2, 3, 5, 7 всего 5;
2·3, 2·5, 2·7, 2·3·5, 2·3·7, 2·5·7, 2·3·5·7 7;
3·5, 3·7, 5·7, 3·5·7· 4.

2. Докажем, что 2 не является делителем числа А. Предположим противное: тогда все простые делители 2, 3, 5, 7 в восьмой степени сомножителями содержатся в числе А, т. е. А является полным квадратом натурального числа (см. 1) в условии). Из полученного противоречия следует, что 2 не является делителем числе А.

3. Из сказанного выше следует: в число А включаются сомножителями·все 7 чисел, содержащих сомножителем число 2, и число 3·5·7. Для этих чисел все требования выполнены. Числа 3·5, 3·7 и 57 исключены из указанного списка, так как они являются взаимно простыми с некоторыми числами этого списка.

Ответ: 6, 10, 14, 30, 42, 70, 210, 105.

3. Задачи для самостоятельного решения

1. Во множестве натуральных чисел решите систему

(x, y) =4, [x, y] =240, x <y.

Ответ: (4; 240), (12; 80), (16; 60), (20; 48).

2. Во множестве натуральных чисел решите систему

x·y = 20, [x, y] = 10, x < y.

Ответ: (2; 10).

3. Во множестве натуральных чисел решите систему

[x, y] = 143, x + y = 24.

Ответ: (11; 13), (13; 11).

4. Произведение четырех натуральных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из

этих чисел равна 33. Найдите НОД и НОК этих чисел.

5. Найдите НОК (x, y) и НОД (x, y), если x и y – решения во множестве натуральных чисел системы

2·x -- p – 3·q = 3·y -- 6·p – 9·q =3·p + 3·q,

где p и q – простые и взаимно простые натуральные числа.

6. Найдите несократимую дробь $\frac{a}{b}$,

где a = 12345 … 54321 (цифра 5 повторяется в 2030 раз) и b = 123456 … 654321 (цифра 6 повторяется в 2029 раз).

7. Найдите натуральное число, имеющее 6 и только 6 натуральных делителей, сумма которых равна 1862.

Ответ: 1573.

4. Творческие задания

1. Докажите свойство 2).

2. Во множестве натуральных чисел решите систему

[x, y] = 286, x + y = 53.

3. Произведение шести натуральных чисел меньше, чем их сумма, а сумма пяти из этих чисел равна 54. Найдите НОД и НОК этих чисел.

4. Обобщите задачу примера 6, составьте алгоритм решения и решите ее.

5. Найдите несколько пар натуральных чисел x и y, вычислите для этих значения НОК (x, y) и НОД (x, y), если x и y – решения во множестве натуральных чисел системы

2·x -- p – 3·q = 3·y -- 6·p – 9·q – 6 = 3·p + 3·q + 12,

где p и q – простые и взаимно простые натуральные числа.

ЦУ: 1) найдите НОД (x, y) по вычисленным значениям x и y; 2) примените свойство 1).

6. Найдите такого человека, возраст которого равен сумме цифр года рождения.

Заключение

1. Теория и технология компетентностного подхода (КП) компактна и доступна. Предложенный по математике подход применим и для многих других дисциплин.

2. Практика применения КП в учебном процессе вызывает определенные трудности. Это связано с тем, что КП предназначен для того, чтобы обучающийся умел думать и творить – это первая трудность; вторая – обеспечение компетентности требует учета всех характеристик изучаемого объекта. Такую трудную практику целесообразно реализовать на основе деятельностного подхода, что и учтено в статье.

3. Благородному делу поможет регулярно действующий семинар ОСУУ – обучающий семинар учителей и учащихся. «Овчина стоит выделки», так как за компетентностным подходом будущее. Это будет способствовать решению глобальной поставленной Президентом проблемы: развивать качественную экономику, опережающую зарубежную, а также успеху в стране движения: дать одаренным отличникам специальное образование. Автор готов участвовать в этом важном деле.

4. Статья содержит обучающие аспекты: даны с решениями задачи высокого уровня трудности и разнообразные методы их решения, поэтому она полезна и учащимся, детям с ограниченными возможностями здоровья, и участникам СВО. Усвоение таких материалов будет способствовать повышению качества математического образования и содействовать успеху указанным лицам на ЕГЭ, олимпиадах, конкурсах и в реальной жизни.

5. Целесообразно опубликовать такие материалы по всем темам школьной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жафяров А. Ж. Изучение школьного курса математики на основе компетентностного подхода // Science for Education Today. – 2026. – № 1. – С. 160–180. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2601.07
2. Жафяров А. Ж. Модели и критерии для мониторинга качества образования // Science for Education Today. – 2021. – № 4. – С. 136–154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2104.07
3. Guerrero Chanduví D. A., Girón Escobar C., Jara Gallo D., Cruz Alayza V. Analysis of the Intellectual Structure of Scientific Papers about Professional Competences Related to Organizational Psychology // Procedia – Social and Behavioral Sciences. – 2016. – Vol. 226. – P. 286–293. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2016.06.190
4. Hašková A., Lukáčová D., Noga H. Teacher self-assessment as a part of quality management // Science for Education Today. – 2019. – Vol. 9, No. 2. – P. 156-169. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.1902.11
5. Bilal, Guraya S. Y., Chen S. The impact and effectiveness of faculty development program in fostering the faculty's knowledge, skills, and professional competence: A systematic review and meta-analysis // Saudi Journal of Biological Sciences. – 2019. – Vol. 26. – P. 688–697. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sjbs.2017.10.024
6. Gravina E. W. Competency-Based Education and Its Effect on Nursing Education: A Literature Review // Teaching and Learning in Nursing. – 2017. – Vol. 12 (2). – P. 117–121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016/11.004
7. Pijl- Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V. Competence and competency-based nursing education: Finding our waythrough the issues // Nurse Education Today. – 2014. – Vol. 34 (5). – P. 676–678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
8. Латуха О. А. Обучение менеджменту устойчивого развития руководителей организации // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2018. – Т. 8, № 3. – С. 225-236. DOI: https://doi.org/10.15293/2226-3365.1803.16
9. Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D. An ontology-based for competence management // Data and Knowledge Engineering. – 2017. – Vol. 107. – P. 51–66. DOI: https://doi.org/10./1016./j.datak.2016.12.001
10. Пушкарев Ю. В., Пушкарева Е. А. Цифровые трансформации системы образования: тенденции, проблемы, приоритеты личностного развития (обзор) // Science for Education Today. – 2025. – Т. 15, № 6. – С. 71–96. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2506.04
11. Пушкарёва Е. А., Пушкарёв Ю. В. Когнитивно-рефлексивное развитие личности: оценка особенностей воздействия изменяющейся информационно-образовательной среды // Science for Education Today. – 2024. – Т. 14, № 6. – С. 128–154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2406.06
12. Brevik L. M., Gudmundsdottir G. B., Lund A., Strømme T. A. Transformative agency in teacher education: Fostering professional digital competence // Teaching and Teacher Education. – 2019. – Vol. 86. – P. 102875. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.07.005
13. Instefjord E. J., Munthe E. Educating digitally competent teachers: A study of integration of professional digital competence in teacher education // Teaching and Teacher Education. – 2017. – Vol. 67. – P. 37–45. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.05.016
14. Жафяров, А. Ж. Компетентностный подход: непротиворечивая теория и технология // Science for Education Today. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 81-95. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.1902.06

15. Cheetham G., Chivers G. The reflective (and competent) practitioner: a model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches // Journal of European Training. – 1998. – Vol. 22 (7). – P. 267–276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678
16. Rezgui K., Mhiri H., Ghedira K. Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 397–406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041
17. Gadušova Z., Haškova A., Szarszoi D. Teachers` competences evaluation: Case study // Science for Education Today. – 2020. – Vol. 10 (3). – P. 164–177. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.2003.09
18. Lauermann F., König J. Teachers' professional competence and wellbeing: Understanding the links between general pedagogical knowledge, self-efficacy and burnout // Learning and Instruction. – 2016. – Vol. 45. – P. 9–19. DOI: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.06.006
19. Stefanutti L., de Chiusole D. On the assessment of learning in competence-based knowledge space theory // Journal of Mathematical Psychology. – 2017. – Vol. 80. – P. 22–32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp/2017.08.003
20. Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch. Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice // Evaluation and Program Planning. – 2015. – Vol. 52. – P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001
21. Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L. Architecture of a Competence – Based Human Resource Development Solution // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 77. – P. 184–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382
22. Schipper T., Goei S. L., de Vries S., van Veen K. Professional growth in adaptive teaching competence as a result of Lesson Study // Teaching and Teacher Education. – 2017. – Vol. 68. – P. 289–303. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.09.015
23. Жафяров А. Ж. Критерий для исследования зависимых и независимых выборок в области образования // Science for Education Today. – 2022. – № 3. – С. 69–91. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2203.04
24. Жафяров А. Ж. Уточненный и дополненный критерий для исследования зависимых и независимых выборок в области экспериментальных наук (и образования) // Science for Education Today. – 2023. – Т. 13, № 2. – С. 123–144. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2302.06

Поступила: 09 января 2026 Принята: 11 марта 2026 Опубликована: 30 апреля 2026

Заявленный вклад авторов:

Вклад автора в сбор эмпирического материала представленного исследования, обработку данных и написание текста статьи полноценный.

Автор ознакомился с результатами и одобрил окончательный вариант рукописи.

Информация о конфликте интересов:

Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов в связи с публикацией данной статьи

Информация об авторе

Жафяров Акрям Жафярович
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАО,
кафедра геометрии и методики обучения математике,
Новосибирский государственный педагогический университет,
Вилюйская ул., 28, 630126, Новосибирск, Новосибирская обл., Россия.
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1339-1472
E-mail: akram39@yandex.ru

Science for Education Today

2026, vol. 16, issue 2 http://en.sciforedu.ru/ ISSN 2658-6762

DOI: 10.15293/2658-6762.2602.07 Research Full Article / Article language: Russian

Studying the school mathematics course based on the competence approach: Divisibility of integers' topic (part 2)

Akryam Zh. Zhafyarov [1]

[1] Novosibirsk State Pedagogical University,
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

Introduction. *The article discusses the problem of improving the quality of mathematical education in secondary schools. The purpose of the study is to build school mathematics course based on the competence approach developed and refined by the author, to demonstrate what has been said using the example of the last three basic competencies of the 'Divisibility of integers' topic.*

Materials and Methods. *The basis of the methodology is the integration of the author's consistent theory and technology about the competence approach and long-term practice in teaching this topic.*

Results. *The study is a continuation of the author's research, and is also aimed at improving the level of mathematical education of students with a physical and mathematical bias and children with disabilities based on a competency-based approach. Many students trained using this technology have become worthy citizens of Russia. The expediency of choosing this topic is due to the following circumstances: it causes great difficulties for teachers (not only Russian ones), students of pedagogical universities and, as a result, for high school students who lose points on the Unified State Exam.*

Conclusions. *The introduction of a competence-based approach into the process of studying school mathematics will help improve the quality of mathematical education and personal development of students, thereby contributing to preparing future professionals to solve the significant problem posed by the President of the country: to develop the Russian economy ahead of the foreign ones.*

Keywords

Competence approach; Competency; Competence; Improving the level of mathematical education of students; Integration of theory and practice.

Acknowledgments

The study was financially supported by the Ministry of Education of the Russian Federation by a state assignment. Project No. 073-03-2025-062/1 ("The content and technology of teaching schoolchildren with difficulties in learning mathematics at school").

For citation

Zhafyarov A. Zh. Studying the school mathematics course based on the competence approach: Divisibility of integers (part 2). *Science for Education Today*, 2026, vol. 16 (2), pp. 143–163. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2602.07

Corresponding Author: Akryam Zh. Zhafyarov, akram39@yandex.ru

REFERENCES

1. Zhafyarov A. Z. Studying the school mathematics course based on the competence approach. *Science for Education Today*, 2026, vol. 16 (1), pp. 160–180. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2601.07
2. Zhafyarov A. Z. Models and criteria for monitoring the quality of education. *Science for Education Today*, 2021, vol. 11 (4), pp. 136-154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2104.07
3. Guerrero Chanduví D. A., Girón Escobar C., Jara Gallo D., Cruz Alayza V. Analysis of the intellectual structure of scientific papers about professional competences related to organizational psychology. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2016, vol. 226, pp. 286-293. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2016.06.190
4. Hašková A., Lukáčová D., Noga H. Teacher's self-assessment as a part of quality management. *Science for Education Today*, 2019, vol. 9 (2), pp. 156-169. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.1902.11
5. Bilal, Guraya S. Y., Chen S. The impact and effectiveness of faculty development program in fostering the faculty's knowledge, skills, and professional competence: A systematic review and meta-analysis. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 2019, vol. 26, pp. 688-697. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sjbs.2017.10.024
6. Gravina E. W. Competency-based education and its effect on nursing education: A literature review. *Teaching and Learning in Nursing*, 2017, vol. 12 (2), pp. 117-121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016.11.004
7. Pijl-Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V. Competence and competency-based nursing education: Finding our way through the issues. *Nurse Education Today*, 2014, vol. 34 (5), pp. 676-678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
8. Latuha O. A. Training leaders of organizations in sustainable development management. *Novosibirsk State Pedagogical University Bulletin*, 2018, vol. 8 (3), pp. 225-236. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1803.16
9. Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D. An ontology-based model for competence management. *Data and Knowledge Engineering*, 2017, vol. 107, pp. 51-66. DOI: https://doi.org/10.1016/j.datak.2016.12.001
10. Pushkarev Y. V., Pushkareva E. A. Digital transformations of the education system: Trends, problems, and priorities of personal development (A critical review). *Science for Education Today*, 2025, vol. 15 (6), pp. 71-96. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2506.04
11. Pushkareva E. A., Pushkarev Y. V. Cognitive-reflexive personality development: Evaluating the impact of the changing information and educational environment. *Science for Education Today*, 2024, vol. 14 (6), pp. 128-154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2406.06
12. Brevik L. M., Gudmundsdottir G. B., Lund A., Strømme T. A. Transformative agency in teacher education: Fostering professional digital competence. *Teaching and Teacher Education*, 2019, vol. 86, pp. 102875. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.07.005
13. Instefjord E. J., Munthe E. Educating digitally competent teachers: A study of integration of professional digital competence in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 2017, vol. 67, pp. 37-45. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.05.016
14. Zhafyarov A. Z. Competence approach: Consistent theory and technology. *Science for Education Today*, 2019, vol. 9 (2), pp. 81-95. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.1902.06

15.Cheetham G., Chivers G. The reflective (and competent) practitioner: A model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches. *Journal of European Industrial Training*, 1998, vol. 22 (7), pp. 267-276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678

16.Rezgui K., Mhiri H., Ghédira K. Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development. *Procedia Computer Science*, 2017, vol. 112, pp. 397-406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041

17.Gadušova Z., Hašková A., Szarszoi D. Teachers` competences evaluation: Case study. *Science for Education Today*, 2020, vol. 10 (3), pp. 164-177. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2003.09

18.Lauermann F., König J. Teachers' professional competence and wellbeing: Understanding the links between general pedagogical knowledge, self-efficacy and burnout. *Learning and Instruction*, 2016, vol. 45, pp. 9-19. DOI: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.06.006

19.Stefanutti L., de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, vol. 80, pp. 22-32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.08.003

20.Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch. Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice. *Evaluation and Program Planning*, 2015, vol. 52, pp. 1-9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001

21.Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L. Architecture of a competence – based human resource development solution. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 77, pp. 184-190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382

22.Schipper T., Goei S. L., de Vries S., van Veen K. Professional growth in adaptive teaching competence as a result of Lesson Study. *Teaching and Teacher Education*, 2017, vol. 68, pp. 289-303. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.09.015

23.Zhafyarov A. Z. Criteria for studying dependent and independent samples in the field of education. *Science for Education Today*, 2022, vol. 12 (3), pp. 69-91. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2203.04

24.Zhafyarov A. Zh. Refined and supplemented author's criterion for the study of dependent and independent samples in the field of experimental sciences (with the focus on education). *Science for Education Today*, 2023, vol. 13 (2), pp. 123-144. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2302.06

Submitted: 09 January 2026 Accepted: 10 March 2026 Published: 30 April 2026

2026, vol. 16, issue 2 http://en.sciforedu.ru/ ISSN 2658-6762

The authors' stated contribution:

The author's contribution to the collection of empirical material of the presented research, data processing and writing of the text of the article is full-completed.

The author reviewed the results and approved the final version of the manuscript

Information about competitive interests:

The author declares the absence of obvious and potential conflicts of interest in connection with the publication of this article

Information about the Author

Akryam Zhafyarovich Zhafyarov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Corresponding Member of the Russian Academy of Education,
Department of Geometry and Methods of Teaching Mathematics,
Novosibirsk State Pedagogical University,
28 Vilyuiskaya Str., 630126, Novosibirsk, Russian Federation.
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1339-1472
E-mail: akram39@yandex.ru